BLOQUE I: MATEMÁTICA DISCRETA

TEMA 3

CONTEO

RESUMEN TEÓRICO

1. PRINCIPIOS ELEMENTALES DEL CONTEO ... 3
2. INTRODUCCIÓN A LA COMBINATORIA ... 4
3. VARIACIONES SIN REPETICIÓN ... 5
4. VARIACIONES CON REPETICIÓN ... 6
5. PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN ... 6
6. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN ... 7
7. COMBINACIONES (SIN REPETICIÓN) ... 7
8. COMBINACIONES CON REPETICIÓN ... 8

1. PRINCIPIOS ELEMENTALES DEL CONTEO

La combinatoria estudia métodos de conteo para calcular de cuántas maneras diferentes puede ocurrir un suceso. Vamos a considerar únicamente conjuntos finitos.

En primer lugar recordamos algunos principios elementales de conteo, dados por fórmulas útiles para calcular el cardinal de un conjunto (número de elementos de un conjunto) a partir de otros conjuntos mediante las operaciones de producto cartesiano o de unión.

OBERVACIÓN 1:

Cuando un suceso se descompone en elementos independientes, se aplica la <u>regla del producto,</u> según la cual el cardinal de un producto cartesiano es igual al producto de los cardinales:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

OBERVACIÓN 2:

Cuando las posibilidades de un suceso se separan en casos distintos que no se solapan y que se cuentan por separado, se aplica la <u>regla de la suma,</u> según la cual el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos es igual a la suma de cardinales:

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$

OBERVACIÓN 3:

Cuando las posibilidades de un suceso se separan en casos en los que los conjuntos no son disjuntos, se aplica el <u>principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos,</u> según la cual el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos es igual a la suma de cardinales al que se resta el cardinal de la intersección (para no contar estos casos dos veces):

Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

El principio de inclusión-exclusión puede generalizarse a un número finito de conjuntos, para el caso habitual de tres conjuntos se tiene:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Para cuatro conjuntos:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$

$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| +$$

$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| -$$

$$-|A \cap B \cap C \cap D|$$

Y así sucesivamente

EJEMPLO 1. Supongamos que 14 estudiantes sacan un sobresaliente en el primer examen de matemática discreta y que 18 estudiantes sacan un sobresaliente en el segundo examen. Si un total de 22 alumnos sacaron un sobresaliente en alguno de los dos exámenes, ¿Cuántos sacaron sobresaliente en ambos exámenes?

Si A es el conjunto de estudiantes que sacaron sobresaliente en el primer examen y B el conjunto de estudiantes que sacaron sobresaliente en el segundo examen se tiene que:

$$|A| = 14$$

$$|A| = 18$$

$$|A \cup B| = 22$$

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Por tanto, el número de alumnos que han tenido sobresaliente en ambos exámenes es:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14 + 18 - 22 = 10$$

2. INTRODUCCIÓN A LA COMBINATORIA

Veamos en los siguientes epígrafes los diferentes conjuntos que pueden formarse con los elementos que componen un conjunto dado denominado <u>Conjunto Base.</u> Se emplearán los siguientes criterios para diferenciar conjuntos

- *Tamaño*: Dos subconjuntos son distintos si tienen distinto número de elementos.

- *Elementos*: Dos subconjuntos son distintos si tienen algún elemento no común.

- *Orden*: Dos subconjuntos son distintos si los elementos están dispuestos en distinto orden.

Por extensión se denominará base al número de elementos que componen el Conjunto Base, y orden al número de elementos que contiene los subconjuntos que formemos a partir de él. Por ejemplo, dado el conjunto Base de n elementos $\{A_1, A_2, A_3, \ldots.., A_n\}$ el subconjunto $\{A_2, A_3, A_1\}$ sería de Orden 3.

¿Cuántos subconjuntos diferentes de un orden dado $k \leq n$ se podemos formar con los elementos de un conjunto base con *n* elementos?

Estudiaremos las respuestas a la cuestión planteada atendiendo tanto a la diferenciación entre conjuntos como a la composición de los mismos.

3. VARIACIONES SIN REPETICIÓN

EJEMPLO 2. ¿De cuántas formas pueden repartirse los premios de una competición de atletismo en la que intervienen 5 corredores?

Contamos con un conjunto base de 5 elementos, los participantes en la competición. Si se reparten tres premios, Oro, Plata y Bronce, tendremos que formar grupos de tres competidores. Estos grupos se diferenciarán tanto por los individuos que resultan premiados, como por el orden en que se reciben estos premios, puesto que no es lo mismo que Luis gane el Oro, Pedro la Plata y Antonio el Bronce, que Luis gane el Bronce, Pedro el Oro y Antonio la Plata. Además, ningún participante puede obtener dos premios por lo que no puede haber elementos repetidos en los conjuntos que formemos.

DEFINICION 1. Se denomina variaciones sin repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*, (n≤k), y se notaran por $V_{n,k}$ al número de grupos de tamaño *k* que se pueden formar a partir de un conjunto base de *n* elementos de modo que no se puede repetir ningún elemento en cada grupo y éstos se diferencian bien por los elementos, bien por el orden en que se disponen.

Se verifica:

$$V_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

siendo $n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

EJEMPLO 3. En el ejemplo anterior en cuanto al reparto de los premios, la expresión que habría que evaluar es:

$V_{5,3}=5\cdot 4\cdot 3=60$

4. VARIACIONES CON REPETICIÓN

EJEMPLO 4. ¿cuántos son los posibles resultados de una quiniela?

Contamos con un conjunto base de 3 elementos, los posibles resultados en cada partido,$\{1, x, 2\}$. En el Boleto se contemplan 15 partidos, por tanto cada resultado de una quiniela es un grupo que consta de 15 elementos. Dos quinielas se diferencian por los resultados y por el orden en que aparecen, admitiendo que cada resultado pueda aparecer hasta quince veces.

DEFINICION 2. Se denomina variaciones con repetición de *n* elementos tomados de *k* en *k*, (n≤k), y se notaran por $VR_{n,k}$ al número de grupos de tamaño k que se pueden formar a partir de un conjunto base de n elementos de modo que cada elemento del grupo puede aparecer hasta k veces, y éstos se diferencian bien por los elementos, bien por el orden en que se disponen.

Se verifica:

$$VR_{n,k} = n^k$$

NOTA:

al admitirse la repetición el tamaño de los grupos puede ser superior, igual o inferior al del conjunto base

EJEMPLO 5. Siguiendo con el ejemplo anterior el número de quinielas se calcularía como:

$$VR_{3,\,15} = 3^{15} = 14.348.907$$

5. PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

EJEMPLO 6. ¿De cuántas formas pueden llegar colocados los cinco atletas del Ejemplo 1?

El problema que se plantea es un caso de variaciones sin repetición con la particularidad de que el número de elementos en los conjuntos que se desean formar coincide con los del conjunto base

DEFINICION 3. Se denominan permutaciones de orden n, y se notarán por P_n, al número de grupos de tamaño n que se pueden formar a partir de un conjunto base de n elementos sin que ningún elemento esté repetido, de modo que los grupos se diferencian por el orden en que éstos se disponen

Se verifica

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

EJEMPLO 7. Los cinco atletas del Ejemplo 1 pueden llegar colocados de $P_5 = 5! = 120$ *m*aneras diferentes

6. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

EJEMPLO 8. ¿De cuántas formas pueden ordenarse los manuales de una estantería que contiene 4 ejemplares de un manual 3 ejemplares de un segundo y 5 ejemplares de un tercero?

Podemos partir de un conjunto base de 3 elementos, los tres manuales distintos. Se trata de formar grupos de doce elementos, en los que se admite la repetición estando limitados a 4, 3 y 5 el número de veces que pueden repetirse cada uno de ellos.

DEFINICION 4. Se denominan permutaciones con repetición de n elementos de ordenes k_1, k_2, ..., k_r y se notarán por $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r}$, al número de grupos de tamaño n que se pueden formar a partir de un conjunto base de r elementos distintos, de modo que el elemento i-ésimo puede aparecer repetido k_i veces, (con $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$) de modo que los grupos se diferencian por el orden en que se presentan los elementos

Se verifica

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

EJEMPLO 9. En el ejemplo anterior los manuales pueden ordenarse de $P_{12}^{3,4,5} = \frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = 27.720$ formas diferentes.

7. COMBINACIONES (SIN REPETICIÓN)

EJEMPLO 10. ¿De cuántas formas se pueden escoger 3 representantes en un grupo de 10 personas?

Se trata de formar grupos de tamaño 3 a partir de un conjunto base de tamaño 10. Si suponemos que los tres representantes tienen idénticas funciones no será relevante el orden en que se eligen sino quienes son los escogidos.

DEFINICION 5. Se denominan combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, (n≤k), y se notarán por $CR_{n,k}$ al número de grupos de tamaño k que se pueden formar a partir de un conjunto base de n elementos de modo que no se puede repetir ningún elemento en cada grupo y éstos se diferencian únicamente por los elementos que se integran en cada grupo.

Se verifica

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

EJEMPLO 11. En el ejemplo anterior Se pueden escoger $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$ grupos distintos de 3 representantes en un conjunto de 10 personas

8. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

EJEMPLO 12. ¿ De cuántas formas pueden elegirse simultáneamente tres bolas de una urna en la que hay al menos tres bolas blancas y tres negras indistinguibles?

Se trata de formar grupos de tamaño 3 a partir de un conjunto base en el que hay elementos repetidos de dos clases diferentes..

DEFINICION 6. Se denominan <u>combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k,</u> (n≤k), y se notarán por $CR_{n,k}$ al número de grupos de tamaño k que se pueden formar a partir de un conjunto base en el que hay n elementos diferentes con repeticiones eventuales de alguno de ellos

Se verifica

$$CR_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$$

EJEMPLO 13. En el ejemplo anterior existen $CR_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{4}{3} = 4$ formas diferentes de elegir las bolas