Matemática Discreta I

Tema 1. Retículos y Álgebras de Boole

Jesús Martínez Mateo
jmartinez@fi.upm.es

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
E.T.S. Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Grado en Ingeniería Informática
Curso 2020/21

Contenidos

Conjuntos

Definiciones

- Un **conjunto** es una colección de objetos distintos, y lo notaremos por:
  - extensión: $A = \{a, b, c, \ldots\}$,
  - comprensión: $A = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } P\}$.
- Llamamos **elementos** a los objetos que componen el conjunto, y notaremos:
  - $a \in A$ para indicar que el elemento a pertenece al conjunto A,
  - $a \notin A$ para indicar que el elemento a no pertenece al conjunto A.
- El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos que posee, y lo notaremos por $card(A)$ o $|A|$.
- Llamamos **conjunto vacío** al conjunto sin elementos, y lo notamos por $\emptyset$.

Conjuntos

Sean A y B conjuntos.

Definición

Decimos que A es un **subconjunto** de B, o equivalentemente que A *está contenido* en B, y lo notaremos por $A \subseteq B$, si todos los elementos de A son también elementos de B. En caso contrario, decimos que A no es subconjunto de B, y no notamos por $A \nsubseteq B$.

Observación. Nótese que, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces se tiene que $A = B$, es decir, los conjuntos A y B contienen los mismos elementos.

Definición

Si S es un conjunto, definimos el **conjunto de las partes de** S como

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}.$$

Conjuntos

Ejemplo

El conjunto de las partes del conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto formado por los elementos:

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

La cardinalidad de ambos conjuntos es $|S| = 3$ y $|\mathcal{P}(S)| = 8$.

Observación. Nótese que, los elementos del conjunto $\mathcal{P}(S)$ son a su vez conjuntos, y tanto el conjunto vacío $\emptyset$ como el propio conjunto S son elementos del conjunto de las partes de S, es decir, $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ y $S \in \mathcal{P}(S)$.

Conjuntos

Sean A y B conjuntos, definimos:

Definiciones (Operaciones con conjuntos)

- La **unión** de A y B como el conjunto
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$
- La **intersección** de A y B como el conjunto
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$
- La **diferencia** de A y B como el conjunto
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$
- El **producto cartesiano** de A y B como el conjunto
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Conjuntos

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2\}$
- $A \setminus B = \{1, 3\}$

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. El producto cartesiano de A y B es el conjunto formado por los elementos:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Observación. Nótese que, los elementos del conjunto $A \times B$ son pares de elementos, donde el primer elemento del par pertenece al conjunto A, y el segundo elemento pertenece al conjunto B.

Conjuntos

Propiedades. Sean A, B y C conjuntos. La unión e intersección de conjuntos verifica las siguientes propiedades:

- **Asociativa**:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Conmutativa**:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

- **Distributiva**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Conjuntos

Propiedades. Sean A y B conjuntos tales que $A \subseteq B$. El conjunto diferencia $B \setminus A$ verifica las siguientes propiedades:

$$(B \setminus A) \cup A = B, \qquad (B \setminus A) \cap A = \emptyset.$$

Dados los conjuntos A y B con $A \subseteq B$, podemos definir entonces:

Definición

- El conjunto **complementario** de A en B, y lo notaremos por A^c, como
$$A^c = B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}.$$

Observación. Nótese que,

$$\emptyset^c = B, \qquad B^c = \emptyset.$$

Conjuntos

Propiedades. Sean A, B y C conjuntos. El producto cartesiano de conjuntos verifica las siguientes propiedades:

- **Asociativa**:
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$
- **Distributiva**:
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$
- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Relaciones

Definiciones

- Una **relación** R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.
- Si $R \subseteq A \times B$ y $(a, b) \in R$, decimos que "a está relacionado con b mediante R" y lo notamos por $a\ R\ b$. Si por el contrario el elemento a no está relacionado con b, es decir, $(a, b) \notin R$, lo notamos por $a \neg R\ b$.

Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos finitos no vacíos, y $R \subseteq A \times B$ una relación. Llamamos **matriz de la relación** a la matriz

$$M_R = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

donde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i\ R\ b_j \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Operaciones con relaciones

Sean R y S relaciones entre los conjuntos A y B, es decir, $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq A \times B$. Definimos:

Definiciones

- Relación **unión** $R \cup S$:

$$a\ (R \cup S)\ b \Leftrightarrow a\ R\ b \text{ o } a\ S\ b.$$

- Relación **intersección** $R \cap S$:

$$a\ (R \cap S)\ b \Leftrightarrow a\ R\ b \text{ y } a\ S\ b.$$

- Relación **complementaria** R^c:

$$a\ R^c\ b \Leftrightarrow a\ \neg R\ b.$$

Operaciones con relaciones

Definición

- Relación **inversa** R^{-1}: (Nótese que $R^{-1} \subseteq B \times A$)

$$b\ R^{-1}\ a \Leftrightarrow a\ R\ b.$$

Sean A, B y C conjuntos, R una relación entre los conjuntos A y B, es decir, $R \subseteq A \times B$, y S otra relación entre los conjuntos B y C, es decir, $S \subseteq B \times C$. Definimos:

Definición

- Relación **composición** $S \circ R$:

$$a\ (S \circ R)\ c \Leftrightarrow \exists\, b \in B \mid a\ R\ b, b\ S\ c.$$

Operaciones con relaciones

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, y $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Y las relaciones:

- $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$.
- $S = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$.
- $T = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \beta)\}$.

Entonces:

- $R \cup S = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
- $R \cap S = \{(1, b), (2, b)\}$.
- $R^c = \{(2, a), (3, a)\}$.
- $S^{-1} = \{(b, 1), (b, 2), (a, 3)\}$.
- $T \circ R = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (2, \beta), (3, \beta)\}$.

Aplicaciones

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **aplicación** f de A en B, que notaremos por $f\colon A \to B$, es una relación binaria entre los conjuntos A y B en la que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B, es decir

$$\forall a \in A, \exists!\, b \in B \mid a\ f\ b.$$

Para decir que dos elementos a y b están relacionados a través de una aplicación f utilizaremos las notaciones $(a, b) \in f$, $a\ f\ b$, o $f(a) = b$.

Definición

- El **dominio** de f es: $A = \{a \in A \mid \exists\, b \in B, f(a) = b\}$.
- La **imagen** de f es: $f(A) = \{b \in B \mid \exists\, a \in A, f(a) = b\} \subseteq B$.
- La **imagen recíproca** de un elemento $b \in B$ es: $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq A$.

Aplicaciones

Sean A y B dos conjuntos, y $f\colon A \to B$ una aplicación.

Definición

- f es **inyectiva** si y sólo si $\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
- f es **sobreyectiva** si y sólo si $\forall b \in B, \exists\, a \in A$ tal que $f(a) = b$
- f es **biyectiva** si y sólo si $\forall b \in B, \exists!\, a \in A$ tal que $f(a) = b$

Sean A, B, X, Y conjuntos, con $A, B \subseteq X$, y $f\colon X \to Y$ una aplicación.
Propiedades. Las imagen de f verifica las siguientes propiedades:

- $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, y se tiene que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si y sólo si f es inyectiva.

Aplicaciones

Sean A, B, X, Y conjuntos, con $A, B \subseteq Y$, y $f\colon X \to Y$ una aplicación.
Propiedades. Las imagen recíproca de f verifica las siguientes propiedades:

- $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Teorema

Sean A, B, X, Y conjuntos, con $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, y $f\colon X \to Y$ una aplicación.

- *$A \subseteq f^{-1}(f(A))$ y se tiene que $A = f^{-1}(f(A))$ si y sólo si f es inyectiva.*
- *$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ y se tiene que $f(f^{-1}(B)) = B$ si y sólo si f es sobreyectiva.*

Aplicaciones

Sean A, B, C, D conjuntos, con $B \subseteq C$, y $f\colon A \to B$ y $g\colon C \to D$ aplicaciones.

Definición

- La aplicación **composición** de f y g es la aplicación $(g \circ f)\colon A \to D$ tal que $\forall a \in A,\ (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- La aplicación **identidad** en un conjunto A es la aplicación $i_A\colon A \to A$ tal que $\forall a \in A,\ i_A(a) = a$.
- La aplicación **inversa** de una aplicación $f\colon A \to B$ es la aplicación $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$.

Teorema

Sean A, B dos conjuntos, y $f\colon A \to B$ una aplicación. La aplicación f tiene inversa si y sólo si f es biyectiva.

Relaciones en un conjunto

Definición

Sea A un conjunto. Decimos que R es una **relación en el conjunto** A si se tiene que $R \subseteq A \times A$.

Propiedades. Sea R una relación en un conjunto A. Se verifica entonces que:

- R es **reflexiva** si $\forall a \in A$ se tiene que $a\ R\ a$.
- R es **simétrica** si $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a\ R\ b$ entonces $b\ R\ a$.
- R es **asimétrica** si $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a\ R\ b$ entonces $b \not R\ a$.
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$ entonces $a = b$.
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c \in A$ se tiene que, si $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$ entonces $a\ R\ c$.

Relaciones en un conjunto

Sea R una relación en un conjunto. Observando la matriz M de la relación R vemos que

- R es **reflexiva** si la diagonal principal de la matriz M son todo unos, es decir
$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$
- R es **simétrica** si la matriz M coincide con su transpuesta M^t, ejemplo
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = M^t.$$
- R es **transitiva** si el producto booleano $M \cdot M \leq M$.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A$ se tiene que $a \; R \; a$.
- Simétrica: $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a \; R \; b$ entonces $b \; R \; a$.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$ se tiene que, si $a \; R \; b$, $b \; R \; c$ entonces $a \; R \; c$.

Ejemplo

En el conjunto $\mathbb{Z}$ la relación R dada por $a \; R \; b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ es una relación de equivalencia puesto que verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^2 = a^2 \Rightarrow a \; R \; a$.
- Simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a \; R \; b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b \; R \; a$.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\left.\begin{array}{c} aRb \Rightarrow a^2 = b^2 \\ bRc \Rightarrow b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow aRc.$

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia en A.

Definición

Definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$, y la notamos por $[a]$, como el conjunto de todos los elementos de A relacionados con a a través de R, es decir,

$$[a] = \{x \in A \mid x \; R \; a\}.$$

Propiedades. Las clases de equivalencia verifican las siguientes propiedades:

- $\forall a \in A$ se tiene que $[a] \neq \emptyset$.
- $\forall a, b \in A$ con $a \neq b$, $[a] = [b]$ si y sólo si $a \; R \; b$.
- $\forall a, b \in A$ con $a \neq b$, si $[a] \neq [b]$ entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una **partición** o **conjunto cociente** de un conjunto A, no vacío, es una colección de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, no vacíos, tales que

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.
- $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$.

Llamamos **bloques de la partición** a los subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Observación. Nótese que, una relación de equivalencia en un conjunto produce una partición del conjunto y, recíprocamente, una partición de un conjunto determina una relación de equivalencia en el conjunto.

Notaremos por A/R al conjunto cociente de una relación R definida en un conjunto A, es decir,

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Relaciones de orden

Definiciones

- Una relación R en un conjunto A es una **relación de orden** si verifica las propiedades:
  - Reflexiva: $\forall a \in A$ se tiene que $a\ R\ a$.
  - Antisimétrica: $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a\ R\ b$, $b\ R\ a$ entonces $a = b$.
  - Transitiva: $\forall a, b, c \in A$ se tiene que, si $a\ R\ b$, $b\ R\ c$ entonces $a\ R\ c$.
- Llamamos **conjunto ordenado** al par (A, R) formado por un conjunto A y una relación R definida en A.
- Sea (A, R) un conjunto ordenado. Decimos que dos elementos $a, b \in A$ son comparables si se tiene que $a\ R\ b$ ó $b\ R\ a$.
- Decimos que el par (A, R) es un conjunto **totalmente ordenado** si es un conjunto ordenado y todo par de elementos de A son comparables. Si (A, R) es un conjunto totalmente ordenado, decimos que R es un **orden total**, en caso contrario decimos que R es un **orden parcial**.

Relaciones de orden

Ejemplos

- $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\leq$ indica la relación menor o igual, es un conjunto totalmente ordenado. Definimos la relación $\leq$ como

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid b = a + n.$$

- $(\mathbb{N}, \mid)$, donde $\mid$ indica la relación de divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado. Definimos la relación $\mid$ como

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \mid b = an.$$

  Nótese que, $a \mid b$ significa que "a divide a b".
- $(D_n, \mid)$, donde D_n es el conjunto de los divisores positivos de n, es decir, $D_n = \{m \in \mathbb{N} : m \mid n\}$, es un conjunto parcialmente ordenado.
- Sea S un conjunto, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Relaciones de orden

Orden lexicográfico y orden producto

Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados. En el conjunto producto $A \times B$ definimos dos relaciones de orden:

Definiciones

- **Orden lexicográfico.**

$$(a, b)\ R_{Lex}\ (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq c,\ \ a\ R\ c \\ a = c,\ \ b\ S\ d \end{cases}$$

- **Orden producto.**

$$(a, b)\ R_{Prod}\ (c, d) \Leftrightarrow a\ R\ c,\ \ b\ S\ d$$

Propiedades. Si (A, R) y (B, S) son conjuntos totalmente ordenados, entonces $(A \times B, R_{Lex})$ es un conjunto totalmente ordenado, mientras que $(A \times B, R_{Prod})$ no necesariamente lo es.

Relaciones de orden

Orden lexicográfico y orden producto

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, y las relaciones de orden $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$, $S = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, de forma que (A, R) y (B, S) son conjuntos ordenados. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
R_{Lex} = \{&(1a, 1a), (1a, 1b), (1a, 2a), (1a, 2b), (1a, 3a), (1a, 3b),\\
&(1b, 1b), (1b, 2a), (1b, 2b), (1b, 3a), (1b, 3b),\\
&(2a, 2a), (2a, 2b), (2b, 2b), (3a, 3a), (3a, 3b), (3b, 3b)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{Prod} = \{&(1a, 1a), (1a, 1b), (1a, 2a), (1a, 2b), (1a, 3a), (1a, 3b),\\
&(1b, 1b), \cancel{(1b, 2a)}, (1b, 2b), \cancel{(1b, 3a)}, (1b, 3b),\\
&(2a, 2a), (2a, 2b), (2b, 2b), (3a, 3a), (3a, 3b), (3b, 3b)\}
\end{aligned}
$$

Nótese que por simplicidad escribimos $(1a, 1a) = ((1, a), (1, a))$.

Diagrama de Hasse

El diagrama de Hasse de un conjunto ordenado (A, R) con A finito es una representación gráfica de la relación R, donde cada elemento se representa por un punto en el plano. Si dos elementos $a, b \in A$ están relacionados a través de R, es decir $a\ R\ b$, entonces se dibuja a por debajo de b y se unen ambos elementos por un segmento. El diagrama no incluye los segmentos correspondientes a la propiedad transitiva, es decir, si $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$ se suprime el segmento correspondiente a $a\ R\ c$.

Ejemplo

Dibujamos el diagrama de Hasse de la relación R dada por:

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),\\ (b,b),(b,c),(b,d),(b,e),\\ (c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$

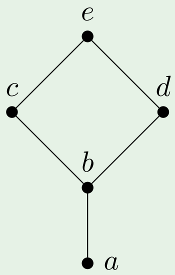
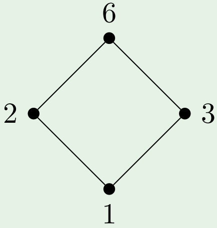


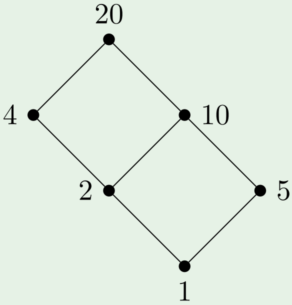
Diagrama de Hasse

Ejemplos

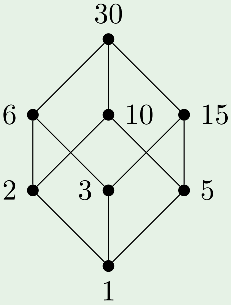
Dibujamos los diagramas de Hasse de los conjuntos ordenados $(D_6, |)$, $(D_{20}, |)$ y $(D_{30}, |)$.



$(D_6, |)$



$(D_{20}, |)$

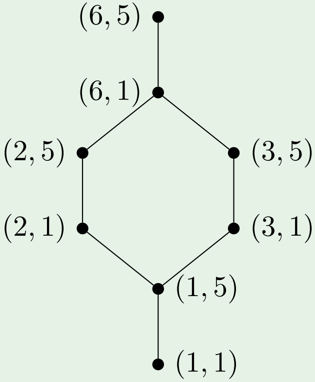


$(D_{30}, |)$

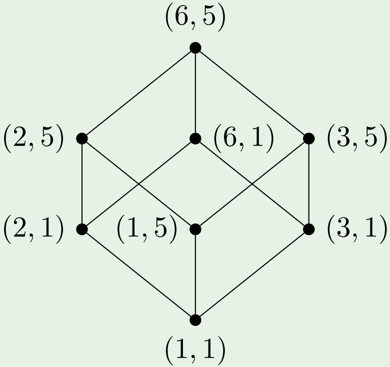
Diagramas de Hasse

Ejemplos

Sean $(D_6, |), (D_5, |)$ conjuntos ordenados. $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_5 = \{1, 5\}$, $D_6 \times D_5 = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,5), (3,1), (3,5), (6,1), (6,5)\}$, y el diagrama de Hasse de los órdenes lexicográfico y producto es:



$(D_6 \times D_5, R_{Lex})$



$(D_6 \times D_5, R_{Prod})$

Elementos característicos en conjuntos ordenados

Sea (A, R) un conjunto ordenado y S un subconjunto no vacío de A.

Definiciones

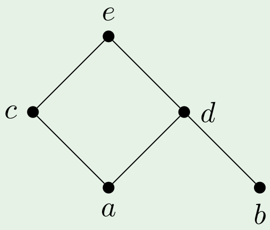
- $m \in A$ es **maximal** de A si $\nexists x \in A$ con $x \neq m$ tal que $m\, R\, x$.
- $m \in A$ es **minimal** de A si $\nexists x \in A$ con $x \neq m$ tal que $x\, R\, m$.
- $m \in A$ es **máximo** de A si $\forall x \in A$ se tiene que $x\, R\, m$.
- $m \in A$ es **mínimo** de A si $\forall x \in A$ se tiene que $m\, R\, x$.
- $c \in A$ es **cota superior** de S si $\forall x \in S$ se tiene que $x\, R\, c$.
- $c \in A$ es **cota inferior** de S si $\forall x \in S$ se tiene que $c\, R\, x$.
- $s \in A$ es **supremo** de S si s es cota superior de S y $\forall c \in A$ tal que c es cota superior de S, se tiene que $s\, R\, c$.
- $i \in A$ es **ínfimo** de S si i es cota inferior de S y $\forall c \in A$ tal que c es cota inferior de S, se tiene que $c\, R\, i$.

Existencia y unicidad de elementos característicos

Sean (A, R) un conjunto ordenado, y S un subconjunto finito, no vacío, del conjunto A. Se tiene que:

- S tiene al menos un elemento maximal y otro minimal.
- S tiene a lo sumo un elemento máximo y otro mínimo, es decir, tanto el máximo como el mínimo de S, si existen, son únicos.
- S tiene a lo sumo un elemento supremo y otro ínfimo, es decir, tanto el supremo como el ínfimo de S, si existen, son únicos.

Ejemplo



- Maximales: $\{e\}$. Minimales: $\{a, b\}$.
- Máximo: e. Mínimo: $\nexists$.

Considerando ahora el subconjunto $S = \{a, d\}$.

- Cotas superiores: $\{e, d\}$. Cotas inferiores: $\{a\}$.
- Supremo: d. Ínfimo: a.

Ordenación topológica

Teorema

Sea $(A, \leq)$ un conjunto finito ordenado. Existe un orden total $(A, <)$ que lo contiene, es decir, tal que si $a \leq b$ entonces $a < b$.

Demostración.

Sea a_1 un elemento minimal de $(A, \leq)$, y a_2 un elemento minimal de $(A \setminus \{a_1\}, \leq)$, construimos entonces el orden total $(\{a_1, a_2\}, <)$ donde los elementos se ordenan de la forma $a_1 < a_2$. Sea a_3 un elemento minimal de $(A \setminus \{a_1, a_2\}, \leq)$, ampliamos el orden total anterior y los elementos ordenados de la forma $a_1 < a_2 < a_3$. Como el conjunto A es finito, en un número finito de pasos se obtiene un orden total para los elementos de A: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. $\square$

Retículos

Primera definición de retículo

Definición

Un conjunto ordenado (A, R) es un **retículo** si todo par de elementos en A tienen supremo e ínfimo, es decir,

$$\forall a, b \in A,\ \exists \sup\{a, b\}, \text{ínf}\{a, b\} \in A$$

Propiedades. Sea (A, R) un retículo. $\forall a, b, c \in A$ se verifica que:

- $\text{ínf}\{a, b\}\ R\ a$, $b\ R \sup\{a, b\}$.
- Si $a\ R\ c$, $b\ R\ c$ entonces $\sup\{a, b\}\ R\ c$
- Si $a\ R\ b$, $c\ R\ d$ entonces $\begin{cases} \sup\{a, c\}\ R \sup\{b, d\} \\ \text{ínf}\{a, c\}\ R\ \text{ínf}\{b, d\} \end{cases}$
- $a\ R\ b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = b \Leftrightarrow \text{ínf}\{a, b\} = a$.

Retículos

Ejemplos

- $(\mathbb{N}, \leq)$ es retículo, y se tiene que

$$\sup_{\leq}\{a,b\} = \max\{a,b\} \qquad \inf_{\leq}\{a,b\} = \min\{a,b\}.$$

- $(\mathbb{N}, |)$ y $(D_n, |)$ son retículos, y se tiene que

$$\sup_{|}\{a,b\} = \mathrm{mcm}\{a,b\} \qquad \inf_{|}\{a,b\} = \mathrm{mcd}\{a,b\}.$$

- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es retículo, y se tiene que

$$\sup_{\subseteq}\{A,B\} = A \cup B \qquad \inf_{\subseteq}\{A,B\} = A \cap B.$$

Observación. Nótese que, todo conjunto totalmente ordenado es un retículo, aunque el recíproco no es cierto en general.

Definición

Un **retículo** es una terna $(A, \vee, \wedge)$ donde A es un conjunto y $\vee, \wedge$ son dos operaciones binarias definidas en A, es decir $\vee, \wedge\colon A \times A \to A$, tal que verifican las siguientes propiedades:

- Idempotente: $\forall a \in A, \quad a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$
- Conmutativa: $\forall a, b \in A, \quad a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$
- Asociativa:

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

- Absorción: $\forall a, b \in A, \quad a \vee (b \wedge a) = a, \quad a \wedge (b \vee a) = a.$

Equivalencia entre las definiciones de retículo

Teorema

Las dos definiciones de retículo son equivalentes, y la relación entre las operaciones y el orden es

$$a\ R\ b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b = a,$$

o equivalentemente $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Demostración.

Sea el conjunto ordenado (A, R) un retículo, construimos las operaciones $\vee, \wedge \colon A \times A \to A$ como $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Es inmediato comprobar que las operaciones $\vee, \wedge$ verifican las propiedades idempotente, conmutativa, asociativa y absorción, y además
$\forall a, b \in A,\ \ a\ R\ b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$

Equivalencia entre las definiciones de retículo

Demostración (continuación).
Recíprocamente, sea $(A, \vee, \wedge)$ un retículo. La relación dada por $a\ R\ b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ es una relación de orden puesto que verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A$, $a \vee a = a, a \wedge a = a \Rightarrow a\ R\ a$.
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A$,

$$\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \Rightarrow a \vee b = b,\ a \wedge b = a \\ b\ R\ a \Rightarrow b \vee a = a,\ b \wedge a = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \vee b = b \Rightarrow b \vee a = b \Rightarrow a = b \\ a \wedge b = a \Rightarrow b \wedge a = a \Rightarrow b = a \end{array}\right\}$$

- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$, $\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \Rightarrow a \vee b = b,\ a \wedge b = a \\ b\ R\ c \Rightarrow b \vee c = c,\ b \wedge c = b \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} b \vee c = c \Rightarrow (a \vee b) \vee c = c \Rightarrow a \vee (b \vee c) = c \Rightarrow a \vee c = c \\ a \wedge b = a \Rightarrow a \wedge (b \wedge c) = a \Rightarrow (a \wedge b) \wedge c = a \Rightarrow a \wedge c = a \end{array}\right\} \Rightarrow a\ R\ c$$

$\square$

Propiedades de los retículos

Definición

Un retículo es **acotado** si posee elemento máximo y mínimo. Notaremos por 1 al elemento máximo y por 0 al elemento mínimo.

Definiciones

- Sea $(A, \vee, \wedge)$ un retículo acotado. $\forall a \in A$ decimos que $a' \in A$ es el **elemento complementario** de a si $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$.
- Un retículo es **complementario** si es acotado y todos sus elementos poseen complementario.

Definición

Un retículo $(A, \vee, \wedge)$ es **distributivo** si $\forall a, b, c \in A$ se verifica que:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Propiedades de los retículos

Teorema

Todo retículo finito es acotado.

Demostración.
Sea $(A, \vee, \wedge)$ un retículo con $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ finito. Veamos primero que existe $b \in A$ tal que $a \; R \; b$, es decir, $a \vee b = b, a \wedge b = a \quad \forall a \in A$. Elegimos $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$. Por la propiedad de absorción tenemos que

$$(a_1 \vee \ldots \vee a_n) \wedge a_i = a_i \vee ((a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n) \wedge a_i) = a_i,$$

mientras que $(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) \vee a_i = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$, para todo a_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto b es máximo en $(A, \vee, \wedge)$, es decir $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n = 1$. Análogamente, veamos que $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = 0$. Por la propiedad de absorción tenemos que $(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n) \vee a_i = a_i$, mientras que $(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n) \wedge a_i = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$, para todo a_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo tanto $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ es mínimo. $\square$

Propiedades de los retículos

Ejemplos (Retículos complementarios)

- $(\mathbb{N}, |)$ no es un retículo acotado y por lo tanto tampoco es complementario.
- $(D_n, |)$ es un retículo complementario si y sólo si n es producto de números primos distintos.
- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo complementario.

Teorema

En un retículo acotado y distributivo, el complementario de un elemento, si existe, es único.

Corolario

Si en un retículo acotado un elemento tiene más de un complementario, entonces el retículo no es distributivo.

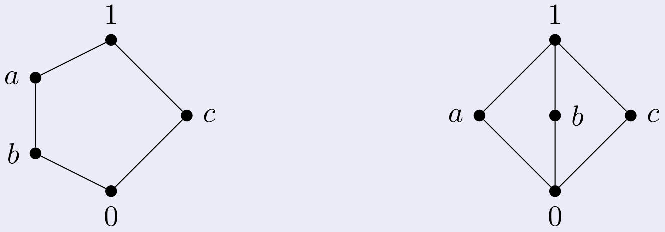
Propiedades de los retículos

Ejemplos (Retículos distributivos)

- $(D_n, |)$ es un retículo distributivo $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo distributivo.

Teorema

Un retículo es no distributivo si y sólo si tiene un subretículo isomorfo a cualquiera de los siguientes retículos:



Álgebras de Boole

Definición

Un **álgebra de Boole** es un retículo acotado complementario y distributivo.

Un álgebra de Boole es, por lo tanto, una terna $(A, \vee, \wedge)$ compuesta por un conjunto A y dos operaciones $\vee, \wedge \colon A \times A \to A$ (suma y producto) que $\forall x, y, z \in A$ verifican las siguientes propiedades:

- Idempotente: $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$.
- Conmutativa: $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$.
- Asociativa: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
- Absorción: $x \vee (y \wedge x) = x, \quad x \wedge (y \vee x) = x$.
- Existen elementos neutros $\begin{cases} \text{para la suma: } 0 & x \vee 0 = x \\ \text{para el producto: } 1 & x \wedge 1 = x \end{cases}$
- Complementario: $\forall x \in A, \exists!\, x' \in A$ tal que $x \vee x' = 1, x \wedge x' = 0$.
- Distributiva:

  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Álgebras de Boole

Ejemplos

- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un álgebra de Boole.
- El conjunto de Boole $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ con las operaciones suma y producto dadas en la siguiente tabla es un álgebra de Boole.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- Sea $\mathcal{B}^n = \{0, 1\}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathcal{B}\}$ y las operaciones:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$$

$(\mathcal{B}^n, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole.

Álgebras de Boole

Teorema

Sea $(A, \vee, \wedge)$ *un álgebra de Boole. Se verifican las siguientes propiedades:*

- *Absorción del neutro:* $1 \vee x = 1, \quad 0 \wedge x = 0$.
- *Involutiva:* $(x')' = x$.
- *Leyes de Morgan:* $(x \vee y)' = x' \wedge y', \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'$.

Demostración.

- $1 \vee x = (x \vee x') \vee x = (x \vee x) \vee x' = x \vee x' = 1.$
  $0 \wedge x = (x \wedge x') \wedge x = (x \wedge x) \wedge x' = x \wedge x' = 0.$

□

Variables y funciones booleanas

Definición

- Una **variable booleana** es una variable que representa dos posibles valores, e.g. $x \in \{0, 1\}$.
- Una **función booleana** de n variables es una aplicación $f\colon \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ tal que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}^n.$$

- Sea $f\colon \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ una función booleana. Llamamos **conjunto de verdad** de la función f al conjunto

$$S(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}^n \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}.$$

Tablas de verdad

Definición

Una **tabla de verdad** es una tabla que contiene todos los posibles valores que pueden tomar un conjunto de variables booleanas.

Podemos representar una función booleana mediante una tabla de verdad de la forma

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
0	0	$\ldots$	1	$f(0, 0, \ldots, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	$\ldots$	1	$f(0, 1, \ldots, 1)$
1	0	$\ldots$	0	$f(1, 0, \ldots, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\ldots$	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

Tablas de verdad

Ejemplo

La tabla de verdad de la función dada por el conjunto de verdad $S(f) = \{(0,0,1),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Expresiones booleanas

Definición

Definimos una **expresión booleana** (o expresión de Boole) en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma recursiva:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son expresiones de Boole.
- los símbolos 0 y 1 son expresiones de Boole.
- Si $E_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son expresiones de Boole, entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y E_1' son expresiones de Boole.
- No existen más expresiones de Boole.

Propiedad. Sea $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una expresión booleana en n variables. Existe una función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en m variables con $m \geq n$ tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Decimos entonces que $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una expresión que representa a $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Expresiones booleanas

Ejemplo

La expresión booleana $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2' \wedge x_3)$ representa a la función booleana $f(x_1, x_2, x_3)$ con la siguiente tabla de verdad

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	x_2'	$x_2' \wedge x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

Expresiones booleanas

Definiciones

- Llamamos **producto elemental** asociado a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a la expresión
$$E_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = E_{x_1} \wedge E_{x_2} \wedge \ldots \wedge E_{x_n},$$
donde $E_{x_i} = \begin{cases} x_i \text{ si } x_i = 1 \\ x_i' \text{ si } x_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$
- Decimos que una expresión E está en forma de **suma de productos elementales** cuando $E = E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_k$ donde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son productos elementales.

Propiedad. Sea $f \colon \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ una función booleana. Existe una expresión booleana $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en n variables que representa a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A partir del conjunto de verdad, $S(f)$, podemos construir una expresión $E(f)$ como suma de productos de elementales que representa a f,
$$E(f) = \vee_{x \in S(f)} E_x.$$

Expresiones booleanas

Ejemplos

1. Sea $f\colon \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$ una función booleana con conjunto de verdad $S(f) = \{(0,0),(0,1)(1,0)\}$. Una expresión booleana que representa a f es

$$E(f) = E_{(0,0)} \vee E_{(0,1)} \vee E_{(1,0)} = (x_1' \wedge x_2') \vee (x_1' \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2')$$

2. Sea $f\colon \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$ una función booleana con conjunto de verdad $S(f) = \{(0,1,1),(1,0,1)(1,1,1)\}$. Una expresión booleana que representa a f es

$$E(f) = E_{(0,1,1)} \vee E_{(1,0,1)} \vee E_{(1,1,1)} =$$
$$= (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Simplificación de expresiones booleanas

Definición

Decimos que dos expresiones booleanas son **equivalentes** si y sólo si representan la misma función booleana, y por lo tanto coinciden sus tablas de verdad.

Teorema

Sean $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una expresión booleana en n variables, y z una variable booleana. Las expresiones $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z) \vee (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z')$$

son expresiones equivalentes.

Demostración.

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z) \vee (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z')$$
$$= E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (z \vee z') = E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \square$$

Mapas de Karnaugh

- Un mapa de Karnaugh es una representación gráfica de una tabla de verdad, y por lo tanto, de una función booleana.
- Para una función booleana de n variables el mapa consta de 2^n cuadrados, y cada cuadro representa un producto elemental, es decir, un elemento $x \in \mathcal{B}^n$.
- Los productos elementales son adyacentes en el mapa si y sólo si difieren tan sólo en una variable.

Ejemplos

	y	y'
x	11	10
x'	01	00

	y	y	y'	y'
x	110	111	101	100
x'	010	011	001	000
	z'	z	z	z'

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	0	0	1	0	t'
x	0	0	1	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xy'zt' + xy'zt = xy'z(t+t') = zy'z$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	1	1	0	0	t'
x	1	1	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xyz't' + xyz't + xyzt' + xyzt =$$
$$= xyz'(t+t') + xyz(t+t') = xyz' + xyz = xy(z+z') = xy$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

A efectos de adyacencia, los lados opuestos del mapa son adyacentes.

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	0	0	0	0	t'
x	1	0	0	1	t
x'	1	0	0	1	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xyz't + x'yz't + xy'z't + x'y'z't =$$
$$= (x+x')yz't + (x+x')y'z't = yz't + y'z't = (y+y')z't = z't$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1	0	0	1	t'
x	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	1	0	0	1	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x, y, z, t) = z't'$$

	y	y	y'	y'	
x	1	1	0	0	t'
x	1	1	0	0	t
x'	1	1	0	0	t
x'	1	1	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x, y, z, t) = y$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	0	0	1	1	t'
x	0	0	1	1	t
x'	1	0	1	1	t
x'	0	0	1	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xy' + y'z + x'z't$$

Quine-McCluskey

Simplificación

Obtenemos una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

Paso 1.

0000
0100
1000
1100
1110
0111
1011
1111

Quine-McCluskey

Simplificación

Obtenemos una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

Paso 2.

*	0000		0-00
*	0100		-000
*	1000		-100
*	1100	$\Rightarrow$	1-00
*	1110		11-0
*	0111		111-
*	1011		-111
*	1111		1-11

Quine-McCluskey

Simplificación

Obtenemos una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

Paso 3.

$*$	0000		$*$	0-00		
$*$	0100		$*$	-000		
$*$	1000		$*$	-100		
$*$	1100		$*$	1-00		--00
$*$	1110	$\Rightarrow$		11-0	$\Rightarrow$	~~--00~~
$*$	0111			111-		
$*$	1011			-111		
$*$	1111			1-11		

Quine-McCluskey

Simplificación

Paso 4.

	1100	1110	0100	1111	0111	1011	1000	0000
11-0	X	X						
111-		X		X				
-111				X	X			
1-11				X		X		
--00	X		X				X	X

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= z't' + yzt + xzt + xyt' \\ &= z't' + yzt + xzt + xyz \end{aligned}$$