ANÁLISIS I 2020-21, 25 DE ENERO

1. (1p) Demostrar la siguiente desigualdad:
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

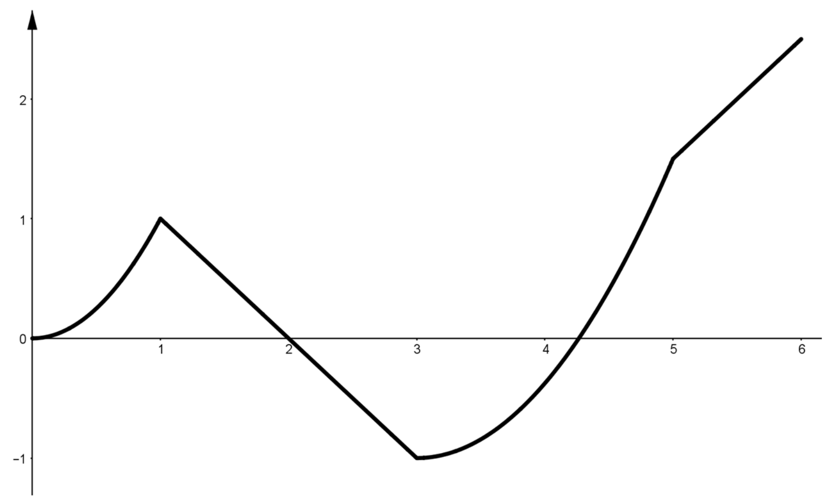
2. (1.5p) Estudia la convergencia de la siguiente sucesión:
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

3. (1.5p) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en el intervalo $[1,9]$, tal que $f(9) = 0$ y $f'(x) \geq 8 \ \ \forall x \in (1,9)$. Halla el valor máximo que puede alcanzar $f(1)$.

4. (1.5p) Demostrar la siguiente desigualdad:
$$\ln y - \ln x \leq 3(y - x) \quad \forall\, x, y \colon \frac{1}{3} \leq x \leq y \leq 3$$

5. (1.5p) Derivar la siguiente función:
$$F(x) = \int_x^{x^2} \cos t \, dt$$

6. (1.5p) Sea $y = \int_0^x f(t)dt$, siendo f una función definida a trozos, a partir de la gráfica de y, estudia el signo y la monotonía de f.



7. (1.5p) Sea f una función tal que $f = f''$ y $f(0) = f'(0) = 0$, demostrar que $f(x) = 0 \ \forall x$.