

# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

## TEMA 3.1 ESTRUCTURA DE UNA COLA

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## CONTENIDOS

1. Introducción
2. Elementos básicos de un modelo de colas: población, régimen de llegadas, número de servidores, régimen de servicio, capacidad del sistema, disciplina de la cola, fases de servicio
3. Notación Kendall:  $A / B / c / k / m / Z$
4. Medidas de comportamiento: intensidad de tráfico, utilización del servidor, paso a través del sistema (productividad). Sistema estable y sistema saturado
5. Ecuaciones de coste y fórmula(s) de Little: relación entre el número medio de clientes en sistema (cola, servicio) y tiempo

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

inmunes. Propiedad PASTA

### 1. Introducción

En numerosas situaciones de nuestra vida diaria esperamos en una **cola o línea de espera**, como para comprar el billete del metro o la entrada de cine, para cobrar un cheque en el banco, para pagar en el supermercado o la cafetería, para obtener una mesa en un restaurante, para ser operado o atendido en un hospital, para echar gasolina o pagar el peaje, para desplazarnos en un atasco de tráfico, etc.

También en los sistemas informáticos son frecuentes los **fenómenos de espera**. Así, puede haber colas de personas esperando a usar un terminal, colas de solicitudes de entrada/salida (E/S), mensajes o paquetes de datos o programas informáticos que esperan para ser procesados por un sistema

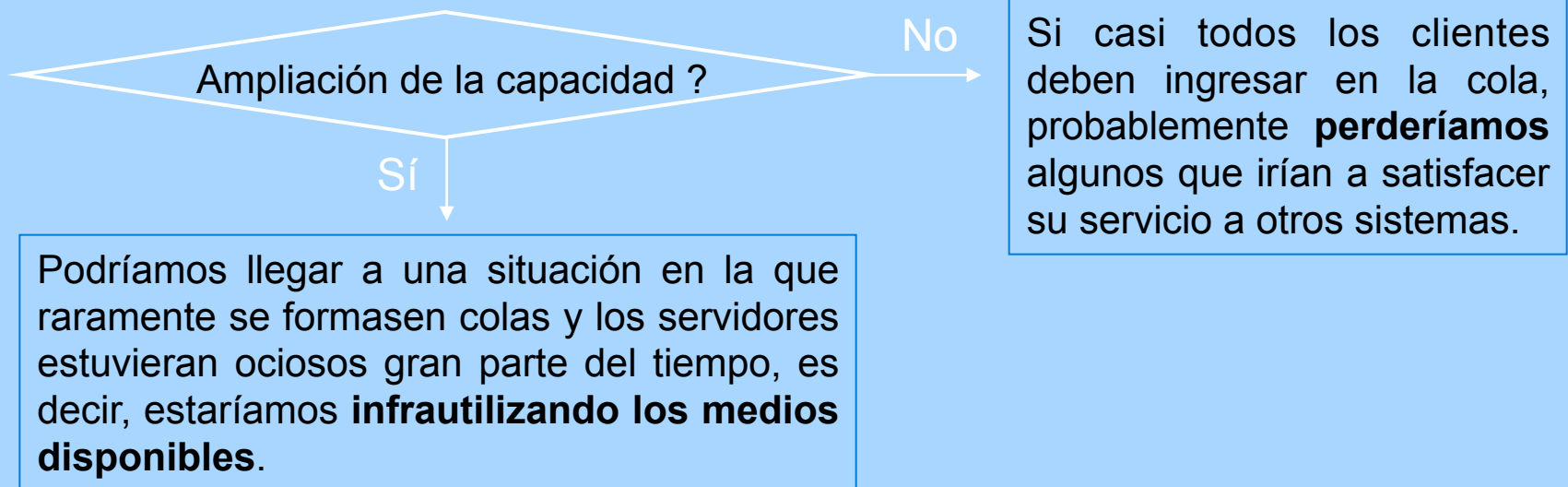
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a white background with a subtle orange and blue gradient behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La espera se produce porque hay **más demanda de servicio que el disponible**. Sin embargo, ampliar esta capacidad de servicio no siempre es la solución adecuada.



# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**de servicio con unos gastos no excesivos.**

Para llegar a una solución, el analista del sistema necesita conocer las respuestas a preguntas como:

- ¿cuánto tiempo debe esperar un cliente?
- ¿cuántos clientes se acumularán en la cola? o
- ¿cuántos clientes llegan por unidad de tiempo?

A partir de ellas podrá considerar varios sistemas alternativos y tratar de evaluar su funcionamiento.

La **teoría de colas** proporciona al planificador diversos modelos que dan respuesta a estas cuestiones y, en particular, ha demostrado ser una de las áreas más fructíferas de la **Teoría de la Probabilidad** aplicada a la In-

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

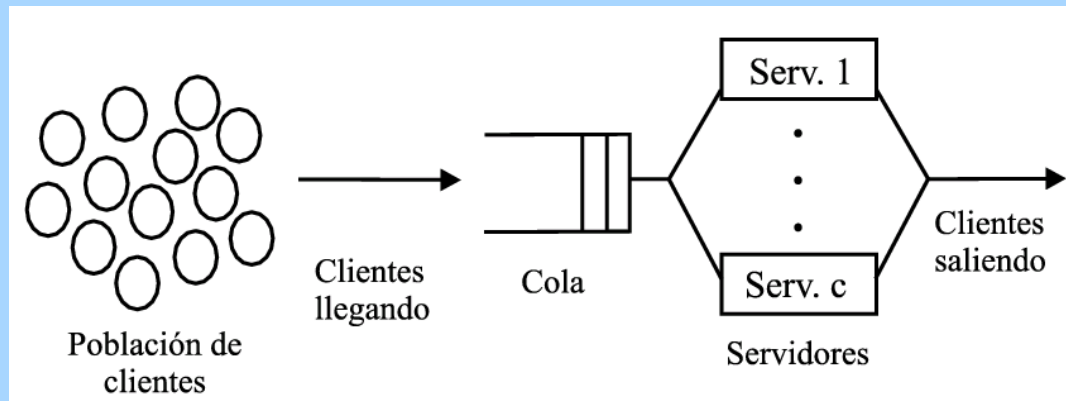
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2. Elementos básicos de un modelo de colas

La siguiente figura esquematiza los elementos de un sistema de colas. Los **clientes**, que provienen de una **población** o fuente llegan al **sistema** para recibir algún tipo de **servicio**.



El **dispositivo de servicio** del sistema ofrece un conjunto (limitado) de servidores o recursos, a veces llamados canales, para satisfacer las

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

na el sistema.

Una descripción más precisa de un sistema de colas requiere especificar en detalle siete características básicas:

- 1. Población o fuente de clientes**
- 2. Modelo de llegadas**
- 3. Modelo de servicio de cada servidor**
- 4. Número de servidores o canales**
- 5. Número de etapas de servicio**
- 6. Capacidad del sistema**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Población o fuente de clientes

La **población o fuente de clientes potenciales** puede ser finita o infinita.

Infinita → conduce a sistemas con descripciones matemáticas más sencillas,

Finita → el número de clientes en el sistema afecta a la tasa de llegadas, que será cero si todos los clientes están en el sistema.

Si la población es finita pero suficientemente grande, se asume que es infinita para simplificar el análisis del modelo.

## Modelo de llegadas

Describe el patrón de llegadas de los clientes al sistema.

Si es **determinista** (llegadas están igualmente espaciadas en el tiempo) bastará caracterizarlo midiendo el número medio de llegadas por unidad

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



En general, habrá **incertidumbre** en el modelo de llegadas y habrá que especificar la ley de probabilidad que rige el comportamiento aleatorio de las llegadas.

Suponemos que los **tiempos de llegada** de los clientes son

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

La observación del sistema comienza en el instante 0 y  $t_k$  es el instante en el que llega el cliente  $k$ -ésimo. Las variables aleatorias  $T_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  representan los **tiempos entre llegadas**.

Normalmente, supondremos que el proceso estocástico continuo de tiempo discreto  $T_1, T_2, \dots$  es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con distribución  $T$ , con  $E(T) = 1/\lambda$ .

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Los descriptores usuales son:

- $M$ : tiempo entre llegadas es exponencial (el proceso de llegadas es de Poisson); la letra  $M$  proviene de la propiedad Markoviana de la exponencial;
- $D$ : tiempo entre llegadas con patrón determinista o constante;
- $E_k$ : tiempo entre llegadas con distribución de Erlang de  $k$  etapas;
- $H_k$ : tiempo entre llegadas con distribución hiperexponencial de  $k$  etapas;
- $G$ : tiempo entre llegadas sigue una distribución general o arbitraria.

Si el patrón de llegadas no cambia con el tiempo, es decir, la forma y los valores de los parámetros de la distribución son siempre iguales con el paso del tiempo, el modelo de llegadas es **estacionario**.

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

dentista). En este caso, el tamaño del lote es otra variable aleatoria del

Reacción del cliente al llegar al sistema:

- Un cliente puede decidir ingresar en la cola sin importarle la longitud de ésta, o si la considera demasiado larga puede decidir no entrar.
- También es posible que después de estar cierto tiempo en la cola decida marcharse.
- Por último, en el caso de disponer de dos o más colas simultáneamente, los clientes pueden decidir cambiarse de una a otra.

Estas situaciones son ejemplos de colas con **clientes impacientes**, y pueden considerarse **llegadas dependientes del estado (o congestión) del sistema**.

### Modelo de servicio en cada servidor

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The logo is set against a white background with a light blue and orange gradient behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

En el caso **determinístico**, el patrón de servicio quedará descrito mediante el número de clientes servidos por canal por unidad de tiempo o mediante el tiempo requerido para servir a un cliente.

En caso contrario, será necesario especificar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $s$ .

Supondremos que la secuencia de los tiempos de servicio de clientes sucesivos  $s_1, s_2, \dots$  también es un conjunto de v.a.i.i.d. con  $E(s) = 1/\mu = W_s$ .

Además, los procesos de llegadas y de servicio suelen considerarse independientes entre sí.

Sin embargo, existe una diferencia importante entre ambos procesos. Cuando hablamos de **tasa de servicio** o **tiempo de servicio**, los términos están condicionados a que el sistema no esté vacío (el servidor esté ocupado).

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Es decir, la **tasa media de servicio** es la tasa media a la que el servidor procesa a los clientes si estuviese ocupado el 100% del tiempo.

La notación para los patrones de servicio:  $M$ ,  $D$ ,  $E_k$ ,  $H_k$ ,  $G$ .

Así,  $M$  significa que la variable aleatoria  $s$  es exponencial de parámetro  $\mu$ , que es la más usada. Por la **propiedad de pérdida de memoria** de la exponencial, el tiempo restante hasta completar el servicio de un cliente es independiente del tiempo que este cliente lleve en el canal.

El servicio puede ser **estacionario** o no respecto al tiempo (Ej. Un servidor que va aprendiendo y se vuelve más eficiente según adquiere experiencia).

La dependencia del tiempo no debe confundirse con **dependencia del estado**, es decir, del número de clientes que hay en el sistema. (Ej. trabajar más rápido según ve que se incrementa el número de clientes en la cola).

The logo for Cartagena99, featuring the text "Cartagena99" in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

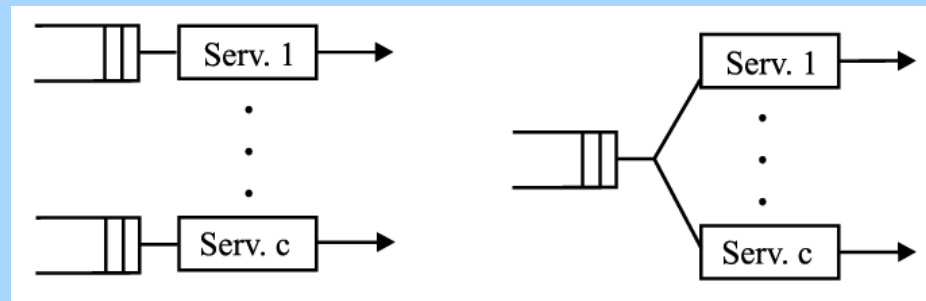
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

un ordenador con procesamiento paralelo o turistas en una visita guiada.

## Número de servidores o canales

El sistema de colas más sencillo tiene un único servidor, que atiende a un solo cliente cada vez. Un sistema **multicanal** o **multiservicio** dispone de  $c$  canales paralelos y puede dar servicio a  $c$  clientes a la vez.

La siguiente figura muestra dos variaciones de sistemas multicanal, cada canal tiene su propia línea de espera (cajas de supermercados o pasar la ITV de un coche), y una sola cola para todos los canales (turno en la peluquería).



# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

información cada cliente que llega es atendido inmediatamente.

### Número de etapas de servicio

A veces existen varias etapas de servicio por las que debe pasar el cliente, como en una cadena de producción o de montaje. Variantes:

- cada etapa acepta un cliente una vez que ha terminado el servicio del anterior (línea de sistemas de espera),
- la primera etapa sólo acepta un nuevo cliente cuando el anterior ha abandonado la última etapa (servidor constituido por diversas etapas).

La siguiente figura ilustra un sistema de colas con la primera variante, y además, presenta **reciclado o retroalimentación**, típico en procesos de fabricación con inspecciones para control de calidad en ciertas etapas.

Un artículo que no cumple ciertas normas de calidad debe ser reprocesado.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Capacidad del sistema

En algunos sistemas de colas hay limitación física sobre el número máximo  $K$  de clientes que puede haber en el sistema. Cuando la cola alcanza cierta longitud, cualquier cliente que llega es rechazado hasta que se dispone de sitio, por completarse algún servicio.

El estado del sistema influye en la **tasa de entradas al sistema**  $\lambda_e$ , que es igual a la tasa de llegadas al sistema  $\lambda$  menos el número medio de clientes que no entran al mismo.

Un caso extremo son los llamados **sistemas de pérdidas**, que no admiten colas, como algunos sistemas de comunicación telefónica. En otros sistemas, sin embargo, puede suponerse que su capacidad es **infinita** y todo cliente que llega puede esperar hasta que se le proporcione servicio.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

dispositivo de servicio



- **FIFO** (first-in, first-out) o FCFS (first-come, first-served). La más corriente es la de "el primero en llegar es el primero en entrar". Es la que se supondrá por defecto.
- **LIFO** (last-in-first-out) o LCFS . El primero en entrar es el último en llegar. Usada en muchos sistemas de inventario en los que las unidades no son perecederas y resulta más sencillo tomar las unidades más cercanas, que se almacenaron más tarde.
- **SIRO** (service in random order). Servicio en orden aleatorio, independientemente del instante de llegada a la cola.
- **SIFO** (shortest-in, first-out) o SJF (shortest job first). Se sirve primero al cliente que demanda un tiempo de servicio menor.
- **RR** (round robin, turno robado). Reparte el tiempo del servidor equitativa-

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, green, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the "Cartagena" part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

que el cliente termina su servicio.

- **PS** (processor sharing) o de compartición del procesador. Disciplina RR en la que las rodajas de tiempo son infinitamente pequeñas. Es como si todos los clientes fueran servidos simultáneamente y sus tiempos de servicio incrementados de la misma forma.

**Esquemas de prioridades** → dan trato preferencial a ciertos clientes sobre otros. Los clientes están divididos en clases de prioridades. Los de prioridades más altas son servidos antes que los de prioridades más bajas, independientemente de su instante de llegada al sistema. Las prioridades pueden ir variando con el paso del tiempo.

- **prioridad expulsiva**, o con desalojo o apropiación (preemptive). Se interrumpe el servicio, el cliente recién llegado comienza a ser servido, y el cliente cuyo servicio ha sido interrumpido vuelve a la cabeza de la cola de su clase. Cuando el cliente desalojado reanude su servicio, éste comenzará desde el principio o desde el punto de interrupción, dependiendo del tipo de sistema.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### 3. Notación Kendall: $A / B / c / k / m / Z$

Todos estos elementos básicos que describen un sistema de colas se representan mediante una notación abreviada estándar, denominada notación de Kendall (en honor a David Kendall).

Escribiremos  $A/B/c/K/m/Z$ , donde:

$A$  indica la distribución del tiempo entre llegadas,

$B$  la distribución del tiempo de servicio,

$c$  el número de canales de servicio ( $c \geq 1$ ),

$K$  la capacidad del sistema,

$m$  el tamaño de la población y

$Z$  la disciplina de la cola.

Por ejemplo,  $D/M/3/40/\infty/LIFO$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### 4. Medidas de rendimiento del sistema

Serán útiles tanto para el propio cliente que ingresa en el sistema como para el planificador, gestor o analista del mismo.

Como estos modelos representan sistemas dinámicos, los valores de estas medidas varían con el tiempo. Sin embargo, analizaremos los resultados que se obtienen cuando el sistema está en **equilibrio**, es decir, el comportamiento transitorio ha finalizado, está en **estado estacionario**, el sistema se ha normalizado y los valores de las medidas de comportamiento son independientes del tiempo.

Entonces, se verifica que la tasa a la que los clientes llegan al sistema es igual a la tasa a la que salen del sistema. A este sistema también se le denomina **sistema estable**.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Las medidas más importantes del rendimiento de un sistema de colas son:

- 1. Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema**
- 2. Trabajo**
- 3. Intensidad de tráfico**
- 4. Utilización o uso del servidor**
- 5. Productividad del sistema**
- 6. Tiempos de permanencia en el sistema y en la cola**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Probabilidad de que haya $n$ clientes en el sistema

Los valores medios de muchas otras medidas podrán deducirse de ella:

$$\pi_n = P(\text{hay } n \text{ clientes en el sistema}) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$$

Por ejemplo,  $\pi_0 = 0.4$  indica que a largo plazo el sistema estará vacío el 40% del tiempo.

## Trabajo

La llegada de cada cliente supone al sistema una cantidad media de trabajo, que suele medirse en tiempo y que coincide con su tiempo medio de servicio  $W_s = 1/\mu$ .

## Intensidad de tráfico

Se define como:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Por ejemplo, si el tiempo entre llegadas fuese siempre constante e igual a 30 segundos y el de servicio 15 segundos, entonces el servidor estaría ocupado la mitad del tiempo:  $r = 15/30 = 0.5$ .

Si este servidor fuese reemplazado por otro más lento, que emplea 45 segundos en dar servicio, entonces  $r = 45/30 = 1.5$ . Es decir, necesitaría dar 45 segundos de servicio cada 30 segundos, lo que es imposible, a no ser que se añadiese otro servidor.

Es, por tanto, una medida del número mínimo de canales que se necesitan para atender el flujo de clientes que llegan y que hace que el sistema sea estable.

Por ejemplo, si  $\lambda = 9$  clientes por día y  $\mu = 2$  clientes por día, entonces  $r = 4.5$  y necesitaríamos al menos 5 canales para poder satisfacer las necesidades de los clientes.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Utilización o uso del servidor

El uso o (factor de) utilización de un servidor si hay varios ( $c$ ) en el sistema, es la fracción media de servidores activos (proporción media de tiempo que cada servidor está ocupado).

Por tanto, como  $c\mu$  es la tasa global de servicio, suponiendo que el tráfico está igualmente repartido entre todos los servidores,

$$p = r / c = \lambda / c\mu$$

representa también la cantidad media de trabajo que recibe cada servidor.

Si sólo hay un servidor,  $p$  es la proporción de tiempo que está ocupado, es decir,  $p = r$ , siempre que no haya límite sobre la capacidad del sistema.

$n$  es una medida de la congestión del sistema y, puede usarse para

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

numero de clientes que pueden ser atendidos.



Si no, el número de clientes almacenados en la cola crecerá sin límite con el paso del tiempo. Por eso llamaremos situación de congestión a  $\rho \geq 1$ .

La situación de igualdad,  $\rho = 1$ , da lugar a congestión salvo en contadas excepciones, como en una cola  $D/D/c$  con tráfico no aleatorio.

### Productividad del sistema

La **productividad del sistema** o **caudal** o **paso a través del sistema**,  $\lambda$ , es el número medio de clientes cuyo servicio se completa en una unidad de tiempo, es decir, es la tasa de salida del sistema.

Sistema con capacidad ilimitada,  $\lambda = \min\{\lambda, c\mu\}$ .

Sistema congestionado,  $\lambda = c\mu$ .

Sistema estable y sin pérdidas, como la tasa de salida coincide con la tasa de llegadas, se tiene que  $\lambda = \rho c\mu$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Tiempos de permanencia en el sistema ( $w$ ) y en la cola ( $q$ )

Las medias de dichos tiempos las denotaremos como  $W = E(w)$  y  $W_q = E(q)$ , respectivamente. Por tanto,  $w = q + s$  y tomando esperanzas,  $W = W_q + E(s) = W_q + 1/\mu = W_q + W_s$ .

A veces utilizaremos las funciones de distribución de estas tres variables aleatorias, denotadas como  $F_w(t)$ ,  $F_q(t)$ ,  $F_s(t)$ , respectivamente.

### Número de clientes en el sistema ( $N$ ) y en la cola ( $N_q$ )

La media de la variable aleatoria  $N$ , que toma los valores  $0, 1, 2, \dots$ , será

$$L = E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n$$

Podemos decir que  $N_q = \max\{0, N - c\}$ . Su esperanza matemática la denotaremos con  $L_q = E(N_q)$ .

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 5. Ecuaciones de coste y fórmulas de Little

Fórmulas de Little:

$$\begin{aligned}L &= \lambda W \\L_q &= \lambda W_q \\L_s &= \lambda W_s\end{aligned}$$

El teorema de Little es válido bajo condiciones muy generales de un sistema estable, cualquier número de servidores y para todas las disciplinas de colas.

Intuitivamente puede explicarse de la siguiente forma:

Un cliente que acaba de llegar saldrá del sistema, en promedio, después de un tiempo  $W$ . Cuando salga, quedarán en el sistema  $L$  clientes en promedio. Cada uno de estos clientes ha llegado, en promedio, tras un tiem-

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

análogo para la cola y el servicio.

Otra explicación se basa en la idea de que los clientes han de pagar por estar en el sistema. En este caso, esperamos que se cumpla

$$\left( \begin{array}{c} \text{Tasa media de} \\ \text{ingresos del sistema} \end{array} \right) = \lambda \times \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad media} \\ \text{pagada por cliente} \end{array} \right)$$

Entonces, si cada cliente paga 1 euro por cada unidad de tiempo que pasa en el sistema, la igualdad anterior se convierte en  $L = \lambda W$ ; si paga 1 euro por cada unidad de tiempo que pasa en la cola, se obtiene  $L_q = \lambda W_q$  y si paga 1 euro por cada unidad de tiempo que pasa en el servidor, se verifica  $L_s = \lambda W_s$

Si multiplicamos por  $\lambda$  la igualdad  $W = W_q + E(s)$ , obtenemos  $\lambda W = \lambda W_q + \lambda E(s)$ . Por las fórmulas de Little, resulta



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

número medio de clientes en los servidores

## 6. Comportamiento de transición y estacionario. Probabilidades límites. Propiedad PASTA

Nótese que siempre asumimos que el sistema ha alcanzado el **equilibrio**, pues si estuviera en estado transitorio habría que considerar la dependencia del tiempo que el sistema lleva funcionando y de las condiciones iniciales.

Hay dos variantes de las probabilidades  $\pi_n$ :

- proporción  $a_n$  ( $n \geq 0$ ) de clientes que encuentran  $n$  en el sistema al llegar
- proporción  $b_n$  ( $n \geq 0$ ) de clientes que dejan  $n$  en el sistema al salir.

$a_n$  corresponde a lo que una llegada observa,

$b_n$  a lo que una salida observa y

$\pi_n$  a lo que observaría alguien desde fuera.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

se sirven de uno en uno,  $a_n = b_n, \forall n$ .

**Demostración.** Cuando el sistema pasa de tener  $n$  clientes a  $n+1$  es cuando una llegada ve  $n$  clientes en el sistema. De igual modo, cuando pasa de  $n + 1$  a  $n$  es cuando una salida deja  $n$  en el sistema.

En cualquier intervalo de tiempo, el número de transiciones de  $n$  a  $n + 1$  se diferencia en 1 del número de transiciones de  $n + 1$  a  $n$ .

Por tanto, las tasas de transiciones de  $n$  a  $n + 1$  y de  $n + 1$  a  $n$  coinciden, o equivalentemente, también lo hacen la tasa a la que las llegadas encuentran  $n$  clientes y la tasa a la que las salidas dejan  $n$  clientes.

Se llega así al resultado deseado porque las tasas de llegadas y salidas globales deben coincidir.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is slightly larger and more prominent. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Esta **propiedad** se denomina **PASTA** (Poisson Arrivals See Time Averages): Las llegadas de Poisson siempre ven tiempos medios, es decir,  $\pi_n = a_n, \forall n$ .

**Demostración.** Si  $A(t, t+\Delta t)$  denota la llegada de un cliente en el intervalo  $(t, t+\Delta t)$ , se tiene

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(N(t) = n \mid A(t, t + \Delta t)) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(A(t, t + \Delta t) \mid N(t) = n)P(N(t) = n)}{P(A(t, t + \Delta t))} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(A(t, t + \Delta t))P(N(t) = n)}{P(A(t, t + \Delta t))} = P(N(t) = n) = p_n(t). \end{aligned}$$

La tercera igualdad se debe a la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, al ser las llegadas de Poisson.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} a_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = \pi_n.$$

Por tanto, la distribución de probabilidad que observarán los clientes al llegar será la distribución de probabilidad a lo largo del tiempo.

La **tarea del analista** de sistemas de colas consiste en caracterizar adecuadamente el modelo que va a utilizar para analizar el sistema real bajo estudio y todas las variables implicadas, pero también los costes asociados.

Una vez realizado este estudio, si el analista pudiera encontrar una relación a optimizar, de acuerdo a algún criterio, llegaría a determinar un sistema óptimo.

Sin embargo, no siempre es fácil llegar a este tipo de relación. En sistemas complejos nos deberemos conformar con formular diversas soluciones alternativas y obtener cuál de ellas es la mejor según ciertos

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

recorreremos a metodos numéricos o a la **simulación**.