

Ejemplo Sea la sucesión recurrente $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$.

- Utilizando el principio de inducción, se demuestra que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente:

- Si $n=1$, se verifica que $a_1 \leq a_2$ porque $1 \leq \frac{4}{3}$.
- Supuesta cierta la desigualdad para n , $a_n \leq a_{n+1}$, probamos que es cierta para $n+1$, $a_{n+1} \leq a_{n+2}$:

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n \leq \frac{1}{3}a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n + 1 \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

Luego se cumple que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Ahora se prueba, también por inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente por $M = \frac{3}{2}$:

- Si $n=1$, se verifica que $a_1 \leq \frac{3}{2}$ porque $1 \leq \frac{3}{2}$.
- Supuesta cierta la desigualdad para n , $a_n \leq \frac{3}{2}$, probamos que es cierta para $n+1$, $a_{n+1} \leq \frac{3}{2}$:

$$a_n \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}a_n + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Luego se cumple que $a_n \leq \frac{3}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente. Por tanto, es convergente, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$.
- Para calcular su valor, se toma límite en la expresión que define la sucesión y se utiliza la siguiente propiedad: "Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = L$ ".

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}a_n + 1 \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + 1 = \frac{1}{3}L + 1.$$

Resolviendo $L = \frac{1}{3}L + 1$, se obtiene $L = \frac{3}{2}$.

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{2}$.