



Departamento Inteligencia Artificial



LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lógica de Primer Orden: Semántica

Andrei Paun

apaun@fi.upm.es

<http://web3.fi.upm.es/AulaVirtual/>

Despacho 2201

Introducción

- ⊙ **Objetivo de la semántica formal:** dado un LPO, definir el significado de sus fórmulas. Para ello hay que dar significado al:
 - Vocabulario extra-lógico (constantes, predicados y funciones) del lenguaje.
 - Vocabulario lógico (conectivas y cuantificadores)
- ⊙ **Conceptos semánticos** empleados en semántica formal:
 - **Dominio** de interpretación **D**:
 - Dominio: conjunto no vacío de objetos
 - Predicados **n**-ádicos: : **n**-tuplas de objetos del dominio $\mapsto \{V, F\}$
 - Funciones **n**-ádicas: **n**-tuplas de objetos del dominio \mapsto objetos del dominio
 - **Función de interpretación $i()$** :
 - Constantes \mapsto objetos del dominio
 - Predicados y funciones \mapsto relaciones y funciones sobre objetos del dominio
 - **Interpretación **I****: un par $\langle D, i() \rangle$



Lenguajes de primer orden. Interpretaciones

- Las expresiones de un lenguaje **significan** cuando **refieren** a algo, cuando **hablan de** algo

1. Elección de un dominio no vacío de interpretación D

- Ej. $D = \{\text{Sol, Tierra, Luna}\}$; $D = \mathbb{N}$; $D = \{\square, \circ, \diamond\}$; ...

2. Asignación de significado al vocabulario extra-lógico de L :

- Para toda **constante** $a \in L$: $i(a) = d \in D$
 - Todo individuo de D tiene una constante asociada (**distinta**) en L ;
si L no posee suficientes constantes, se amplía a $L(D)$
- Toda **función** $f^n \in L$: $i(f^n) = \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow d$
- Todo **predicado** $P^n \in L$: $i(P^n) = \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow \{V, F\}$



Interpretación de fórmulas atómicas básicas

- Asignación de valor de verdad a las **fórmulas atómicas básicas** de L:

$P^n(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica básica sii t_1, \dots, t_n no contienen variables.

- $i(P^n(t_1, \dots, t_n)) = V/F$ sii $i(P^n)(i(t_1), \dots, i(t_n)) = V/F$

Cada interpretación concreta asignará **un y sólo un valor de verdad** a cada fórmula atómica de L.

Dos interpretaciones difieren entre sí en el **valor de verdad** que asignan.

En el caso del predicado $=^2$, su semántica es **fija**, sin variación entre interpretaciones:

- $i(t_1 = t_2) = V/F$ sii $i(t_1)$ es idéntico a / no es idéntico a $i(t_2)$



Interpretaciones. Ejemplo

Consideremos las afirmaciones:

Cero es un número natural. El sucesor de cero es uno. Uno es un número natural.

- Dadas las fórmulas: $\{N(a), s(a)=b, N(b)\}$, siendo $D = \mathbb{N}$, una función de interpretación que plasmase el significado intuitivo de *número natural*, *identidad* y *sucesor* sería:
- $i(a) = 0; \quad i(b) = 1$
- $i(s^1) = \{ \langle 0 \rangle \Rightarrow 1, \langle 1 \rangle \Rightarrow 2, \langle 2 \rangle \Rightarrow 3, \dots \}$
- $i(N^1) = \{ \langle 0 \rangle \Rightarrow V, \langle 1 \rangle \Rightarrow V, \langle 2 \rangle \Rightarrow V, \dots \}$
- Nótese que no es necesario interpretar el predicado $=$, pues tiene su semántica fija.



Interpretaciones. Ejemplo 2

Consideremos las afirmaciones:

La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. La Tierra es un planeta. La Luna es un satélite

- Dadas las fórmulas: $O(a,b)$, $O(c,a)$, $P(a)$, $S(c)$
- Podemos interpretarlas sobre el dominio $D = \{\text{Sol}, \text{Tierra}, \text{Luna}\}$ y con una función de interpretación que plasme el significado intuitivo de *orbitar*, *planeta* y *satélite*:
- $i(a) = \text{Tierra}$; $i(b) = \text{Sol}$; $i(c) = \text{Luna}$
- $i(P^1) = \{\langle \text{Tierra} \rangle\}$
 - Alternativamente $i(P^1) = \{\langle \text{Tierra} \rangle \Rightarrow V, \langle \text{Sol} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Luna} \rangle \Rightarrow F\}$
- $i(S^1) = \{\langle \text{Luna} \rangle\}$
 - Alternativamente $i(S^1) = \{\langle \text{Tierra} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Sol} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Luna} \rangle \Rightarrow V\}$
- $i(O^2) = \{\langle \text{Tierra}, \text{Sol} \rangle, \langle \text{Luna}, \text{Tierra} \rangle\}$
 - Alternativamente $i(O^2) = \{\langle \text{Tierra}, \text{Tierra} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Tierra}, \text{Sol} \rangle \Rightarrow V, \langle \text{Tierra}, \text{Luna} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Sol}, \text{Sol} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Sol}, \text{Tierra} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Sol}, \text{Luna} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Luna}, \text{Tierra} \rangle \Rightarrow V, \langle \text{Luna}, \text{Luna} \rangle \Rightarrow F, \langle \text{Luna}, \text{Sol} \rangle \Rightarrow F\}$



Interpretación de fórmulas moleculares

Asignación de valor de verdad a las fórmulas moleculares:

- $i(\neg A) = V$ sii $i(A) = F$; $i(\neg A) = F$ sii $i(A) = V$
- $i(A \wedge B) = V$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = V$; $i(A \wedge B) = F$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = F$
- $i(A \vee B) = V$ sii $i(A) = V$ o $i(B) = V$; $i(A \vee B) = F$ sii $i(A) = F$ y $i(B) = F$
- $i(A \rightarrow B) = V$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = V$; $i(A \rightarrow B) = F$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = F$
- $i(A \leftrightarrow B) = V$ sii $i(A) = i(B)$; $i(A \leftrightarrow B) = F$ sii $i(A) \neq i(B)$

- $i(\exists x A) = V$ sii $i(A\{x/a\}) = V$ para **al menos una** constante $a \in L(D)$ [c circuito **paralelo**]
- $i(\exists x A) = F$ sii $i(A\{x/a\}) = F$ para **todas** constantes $a \in L(D)$ [c circuito **serial**]
- $i(\forall x A) = V$ sii $i(A\{x/a\}) = V$ para **todas** constantes $a \in L(D)$ [c circuito **serial**]
- $i(\forall x A) = F$ sii $i(A\{x/a\}) = F$ para **al menos una** constante $a \in L(D)$ [c circuito **paralelo**]

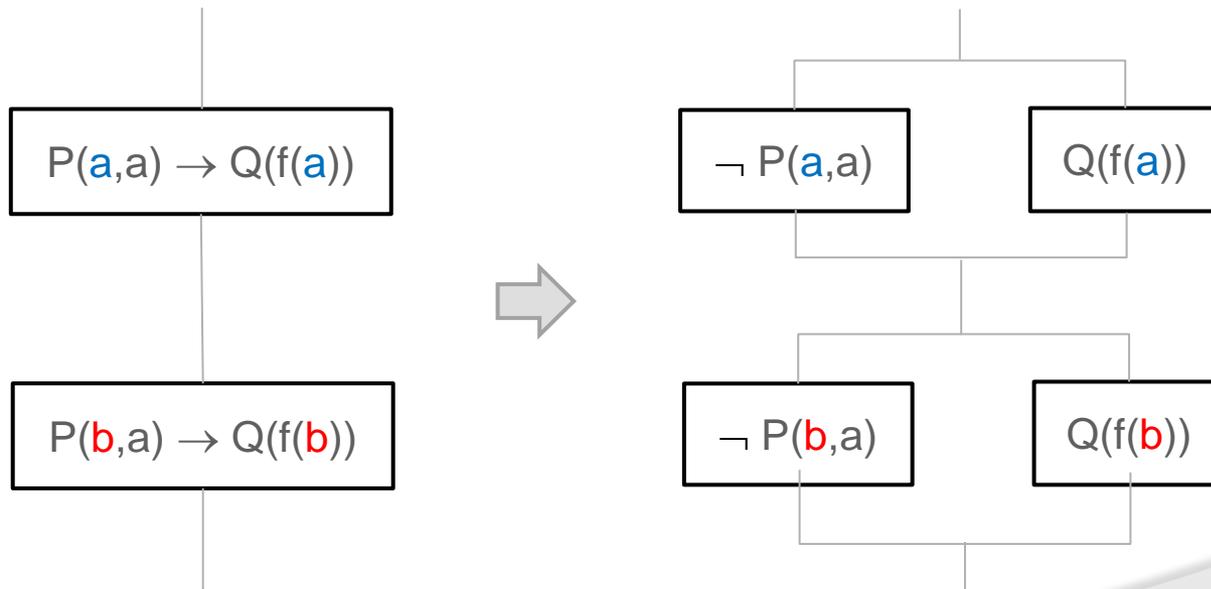
- Estas asignaciones son *invariables para toda función de interpretación* $i()$.



Interpretación – metodo de circuito

Las reglas de la página anterior se visualizan como circuitos con elementos – fórmulas más sencillas. „O bien“ → circuito paralelo. „Y“ → **circuito serial**.

Ejemplo: interpretar fórmula $\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$, $D = \{0, 1\}$, $L(D) = \{a,b\}$



Interpretaciones. Ejercicios

- Construir interpretaciones en las que dar significado a las formalizaciones (fórmulas de un LPO) de las oraciones siguientes:

1. *Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano*
2. *Jorge adora a Juan*
3. *Jorge adora a su hermano Juan*
4. *Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde*
5. *Pedro sujetó a Juan y María le atizó*
6. *Homero escribió la Iliada y la Odisea*
7. *Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan*
8. *Titán es satélite de Saturno pero Europa no lo es*
9. *O Pedro o María (pero no ambos) son hermanos míos*
10. *Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia*
11. *El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto*
12. *María ama a mi padre mientras que Julia me ama a mi*
13. *Cela leía a Borges aunque éste lo detestaba públicamente*



Interpretaciones de Fórmulas (Desarrollo)

A partir de la interpretación dada al vocabulario extra-lógico $\{ O^2, P^1, S^1, a, b, c \}$ sobre el dominio $\{ \text{Sol, Tierra, Luna} \}$, interpretemos ahora las fórmulas:

$$\{ O(a,b), O(c,a), P(a) \wedge S(c), \forall x(O(x,b) \rightarrow P(x)), \forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)) \}$$

- ⊙ $i(O(a,b)) = V$ sii $\langle i(a), i(b) \rangle \in i(O^2)$ sii $\langle \text{Tierra, Sol} \rangle \in \{ \langle \text{Tierra, Sol} \rangle, \langle \text{Luna, Tierra} \rangle \}$
- ⊙ $i(O(c,a)) = V$ sii $\langle i(c), i(a) \rangle \in i(O^2)$ sii $\langle \text{Luna, Tierra} \rangle \in \{ \langle \text{Tierra, Sol} \rangle, \langle \text{Luna, Tierra} \rangle \}$
- ⊙ $i(P(a) \wedge S(c)) = V$ sii $i(P(a)) = V$ y $i(S(c)) = V$
 - $i(P(a)) = V$ sii $\langle i(a) \rangle \in i(P^1)$ sii $\langle \text{Tierra} \rangle \in \{ \langle \text{Tierra} \rangle \}$
 - $i(S(c)) = V$ sii $\langle i(c) \rangle \in i(S^1)$ sii $\langle \text{Luna} \rangle \in \{ \langle \text{Luna} \rangle \}$
- ⊙ $i(\forall x(O(x,b) \rightarrow P(x))) = V$ sii
 - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/a\}) = i(O(a,b) \rightarrow P(a)) = V$ sii $i(O(a,b))=F$ o bien $i(P(a))=V$
 - $i(P(a)) = V$ sii $\langle i(a) \rangle \in i(P^1)$ sii $\langle \text{Tierra} \rangle \in \{ \langle \text{Tierra} \rangle \}$
 - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/b\}) = i(O(b,b) \rightarrow P(b)) = V$ sii $i(O(b,b))=F$ o bien $i(P(b))=V$
 - $i(O(b,b)) = F$ sii $\langle i(b), i(b) \rangle \notin i(O^2)$ sii $\langle \text{Sol, Sol} \rangle \notin \{ \langle \text{Tierra, Sol} \rangle, \langle \text{Luna, Tierra} \rangle \}$
 - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/c\}) = i(O(c,b) \rightarrow P(c)) = V$ sii $i(O(c,b)) = F$ o bien $i(P(c)) = V$
 - $i(O(c,b)) = F$ sii $\langle i(c), i(b) \rangle \notin i(O^2)$ sii $\langle \text{Luna, Sol} \rangle \notin \{ \langle \text{Tierra, Sol} \rangle, \langle \text{Luna, Tierra} \rangle \}$



Interpretaciones de Fórmulas (Desarrollo)

- $i(\forall x \forall y (O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x))) = V$ sii
 - $i((\forall y (O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/a\}) = i(\forall y (O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))) = V$ sii
 - $i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/a\}) = i(O(a,a) \wedge P(a) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(a)) = V$
 - $i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/b\}) = i(O(a,b) \wedge P(b) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(a)) = V$
 - $i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/c\}) = i(O(a,c) \wedge P(c) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(a)) = V$
 - $i((\forall y (O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/b\}) = i(\forall y (O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))) = V$ sii
 - $i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/a\}) = i(O(b,a) \wedge P(a) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(b)) = V$
 - $i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/b\}) = i(O(b,b) \wedge P(b) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(b)) = V$
 - $i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/c\}) = i(O(b,c) \wedge P(c) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(b)) = V$
 - $i((\forall y (O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/c\}) = i(\forall y (O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))) = V$ sii
 - $i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/a\}) = i(O(c,a) \wedge P(a) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(c)) = V$
 - $i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/b\}) = i(O(c,b) \wedge P(b) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(c)) = V$
 - $i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/c\}) = i(O(c,c) \wedge P(c) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(c)) = V$



Interpretaciones. Ejercicios (2)

1. Dadas las fórmulas: $\{O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)\}$, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio $\{\blacksquare, \bullet, \Delta\}$ asignando a los predicados $O(_,_)$, $P(_)$ y $S(_)$ los significados “más grande que”, “cuadrado” y “redondo”
2. Dadas las fórmulas: $\{N(a), s(a)=b, N(b)\}$, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio de las letras del alfabeto, siendo $N(_)$ la propiedad de ser una vocal, $=(_,_)$ la relación de identidad y $s(_)$ la función sucesor en el orden lexicográfico usual.
3. Dadas las fórmulas: $\{P(a,b), P(a,c), H(b,c), p(b)=d, p(c)=e, R(d,e), A(a,d), A(a,e)\}$, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {Juan Carlos, Elena, Felipe, Froilán, Leonor} asignando a $P(_,_)$, $H(_,_)$, $R(_,_)$, $A(_,_)$ y $p(_)$ los significados de “padre”, “hermano”, “primo”, “abuelo” y “primogénito”.
4. Dadas las fórmulas: $\{C(a), C(a,b), P(b), C(c), C(c,d), P(d), M(a,c), M(b,d)\}$, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {Nueva York, Estados Unidos, Madrid, España, París}, asignando a los predicados $C(_)$, $C(_,_)$, $P(_)$ y $M(_,_)$ los significados “ciudad”, “ser la capital de”, “país” y “ser mayor que”.
5. Interpretar el vocabulario extra-lógico de las fórmulas del ejercicio anterior en un dominio diferente, asignando a predicados y constantes una interpretación acorde con el dominio elegido.



Interpretaciones. Ejercicios (3)

1. Dadas las fórmulas:

$$\{ N(a), \forall x(N(x) \rightarrow N(s(x))), \forall x(N(x) \rightarrow x+a = x), \forall x\forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow x+s(y) = s(x+y)) \}$$

interpretarlas en el dominio de los números naturales, siendo $N(_)$ la propiedad de ser un número natural, $=(_,_)$ la relación de identidad y $s(_)$ y $+(_,_)$ las funciones sucesor y suma respectivamente.

2. Interpretar las fórmulas resultantes de simbolizar las oraciones siguientes:

1. *María está enamorada de alguien*
2. *Algunas cantantes de ópera no están gordas*
3. *No todos los crímenes merecen la pena capital*
4. *Las novelas de Cela me fascinan*
5. *Hay profesores que no saben explicar*
6. *Sólo los suecos entienden a Bergman*
7. *Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda*
8. *Hay genios, pero no todos los poetas lo son*
9. *No todos los satélites de Júpiter tienen atmósfera*
10. *Todos los estudiantes de quinto curso ayudan a al menos uno de primero*
11. *Los caballeros las prefieren rubias pero se casan con las morenas*
12. *Nadie respeta a quien no se respeta a sí mismo*
13. *Hay un pintor a quien todo el mundo admira*



Modelos y Contra-modelos

- ⊙ **Modelo:** una interpretación I es modelo de una fórmula A sii $i(A) = V$
- ⊙ **Contra-modelo:** una interpretación I es contra-modelo de una fórmula A sii $i(A) = F$
- ⊙ Ejercicio. Definir un modelo y un contra-modelo para cada una de las siguientes fórmulas en $D = \{1, 2\}$:

1. $\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$

2. $\exists xP(x) \wedge P(a)$

3. $\forall x\exists y(x = y)$

4. $\forall y\forall z\exists x(x = y+z)$

5. $\forall xP(x) \wedge \neg P(a)$

6. $\exists x(\forall yP(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \vee \forall xP(x,x)$

7. $\exists x\forall y\forall z(x = y+z)$

8. $\exists y\forall x(x = y)$

9. $\forall x\neg(\forall yP(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \wedge \exists x\neg P(x,x)$

10. $\exists x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$



Fórmulas abiertas y cerradas

- Son aquellas que tienen al menos una variable libre (no cuantificada)
- Sea A una fórmula de L en la que x_1, \dots, x_n son **todas** sus variables **libres**.
- Dada una fórmula abierta $A(x_1, \dots, x_n)$, definimos:
 - **Cierre existencial** de $A(x_1, \dots, x_n)$: $\exists x_1, \dots, x_n A$
 - **Cierre universal** de $A(x_1, \dots, x_n)$: $\forall x_1, \dots, x_n A$
- En una se estas maneras se convierte a formula cerrada.



Satisfacción

- Una interpretación $\mathbf{I} = \langle D, i() \rangle$ **satisface** una fórmula A sii $i(A) = V$ (es lo mismo como decir \mathbf{I} es modelo de A)
- Una fórmula A es **satisfacible** sii *existe al menos una* interpretación \mathbf{I} tal que $i(A) = V$
- Una fórmula A es **insatisfacible** sii *no existe ninguna* interpretación \mathbf{I} tal que $i(A) = V$
- Extensión a conjuntos de fórmulas $\{A_1, \dots, A_n\}$:
 - Una interpretación \mathbf{I} **satisface** $\{A_1, \dots, A_n\}$ sii $i(A_i) = V$ para *todo* $i: 1 \leq i \leq n$



Validez y consecuencia lógica

Validez lógica

- Una fórmula $A \in L$ es **lógicamente válida** sii es verdadera en toda interpretación: $\models A$

Consecuencia lógica

- Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($A_i \in L$) y una fórmula $B \in L$, $\Gamma \models B$ (B es consecuencia lógica de Γ) sii:
 - **TODO** modelo de Γ es también modelo de B (toda interpretación que satisfaga Γ satisface también B), es decir,
 - No existe ninguna interpretación que satisfaga a Γ y que *no satisfaga* a B



Validez l3gica. Ejemplo 1

¿ $\models \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$?

$D = \{1, 2\}$, $L(D) = \{ P^2 \} \cup \{ a, b \}$

$i(\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii

$i(\exists x \forall y P(x,y)) = V$ sii

$i(\forall y P(a,y)) = V$ sii

o bien $i(P(a,a)) = V$ y $i(P(a,b)) = V$

$i(\forall y P(b,y)) = V$ sii

$i(P(b,a)) = V$ y $i(P(b,b)) = V$

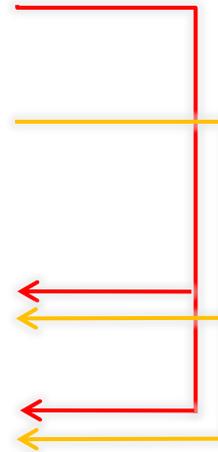
$i(\forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii

$i(\exists x P(x,a)) = F$ sii

o bien $i(P(a,a)) = F$ y $i(P(b,a)) = F$

$i(\exists x P(x,b)) = F$ sii

$i(P(a,b)) = F$ y $i(P(b,b)) = F$



La imposibilidad de hacer falsa esta f3rmula no depende de una interpretaci3n particular. Luego el contra-modelo no existe \Leftrightarrow la f3rmula es v3lida.



Validez l3gica. Ejemplo 2

¿ $\models \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$?

$D = \{1, 2\}$, $L(D) = \{ P^2 \} \cup \{ a, b \}$

$i(\forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)) = F$ sii

$i(\forall y \exists x P(x,y)) = V$ sii

$i(\exists x P(x,a)) = V$ sii

y $i(P(a,a)) = V$ o bien $i(P(b,a)) = V$

$i(\exists x P(x,b)) = V$ sii

$i(P(a,b)) = V$ o bien $i(P(b,b)) = V$

$i(\exists x \forall y P(x,y)) = F$ sii

$i(\forall y P(a,y)) = F$ sii

y $i(P(a,a)) = F$ o bien $i(P(a,b)) = F$

$i(\forall y P(b,y)) = F$ sii

$i(P(b,a)) = F$ o bien $i(P(b,b)) = F$

$i(P(a,a)) = V$ porque
 $\langle i(a), i(a) \rangle = \langle 1, 1 \rangle \in i(P)$
 $i(P(b,b)) = V$ porque
 $\langle i(b), i(b) \rangle = \langle 2, 2 \rangle \in i(P)$

$i(P(a,b)) = F$ porque
 $\langle i(a), i(b) \rangle = \langle 1, 2 \rangle \notin i(P)$
 $i(P(b,a)) = F$ porque
 $\langle i(b), i(a) \rangle = \langle 2, 1 \rangle \notin i(P)$

Elegimos $i(a) = 1$, $i(b) = 2$. Entonces $i(P) = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

Esta interpretaci3n hace falsa la f3rmula.



Validez lógica. Ejercicios

1. $\forall x P(x) \rightarrow P(a)$
2. $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$
3. $P(a) \rightarrow \forall x P(x)$
4. $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
5. $\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$
6. $\forall x \neg P(x) \leftrightarrow \neg \forall x P(x)$
7. $\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
8. $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)$
9. $\exists x P(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)$
10. $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
11. $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \leftrightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
12. $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$
13. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
14. $\forall x \forall y R(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x R(x,y)$
15. $\exists x \exists y R(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x R(x,y)$
16. $\exists y \forall x R(x,y) \leftrightarrow \forall x \exists y R(x,y)$
17. $\exists x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \leftrightarrow \forall y \exists x (P(x) \wedge Q(y))$

Decir si son válidas o no (y ese caso si en algún sentido de la implicación lo son) las siguientes FBF en $D = \{1, 2\}$



Consecuencia lógica. Ejemplo 1

- Sea el argumento: *Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente.*
- Y su formalización: $\{ \exists x(I(x) \vee H(x)), \neg H(a) \} \models \neg I(a)$
- Para determinar la validez de este argumento por medios semánticos, tratemos de definir una interpretación que:
 1. Verifique las premisas: $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ y $i(\neg H(a)) = V$
 2. False la pretendida conclusión: $i(\neg I(a)) = F$
- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. $D = \{ \text{Juan, Pedro} \}$
- Y amplíemos el lenguaje del argumento con una segunda constante: **b**
- Veamos en detalle verificación de las premisas y falsación de la conclusión:



Consecuencia lógica. Ejemplo 1

1. $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ sii

- $i(I(a) \vee H(a)) = V$ sii
 - $i(I(a)) = V$ o bien $i(H(a)) = V$

o bien

- $i(I(b) \vee H(b)) = V$ sii
 - $i(I(b)) = V$ o bien $i(H(b)) = V$

2. $i(\neg H(a)) = V$ sii

- $i(H(a)) = F$

3. $i(\neg I(a)) = F$ sii

- $i(I(a)) = V$

⊙ La interpretación:

1. $i(a) = \text{Juan}$, $i(b) = \text{Pedro}$
2. $i(I^1) = \{\langle \text{Juan} \rangle, \langle \text{Pedro} \rangle\}$, $i(H^1) = \{\langle \text{Pedro} \rangle\}$,

⊙ Verifica las premisas y falsa la conclusión, luego el argumento no es válido.

$i(I(a)) = V$ porque

$\langle i(a) \rangle = \langle \text{Juan} \rangle \in \{\langle \text{Juan} \rangle, \langle \text{Pedro} \rangle\} = i(I)$

$i(H(a)) = F$ porque

$\langle i(a) \rangle = \langle \text{Juan} \rangle \notin \{\langle \text{Pedro} \rangle\} = i(H)$

$i(I(a)) = V$ porque

$\langle i(a) \rangle = \langle \text{Juan} \rangle \in \{\langle \text{Juan} \rangle, \langle \text{Pedro} \rangle\} = i(I)$



Consecuencia lógica. Ejemplo 2

- Sea el argumento: *Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.*
- Y su formalización: $\{ \forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x))), E(a) \wedge \neg O(a) \} \models R(a)$
- Para determinar la validez de este argumento, tratemos de definir una interpretación que:
 1. Verifique las premisas: $i(\forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x)))) = V$ y $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$
 2. Falsifique la conclusión: $i(R(a)) = F$
- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. $D = \{ \text{carbono, oxígeno} \}$
- Ampliemos el lenguaje de formalización del argumento con una nueva constante: b
- **No puede verificar las premisas y falsar la conclusión:**
 1. $i(\forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x)))) = V$ sii
 1. $i(E(a) \rightarrow (O(a) \vee R(a))) = V$ sii $i(E(a))=F$ o bien $i(O(a) \vee R(a))=V$
 2. $i(E(b) \rightarrow (O(b) \vee R(b))) = V$ sii $i(E(b))=F$ o bien $i(O(b) \vee R(b))=V$
 2. $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$ sii
 1. $i(E(a))=V$
 2. $i(\neg O(a))=V$ sii $i(O(a))=F$
 3. $i(R(a)) = F$
- Lo que impide crear el contra-modelo **no depende de I**, luego el argumento es válido.



Ejercicios de demostración semántica

Demostrar por medios semánticos para $D = \{0, 1, 2\}$ y para $D = \{3\}$ si son argumentos válidos:

1. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \models Q(a)$
2. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \models Q(a)$
3. $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\} \models \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$
4. $\models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
5. $\models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$



Ejercicios de demostración semántica

Determina por medios semánticos la validez de los siguientes argumentos:

1. $0 > 1$. $1 > 2$. La relación ' $>$ ' es transitiva. Por tanto, $0 > 2$.
2. Robin Hood es generoso. Todos los ladrones son generosos. Por tanto, Robin Hood es un ladrón.
3. Siempre que Pedro discute con María, ésta se enfada con su padre. Una persona que se enfada con otra no la invita a su boda. Por tanto, si Pedro discute con María, ésta no invitará a su padre a su boda.
4. Todos los ladrones son generosos. Sólo los ricos son generosos. Robin Hood es un ladrón. Por tanto, Robin Hood es rico.
5. Juan Carlos ama a Sofía. Quienes trabajan con Juan Carlos no conocen a fondo a Sofía. Si se ama a alguien, se le conoce a fondo. Sabino trabaja con Juan Carlos. Por tanto, Sabino no ama a Sofía.
6. Hay un ladrón generoso. Por tanto, hay un ladrón y hay alguien generoso.
7. Hay un ladrón y hay alguien generoso. Por tanto, hay un ladrón generoso.
8. Todo elemento pesado es metálico. Por tanto, ningún no metal es un elemento pesado.
9. No es cierto que todo sea blanco o negro. Por tanto, hay algo que no es ni blanco ni negro.



Ejercicios de demostración semántica

Formalización y soluciones:

1. $\{ M(a,b), M(b,c), \forall x\forall y\forall z(M(x,y) \wedge M(y,z) \rightarrow M(x,z)) \} \models M(a,c)$
2. $\{ G(a), \forall x(L(x) \rightarrow G(x)) \} \not\models L(a)$
3. $\{ D(a,b) \rightarrow E(b,f(b)), \forall x\forall y(E(x,y) \rightarrow \neg I(x,y)) \} \models D(a,b) \rightarrow \neg I(b,f(b))$
4. $\{ \forall x(L(x) \rightarrow G(x)), \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg G(x)), L(a) \} \models R(a)$
5. $\{ A(a,b), \forall x(T(x,a) \rightarrow \neg C(x,b)), \forall x\forall y(A(x,y) \rightarrow C(x,y)), T(c,a) \} \models \neg A(c,b)$
6. $\exists x(L(x) \wedge G(x)) \models \exists xL(x) \wedge \exists xG(x)$
7. $\exists xL(x) \wedge \exists xG(x) \not\models \exists x(L(x) \wedge G(x))$
8. $\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \models \forall x(\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$
9. $\neg\forall x(B(x) \vee N(x)) \models \exists x(\neg B(x) \wedge \neg N(x))$

