Ejercicios 5. Otros espacios vectoriales

5.1 Estudie si $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ respecto de las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2) &= (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)\\ a\star(\alpha_1,\alpha_2) &= (a\star\alpha_1,0) \text{ con } a\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

5.2 Estudie si el conjunto de polinomios $\{x^3, x+1, x^2+1, x^2-x\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

5.3 Calcule las coordenadas de los polinomio $p(x)=-x+2$ y $q(x)=2x^2-x$ respecto de la base $\mathcal{B}=\{1, x-4x^2, 4+2x\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

5.4 Estudia si el conjunto de matrices $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\4&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\0&2\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

5.5 En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se considera $W=\{p(x)=ax^2+bx+1:\ a,b\in\mathbb{R}\}$, ¿es W un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

5.6 ¿Es $W=\{p(x)\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(x)=ax^3+b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$?

5.7 Se considera $W=\left\{\begin{pmatrix}2b & 1-a\\ a & b\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$, ¿es W un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$?

5.8 Halle una base del subespacio de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ definido por $S=\left\{\begin{pmatrix}a+2b & b+c\\ -a-b+c & 2a+3b-c\end{pmatrix} : a,b,c,\in\right.$

5.9 Dado el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ definido por

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) : a-b+c+d=0\right\}.$$

Obtener una base de W y un subespacio Z suplementario de W en $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

5.10 Sea $S=\{A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}):\ A=A^t\}$. Demuestre que S es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, halle una base de S y la dimensión de S.

5.11 Sea $S=\{y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}):\ y''(x)+\omega^2y(x)=0\}$, donde $\omega\in\mathbb{R}$. Demuestre que S es subespacio del espacio $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de las funciones con derivada segunda continua sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

5.12 La operación suma y multiplicación en $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ están definidas por:

$\mathbb{Z}_2$		
$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\mathbb{Z}_2$		
$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Se considera $\mathbb{Z}_2^n=\{(x_1,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{Z}_2\}$ con las operaciones suma y multiplicación escalar componente a componente:

$$\begin{aligned}&(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\ &a(x_1,\dots,x_n)=(ax_1,\dots,ax_n),\quad a\in\mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

Compruebe que $\mathbb{Z}_2^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$ con las operaciones dadas.

5.13 Sea el sistema de $4-$*uplas* en $\mathbb{Z}_2^4$, $S=\{1010, 0110, 1100\}$. Halle el subespacio vectorial generado por S, que denotamos por $C=\mathcal{L}(S)$. Obtenga una base de C.

5.14 En el espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^4$, halle una base del subespacio $W=\mathcal{L}(\{1001, 0111, 0110, 1000\})$.