BLOQUE I: MATEMÁTICA DISCRETA

TEMA 1

CONJUNTOS Y FUNCIONES

RESUMEN TEÓRICO

1. CONJUNTOS Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

1.1. Conjuntos

DEFINICION 1. Un conjunto es una colección de objetos que llamamos elementos del conjunto.

NOTACIÓN:

- $x \in A$. *x* PERTENECE al conjunto *A*
- $x \notin A$. *x* NO PERTENECE al conjunto *A*

DEFINICION 2. El cardinal de un conjunto finito *A* es el número de elementos que tiene dicho conjunto. A ese número lo denotaremos por $|A|$.

Los conjuntos pueden expresarse por extensión, nombrando todos los elementos del mismo, o por comprensión, dando una propiedad o característica que sólo cumplan aquellos elementos que pertenecen al conjunto. En cualquier caso, siempre denotando los elementos o la propiedad entre llaves.

EJEMPLO 1.

1. $A = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta, blanco\}$ $\quad Negro \notin A$
2. $B = \{colores\ del\ arco\ iris\}$ $\quad Azul \in B$

DEFINICION 3. El conjunto universal $\mathcal{U}$ es aquel que comprende todos los objetos del universo de discurso. El conjunto vacío $\emptyset$ es aquel que no contiene elementos.

DEFINICION 4. Se dice que dos conjuntos *A* y *B* son iguales (*A*=*B*) si tienen los mismos elementos, esto es $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$

DEFINICION 5. Se dice que *A* es un subconjunto de *B* si todos los elementos de *A* son también elementos de *B*. Por ello, esto equivale a decir que *A* está *contenido* o *incluido* en *B* ($A \subseteq B$)

DEFINICION 6. Se dice que A es un subconjunto propio de B ($A \subset B$) si $A \subseteq B\ \ y\ \ A \neq B$.

EJEMPLO 2.

$B \subset A$ siendo:

$B = \{Colores\ del\ arco\ iris\}\ y$

$A = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta, blanco\}$

PROPIEDADES:

- $A \subseteq A, A \not\subset A$
- $Si\ A \subseteq B\ y\ B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$
- $Si\ A \subseteq B\ y\ B \subseteq A$, entonces $A = B$
- $Si\ A \subset B$, entonces $B \subsetneq A$
- $Si\ A \subseteq B\ y\ B \subset C$, entonces $A \subset C$
- $Si\ A \subset B\ y\ B \subseteq C$, entonces $A \subset C$

1.2. Diagramas de Venn

Se trata de una representación de conjuntos de forma geométrica.

EJEMPLO 3.

$c \notin A$

$b_2 \in C$

$B \subseteq A$

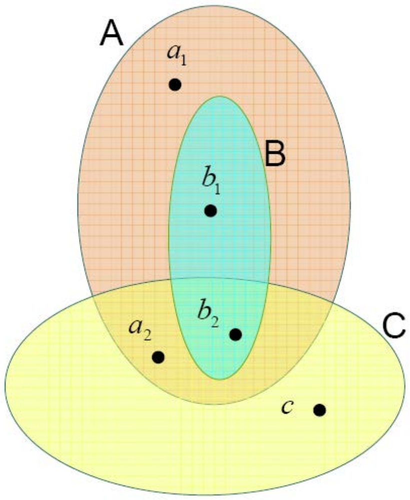
$B \subset A$

$B \not\subseteq C$

$a_1 \notin C$

$a_2 \in C$

$A \not\subseteq C$



1.3. Operaciones entre conjuntos.

DEFINICION 7. La <u>unión</u> de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto cuyos elementos están en *A*, en *B*, o en ambos, esto es:

$$A \cup B = \{x\colon\ \ x \in A\ o\ x \in B\ \}$$

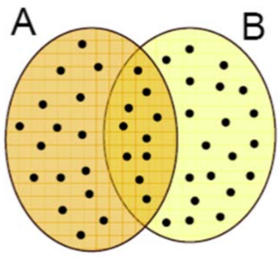
EJEMPLO 4.

$A = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta\}$

$B = \{negro, amarillo, azul, rojo, marrón\}$

$A \cup B = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta, negro, marrón\}$

EJEMPLO 5.



$A \cup B$

DEFINICION 8. La <u>intersección</u> de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto cuyos elementos están tanto en *A* como en *B*, esto es

$$A \cap B = \{x: \ x \in A \ y \ x \in B\}$$

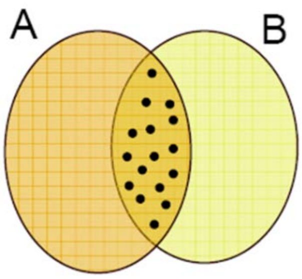
EJEMPLO 6.

$A = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta\}$

$B = \{negro, amarillo, azul, rojo, marrón\}$

$A \cap B = \{rojo, amarillo, azul\}$

EJEMPLO 7.



$A \cap B$

DEFINICION 9. La <u>diferencia</u> de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto cuyos elementos están en *A* pero no en *B*, esto es

$$A - B = \{x: \ x \in A \ y \ x \notin B\}$$

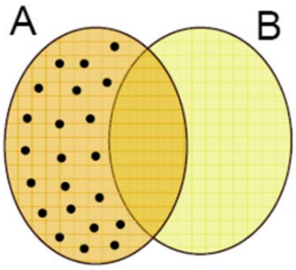
EJEMPLO 8.

$A = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta\}$

$B = \{negro, amarillo, azul, rojo, marrón\}$

$A - B = \{naranja, verde, añil, violeta\}$

EJEMPLO 9.



$A \setminus B$

DEFINICION 10. El <u>complementario</u> de un conjunto *A* es el conjunto de los elementos del universo de discurso que no están en *A*, esto es

$$A^C = \{x \in \mathcal{U}: \ x \notin A \ \}$$

EJEMPLO 10.

$\mathcal{U} = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta\}$

$A = \{amarillo, azul\}$

$A^C = \{rojo, naranja, verde, añil, violeta\}$

DEFINICION 11. La <u>diferencia simétrica</u> de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

EJEMPLO 11.

$A = \{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil, violeta\}$

$B = \{negro, amarillo, azul, rojo, marrón\}$

$A - B = \{naranja, verde, añil, violeta\}$

$B - A = \{negro, marrón\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{naranja, verde, añil, violeta, negro, marrón\}$

DEFINICION 12. Dados dos elementos *x* e *y* puede formarse el <u>par ordenado</u> (x, y), cuya primera *componente* es x y la segunda es *y.*

OBSERVACIÓN: Dados dos pares ordenados (x, y) e (x', y')se verifica que $(x, y) = (x', y')$ sí, y sólo sí $x = x' e \ y = y'$

DEFINICION 13. El <u>producto cartesiano</u> de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a *A* y la segunda componente pertenece a *B*.

$$A \times B = \{(x, y): \ x \in A, y \in B\}$$

EJEMPLO 12.

$A = \{rojo, naranja, amarillo\}$

$B = \{negro, amarillo\}$

$$A\times B=\left\{\begin{matrix}(rojo,negro);(rojo,amarillo),(naranja,negro);\\(naranja,amarillo);(amarillo,negro),(amarillo,amarillo)\end{matrix}\right\}$$

OBSERVACIÓN: El concepto de par ordenado y de producto cartesiano puede extenderse de manera natural a *n* conjuntos.

DEFINICION 14. Las tablas de pertenencia sirven para determinar la pertenencia o no de un elemento a un conjunto obtenido a partir de operaciones entre otros conjuntos. Las casillas indican la pertenencia (con un 1) o la no pertenencia (con un 0) del elemento dado al conjunto de la columna.

Las siguientes son las tablas de pertenencia de la unión, la intersección y la diferencia:

A	***B***	$\boldsymbol{A\cup B}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

A	***B***	$\boldsymbol{A\cap B}$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

A	***B***	$\boldsymbol{A-B}$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

2. LEYES ALGEBRAICAS DE BOOLE

Las operaciones entre conjuntos verifican las siguientes propiedades

PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS:

- Conmutativa: $A\cup B=B\cup A$
- Asociativa: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- Idempotencia: $A\cup A=A$
- $A\cup\emptyset=A$
- $A\cup\mathcal{U}=\mathcal{U}$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

- Conmutativa: $A\cap B=B\cap A$
- Asociativa: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- Idempotencia: $A\cap A=A$
- $A\cap\emptyset=\emptyset$
- $A\cap\mathcal{U}=A$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ABSORCIÓN:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

COMPLEMENTARIO:

- $(A^c)^c = A$
- Ley de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- Ley de Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

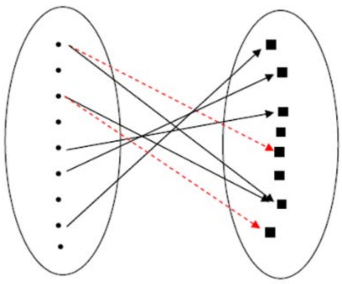
3. FUNCIONES. OPERACIONES Y PROPIEDADES.

3.1. Funciones.

DEFINICION 15. Sean dos conjuntos *A* y *B*. Una función parcial *f* de *A* en *B* es una correspondencia de *A* a *B* tal que a cualquier elemento *x* de *A* le hace corresponder a lo sumo un elemento *y* de *B*, de la forma $f(x) = y$.
Así, se dice que *y* es la imagen de *x* mediante *f*. Otro modo de expresarlo es utilizando los pares ordenados,

$$\{(x, y) \in A \times B : f(x) = y\}$$

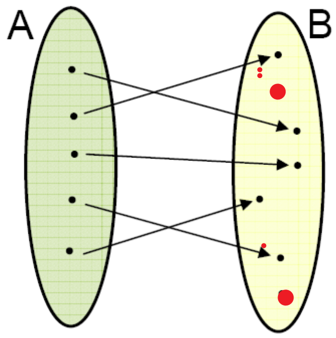
EJEMPLO 13. La siguiente correspondencia NO sería una función. Tal y como indican las flechas rojas, hay elementos del conjunto inicial a los que les corresponde más de un elemento del conjunto final.



DEFINICION 16. El dominio y el rango de la función f se definen como

$$Dom(f) = \{x \in A : f(x) \text{ está definido}\}$$
$$Ran(f) = \{f(x) \in B : x \in Dom(f)\}$$

EJEMPLO 14. En este caso, el dominio estaría formado por todos los elementos del conjunto A Los puntos del conjunto B que no tienen punta de flecha no pertenecerían al rango de *f*.



:

DEFINICION 17. Se dice que dos funciones parciales *f* y *g* definidas en los mismos conjuntos son iguales si sus dominios lo son, y si $\forall x \in Dom(f), f(x) = g(x)$

DEFINICION 18. Se llama función identidad sobre un conjunto *A* a la función id_A definida como sigue:

$$id_A \ de\ A\ en\ A \quad \text{tal que } \forall x \in A, \qquad id_A(x) = x$$

3.2. Operaciones y Propiedades.

DEFINICION 19. La restricción de una función parcial $f\ de\ A\ en\ B$ a un subconjunto $C \subseteq A$ es la función $f \upharpoonright C$ tal que $(f \upharpoonright C\,)(x) = f(x), \forall x \in C \cap Dom(f)$

DEFINICION 20. La composición de las funciones parciales $f\ de\ A\ en\ B, g\ de\ B\ en\ C$ es la función

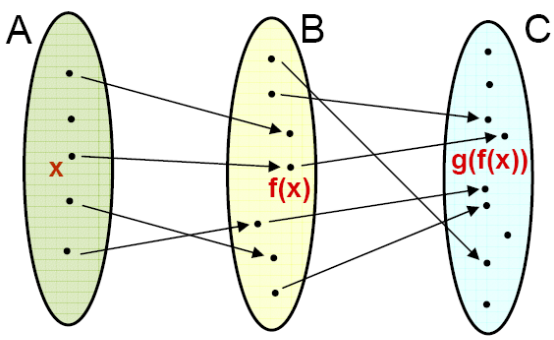
$$g \circ f\ de\ A\ en\ C, tal\ que\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{donde}$$

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f)\ tal\ que\ f(x) \in Dom(g)\}$$

$$Ran(g \circ f) = Ran(g \upharpoonright Ran(f))$$

EJEMPLO 15.



DEFINICION 21. La inversa de una función parcial $f\ de\ A\ en\ B$ es la función, si existe, $f^{-1}\ de\ B\ en\ A$ tal que $f^{-1}(y) = x\ sí, y\ sólo\ sí, f(x) = y.$

OBSERVACIÓN: Esta inversa existirá y será una función únicamente en el caso de que para cada $y \in Ran(f)$ exista un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

DEFINICION 22. Dada una función parcial $f\ de\ A\ en\ B$, se define la imagen de un conjunto $S \subseteq A$ mediante la función *f* como el conjunto:

$$f(S) = \{f(x) \in B: x \in Dom(f) \cap S\}$$

y la imagen inversa de un conjunto $T \subseteq B$ como el conjunto

$$f^{-1}(T) = \{x \in Dom(f): f(x) \in T\}$$

3.3. Clasificación de aplicaciones

DEFINICION 23. Una aplicación es inyectiva si verifica**:**

$$x_1, x_2 \in Dom(f), x_1, \neq x_2 \text{ entonces } f(x_1) \neq f(x_2)$$

OBSERVACIÓN: una función es Inyectiva sí, y sólo sí, existe su inversa

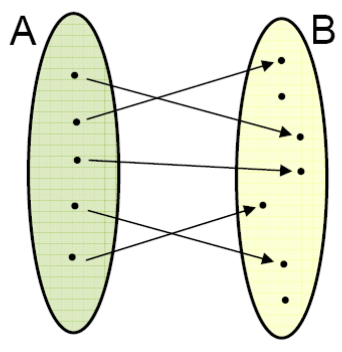
DEFINICION 24. Una aplicación es sobreyectiva **c**uando $Ran(f) = B$.

DEFINICION 25. Una aplicación es total cuando $Dom(f) = A$

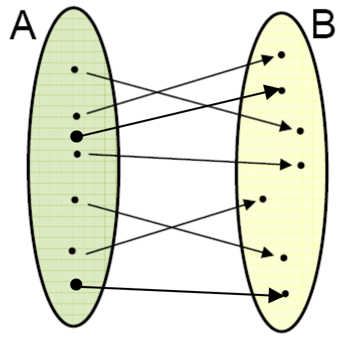
OBSERVACIÓN: la función identidad es total, y la composición de dos funciones totales es total.

DEFINICION 26. Una aplicación es biyectiva si es una función total, inyectiva y sobreyectiva.

EJEMPLO 16.



Función inyectiva, no sobreyectiva



Función inyectiva y sobreyectiva (BIYECTIVA)

NOTACIÓN: $f: A \dashrightarrow B$ indica que es una función parcial $f\ de\ A\ en\ B$, y $f: A \rightarrow B$ indica que es una función total $f\ de\ A\ en\ B$.

En lo que sigue supondremos que todas las funciones son totales, esto es que su dominio coincide con todo el conjunto de partida *A*.