

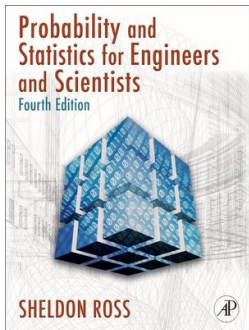
Probabilidad

Estadística, Grado en Sistemas de Información

Constantino Antonio García Martínez

Universidad San Pablo Ceu

1. Definición de probabilidad
2. Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables
 - Análisis combinatorio
 - Ejercicios
3. Simulaciones
4. Probabilidad condicionada
5. Independencia de sucesos



S. Ross. Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Chapter 3.



C.D. Barr, D.M. Diez, M. Çetinkaya-Rundel. OpenIntro Statistics. Chapter 2.

Definición de probabilidad

- La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos → **experimentos aleatorios**.
- Todos tenemos un concepto intuitivo de probabilidad...

Ejemplo: Probabilidad

- La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos → **experimentos aleatorios**.
- Todos tenemos un concepto intuitivo de probabilidad...

Ejemplo: Probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 cuando tiramos un dado?

- La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos → **experimentos aleatorios**.
- Todos tenemos un concepto intuitivo de probabilidad...

Ejemplo: Probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 cuando tiramos un dado?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 o un 3 en la siguiente tirada?

- La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos → **experimentos aleatorios**.
- Todos tenemos un concepto intuitivo de probabilidad...

Ejemplo: Probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 cuando tiramos un dado?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 o un 3 en la siguiente tirada?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1, 2, 3, 4, 5, 6 en la siguiente tirada?

- La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos → **experimentos aleatorios**.
- Todos tenemos un concepto intuitivo de probabilidad...

Ejemplo: Probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 cuando tiramos un dado?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 o un 3 en la siguiente tirada?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1, 2, 3, 4, 5, 6 en la siguiente tirada?
- ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un 1?

Llamamos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo: Espacio muestral

- Lanzamiento de un dado de 6 caras:

Llamamos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo: Espacio muestral

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras:

Llamamos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo: Espacio muestral

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras: $\Omega = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto:

Llamamos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo: Espacio muestral

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras: $\Omega = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto:
 $\Omega = \{\text{Masculino}, \text{Femenino}\}$.
- En una carrera entre 3 galgos:

Llamamos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo: Espacio muestral

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras: $\Omega = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto:
 $\Omega = \{\text{Masculino}, \text{Femenino}\}$.
- En una carrera entre 3 galgos:
 $\Omega = \{\text{Todos los ordenamientos posibles de } (1, 2, 3)\}$.
- El tiempo hasta el siguiente fallo de un componente mecánico:

Llamamos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo: Espacio muestral

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras: $\Omega = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto:
 $\Omega = \{\text{Masculino}, \text{Femenino}\}$.
- En una carrera entre 3 galgos:
 $\Omega = \{\text{Todos los ordenamientos posibles de } (1, 2, 3)\}$.
- El tiempo hasta el siguiente fallo de un componente mecánico:
 $\Omega = (0, \infty)$.

Llamamos **evento** a cualquier subconjunto de Ω .

Ejemplo: Ejemplos de posibles eventos

- Lanzamiento de un dado de 6 caras:

Llamamos **evento** a cualquier subconjunto de Ω .

Ejemplo: Ejemplos de posibles eventos

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$.
- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:

Llamamos **evento** a cualquier subconjunto de Ω .

Ejemplo: Ejemplos de posibles eventos

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$.
- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
 $A = \{\text{Sacar un 1 en el primer lanzamiento}\} = \{1\} \times S$,
 $B = \{\text{Sacar un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{2\} \times S$,
 $A \cup B = \{\text{Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{1, 2\} \times S$,
 $A \cap B = \{\text{Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento}\} = \emptyset$. Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**.
- Determinación del sexo de un feto:

Llamamos **evento** a cualquier subconjunto de Ω .

Ejemplo: Ejemplos de posibles eventos

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$.
- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
 $A = \{\text{Sacar un 1 en el primer lanzamiento}\} = \{1\} \times S$,
 $B = \{\text{Sacar un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{2\} \times S$,
 $A \cup B = \{\text{Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{1, 2\} \times S$,
 $A \cap B = \{\text{Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento}\} = \emptyset$. Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**.
- Determinación del sexo de un feto:
 $M = \{\text{Masculino}\}$, $F = \{\text{Femenino}\}$, $M \cup F = \Omega$
- En una carrera entre 3 galgos:

Llamamos **evento** a cualquier subconjunto de Ω .

Ejemplo: Ejemplos de posibles eventos

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$.
- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
 $A = \{\text{Sacar un 1 en el primer lanzamiento}\} = \{1\} \times S$,
 $B = \{\text{Sacar un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{2\} \times S$,
 $A \cup B = \{\text{Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{1, 2\} \times S$,
 $A \cap B = \{\text{Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento}\} = \emptyset$. Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**.
- Determinación del sexo de un feto:
 $M = \{\text{Masculino}\}$, $F = \{\text{Femenino}\}$, $M \cup F = \Omega$
- En una carrera entre 3 galgos:
 $A = \{\text{Todos los resultados que comiencen por 1}\}$,
 $A^c = \{\text{Todos los resultados que no comiencen por 1}\}$. Llamamos a A^c el **complemento** de A .
- Tiempo hasta el siguiente fallo:

Llamamos **evento** a cualquier subconjunto de Ω .

Ejemplo: Ejemplos de posibles eventos

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$.
- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
 $A = \{\text{Sacar un 1 en el primer lanzamiento}\} = \{1\} \times S$,
 $B = \{\text{Sacar un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{2\} \times S$,
 $A \cup B = \{\text{Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento}\} = \{1, 2\} \times S$,
 $A \cap B = \{\text{Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento}\} = \emptyset$. Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**.
- Determinación del sexo de un feto:
 $M = \{\text{Masculino}\}$, $F = \{\text{Femenino}\}$, $M \cup F = \Omega$
- En una carrera entre 3 galgos:
 $A = \{\text{Todos los resultados que comiencen por 1}\}$,
 $A^c = \{\text{Todos los resultados que no comiencen por 1}\}$. Llamamos a A^c el **complemento** de A .
- Tiempo hasta el siguiente fallo: $A = (0, 5)$, $B = (2, 10)$, $A \cap B = (2, 5)$.

- Decimos que A implica a B si $A \subseteq B$.
- Si $A \subset B$ y $B \subset A \rightarrow A = B$
- Leyes conmutativas:

$$E \cup F = F \cup E \quad E \cap F = F \cap E.$$

- Leyes asociativas :

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

- Leyes distributivas:

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$

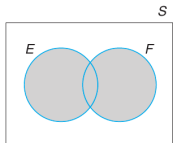
$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

- Leyes de Morgan:

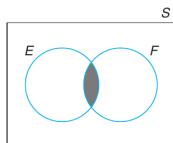
$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$$

$$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$$

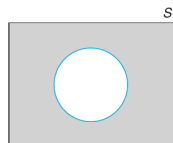
Diagramas de Venn



(a) Shaded region: $E \cup F$



(b) Shaded region: EF

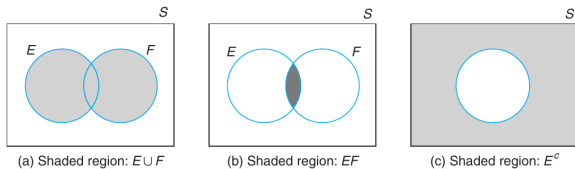


(c) Shaded region: E^c

Ejercicio: Diagramas de Venn

Prueba la primera ley distributiva usando los diagramas de Venn.

Diagramas de Venn

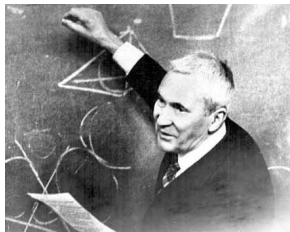


Ejercicio: Diagramas de Venn

Prueba la primera ley distributiva usando los diagramas de Venn.

Ejercicio: Diagramas de Venn

Prueba la primera ley de Morgan usando diagramas de Venn.



Axiomas de Kolmogorov.

Para cualquier evento E del espacio Ω se verifica:

1. $P(E) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Para cualquier secuencia de sucesos mutuamente exclusivos E_1, E_2, \dots (esto es, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

1. Si $E_1 \subset E_2$ entonces $P(E_1) \leq P(E_2)$ y $P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1)$.
2. Para todo evento E , $0 \leq P(E) \leq 1$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. $P(E^c) = 1 - P(E)$.
5. Fórmulas de inclusión-exclusión:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-2} S_{n-1} + (-1)^{n-1} S_n,$$

$$\text{con } S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cdots \cap E_{i_k})$$

$$5.1 \quad P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$5.2 \quad P(E \cup F \cup G) = \\ P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$

Ejercicio: Teoremas de la probabilidad

Demostrar los anteriores teoremas de la probabilidad (Del 5, solo el 5.1).

Ejercicio: Aplicación de la probabilidad

El 28 % de los hombres que viven en Springfield fuma cigarrillos, el 6 % fuma puros y el 3 % fuma tanto cigarrillos como puros. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no fume? Si definimos la **cuota a favor** de un evento E como $P(E)/P(E^c)$, ¿Cuál es la cuota de que una persona no fume?

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Espacios con resultados equiprobables

Si un espacio muestral Ω consta de un número finito de resultados e_1, e_2, \dots, e_n , entonces:

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1,$$

donde $E_i = \{e_i\}$ son eventos elementales. Si suponemos que cada los eventos elementales son equiprobables, deducimos que

$$P(E_i) = \frac{1}{n}.$$



Regla de Laplace:

Si un evento cualquiera E consta de h eventos sencillos:

$$P(E) = \frac{h}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ de casos totales}}.$$

Ejercicio: Regla de Laplace

Lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de un 2 o un 3? Formaliza tu razonamiento y usa la regla de Laplace.

En algunos casos es posible la enumeración directa de los casos favorables para obtener las probabilidades, sin embargo, no siempre es posible...

Ejemplo: Regla de Laplace

¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano de tres espadas y dos copas de una baraja española?

Ejercicio: Regla de Laplace

Lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de un 2 o un 3? Formaliza tu razonamiento y usa la regla de Laplace.

En algunos casos es posible la enumeración directa de los casos favorables para obtener las probabilidades, sin embargo, no siempre es posible...

Ejemplo: Regla de Laplace

¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano de tres espadas y dos copas de una baraja española? Es decir, hay que contar el número de maneras distintas que hay de obtener tres espadas y dos copas...

Necesitamos desarrollar una *manera sofisticada de contar* → **análisis combinatorio**

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Análisis combinatorio

El primer método para contar consiste en establecer una **correspondencia biyectiva** entre el conjunto que se desea contar y un conjunto con n elementos.

Ejemplo: Aplicaciones biyectivas

¿Cuántos múltiplos de 7 hay entre 39 y 292?

El primer método para contar consiste en establecer una **correspondencia biyectiva** entre el conjunto que se desea contar y un conjunto con n elementos.

Ejemplo: Aplicaciones biyectivas

¿Cuántos múltiplos de 7 hay entre 39 y 292? Considera la correspondencia

$$i \leftrightarrow 7(5 + i).$$

Desde el $42 = 7(5 + 1)$ hasta el $287 = 7(5 + 36)$ hay 36 múltiplos de 7.

Ejemplo: Método constructivo

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras *A, E, I, L, M, N, P*, de forma que haya una vocal en la primera posición?

Ejemplo: Método constructivo

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras *A, E, I, L, M, N, P*, de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

— — — — —

Ejemplo: Método constructivo

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E, I, L, M, N, P , de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

— — — — —

La primera posición tiene que ser una vocal, por lo que hay 3 posibles elecciones (A, E, I):

$\underbrace{\quad}$ — — — — —
3

Ejemplo: Método constructivo

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E, I, L, M, N, P , de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

— — — — —

La primera posición tiene que ser una vocal, por lo que hay 3 posibles elecciones (A, E, I):

$\underbrace{\quad\quad\quad}_3$ — — — — —

La segunda letra puede ser cualquiera, siempre que sea distinta a la primera. Esto nos deja 6 posibles opciones.

$\underbrace{\quad\quad\quad}_3$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_6$ — — — — —

Ejemplo: Método constructivo

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E, I, L, M, N, P , de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

— — — — —

La primera posición tiene que ser una vocal, por lo que hay 3 posibles elecciones (A, E, I):

$\underbrace{\quad\quad\quad}_3$ — — — — —

La segunda letra puede ser cualquiera, siempre que sea distinta a la primera. Esto nos deja 6 posibles opciones.

$\underbrace{\quad\quad\quad}_3$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_6$ — — — — —

Procediendo de forma similar:

$\underbrace{\quad\quad\quad}_3$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_6$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_5$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_4$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_3$,

por lo que hay $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$ palabras distintas.

El resultado de la transparencia anterior obedece al siguiente principio:

Principio fundamental del conteo (principio de multiplicación)

Sean E_1, E_2, \dots, E_n conjuntos finitos no vacíos. Entonces:

$$|E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n| = |E_1| |E_2| \dots |E_n|$$

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo.*

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo.*

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

$$\underbrace{\quad}_5 \underbrace{\quad}_4 \underbrace{\quad}_3 \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_1,$$

y por tanto, el número de ordenaciones distintas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo.*

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

$$\underbrace{\quad}_5 \underbrace{\quad}_4 \underbrace{\quad}_3 \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_1,$$

y por tanto, el número de ordenaciones distintas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Este patrón es tan habitual que se ha definido una notación especial:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Donde $n!$ se lee **factorial de n**. Por convenio se asume que $0! = 1$.

Permutaciones

n objetos pueden ordenarse en fila de $n!$ maneras distintas.

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo.*

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?



y por tanto, el número de ordenaciones distintas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Este patrón es tan habitual que se ha definido una notación especial:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Donde $n!$ se lee **factorial de n**. Por convenio se asume que $0! = 1$.

Permutaciones

n objetos pueden ordenarse en fila de $n!$ maneras distintas. Llamamos a este patrón **permutación**, ya que una permutación es la variación de la posición de los elementos de un conjunto.

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cañas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las bebidas?

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cañas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las bebidas? Si los cafés y cervezas fueran todos distintos (distintas marcas o tipos), habría $5! = 120$ formas distintas de repartirse las bebidas. En este supuesto, una posible repartición sería:

$$\underline{C_1} \quad \underline{C_2} \quad \underline{C_3} \quad \underline{P_1} \quad \underline{P_2} ,$$

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cañas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las bebidas? Si los cafés y cervezas fueran todos distintos (distintas marcas o tipos), habría $5! = 120$ formas distintas de repartirse las bebidas. En este supuesto, una posible repartición sería:

$$\underline{C_1} \quad \underline{C_2} \quad \underline{C_3} \quad \underline{P_1} \quad \underline{P_2} ,$$

Ahora bien, en este ejemplo los cafés son idénticos por lo que, tras efectuarse el reparto, los tres cafés pueden permutarse entre sí, sin alterar el resultado. Por tanto, $C_1 C_2 C_3 P_1 P_2$, $C_1 C_3 C_2 P_1 P_2$, $C_2 C_1 C_3 P_1 P_2$, $C_2 C_3 C_1 P_1 P_2$, $C_3 C_1 C_2 P_1 P_2$, $C_3 C_2 C_1 P_1 P_2$ son indistinguibles y deberían contarse como un solo caso.

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cañas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las bebidas? Si los cafés y cervezas fueran todos distintos (distintas marcas o tipos), habría $5! = 120$ formas distintas de repartirse las bebidas. En este supuesto, una posible repartición sería:

$$\underline{C_1} \quad \underline{C_2} \quad \underline{C_3} \quad \underline{P_1} \quad \underline{P_2} ,$$

Ahora bien, en este ejemplo los cafés son idénticos por lo que, tras efectuarse el reparto, los tres cafés pueden permutarse entre sí, sin alterar el resultado. Por tanto, $C_1 C_2 C_3 P_1 P_2$, $C_1 C_3 C_2 P_1 P_2$, $C_2 C_1 C_3 P_1 P_2$, $C_2 C_3 C_1 P_1 P_2$, $C_3 C_1 C_2 P_1 P_2$, $C_3 C_2 C_1 P_1 P_2$ son indistinguibles y deberían contarse como un solo caso.

Así pues, los 120 casos iniciales los podemos agrupar en grupos de $3! = 6$ que no presentan diferencias apreciables, quedando $120/6 = 20$ casos. Razonando de forma análoga con la cerveza, quedarían finalmente

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ casos.}$$

Permutaciones con repetición

Una colección de n objetos clasificados en k clases de objetos idénticos entre sí, el primero con n_1 objetos, el segundo con n_2 , ... se puede ordenar en fila de

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

formas distintas.

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas puede acabar el podio de una carrera en la que compiten 10 atletas?

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas puede acabar el podio de una carrera en la que compiten 10 atletas? Usando el método constructivo obtenemos

$$\underbrace{\text{Oro}}_{10} \quad \underbrace{\text{Plata}}_{9} \quad \underbrace{\text{Bronce}}_{8} .$$

Variaciones

Supón que tenemos n objetos diferentes y queremos ordenar r de estos en línea. El número de arreglos diferentes es

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Nos referimos a esta expresión como el **número de variaciones de n objetos tomados de r en r** .

Ejemplo: Variaciones con repetición

¿Cuántas cadenas de 5 bits existen?

Ejemplo: Variaciones con repetición

¿Cuántas cadenas de 5 bits existen?

Usando el método constructivo obtenemos

$$\underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_2,$$

por lo que existen 2^5 cadenas distintas.

Variaciones con repetición

El número de variaciones con repetición de r elementos tomados entre n es de n^r .

Ejemplo: Grupos de 3 letras

¿Cuántos grupos de 3 letras (sin importar el orden) pueden formarse a partir de *A, B, C, D, E*?

Ejemplo: Grupos de 3 letras

¿Cuántos grupos de 3 letras (sin importar el orden) pueden formarse a partir de A, B, C, D, E ?

Hay 5 formas de seleccionar el primer ítem, 4 de seleccionar el segundo y 3 de seleccionar el tercero. Por tanto, hay

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

formas de seleccionar un grupo de 3 en la que el orden sí importa. En este ejemplo, cada grupo concreto de 3 letras, por ejemplo, $A B C$ será contado 6 veces (todas las permutaciones): $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$. Dado que para nosotros este debería ser un solo caso, dividimos $5 \cdot 4 \cdot 3$ entre 6:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Combinaciones

El número de subconjuntos distintos con r elementos que pueden extraerse de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

donde $\binom{n}{r}$ recibe el nombre de **número combinatorio**. Los subconjuntos de tamaño r de un conjunto de n elementos suelen llamarse **combinaciones de r elementos tomados entre n** .

Ejemplo: Repartos

¿Cuántas formas hay de repartir 8 caramelos iguales entre tres niños?

Ejemplo: Repartos

¿Cuántas formas hay de repartir 8 caramelos iguales entre tres niños? Podemos razonar pensando en que hay que repartir 8 bolas idénticas en 3 urnas. Las 3 urnas pueden representarse con 4 barras, y las bolas, con círculos. Por ejemplo:



Necesitamos 4 | y 8 ○ para representar la distribución. Sin embargo, la barra del principio y la del final están fijas. Los restantes $8 + 4 - 2 = 10$ símbolos se pueden elegir en orden arbitrario. Hay por tanto

$$\binom{10}{8} = 45 \text{ repartos posibles.}$$

Repartos
Existen

$$\binom{n+r-1}{r}$$

formas distintas de repartir r objetos iguales en n grupos.

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Ejercicios

Ejercicio:

¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano de tres espadas y dos copas de una baraja española?

Ejercicio:

La combinación de una caja fuerte consiste en 5 cifras distintas ¿Cuántas combinaciones tendrás que probar como máximo para abrirla? ¿Y si cada cifra sólo tuviese que ser distinta de la anterior? ¿Y si pudieses repetir cualquier cifra?

Ejercicio:

El próximo Enero vas a visitar las ciudades A , B , C , D . Si cada visita requiere un día ¿De cuántas formas distintas puedes programar tus viajes?

Ejercicio:

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en 6 butacas consecutivas tres chicas y tres chicos, de forma que no haya dos chicas ni dos chicos consecutivos?

Ejercicio:

¿Cuántas palabras distintas de 8 letras pueden formarse con a, a, a, b, b, c, c, d ?

Ejercicio:

Un comité de tamaño 5 se selecciona al azar entre un grupo de 6 hombres y 9 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité consista en 3 hombres y 2 mujeres?

Ejercicio:

Si se lanzan r dados iguales, ¿Cuántos resultados diferentes son posibles?

Ejercicio:

Durante el mes de Enero, deseas viajar a las ciudades A, B, C, D en este orden. ¿Cuántas formas distintas de viajar tienes?

Ejercicio:

En un lanzamiento de dos dados. ¿De cuantas formas se puede obtener un 7 o un 8?

Ejercicio:

Dos bolas se sacan al azar de una urna que contiene 6 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las bolas sea blanca y la otra negra?

Ejercicio:

¿Cuántos múltiplos de 6 hay con tres cifras que empiecen por cuatro?

Ejercicio:

En una clase de estadística hay 6 alumnos de ADE y 4 informáticos. Los alumnos reciben un ranking dependiendo de su nota en un examen. Asumiendo que no hay notas repetidas, ¿Cuántos rankings posibles hay? ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 informáticos obtengan los 4 primeros puestos del ranking?

Ejercicio:

¿Cuántas manos distintas puede recibir un jugador de póker? (5 cartas de una baraja de 52 cartas).

Ejercicio:

Un alumno tiene 10 libros: 4 de mates, 3 de programación, 2 de historia y uno de inglés. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los libros si el alumno quiere mantenerlos agrupados por temática?

Ejercicio:

Elegimos un número al azar entre 1 y 1000, ¿cuál es la probabilidad de que el número sea divisible por 3, 5 o 6?

Ejercicio:

En una carrera participan 7 atletas, ¿Cuántas listas de llegada son posibles? Si hay 3 ingleses, 2 franceses, un portugués y un español, ¿de cuántas maneras pueden figurar en la lista de llegada las banderas nacionales?

Ejercicio:

Asumiendo que $r > n$, ¿de cuántas formas se pueden distribuir r bolas idénticas en n urnas sin que ninguna quede vacía?

Ejercicio:

Si hay n personas en una clase, ¿Cuál es la probabilidad de que ningún par de personas celebren el cumpleaños el mismo día? ¿Y la de que haya al menos una coincidencia? Calcula una tabla de la probabilidad de coincidencia para varios valores de n ¿Cuánto tiene que valer n para que la probabilidad sea mayor que $1/2$?

n	5.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00
P.coincidencia.	0.03	0.12	0.25	0.41	0.57	0.71	0.81	0.89	0.94	0.97
Stirling	0.03	0.12	0.25	0.41	0.56	0.70	0.80	0.88	0.93	0.97

Simulaciones



Ulam y Von Neumann

Podemos explotar la capacidad de los ordenadores de sacar **números pseudoaleatorios** para simular probabilidades. Muchas veces nos referimos a estas técnicas como **métodos de Monte Carlo**.

Los métodos de Monte Carlo fueron inventados por Ulam y Von Neumann mientras trabajaban en el proyecto Manhattan. Su nombre está inspirado por los casinos de Monte Carlo.

Ejercicio: Simulaciones

¿Cuál es la probabilidad de sacar un 6 en una tirada de un dado?

```
# Simulate one trial
possible_outcomes = 1:6
trial = sample(possible_outcomes, 1)
# Check if the event has occurred (TRUE) or not (FALSE)
has_occurred = (trial == 6)

# A simulation involves repeating the previous setup a looooooot of times
# We can use a for loop or...
nb_sims = 100000
events = replicate(nb_sims, {
  trial = sample(possible_outcomes, 1)
  (trial == 6)
})
# Use Laplace rule: succesful events / total events
cat("Pr = ", sum(events) / nb_sims)

## Pr = 0.16581
```

Ejercicio: Simulaciones

¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en 3 tiradas de una moneda?

```
# Simulate one trial
trial = sample(0:1, 3, replace = TRUE)
# Check if the event has occurred (TRUE) or not (FALSE)
has_occurred = (sum(trial) == 3)

# A simulation involves repeating the previous setup a looooooot of times
# We can use a for loop or...
nb_sims = 50000
events = replicate(nb_sims, {
  trial = sample(0:1, 3, replace = TRUE)
  (sum(trial) == 3)
})
# Use Laplace rule: succesful events / total events
cat("Pr = ", sum(events) / nb_sims)

## Pr = 0.12738
```

Ejercicio: Simulaciones

En una urna hay 3 bolas rojas numeradas del 1 al 3 y 3 bolas negras numeradas del 1 al 3. Sacamos dos bolas, ¿Probabilidad de sacar dos treses o una bola negra y otra blanca?

```
balls = paste(c('B', 'N'), rep(1:3, each = 2), sep = '_')

nb_sims = 50000
events = replicate(nb_sims, {
  trial = sample(balls, 2, replace = FALSE)
  colors = strsplit(trial, '_') %>% sapply(function(x) x[[1]]) %>% sort
  numbers = strsplit(trial, '_') %>% sapply(function(x) x[[2]]) %>% as.numeric
  (all(numbers == c(3, 3)) || all(colors == c('B', 'N')))
})

cat("Pr = ", sum(events) / nb_sims)

## Pr = 0.5982
```


Ejercicio: Simulaciones

Elegimos un número al azar entre 1 y 1000, ¿cuál es la probabilidad de que el número sea divisible por 3, 5 o 6?

Ejercicio: Simulaciones

Se reparten 5 cartas de una baraja española (40 cartas con 4 palos distintos).
¿Cuál es la probabilidad de obtener tres espadas y dos copas?

Probabilidad condicionada

Ejemplo:

El profesor saca un alumno al azar a la pizarra ¿Cuál es la probabilidad de que te toque? ¿Cuál es la probabilidad de que te toque sabiendo que el alumno afortunado estudia ADE?

Ejemplo:

Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8?

Ejemplo:

El profesor saca un alumno al azar a la pizarra ¿Cuál es la probabilidad de que te toque? ¿Cuál es la probabilidad de que te toque sabiendo que el alumno afortunado estudia ADE?

Ejemplo:

Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8? El número de casos favorables es 5: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Por tanto

$$P(\text{sumen } 8) = 5/36.$$

Ejemplo:

El profesor saca un alumno al azar a la pizarra ¿Cuál es la probabilidad de que te toque? ¿Cuál es la probabilidad de que te toque sabiendo que el alumno afortunado estudia ADE?

Ejemplo:

Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8? El número de casos favorables es 5: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Por tanto

$$P(\text{sumen } 8) = 5/36.$$

En la primera tirada sale un 3, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8? Sabiendo que el primer dado es 3, sólo hay un caso favorable: (3, 5) entre los 6 casos posibles (3, 1), (3, 2), \dots (3, 6), por lo que

$$P(\text{sumen } 8 \mid \text{primera tirada es } 3) = 1/6.$$

Probabilidad condicionada

Del ejemplo anterior, y siguiendo la regla de Laplace, deducimos que:

$$P(E | F) = \frac{\text{n}^{\circ} \text{ de casos favorables de } E \text{ y } F}{\text{n}^{\circ} \text{ de casos favorables de } F}.$$

Si dividimos el numerador y denominador por el número de casos posibles:

$$P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Ejercicio: Probabilidad condicionada

Tenemos una muestra de transistores de los cuales 5 son totalmente defectuosos (fallan en cuanto los usamos), 10 son parcialmente defectuosos (aguantan un par de semanas en uso) y 25 son buenos. Cogemos un transistor al azar y lo probamos. ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor sea bueno si no ha fallado inmediatamente?

También podemos emplear la fórmula en sentido contrario:

$$P(E \cap F) = P(E|F)P(F) = P(F|E)P(E)$$

Ejercicio: Probabilidad condicionada

Existe un 30 % de probabilidad de que tu empresa cree una nueva delegación en Toledo. Si es así, existe un 60 % de probabilidad de que te den el puesto de "informático jefe". ¿Cuál es la probabilidad de que seas elegido informático jefe en Toledo?

Podemos expresar E como $E = E \cap F \cup E \cap F^c$. $E \cap F$ y $E \cap F^c$ son mutuamente excluyentes, por lo que usando el Axioma 3:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c) = P(F)P(E | F) + P(F^c)P(E | F^c).$$

Ejercicio: Probabilidad condicionada

Existen dos urnas. La primera tiene dos bolas blancas y una negra; la segunda tiene una blanca y tres negras. Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se saca una bola de la primera urna; si sale cruz, se saca de la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola negra?

Ejercicio:

Un laboratorio hace una prueba sanguínea para detectar una enfermedad. Dicho experimento detecta la enfermedad un 99 % de las veces si la enfermedad está realmente presente en la sangre. Sin embargo, también existen "falsos positivos": hay un 1 % de probabilidad de que a una persona sana se le detecte la enfermedad. Si solo el 0.5 % de la población padece la enfermedad, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga realmente la enfermedad si el test ha salido positivo?

Ejercicio:

Un estudiante está haciendo un test con m opciones. Un estudiante sabe la respuesta de una pregunta con probabilidad p . Si no sabe la respuesta, responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante supiese realmente la respuesta a una pregunta si la ha contestado correctamente?

Podemos generalizar

$$P(E) = P(F)P(E | F) + P(F^c)P(E | F^c)$$

usando una partición de Ω : F_1, F_2, \dots, F_n , de forma que

$$F_i \cap F_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j,$$

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = \Omega.$$

En este caso

$$E = \bigcup_{i=1}^n E \cap F_i,$$

y usando el hecho de que los F_i son mutuamente exclusivos:

$$P(E) = \sum_{i=1}^N P(F_i)P(E | F_i).$$



Thomas Bayes.

Fórmula de Bayes

Supón que E ocurre y que estamos interesados en determinar qué F_j ha ocurrido.

$$P(F_j | E) = \frac{P(F_j)P(E | F_j)}{\sum_{i=1}^N P(F_i)P(E | F_i)}.$$



Fórmula de Bayes

Supón que E ocurre y que estamos interesados en determinar qué F_j ha ocurrido.

$$P(F_j | E) = \frac{P(F_j)P(E | F_j)}{\sum_{i=1}^N P(F_i)P(E | F_i)}.$$

Thomas Bayes.

Ejercicio: Fórmula de Bayes

Partiendo de la expresión de la probabilidad condicionada, vuelve a derivar por ti mismo la fórmula de Bayes.

Ejercicio:

En el problema de las monedas y las urnas, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido cara la moneda si la bola extraída ha sido negra? ¿y si ha sido blanca?

Independencia de sucesos

Independencia de sucesos

En los ejemplos de la sección anterior muestran que, en general $P(E | F)$ es distinto de $P(E)$. Sin embargo, es posible imaginar situaciones en las que el conocimiento de F no afecte a $P(E | F)$.

Ejemplo: Independencia de sucesos

Sea E el evento “sacar un 5 en la tirada de un dado” y F el evento “Hoy llueve”. Parece lógico suponer que $P(E) = P(E | F)$.

Si $P(E) = P(E | F)$, se sigue que

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Ejercicio: Independencia de sucesos

Demuestra que

$$P(E) = P(E | F) \leftrightarrow P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Independencia de sucesos

Dos sucesos E y F se dicen **independientes** si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Independencia de sucesos

Ejercicio: Independencia de sucesos

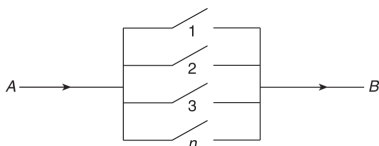
Demuestra que si A y B son sucesos independientes, también lo son A y B^c .

Ejercicio: Independencia de sucesos

Se lanza una moneda y un dado. ¿Son independientes los sucesos de obtener cara con la moneda y obtener más de 2 con el dado?

Ejercicio: Independencia de sucesos

Un sistema se dice en paralelo si funciona cuando al menos uno de sus componentes funciona.



Si la probabilidad de que el componente i -ésimo funcione es p_i , ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?