



TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Ingeniería de Telecomunicación (4º, 2º c)

Unidad 3ª: Introducción a la estimación

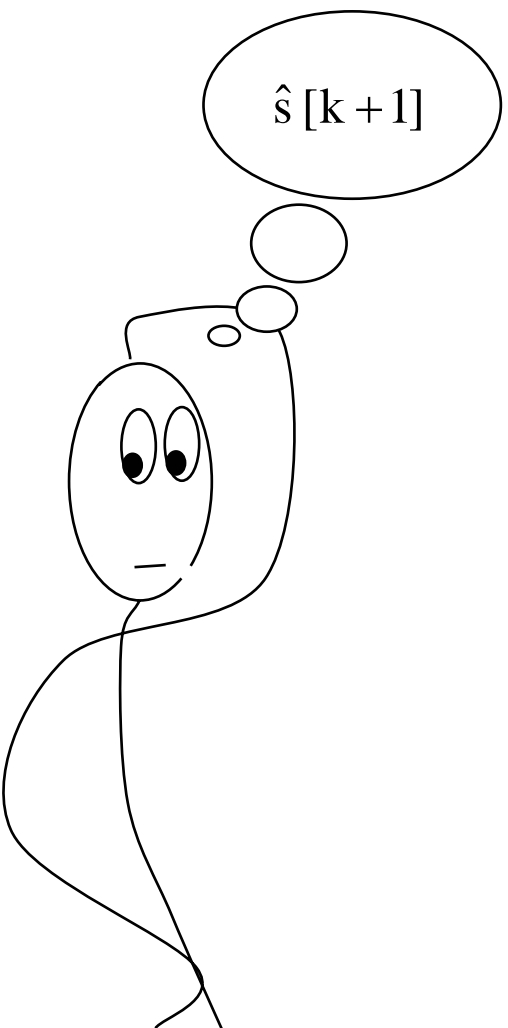
Aníbal R. Figueiras Vidal
Jesús Cid Sueiro
Ángel Navia Vázquez

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

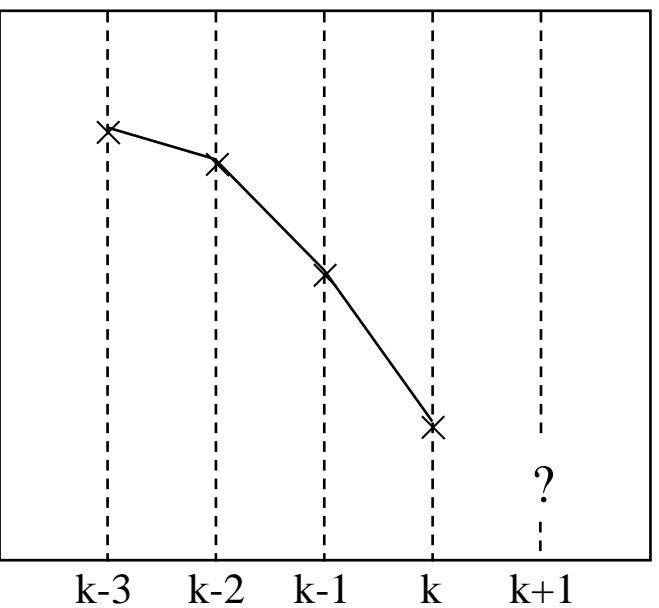
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



problema de predicción

predicción del tipo de cambio de divisas



ATSC-DTC/UCHIM

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

utilidad es múltiple: desde operaciones especulativas hasta previsiones
sobre la economía de los países.

En cualquier caso, se pretende obtener $\hat{s}[k+1]$ lo más parecido posible a $s[k+1]$ (la aplicación concreta que se considere puede influir en la elección de la medida) utilizando los datos (y/o el conocimiento) disponibles.

En estos son los problemas de **estimación (predicción**, si se estima un valor futuro): la diferencia fundamental con los de clasificación es que el resultado es un valor estimado continuo \hat{s} (\hat{s}).

Por lo tanto, el estimador es una función continua $f_w(\mathbf{x})$.

ATSC-DTC/UCIIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

--

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

predicción es una de las tareas típicas del **Análisis de Series** temporales (y Espaciales), parte de la Estadística clásica. También del muestreo (Digital) de Señales.

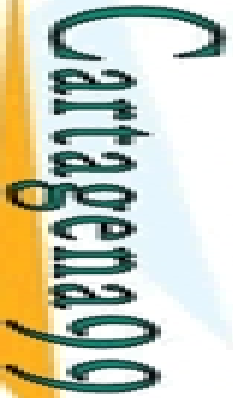
En algunas ocasiones, no se realiza la predicción en sentido estricto: p. ej., para la inversión bursátil interesa saber cuándo conviene comprar o vender, y se trata de aprender a manejar “predictivamente” los datos para construir **indicadores** que se marcan los correspondientes instantes (entre ellos, se mantiene la posición); en definitiva, se decide. Esto constituye lo que se llama **Análisis técnico**: el **Fundamental** se apoya en consideraciones de teoría económica.

ATSC-DTC/UCHIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



ión

¿Es razonable realizar una predicción a partir de únicamente el registro del pasado para predecir?

- Variable que sea una variable “físicamente” aislada, importan:*
- Variables “exógenas”: cuyos valores se generan independientemente de la variable considerada, pero influyen sobre ésta;*
- Variables análogas: que evolucionan siguiendo mecanismos en parte comunes con el que rige la variable considerada.*

¿Es natural tomar los valores más recientes del registro de una variable como las mejores observaciones para su predicción? Si cree que no, dé un ejemplo.

¿Qué sucede si un proceso tiene una fuerte componente cíclica, son (en principio) suficientes las observaciones separadas por un periodo. En general, el problema de selección de variables está abierto para cada caso que se considere.

ATSC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

qué diferencias existen entre las consideraciones destinadas a elegir f_w to a las de elección de F_w .

Conceptualmente, ninguna: sólo que se trata de una función que toma valores continuos, y no discretos.

puede resolver un problema de estimación de una variable dimensional s mediante la resolución separada de la estimación de cada sus componentes?

Sólo si la medida de similitud entre s y \hat{s} se puede descomponer en suma de medidas de similitud de sus componentes; lo que se da, p. ej., para el error cuadrático.

te el modo de funcionamiento de algún indicador para inversión

ATSC-DTC/UCIIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 --
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

problemas que se plantean en términos de estimación son:

medida de una magnitud física

determinación de los parámetros de un modelo

recuperación de sincronismo (de portadora, de símbolo, ...) en una transmisión

predicción del consumo eléctrico en una cierta zona

trazado de un enlace ferroviario

sobre los aspectos generales de dichos problemas.

ATSC-DTC/UCHIM

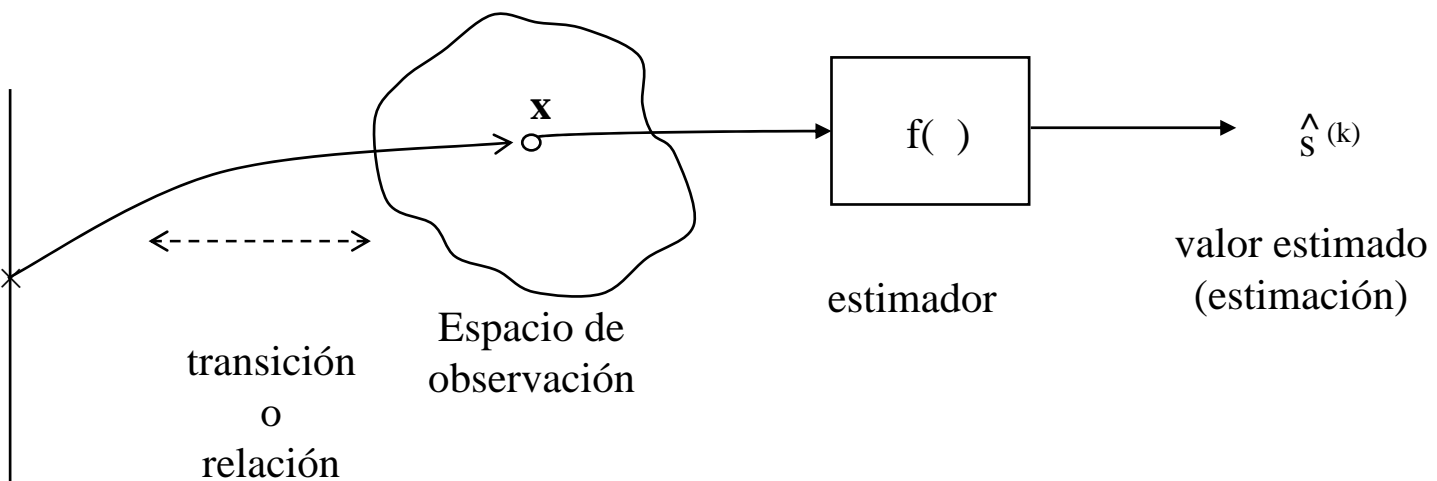


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

--

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

de la estimación



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ATSC-DTC/UCHIM



ación analítica

onocidos (habitualmente)

ste $C(s, \hat{s})$ (no negativo)

mente: $C(s, \hat{s}) \rightarrow C(s - \hat{s}) = C(e)$; e: **error** de estimación

rosimilitud $p(\mathbf{x}|s)$

s una v. a.: su ddp “**a priori**”, $p(s)$

terior (si s es v.a.): $p(\mathbf{x} | s) p(s) = p(\mathbf{x}, s)$

$$\int_{(s)} p(\mathbf{x} | s) p(s) ds = p(\mathbf{x})$$

$$p(s | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | s)p(s)}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x} | s)p(s)}{\int_{(s)} p(\mathbf{x} | s) p(s) ds}$$

ATSC-DTC/UCHIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



ios de Ampliación

na va.

re la elección de \hat{s} mediante la minimización del coste medio global, $\bar{C}(\hat{s})$,
coste medio a la vista de la observación, $\bar{C}(\hat{s} | \mathbf{x})$

$$\begin{aligned}\bar{C}(\hat{s}) &= E_{\mathbf{x},s} \{C(s, \hat{s}(\mathbf{x}))\} = \int \int C(s, \hat{s}) p(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x} ds = \\ &= \int p(\mathbf{x}) \left[\int C(s, \hat{s}) p(s | \mathbf{x}) ds \right] d\mathbf{x}\end{aligned}$$

ntesis cuadrado es $\bar{C}(\hat{s} | \mathbf{x})$: si se minimiza para cada \mathbf{x} , se minimiza $\bar{C}(\hat{s})$.

la base de la **Teoría Bayesiana de la Estimación**.

ATSC-DTC/UCHIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

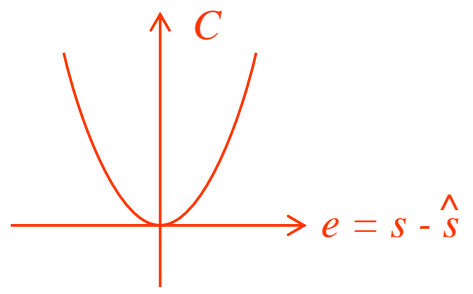


na va.

ine el estimador \hat{s}_{ms} que minimiza el error cuadrático medio (MMSE) e^2 .

$$(\hat{s} / \mathbf{x}) = \min_{\hat{s}} \int (s - \hat{s})^2 p(s / \mathbf{x}) ds$$

$$= -2 \int (\hat{s} - \hat{s}_{ms}) p(s / \mathbf{x}) ds = 0$$



$$p(s / \mathbf{x}) ds = \hat{s}_{ms} = \int sp(s / \mathbf{x}) ds = \underline{E\{s / \mathbf{x}\}} : \text{media a posteriori}$$

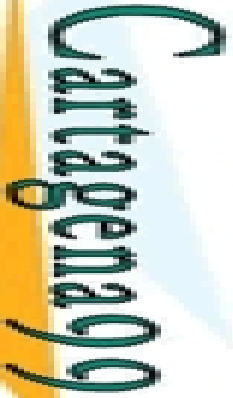
$$= 2 \int p(s / \mathbf{x}) ds = 2 > 0 : \text{es un mínimo}$$

imización del momento de segundo orden es una propiedad conocida de la

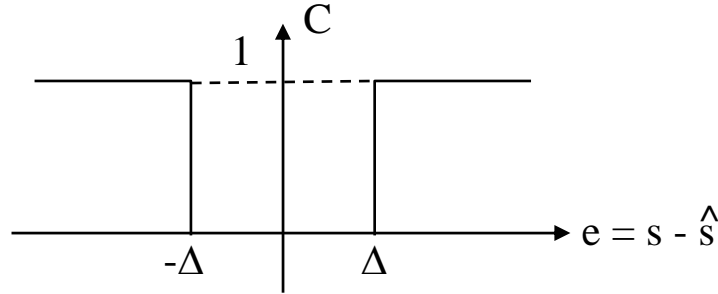
ATSC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

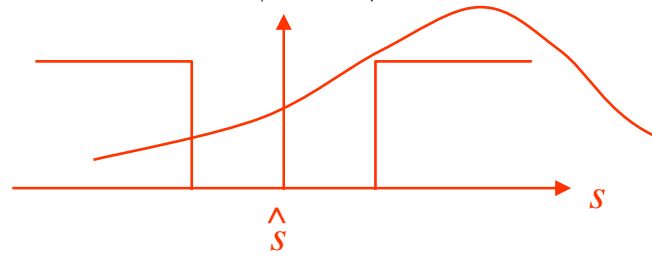


Define el estimador \hat{s}_{map} de una va. s que minimiza la función de coste de la



$\Delta \rightarrow 0$ (suficientemente pequeño respecto al ritmo de variación de $p(s | \mathbf{x})$).

que su denominación: “**Máximo A Posteriori**” (MAP).



Es claro que se trata de

$$\max_{\hat{s}} \int_{\hat{s}-\Delta}^{\hat{s}+\Delta} p(s | \mathbf{x}) ds$$

que, con $\Delta \rightarrow 0$, conduce a: $\hat{s}_{map} = \arg \left\{ \max_s p(s | \mathbf{x}) \right\} = \text{mod}(s | \mathbf{x})$

moda a posteriori

puede ser útil:
$$\hat{s}_{map} = \arg \left\{ \max_s \ln p(s | \mathbf{x}) \right\}$$

ATSC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Compara el estimador de **Máxima Verosimilitud (ML)** al que se obtiene como

$$\hat{s}_{ml} = \arg \left\{ \max_s (\ln) p(\mathbf{x} / s) \right\}$$

es una va., relacione \hat{s}_{ml} con \hat{s}_{map}

¿puede emplearse \hat{s}_{ml} en algún otro caso?

$$\ln p(s / \mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x} / s) + \ln p(s) - \ln p(\mathbf{x})$$

$$\arg \left\{ \max_s \ln p(s / \mathbf{x}) \right\} = \arg \left\{ \max_s [\ln p(\mathbf{x} / s) + \ln p(s)] \right\}$$

Por lo tanto, si se desconoce $p(s)$, lo lógico es no hacer intervenir $p(s)$: pasando así del \hat{s}_{map} al \hat{s}_{ml} .

Es obvio que $p(\mathbf{x} / s)$ existe aún si s es una variable determinista: por lo que puede emplearse para su estimación (ML).

ATSC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 --
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Obtenga las estimaciones ML de la media y la varianza de una va. x con la función $G(m, v)$ de la que se hacen K observaciones independientes, $\{x^{(k)}\}$.

Suponga que m y v son deterministas; hacen el papel de s)

$$G(m, v): \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2v}\right]$$

para las observaciones independientes

$$p(\mathbf{x} / s) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{(x^{(k)} - m)^2}{2v}\right]$$

$$\ln p(\mathbf{x} / s) = \sum_{k=1}^K \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi v - \frac{(x^{(k)} - m)^2}{2v} \right]$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} / s)}{\partial m} \bigg|_{m=\hat{m}_{ml}} = 0 = \sum_{k=1}^K (x^{(k)} - \hat{m}_{ml}) \quad \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x} / s)}{\partial m^2} = -\frac{K}{v} < 0 \right)$$

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x^{(k)} : \text{media muestral} \quad (\text{nótese su linealidad})$$

ATSC-DTC/UCHIM

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 --
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\sum_{k=1}^K \left[-\frac{1}{2v} + \frac{(x^{(k)} - m)^2}{2v^2} \right] ; \quad \left. \frac{\partial \ln}{\partial v} \right|_{\substack{v=\hat{v}_{ml} \\ m=\hat{m}_{ml}}} = 0 = -K + \frac{1}{\hat{v}_{ml}} \sum_{k=1}^K (x^{(k)} - \hat{m}_{ml})^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln}{\partial v^2} = -\frac{1}{v^2} \sum_{k=1}^K (x^{(k)} - m)^2 < 0 \right)$$

$$\hat{v}_{ml} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x^{(k)} - \hat{m}_{ml})^2 : \quad \text{varianza muestral}$$

estuviese dado, aparecería en \hat{v}_{ml} en el lugar de \hat{m}_{ml}).

que la estimación de la media equivale a

$$\min_m \sum_{k=1}^K (x^{(k)} - m)^2$$

Minimizar el error cuadrático muestral: de este hecho se deriva un conjunto de métodos de estimación de parámetros deterministas que se conocen como métodos de mínimos cuadrados (“Least Squares”, LS) (¡no “medios”!).

ATSC-DTC/UCIIM

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

que para calcular \hat{m}_{ml} y \hat{v}_{ml} basta con conocer $\sum x^{(k)}$ y $\sum x^{(k)2}$; sin necesidad de conocer por separado los valores de $\{x^{(k)}\}$. A este tipo de estadísticos que pueden sustituir a las observaciones se los conoce como **estadísticos suficientes**: su uso puede simplificar grandemente problemas de estimación y decisión.

En el caso multidimensional, se obtendrían:

$$\hat{m}_{ml} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\hat{v}_{ml} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}^{(k)} - \hat{m}_{ml})(\mathbf{x}^{(k)} - \hat{m}_{ml})^T$$

ATSC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70