

### Ejercicios 4. Subespacios vectoriales. Operaciones con subespacios

4.1 En los siguientes apartados, estudie si es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ :

$$(a) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y + 1 \right\}, \quad (b) T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z - 2 = 0 \right\}$$

$$(c) W = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 - b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.2 Sea  $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - z = 0 \right\}$ . Determine cuál de las siguientes respuestas es una base de  $T$ :

$$(a) \mathcal{B}_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (b) \mathcal{B}_T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.3 Halle las ecuaciones paramétricas de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^3$  y la dimensión:

$$(a) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + y = 0 \right\}, \quad (b) T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}.$$

4.4 Halle una base y la dimensión del subespacio  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + t = 0 \end{array} \right\}$ .

4.5 Obtenga una base de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^4$ :

$$(a) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} z - t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z + y - t = 0 \end{array} \right\} \quad (b) T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + z - t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}.$$

4.6 Determine los valores del parámetro  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $\dim(S) = 2$ , donde

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y + t = 0 \end{array} \right\}$$

4.8 Escriba las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^3$ :

$$(a) S = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \quad (b) T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$(c) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.9 Halle las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^4$ :

$$(a) S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (b) T = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.10 Demuestre que  $S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  y  $T = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  son el mismo subespacio. Pruebe que el vector  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  no pertenece a dicho subespacio.

4.11 Sea  $\mathcal{B}_S = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  una base de un subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Halle el vector de coordenadas de  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$  respecto de la base  $\mathcal{B}_S$ .

(b) Estudie si el vector  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  pertenece al subespacio  $S$ .

4.12 Sea  $\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$  una base de un subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Determine si  $\vec{x}$  pertenece al subespacio  $S$ .

4.13 Sea  $\mathcal{B}_T = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  una base de un subespacio  $T$  de  $\mathbb{R}^4$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1  
4

4.14 Sean los subespacios de  $\mathbb{R}^3$ :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2y + 2z = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y = 0 \right\}.$$

- (a) Halle la dimensión y una base de los subespacios intersección  $S \cap T$  y  $T \cap W$ .  
 (b) Halle la dimensión y una base de los subespacio suma  $S + W$  y  $T + W$ .

4.15 En  $\mathbb{R}^3$  se consideran los subespacios  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = z \right\}$ ,  $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y = 0 \right\}$  y

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\}. \text{ Pruebe que: (a) } \mathbb{R}^3 = S + T, \quad (b) \mathbb{R}^3 = S + W,$$

(c)  $\mathbb{R}^3 = T + W$ . ¿En qué casos la suma es directa?

4.16 Sea  $S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Halle un subespacio  $Z$  tal que  $\mathbb{R}^3 = S \oplus Z$ .

4.17 Sean  $W_1$  y  $W_2$  los subespacios de  $\mathbb{R}^3$  definidos por

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\}, \quad W_2 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Obtenga un sistema de generadores y la dimensión de  $W_1 \cap W_2$  y  $W_1 + W_2$ .

4.18 Sean  $S_1 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$  y  $S_2 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ . Halle el subespacio  $S_1 + S_2$  y su dimensión.

4.19 Sean  $S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$  y  $T = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Determine si

las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Una base de  $S$  es  $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(a)  $S + T = \mathbb{R}^4$ .

4.20 Sean  $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$  y  $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$  dos subespacios de  $\mathbb{R}^3$ . Estudie si la suma de ambos subespacios es directa.

4.21 Halle un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  suplementario de  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x + y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\}$ .

4.22 Sea el subespacio  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\}$ . Halle un subespacio  $T$  tal que  $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$ . Escriba  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  como suma de un vector de  $S$  y un vector de  $T$ .

4.23 En  $\mathbb{R}^4$ , ¿es posible encontrar dos subespacios  $W_1$  y  $W_2$  tales que  $\dim(W_1) = 3$ ,  $\dim(W_2) = 2$  y  $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ ?

4.24 Sean  $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$  y  $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}$ . Determina si se cumple que  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ .

4.25 Halle una base de  $S+T$  cuyos vectores al colocarlos por filas formen una matriz escalonada reducida, donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{matrix} x = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{matrix} x = 0 \\ z + t = 0 \end{matrix} \right\}.$$

4.26 En un espacio vectorial  $V$  con  $\dim(V) = 5$  ¿es posible encontrar dos subespacios  $W_1$  y  $W_2$  tales que  $\dim(W_1) = 4$ ,  $\dim(W_2) = 2$  y  $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ ?

4.27 Sean los subespacios  $W_1$  y  $W_2$  que se dan a continuación. Halle una base de  $W_1 + W_2$ . ¿Es la suma directa? Obtenga  $\dim(W_1 \cap W_2)$ .

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x - t = 0 \end{matrix} \right\}, \quad W_2 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

4.29 Halle unas ecuaciones paramétricas e implícitas de  $W_1 \cap W_2$  y  $W_1 + W_2$ , donde

$$W_1 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.30 Sean  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : z + t = 0 \right\}$  y  $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x + t = 0 \\ y + t = 0 \end{matrix} \right\}$ . Obtenga una ecuación paramétrica del subespacio intersección  $S \cap T$ .

4.31 Sean  $S_1 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  y  $S_2 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Halle el subespacio  $S_1 + S_2$ .

4.32 Sean  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + 2t = 0 \right\}$  y  $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x + t = 0 \\ y + t = 0 \end{matrix} \right\}$ . Halle una ecuación paramétrica del subespacio intersección  $S \cap T$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70