Departamento Inteligencia Artificial

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Lógica de Primer Orden: Semántica

Andrei Paun

apaun@fi.upm.es

http://web3.fi.upm.es/AulaVirtual/

Despacho 2201

Introducción

- **Objetivo de la semántica formal**: dado un LPO, definir el significado de sus fórmulas. Para ello hay que dar significado al:
  - Vocabulario extra-lógico (constantes, predicados y funciones) del lenguaje.
  - Vocabulario lógico (conectivas y cuantificadores)

- **Conceptos semánticos** empleados en semántica formal:
  - **Dominio** de interpretación **D**:
    - Dominio: conjunto no vacío de objetos
    - Predicados **n**-ádicos: : **n**-tuplas de objetos del dominio $\mapsto$ {V, F}
    - Funciones **n**-ádicas: **n**-tuplas de objetos del dominio $\mapsto$ objetos del dominio
  - **Función** de interpretación **i()**:
    - Constantes $\mapsto$ objetos del dominio
    - Predicados y funciones $\mapsto$ relaciones y funciones sobre objetos del dominio
  - **Interpretación I**: un par <D, i()>

Departamento Inteligencia Artificial

Lenguajes de primer orden. Interpretaciones

- Las expresiones de un lenguaje ***significan*** cuando ***refieren*** a algo, cuando ***hablan de*** algo

1. Elección de un dominio no vacío de interpretación D
   - Ej. D = {Sol, Tierra, Luna}; D = $\mathbb{N}$; D = { □, o, ♦ }; …

2. Asignación de significado al vocabulario extra-lógico de L:
   - Para toda constante a $\in$ L: i(a) = d $\in$ D
     - Todo individuo de D tiene una constante asociada (distinta) en L; si L no posee suficientes constantes, se amplía a L(D)
   - Toda función $f^n \in L$: $i(f^n) = \langle d_1,\ldots,d_n \rangle \Rightarrow d$
   - Todo predicado $P^n \in L$: $i(P^n) = \langle d_1,\ldots,d_n \rangle \Rightarrow \{V, F\}$

Departamento Inteligencia Artificial

Interpretación de fórmulas atómicas básicas

- Asignación de valor de verdad a las **fórmulas atómicas básicas** de L:

  $P^n(t_1,\ldots,t_n)$ es una fórmula atómica básica sii $t_1,\ldots,t_n$ no contienen variables.

  - $i(P^n(t_1,\ldots, t_n))= V/F$ sii $i(P^n)(i(t_1),\ldots, i(t_n)) = V/F$

  Cada interpretación concreta asignará **un y sólo un valor de verdad** a cada fórmula atómica de L.

  Dos interpretaciones difieren entre sí en el **valor de verdad** que asignan.

  En el caso del predicado **$=^2$**, su semántica es **fija**, sin variación entre interpretaciones:

  - $i(t_1 = t_2) = V/F$ sii $i(t_1)$ es idéntico a / no es idéntico a $i(t_2)$

Interpretaciones. Ejemplo

Consideremos las afirmaciones:

Cero es un número natural. El sucesor de cero es uno. Uno es un número natural.

- Dadas las fórmulas: {N(a), s(a)=b, N(b)}, siendo D = $\mathbb{N}$, una función de interpretación que plasmase el significado intuitivo de *número natural*, *identidad* y *sucesor* sería:
- i(a) = 0;   i(b) = 1
- $i(s^1) = \{\langle 0\rangle \Rightarrow 1, \langle 1\rangle \Rightarrow 2, \langle 2\rangle \Rightarrow 3, \ldots \}$
- $i(N^1) = \{\langle 0\rangle \Rightarrow V, \langle 1\rangle \Rightarrow V, \langle 2\rangle \Rightarrow V, \ldots\}$
- Nótese que no es necesario interpretar el predicado =, pues tiene su semántica fija.

Interpretaciones. Ejemplo 2

Consideremos las afirmaciones:

La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. La Tierra es un planeta. La Luna es un satélite

- Dadas las fórmulas: O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)
- Podemos interpretarlas sobre el dominio D = {Sol, Tierra, Luna} y con una función de interpretación que plasme el significado intuitivo de *orbitar*, *planeta* y *satélite*:
- i(a) = Tierra;   i(b) = Sol;   i(c) = Luna
- i(P^1) = {<Tierra>}
  - Alternativamente i(P^1) = {<Tierra> ⇒ V, <Sol> ⇒ F, <Luna> ⇒ F }
- i(S^1) = {<Luna>}
  - Alternativamente i(S^1) = {<Tierra> ⇒ F, <Sol> ⇒ F, <Luna> ⇒ V }
- i(O^2) = {<Tierra,Sol>,<Luna,Tierra>}
  - Alternativamente i(O^2) = {<Tierra,Tierra> ⇒ F, <Tierra,Sol> ⇒ V, <Tierra,Luna> ⇒ F, <Sol,Sol> ⇒ F, <Sol,Tierra> ⇒ F, <Sol,Luna> ⇒ F, <Luna,Tierra> ⇒ V, <Luna,Luna> ⇒ F, <Luna,Sol> ⇒ F }

Interpretación de fórmulas moleculares

Asignación de valor de verdad a las **fórmulas moleculares**:

- $i(\neg A) = V$ sii $i(A) = F$; $i(\neg A) = F$ sii $i(A) = V$
- $i(A \wedge B) = V$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = V$; $i(A \wedge B) = F$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = F$
- $i(A \vee B) = V$ sii $i(A) = V$ o $i(B) = V$; $i(A \vee B) = F$ sii $i(A) = F$ y $i(B) = F$
- $i(A \rightarrow B) = V$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = V$; $i(A \rightarrow B) = F$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = F$
- $i(A \leftrightarrow B) = V$ sii $i(A) = i(B)$; $i(A \leftrightarrow B) = F$ sii $i(A) \neq i(B)$;

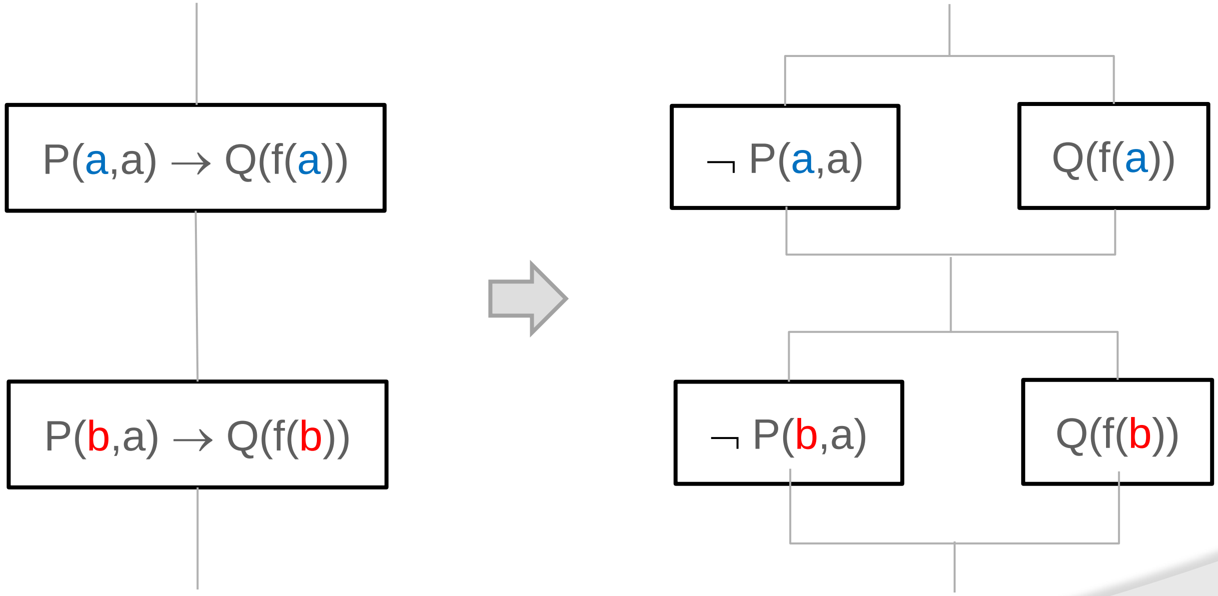
- $i(\exists xA) = V$ sii $i(A\{x/a\}) = V$ para al menos una constante $\boldsymbol{a} \in L(D)$ [circuito paralelo]
- $i(\exists xA) = F$ sii $i(A\{x/a\}) = F$ para todas constantes $\boldsymbol{a} \in L(D)$ [circuito serial]
- $i(\forall xA) = V$ sii $i(A\{x/a\}) = V$ para todas constantes $\boldsymbol{a} \in L(D)$ [circuito serial]
- $i(\forall xA) = F$ sii $i(A\{x/a\}) = F$ para al menos una constante $\boldsymbol{a} \in L(D)$ [circuito paralelo]

- Estas asignaciones son *invariables para toda función de interpretación* i().

Interpretación – metodo de circuito

Las reglas de la página anterior se visualisan como circuitos con elementos – fórmulas más sencillas. „O bien“ → circuito paralelo. „Y“→ circuito serial.

Ejemplo: interpretar fórmula $\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$, $D = \{0, 1\}$, $L(D) = \{a,b\}$



Departamento Inteligencia Artificial

Interpretaciones. Ejercicios

- Construir interpretaciones en las que dar significado a las formalizaciones (fórmulas de un LPO) de las oraciones siguientes:

  1. *Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano*
  2. *Jorge adora a Juan*
  3. *Jorge adora a su hermano Juan*
  4. *Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde*
  5. *Pedro sujetó a Juan y María le atizó*
  6. *Homero escribió la Iliada y la Odisea*
  7. *Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan*
  8. *Titán es satélite de Saturno pero Europa no lo es*
  9. *O Pedro o María (pero no ambos) son hermanos míos*
  10. *Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia*
  11. *El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto*
  12. *María ama a mi padre mientras que Julia me ama a mi*
  13. *Cela leía a Borges aunque éste lo detestaba públicamente*

Departamento Inteligencia Artificial

Interpretaciones de Fórmulas (Desarrollo)

A partir de la interpretación dada al vocabulario extra-lógico $\{O^2, P^1, S^1, a, b, c\}$ sobre el dominio {Sol, Tierra, Luna}, interpretemos ahora las fórmulas:

$$\{\, O(a,b),\ O(c,a),\ P(a) \wedge S(c),\ \forall x(O(x,b) \rightarrow P(x)),\ \forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)) \,\}$$

- $i(O(a,b)) = V$ sii $<i(a),i(b)> \in i(O^2)$ sii $<Tierra,Sol> \in \{<Tierra,Sol>,<Luna,Tierra>\}$
- $i(O(c,a)) = V$ sii $<i(c),i(a)> \in i(O^2)$ sii $<Luna,Tierra> \in \{<Tierra,Sol>,<Luna,Tierra>\}$
- $i(P(a) \wedge S(c)) = V$ sii $i(P(a)) = V$ y $i(S(c)) = V$
  - $i(P(a)) = V$ sii $<i(a)> \in i(P^1)$ sii $<Tierra> \in \{<Tierra>\}$
  - $i(S(c)) = V$ sii $<i(c)> \in i(S^1)$ sii $<Luna> \in \{<Luna>\}$
- $i(\forall x(O(x,b) \rightarrow P(x))) = V$ sii
  - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/a\}) = i(O(a,b) \rightarrow P(a)) = V$ sii $i(O(a,b))=F$ o bien $i(P(a))=V$
    - $i(P(a)) = V$ sii $<i(a)> \in i(P^1)$ sii $<Tierra> \in \{<Tierra>\}$
  - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/b\}) = i(O(b,b) \rightarrow P(b)) = V$ sii $i(O(b,b))=F$ o bien $(P(b))=V$
    - $i(O(b,b)) = F$ sii $<i(b),i(b)> \notin i(O^2)$ sii $<Sol,Sol> \notin \{<Tierra,Sol>,<Luna,Tierra>\}$
  - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/c\}) = i(O(c,b) \rightarrow P(c)) = V$ sii $i(O(c,b)) = F$ o bien $i(P(c)) = V$
    - $i(O(c,b)) = F$ sii $<i(c),i(b)> \notin i(O^2)$ sii $<Luna,Sol> \notin \{<Tierra,Sol>,<Luna,Tierra>\}$

Interpretaciones de Fórmulas (Desarrollo)

- $i(\forall x \forall y(O(x,y) \land P(y) \to S(x))) = V$ sii
  - $i((\forall y(O(x,y) \land P(y) \to S(x)))\{x/a\}) = i(\forall y(O(a,y) \land P(y) \to S(a))) = V$ sii
    - $i((O(a,y) \land P(y) \to S(a))\{y/a\}) = i(O(a,a) \land P(a) \to S(a)) = V$ sii $i(O(a,a) \land P(a)) = F$ o $i(S(a)) = V$
    - $i((O(a,y) \land P(y) \to S(a))\{y/b\}) = i(O(a,b) \land P(b) \to S(a)) = V$ sii $i(O(a,b) \land P(b)) = F$ o $i(S(a)) = V$
    - $i((O(a,y) \land P(y) \to S(a))\{y/c\}) = i(O(a,c) \land P(c) \to S(a)) = V$ sii $i(O(a,c) \land P(c)) = F$ o $i(S(a)) = V$
  - $i((\forall y(O(x,y) \land P(y) \to S(x)))\{x/b\}) = i(\forall y(O(b,y) \land P(y) \to S(b))) = V$ sii
    - $i((O(b,y) \land P(y) \to S(b))\{y/a\}) = i(O(b,a) \land P(a) \to S(b)) = V$ sii $i(O(b,a) \land P(a)) = F$ o $i(S(b)) = V$
    - $i((O(b,y) \land P(y) \to S(b))\{y/b\}) = i(O(b,b) \land P(b) \to S(b)) = V$ sii $i(O(b,b) \land P(b)) = F$ o $i(S(b)) = V$
    - $i((O(b,y) \land P(y) \to S(b))\{y/c\}) = i(O(b,c) \land P(c) \to S(b)) = V$ sii $i(O(b,c) \land P(c)) = F$ o $i(S(b)) = V$
  - $i((\forall y(O(x,y) \land P(y) \to S(x)))\{x/c\}) = i(\forall y(O(c,y) \land P(y) \to S(c))) = V$ sii
    - $i((O(c,y) \land P(y) \to S(c))\{y/a\}) = i(O(c,a) \land P(a) \to S(c)) = V$ sii $i(O(c,a) \land P(a)) = F$ o $i(S(c)) = V$
    - $i((O(c,y) \land P(y) \to S(c))\{y/b\}) = i(O(c,b) \land P(b) \to S(c)) = V$ sii $i(O(c,b) \land P(b)) = F$ o $i(S(c)) = V$
    - $i((O(c,y) \land P(y) \to S(c))\{y/c\}) = i(O(c,c) \land P(c) \to S(c)) = V$ sii $i(O(c,c) \land P(c)) = F$ o $i(S(c)) = V$

Interpretaciones. Ejercicios (2)

1. Dadas las fórmulas: {O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {■, ⊙, ∆} asignando a los predicados O(_,_), P(_) y S(_) los significados "más grande que", "cuadrado" y "redondo"
2. Dadas las fórmulas: {N(a), s(a)=b, N(b)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio de las letras del alfabeto, siendo N(_) la propiedad de ser una vocal, =(_,_) la relación de identidad y s(_) la función sucesor en el orden lexicográfico usual.
3. Dadas las fórmulas: {P(a,b), P(a,c), H(b,c), p(b)=d, p(c)=e, R(d,e), A(a,d), A(a,e)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {Juan Carlos, Elena, Felipe, Froilán, Leonor} asignando a P(_,_), H(_,_), R(_,_), A(_,_) y p(_) los significados de "padre", "hermano", "primo", "abuelo" y "primogénito".
4. Dadas las fórmulas: {C(a), C(a,b), P(b), C(c), C(c,d), P(d), M(a,c), M(b,d)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {Nueva York, Estados Unidos, Madrid, España, París}, asignando a los predicados C(_), C(_,_), P(_) y M(_,_) los significados "ciudad", "ser la capital de", "país" y "ser mayor que".
5. Interpretar el vocabulario extra-lógico de las fórmulas del ejercicio anterior en un dominio diferente, asignando a predicados y constantes una interpretación acorde con el dominio elegido.

Departamento Inteligencia Artificial

Interpretaciones. Ejercicios (3)

1. Dadas las fórmulas:

$$\{ N(a), \forall x(N(x) \rightarrow N(s(x))), \forall x(N(x) \rightarrow x+a = x), \forall x\forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow x+s(y) = s(x+y) \}$$

   interpretarlas en el dominio de los números naturales, siendo N(_) la propiedad de ser un número natural, =(_,_) la relación de identidad y s(_) y +(_,_) las funciones sucesor y suma respectivamente.

2. Interpretar las fórmulas resultantes de simbolizar las oraciones siguientes:
   1. *María está enamorada de alguien*
   2. *Algunas cantantes de ópera no están gordas*
   3. *No todos los crímenes merecen la pena capital*
   4. *Las novelas de Cela me fascinan*
   5. *Hay profesores que no saben explicar*
   6. *Sólo los suecos entienden a Bergman*
   7. *Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda*
   8. *Hay genios, pero no todos los poetas lo son*
   9. *No todos los satélites de Júpiter tienen atmósfera*
   10. *Todos los estudiantes de quinto curso ayudan a al menos uno de primero*
   11. *Los caballeros las prefieren rubias pero se casan con las morenas*
   12. *Nadie respeta a quien no se respeta a sí mismo*
   13. *Hay un pintor a quien todo el mundo admira*

Modelos y Contra-modelos

- **Modelo**: una interpretación I es modelo de una fórmula A sii i(A) = V
- **Contra-modelo**: una interpretación I es contra-modelo de una fórmula A sii i(A) = F
- Ejercicio. Definir un modelo y un contra-modelo para cada una de las siguientes fórmulas en D = {1, 2}:

1. $\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$
2. $\exists xP(x) \wedge P(a)$
3. $\forall x\exists y(x = y)$
4. $\forall y\forall z\exists x(x = y+z)$
5. $\forall xP(x) \wedge \neg P(a)$
6. $\exists x(\forall yP(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \vee \forall xP(x,x)$
7. $\exists x\forall y\forall z(x = y+z)$
8. $\exists y\forall x(x = y)$
9. $\forall x\neg(\forall yP(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \wedge \exists x\neg P(x,x)$
10. $\exists x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$

Departamento Inteligencia Artificial

Fórmulas abiertas y cerradas

- Son aquellas que tienen al menos una variable libre (no cuantificada)
- Sea A una fórmula de L en la que $x_1,\ldots,x_n$ son ***todas*** sus variables ***libres***.
- Dada una fórmula abierta $A(x_1,\ldots,x_n)$, definimos:
  - **Cierre existencial** de $A(x_1,\ldots,x_n)$: $\exists x_1,\ldots,x_n A$
  - **Cierre universal** de $A(x_1,\ldots,x_n)$: $\forall x_1,\ldots,x_n A$
- En una se estas maneras se convierte a formula cerrada.

Departamento Inteligencia Artificial

Satisfacción

- Una interpretación **I** = <D, i()> **satisface** una fórmula A sii i(A) = V (es lo mismo como decir I es modelo de A)

- Una fórmula A es **satisfacible** sii *existe al menos una* interpretación **I** tal que i(A) = V

- Una fórmula A es **insatisfacible** sii *no existe ninguna* interpretación **I** tal que i(A) = V

- Extensión a conjuntos de fórmulas $\{A_1,\ldots,A_n\}$:
  - Una interpretación **I** **satisface** $\{A_1,\ldots,A_n\}$ sii $i(A_i) = V$ para *todo* $i: 1 \leq i \leq n$

Departamento Inteligencia Artificial

Validez y consecuencia lógica

Validez lógica

- Una fórmula A $\in$ L es **lógicamente válida** sii es verdadera en toda interpretación: **$\models$ A**

Consecuencia lógica

- Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1,\ldots,A_n\}$ ($A_i \in$ L) y una fórmula B $\in$ L, **$\Gamma \models$ B** (B es consecuencia lógica de Γ) sii:
  - **TODO** modelo de Γ es también modelo de B (toda interpretación que satisfaga Γ satisface también B), es decir,
  - No existe ninguna interpretación que satisfaga a Γ y que *no satisfaga* a B

Departamento Inteligencia Artificial

Validez lógica. Ejemplo 1

¿ $\models \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$?

$D = \{1, 2\}$, $L(D) = \{ P^2 \} \cup \{ a, b \}$

$i(\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii

$\underline{i(\exists x \forall y P(x,y)) = V}$ sii

$i(\forall y P(a,y)) = V$ sii

o bien $i(P(a,a)) = V$ y $i(P(a,b)) = V$

$i(\forall y P(b,y)) = V$ sii

$i(P(b,a)) = V$ y $i(P(b,b)) = V$

$\underline{i(\forall y \exists x P(x,y)) = F}$ sii

$i(\exists x P(x,a)) = F$ sii

o bien $i(P(a,a)) = F$ y $i(P(b,a)) = F$

$i(\exists x P(x,b)) = F$ sii

$i(P(a,b)) = F$ y $i(P(b,b)) = F$

La imposibilidad de hacer falsa esta fórmula no depende de una interpretación particular. Luego el contra-modelo no existe ➪ la fórmula es válida.

Departamento Inteligencia Artificial

Validez lógica. Ejemplo 2

¿ $\models \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$?

D = {1, 2}, L(D) = { P^2} ∪ { a, b }

i(∀y∃xP(x,y) → ∃x∀yP(x,y)) = F sii
- <u>i(∀y∃xP(x,y)) = V</u> sii
  - i(∃xP(x,a)) = V sii
    - **i(P(a,a)) = V** o bien i(P(b,a)) = V
  - y i(∃xP(x,b)) = V sii
    - i(P(a,b)) = V o bien **i(P(b,b)) = V**
- <u>i(∃x∀yP(x,y)) = F</u> sii
  - i(∀<u>y</u>P(a,y)) = F sii
    - i(P(a,a)) = F o bien **i(P(a,b)) = F**
  - y i(∀<u>y</u>P(b,y)) = F sii
    - **i(P(b,a)) = F** o bien i(P(b,b)) = F

i(P(a,a)) = V porque
<i(a),i(a)> = <1,1> ∈ i(P)
i(P(b,b)) = V porque
<i(b),i(b)> = <2,2> ∈ i(P)

i(P(a,b)) = F porque
<i(a),i(b)> = <1,2> ∉ i(P)
i(P(b,a)) = F porque
<i(b),i(a)> = <2,1> ∉ i(P)

Elegimos i(a) = 1, i(b) = 2. Entonces i(P) = {<1,1>, <2,2>}
Esta interpretación hace falsa la fórmula.

Departamento Inteligencia Artificial

Validez lógica. Ejercicios

Decir si son válidas o no (y ese caso si en algún sentido de la implicación lo son) las siguientes FBF en D = {1, 2}

1. $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$
2. $P(a) \rightarrow \exists x\, P(x)$
3. $P(a) \rightarrow \forall x\, P(x)$
4. $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$
5. $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$
6. $\forall x\, \neg P(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, P(x)$
7. $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$
8. $\forall x\, P(x) \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg P(x)$
9. $\exists x\, P(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg P(x)$
10. $(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$
11. $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$
12. $(\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$
13. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$
14. $\forall x \forall y\, R(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x\, R(x,y)$
15. $\exists x \exists y\, R(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x\, R(x,y)$
16. $\exists y \forall x\, R(x,y) \leftrightarrow \forall x \exists y\, R(x,y)$
17. $\exists x \forall y\, (P(x) \wedge Q(y)) \leftrightarrow \forall y \exists x\, (P(x) \wedge Q(y))$

Departamento Inteligencia Artificial

Consecuencia lógica. Ejemplo 1

- Sea el argumento: ***Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente***.

- Y su formalización: $\{ \exists x(I(x) \vee H(x)), \neg H(a) \} \models \neg I(a)$

- Para determinar la validez de este argumento por medios semánticos, tratemos de definir una interpretación que:
  1. Verifique las premisas: $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ y $i(\neg H(a)) = V$
  2. False la pretendida conclusión: $i(\neg I(a)) = F$

- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. D = { Juan, Pedro }

- Y ampliemos el lenguaje del argumento con una segunda constante: b

- Veamos en detalle verificación de las premisas y falsación de la conclusión:

Consecuencia lógica. Ejemplo 1

1. $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ sii
   - $i(I(a) \vee H(a)) = V$ sii
     - $i(I(a)) = V$ o bien $i(H(a)) = V$

   o bien
   - $i(I(b) \vee H(b)) = V$ sii
     - $i(I(b)) = V$ o bien $i(H(b)) = V$

2. $i(\neg H(a))) = V$ sii
   - $i(H(a)) = F$
3. $i(\neg I(a)) = F$ sii
   - $i(I(a)) = V$

i(I(a)) = V porque
<i(a)> = <Juan> ∈ {<Juan>, <Pedro>} = i(I)

i(H(a)) = F porque
<i(a)> = <Juan> ∉ {<Pedro>} = i(H)

i(I(a)) = V porque
<i(a)> = <Juan> ∈ {<Juan>, <Pedro>} = i(I)

- La interpretación:
  1. i(a) = Juan, i(b) = Pedro
  2. $i(I^1) = \{<Juan>, <Pedro>\}$, $i(H^1) = \{<Pedro>\}$,

- Verifica las premisas y falsa la conclusión, luego el argumento no es válido.

Consecuencia lógica. Ejemplo 2

- Sea el argumento: *Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.*

- Y su formalización: $\{ \forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x))), E(a) \wedge \neg O(a) \} \models R(a)$

- Para determinar la validez de este argumento, tratemos de definir una interpretación que:
  1. Verifique las premisas: $i(\forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x)))) = V$ y $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$
  2. Falsifique la conclusión: $i(R(a)) = F$

- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. D = { carbono, oxígeno }
- Ampliemos el lenguaje de formalización del argumento con una nueva constante: b

- No puede verificar las premisas y falsar la conclusión:
  1. $i(\forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x))))= V$ sii
     1. $i(E(a) \rightarrow (O(a) \vee R(a))) = V$ sii $i(E(a))=F$ o bien $i(O(a) \vee R(a))=V$
     2. $i(E(b) \rightarrow (O(b) \vee R(b))) = V$ sii $i(E(b))=F$ o bien $i(O(b) \vee R(b))=V$

  2. $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$ sii
     1. $i(E(a))=V$
     2. $i(\neg O(a))=V$ sii $i(O(a))=F$

  3. $i(R(a)) = F$

- Lo que impide crear el contra-modelo ***no depende de I***, luego **el argumento es válido.**

Departamento Inteligencia Artificial

Ejercicios de demostración semántica

Demostrar por medios semánticos para D = {0, 1, 2} y para D = {3} si son argumentos válidos:

1. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \models Q(a)$
2. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \models Q(a)$
3. $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\} \models \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$
4. $\models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
5. $\models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

Departamento Inteligencia Artificial

Ejercicios de demostración semántica

Determina por medios semánticos la validez de los siguientes argumentos:

1. *0>1. 1>2. La relación ‘>’ es transitiva. Por tanto, 0>2.*
2. *Robin Hood es generoso. Todos los ladrones son generosos. Por tanto, Robin Hood es un ladrón.*
3. *Siempre que Pedro discute con María, ésta se enfada con su padre. Una persona que se enfade con otra no la invita a su boda. Por tanto, si Pedro discute con María, ésta no invitará a su padre a su boda.*
4. *Todos los ladrones son generosos. Sólo los ricos son generosos. Robin Hood es un ladrón. Por tanto, Robin Hood es rico.*
5. *Juan Carlos ama a Sofía. Quienes trabajan con Juan Carlos no conocen a fondo a Sofía. Si se ama a alguien, se le conoce a fondo. Sabino trabaja con Juan Carlos. Por tanto, Sabino no ama a Sofía.*
6. *Hay un ladrón generoso. Por tanto, hay un ladrón y hay alguien generoso.*
7. *Hay un ladrón y hay alguien generoso. Por tanto, hay un ladrón generoso.*
8. *Todo elemento pesado es metálico. Por tanto, ningún no metal es un elemento pesado.*
9. *No es cierto que todo sea blanco o negro. Por tanto, hay algo que no es ni blanco ni negro.*

Departamento Inteligencia Artificial

Ejercicios de demostración semántica

Formalización y soluciones:

1. $\{ M(a,b), M(b,c), \forall x \forall y \forall z(M(x,y) \wedge M(y,z) \rightarrow M(x,z)) \} \models M(a,c)$
2. $\{ G(a), \forall x(L(x) \rightarrow G(x)) \} \not\models L(a)$
3. $\{ D(a,b) \rightarrow E(b,f(b)), \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow \neg I(x,y)) \} \models D(a,b) \rightarrow \neg I(b,f(b))$
4. $\{ \forall x(L(x) \rightarrow G(x)), \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg G(x)), L(a) \} \models R(a)$
5. $\{ A(a,b), \forall x(T(x,a) \rightarrow \neg C(x,b)), \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow C(x,y)), T(c,a) \} \models \neg A(c,b)$
6. $\exists x(L(x) \wedge G(x)) \models \exists x L(x) \wedge \exists x G(x)$
7. $\exists x L(x) \wedge \exists x G(x) \not\models \exists x(L(x) \wedge G(x))$
8. $\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \models \forall x(\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$
9. $\neg \forall x(B(x) \vee N(x)) \models \exists x(\neg B(x) \wedge \neg N(x))$

Departamento Inteligencia Artificial