

Tema 3 – Análisis de Sistemas LTI en el dominio transformado

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción

- <http://video.google.es/videoplay?docid=6726953938324261715>

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros ideales

Filtros Paso Bajo (Low Pass Filters)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad \longleftrightarrow^{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{lp}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

Filtros Paso Alto (High Pass Filters)

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad \longleftrightarrow^{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$$

Son filtros no causales y con respuesta impulsional infinita.

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

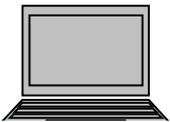
Filtros realizables

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

Ejemplo:

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 + \frac{1}{2} z^{-1})(1 + \frac{3}{4} z^{-1})} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{5}{4} z^{-1} + \frac{3}{8} z^{-2}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Filtros definidos por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias no define de forma única la respuesta al impulso del sistema. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

sea $h'[n] = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n$ donde $\sum_{m=0}^N a_m p_k^{-m} = 0$, $A_k \in \mathbb{R}$, $p_i \neq p_j$, entonces



$$\sum_{k=0}^N a_k h'[n-k] = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^N a_k (h[n-k] + h'[n-k]) = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

Es decir, hay N coeficientes indeterminados A_k que pueden ser fijados por medio

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta al impulso de un sistema racional

Expansión en fracciones parciales

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-k}} \longrightarrow h[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]}_{\text{FIR}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n]}_{\text{IIR}}$$

sólo si $M \geq N$
Polos en el origen
Polos fuera del origen

Ejemplo: $h[n] = a^n (u[n] - u[n - M - 1])$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-(M+1)}}{1 - a z^{-1}} \longrightarrow \begin{cases} p_k = 0, 0, \dots, 0 (M+1) \\ z_k = a e^{j \frac{2\pi}{M+1} 0}, a e^{j \frac{2\pi}{M+1} 1}, \dots, a e^{j \frac{2\pi}{M+1} M} \\ p_k = a \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta de un sistema racional

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z) N(z)}{A(z) Q(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

El sistema está inicialmente en reposo.

No se producen cancelaciones polo-cero.

Polos del sistema

Respuesta natural

Polos de la entrada

Respuesta forzada

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n] + \sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u[n]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

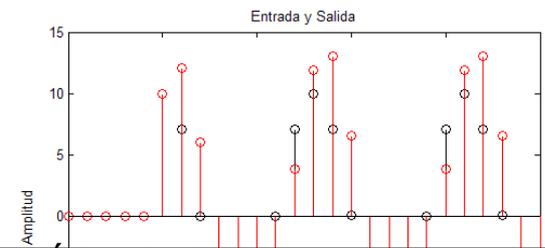
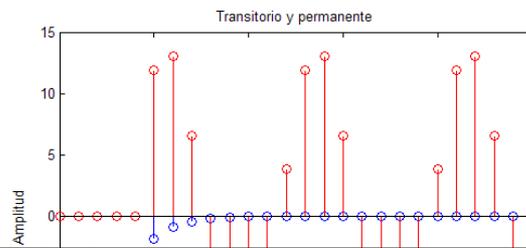
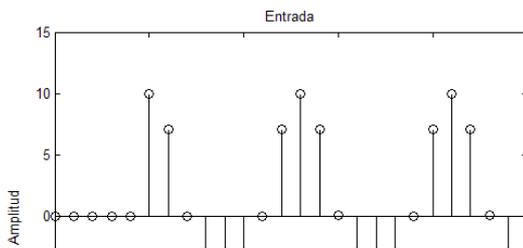
Respuesta transitoria y régimen permanente

Ejemplo: $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$ \longleftrightarrow $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$x[n] = 10 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ \longleftrightarrow $X(z) = 10 \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = 10 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{6.3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{11.894 - 13.015z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$y[n] = -1.907(0.5)^n u[n] + 13.56 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right)u[n]$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

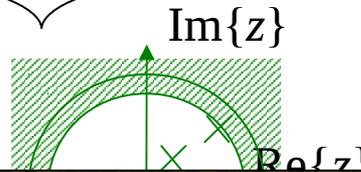
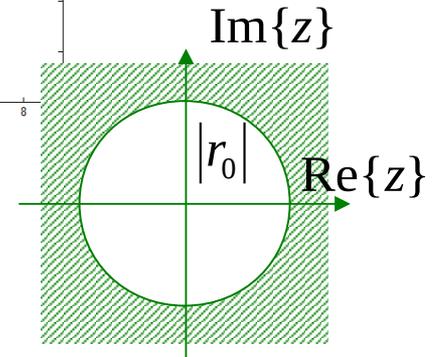
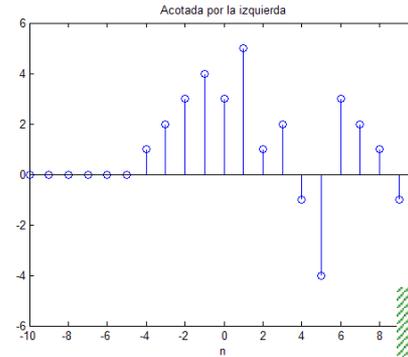
Estabilidad y causalidad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]z^{-k}| \Big|_{|z|=1} < \infty$$



$h[n]$ es estable si la ROC de $H(z)$ incluye al círculo unidad.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Estabilidad

Ejemplo: $y[n] - y[n-1] = x[n]$

$$x[n] = u[n] \longrightarrow$$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

$$y[n] = (n+1)u[n] \longrightarrow$$

La señal de entrada está acotada

$$\exists B_x : \forall n |x[n]| < B_x$$

Pero la salida, no

$$\neg \exists B_y : \forall n |y[n]| < B_y$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

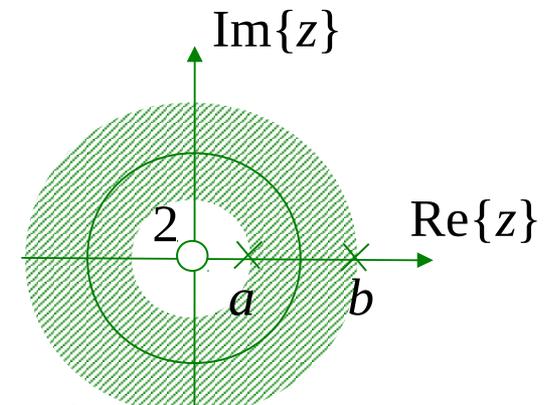
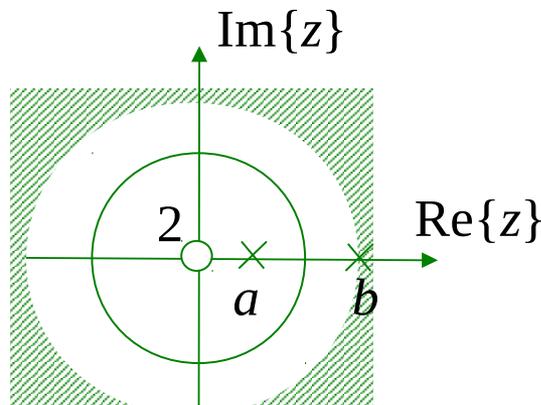
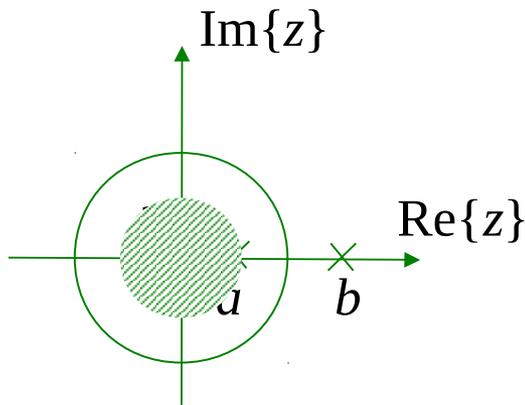
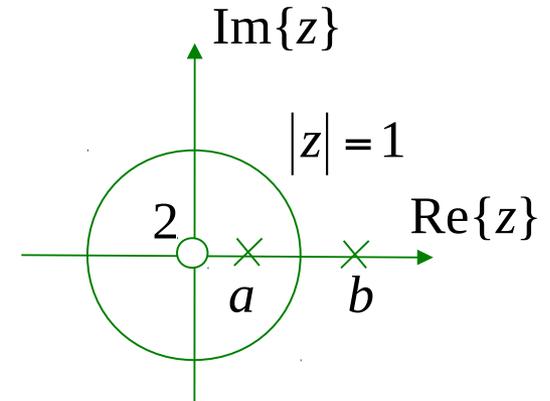
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Estabilidad y Causalidad

Ejemplo: $y[n] - (a + b)y[n - 1] + aby[n - 2] = x[n]$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} \quad a < 1 < b$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cancelaciones polo-cero

Ejemplo: $y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2]$

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \frac{\left(1 - 3z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$
$$= \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

↑ Cancelación polo-cero

$$h[n] = \delta[n] - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

El sistema es estable debido a la cancelación polo-cero

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Notación

Polinomio de orden m : $A_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k^{(m)} z^{-k} \quad a_0^{(m)} = 1$

Polinomio inverso o recíproco: $\tilde{A}_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}^{(m)} z^{-k}$

Test

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

1. $A_N(z) = A(z)$

2. $m = N$

4. mientras $m \neq 0$

4.1. Calcular $\tilde{A}_m(z)$

4.2. $K_m = a_m^{(m)}$

$A(z)$ tiene todas sus raíces dentro del círculo unidad si y sólo si

$$|A(z)| = K \prod_{k=1}^m |z - z_k| \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\} : |K| < 1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Ejemplo: $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$

$$A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$\tilde{A}_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

$$K_2 = a_2^{(2)} = -\frac{1}{2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2\tilde{A}_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1}$$

$$\tilde{A}_1(z) = -\frac{7}{2} + z^{-1}$$

$$K_1 = a_1^{(1)} = -\frac{7}{2} \longrightarrow |K_1| > 1 \longrightarrow \text{El sistema no es estable}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Estabilidad de un sistema de 2º orden

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \rightarrow \begin{cases} z_1, z_2 = 0 \\ p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -(p_1 + p_2) \\ a_2 = p_1 p_2 \end{cases}$$

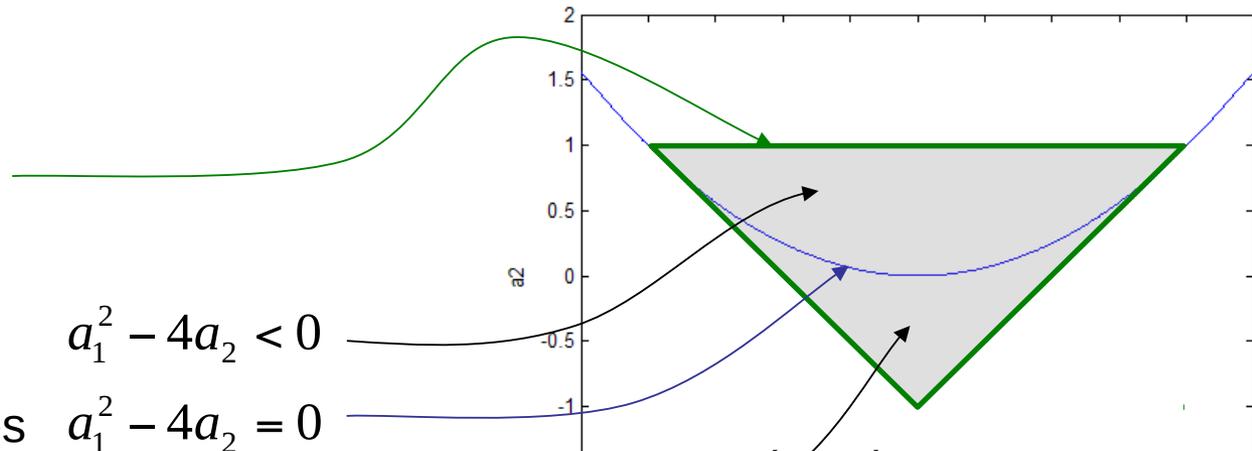
Estabilidad $|K_i| < 1$

$$K_2 = a_2$$

$$K_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$$

Polos complejos $a_1^2 - 4a_2 < 0$

Polos reales dobles $a_1^2 - 4a_2 = 0$

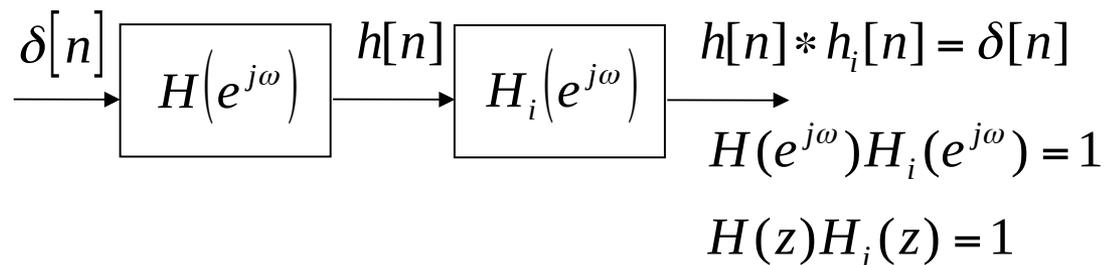


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Invertibilidad



$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})} \longrightarrow H_i(z) = \frac{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}$$

Es decir, los polos de un sistema son los ceros de su sistema inverso, y los ceros de un sistema son los polos de su inverso. La ROC del sistema inverso debe solaparse con la del sistema H(z)



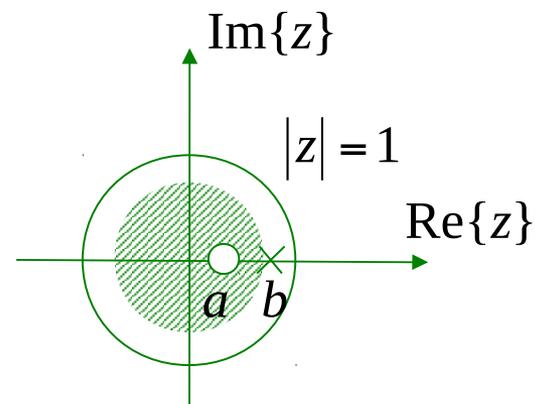
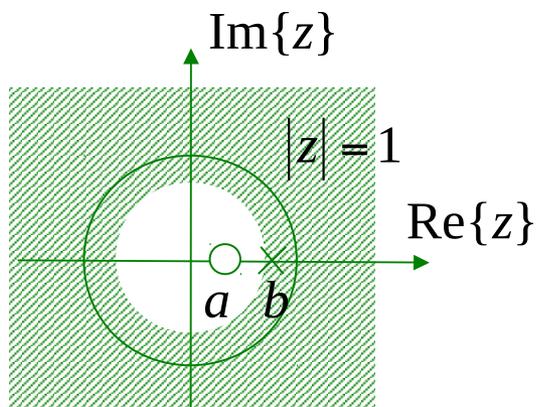
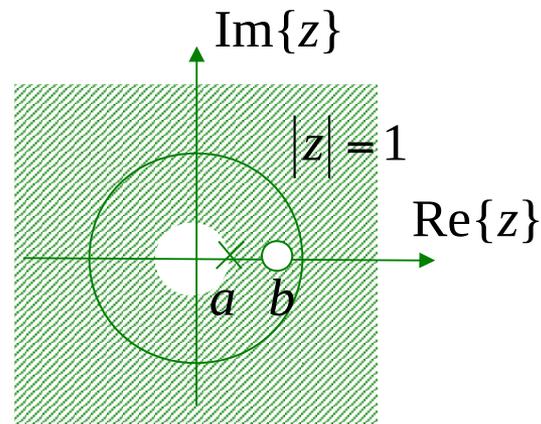
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 - - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Invertibilidad

Ejemplo: $H(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad b, a < 1$

$$h[n] = a^n u[n] - ba^{n-1} u[n-1]$$

$$H_i(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}$$

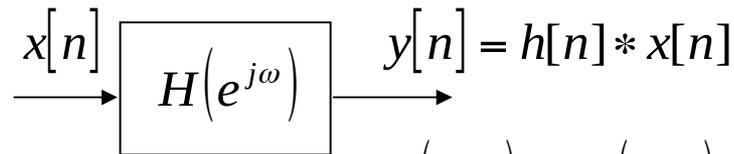


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI



$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})|$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

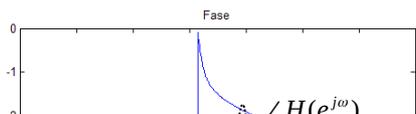
Ejemplo: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$ \longrightarrow $h[n] = \delta[n - n_0]$

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_0 \longrightarrow y[n] = |H(e^{j\omega_0})| s[n - n_0] \cos(\omega_0(n - n_0) - \phi_0)$$

$$x[n] = s[n] \cos \omega_0 n$$

donde $n_0 = \tau(\omega)|_{\omega=\omega_0}$

Retardo de grupo



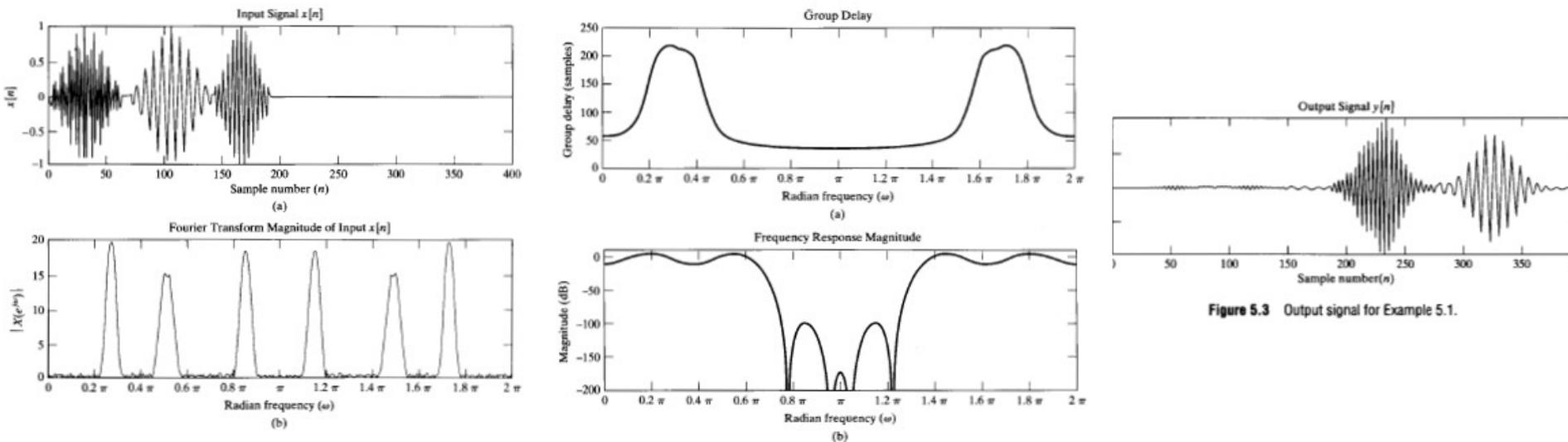
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Efectos del retardo de grupo

Ejemplo:



Entrada

Sistema

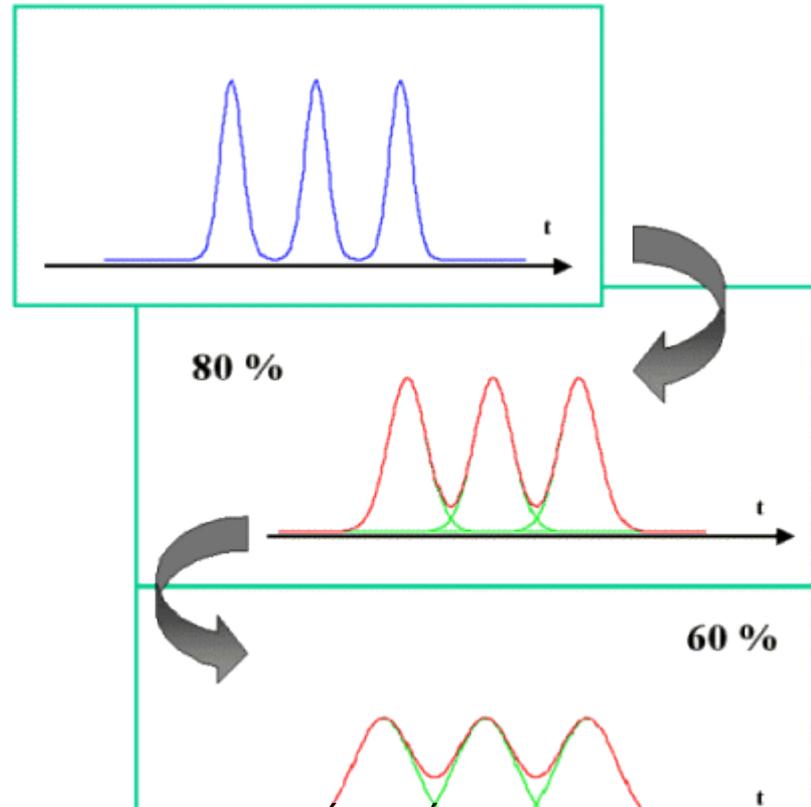
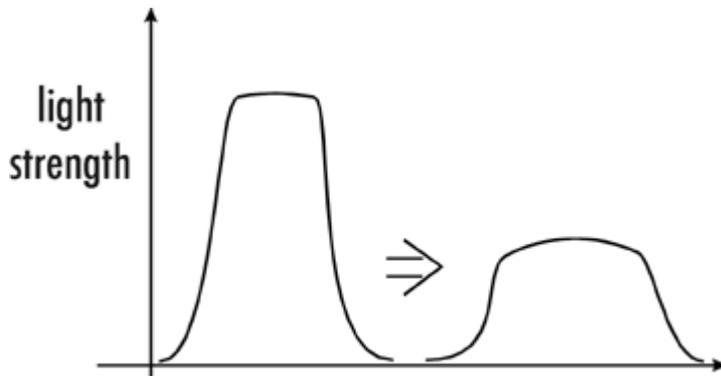
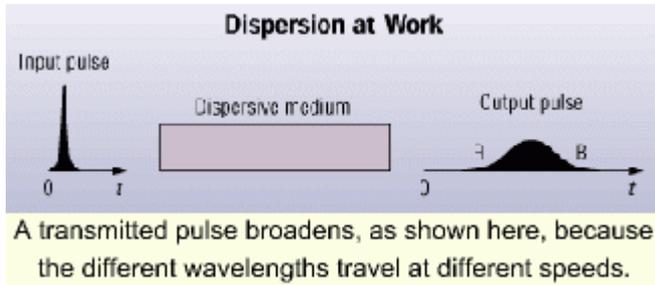
Salida

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Efectos del retardo de grupo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de amplitud

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k e^{-j\omega})}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k e^{-j\omega})(1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k e^{-j\omega})(1 - p_k^* e^{j\omega})}$$

Ganancia del filtro en dBs

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de fase

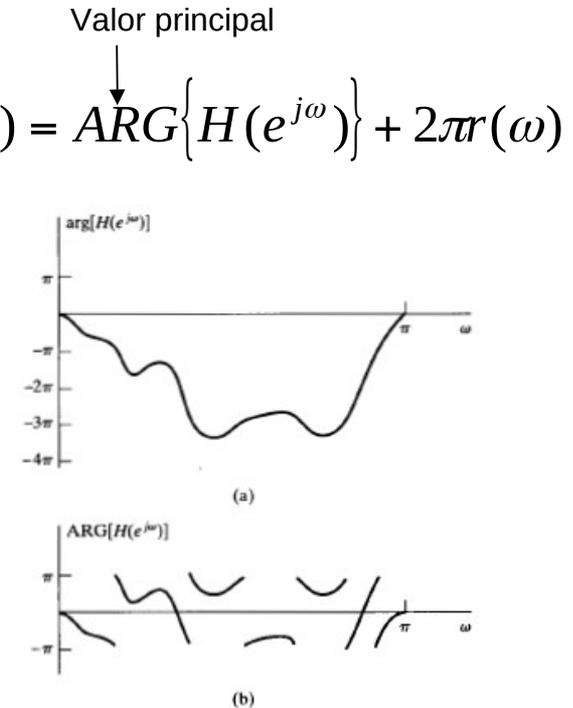
$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=0}^M \angle(1 - z_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=0}^N \angle(1 - p_k e^{-j\omega}) = \underset{\substack{\text{Valor principal} \\ \downarrow}}{ARG}\{H(e^{j\omega})\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

$$\pi < ARG\{H(e^{j\omega})\} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \leq \pi$$

$r(\omega) \in \mathbb{N}$ Sin restricción

$$\arg H(e^{j\omega}) = ARG\{H(e^{j\omega})\} + 2\pi r(\omega)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(c)

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Retardo de grupo



$$\begin{aligned} \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} &= \sum_{k=0}^M \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - z_k e^{-j\omega}\} - \sum_{k=0}^N \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - p_k e^{-j\omega}\} = \\ &= \sum_{k=0}^M \frac{|z_k|^2 - \text{Re}\{z_k e^{-j\omega}\}}{1 + |z_k|^2 - 2 \text{Re}\{z_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=0}^N \frac{|p_k|^2 - \text{Re}\{p_k e^{-j\omega}\}}{1 + |p_k|^2 - 2 \text{Re}\{p_k e^{-j\omega}\}} \end{aligned}$$

Propiedades

$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} \equiv -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

salvo en las discontinuidades

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

- Applet:
- <http://www.eas.asu.edu/~dsp/grad/anand/java/FreqResp/FreqResp.html>
- http://www.thole.org/manfred/polezero/en_idx.html

Cartagena99

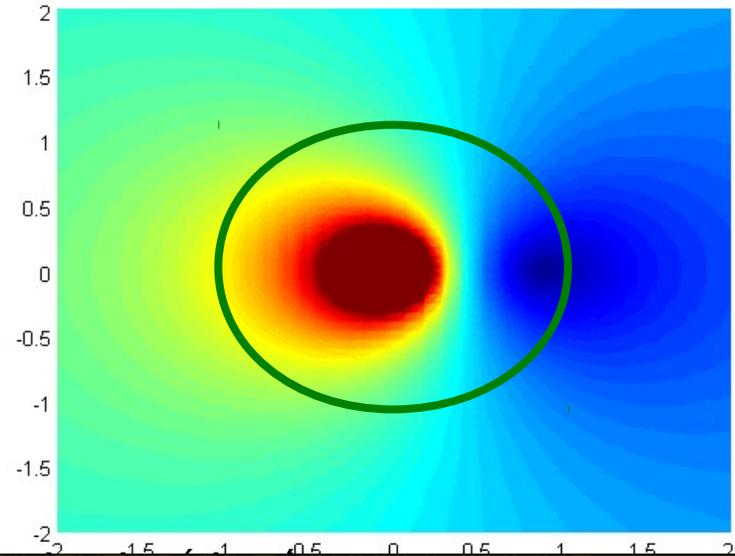
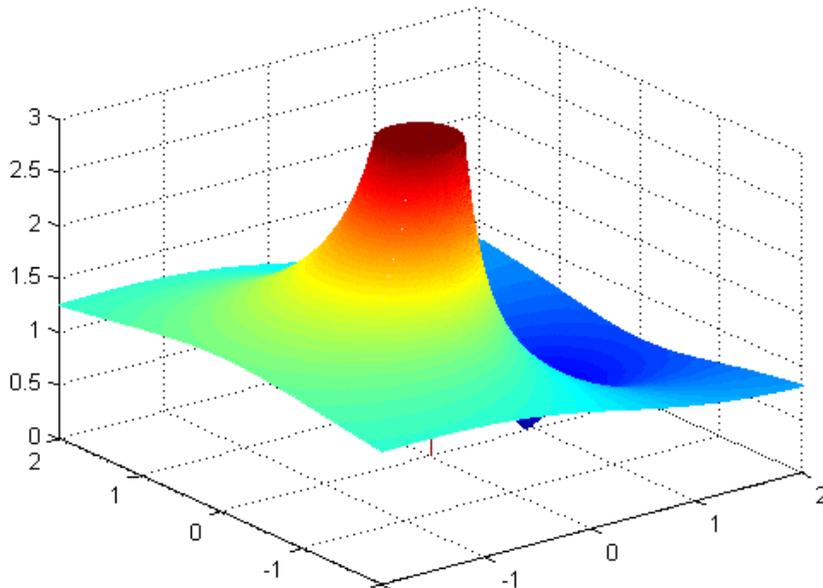
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}$$
$$z_0 = 0.9$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

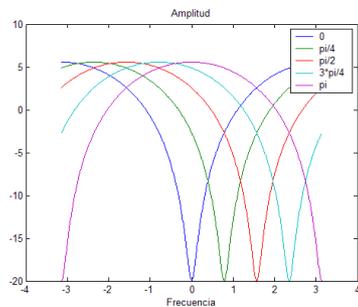
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}$$

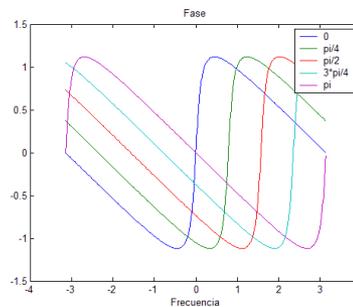
$$|H(e^{j\omega})|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)$$

$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = \arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}$$

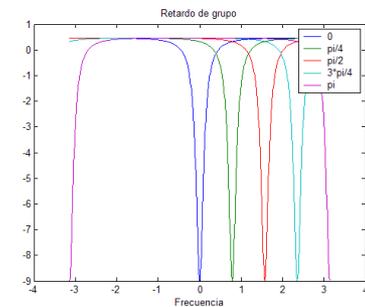
$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$



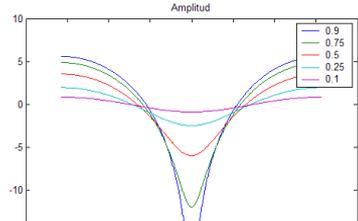
$r = 0.9$



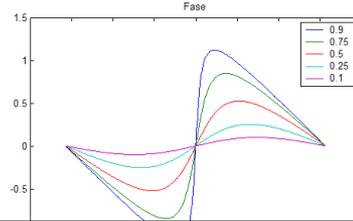
$r = 0.9$



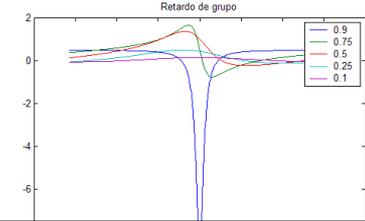
$r = 0.9$



$\theta = 0$



$\theta = 0$



$\theta = 0$

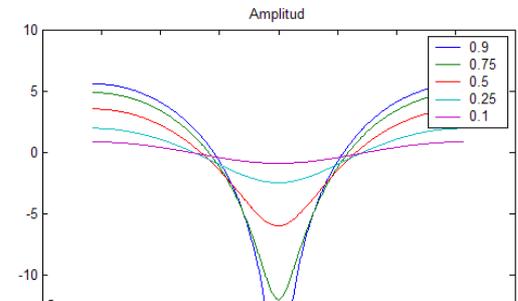
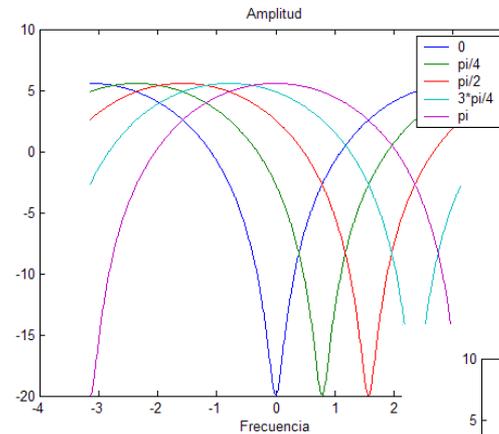
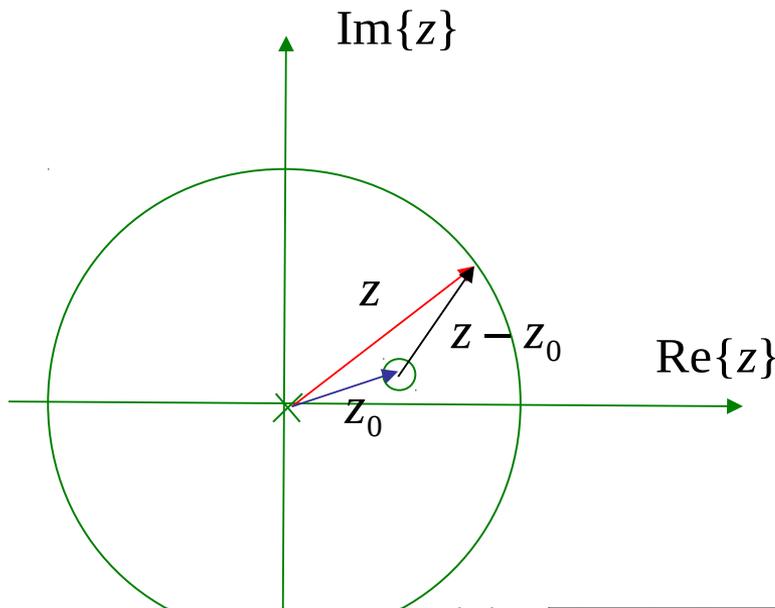
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = 1 - re^{j\theta} z^{-1} = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow |H(z)| = \frac{|z - z_0|}{|z|} \longrightarrow |H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{|z|=1} = |e^{j\omega} - z_0|$$



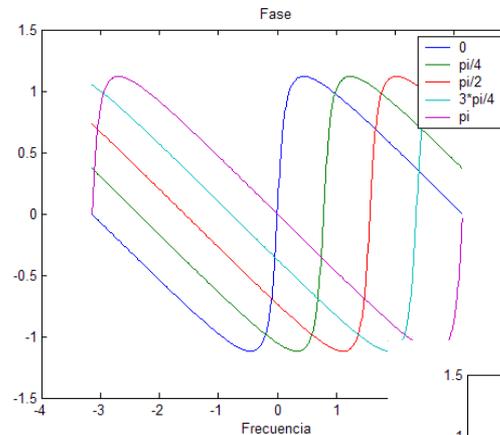
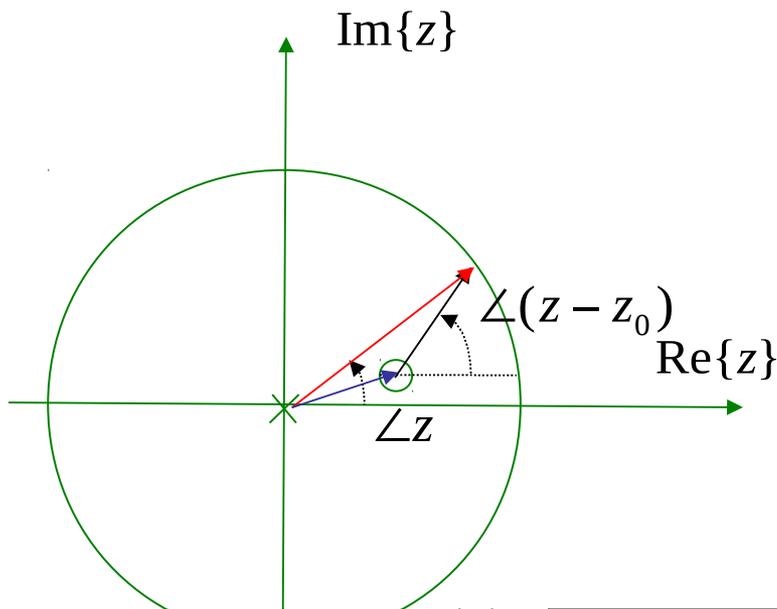
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

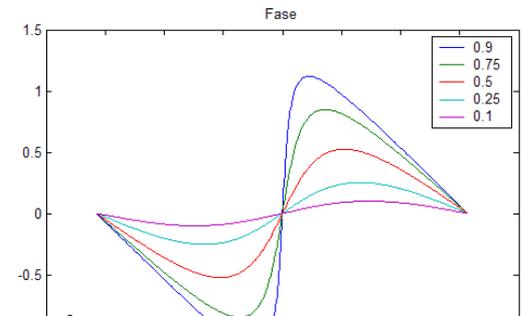
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow \angle H(z) = \angle(z - z_0) - \angle z \longrightarrow \angle H(e^{j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - z_0) - \omega$$



$r = 0.9$

$\theta = 0$



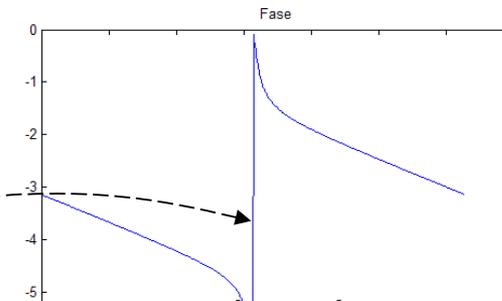
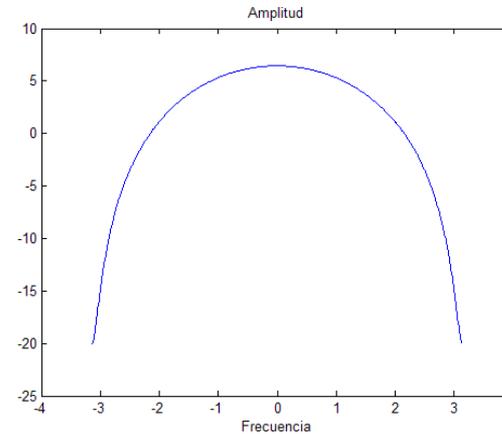
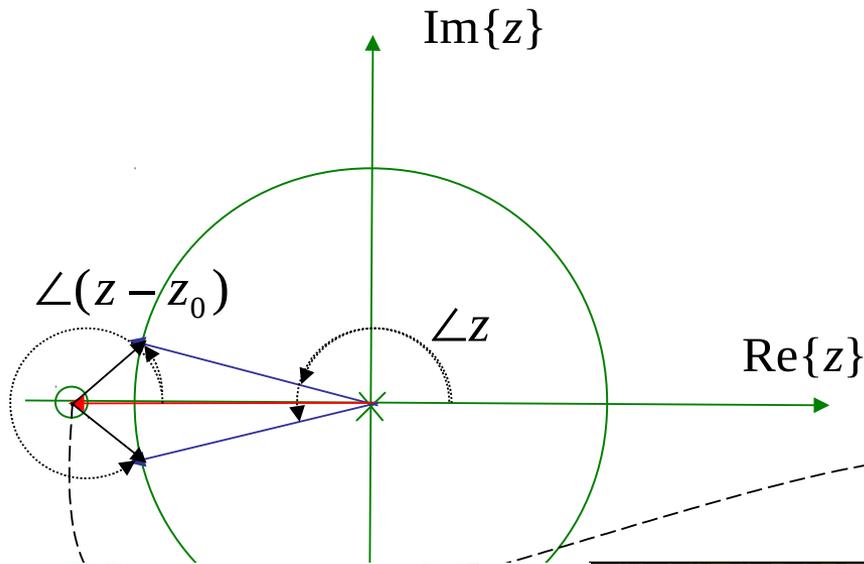
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

Para $|z_0| \geq 1$ hay una discontinuidad en la fase



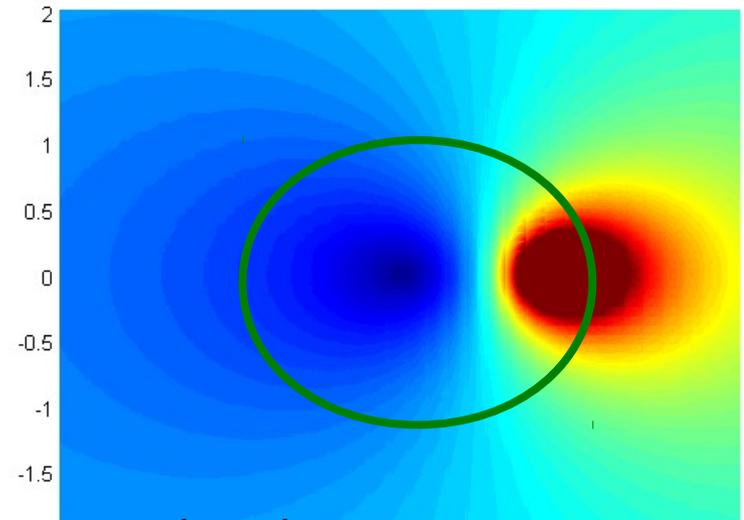
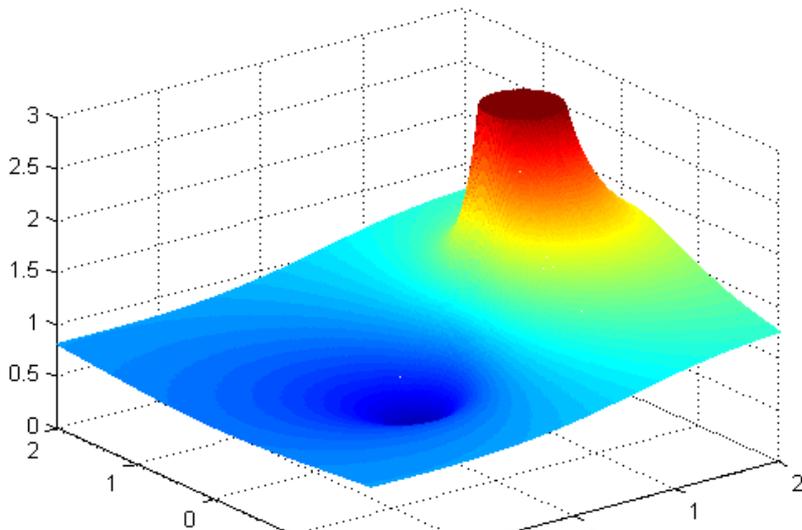
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

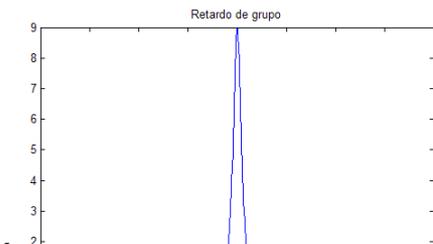
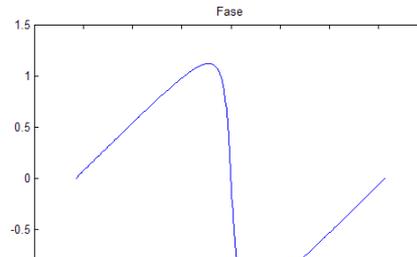
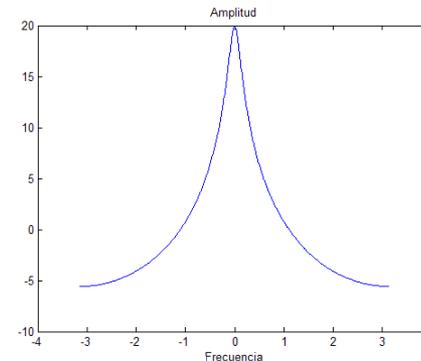
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)}$$

$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}$$

$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$

Los valores obtenidos son los nuestros a los obtenidos



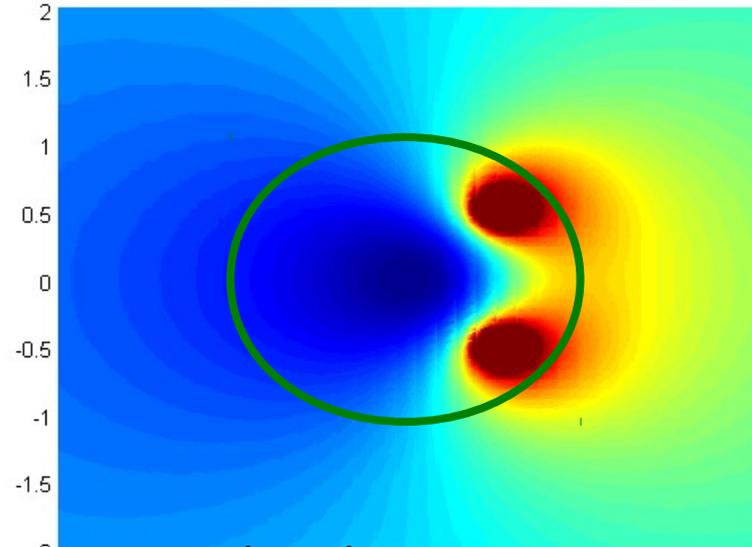
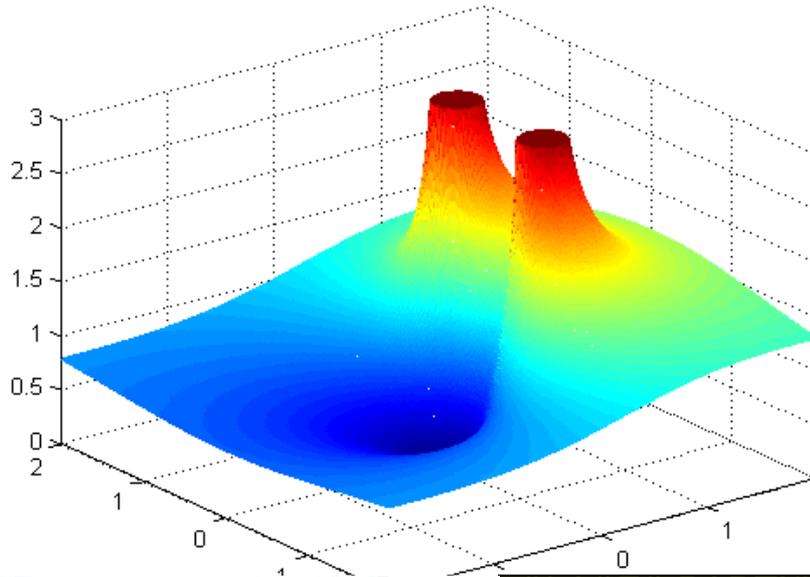
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - z_0 e^{-j\omega})(1 - z_0^* e^{-j\omega})} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

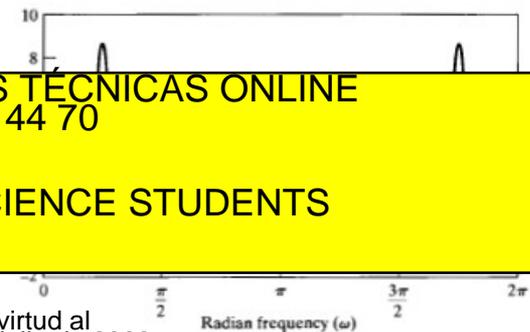
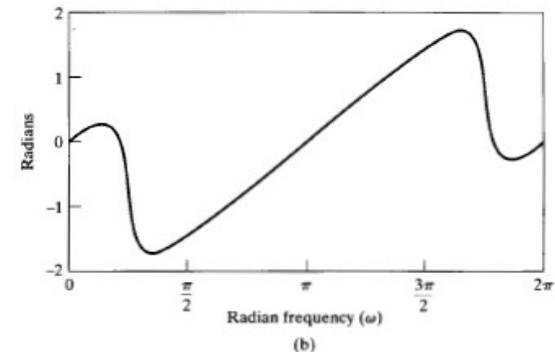
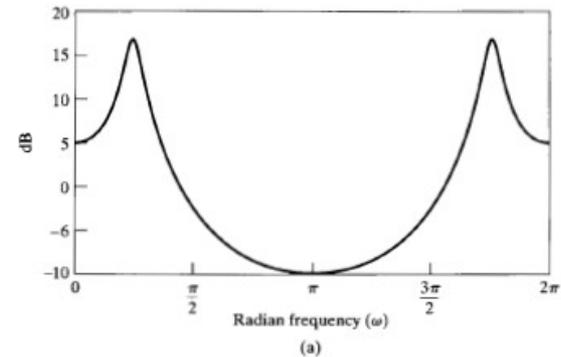
Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden IIR

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{1}{1+r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \right) \left(\frac{1}{1+r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)} \right)$$

$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - \arctan \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)}$$

$$\text{GRD}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} - \frac{r^2 - r \cos(\omega + \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)}$$

Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con dos ceros.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

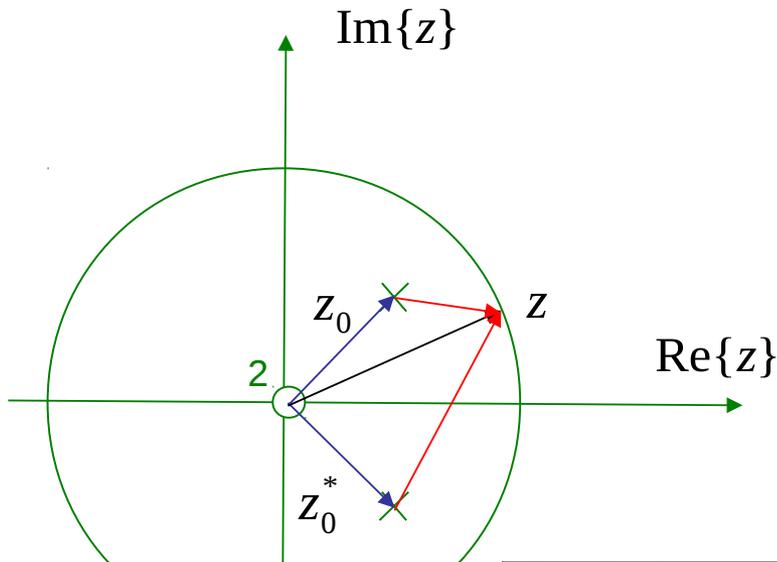
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

$$|H(z)| = \frac{|z|^2}{|z - z_0||z - z_0^*|}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_0||e^{j\omega} - z_0^*|}$$



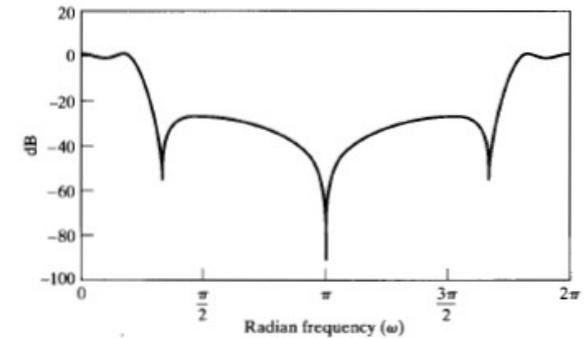
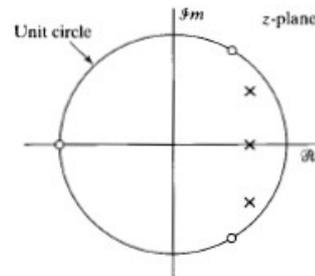
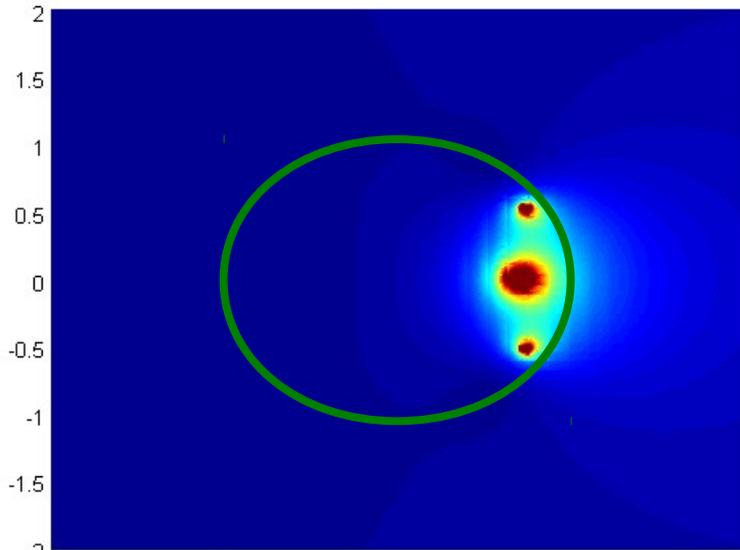
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

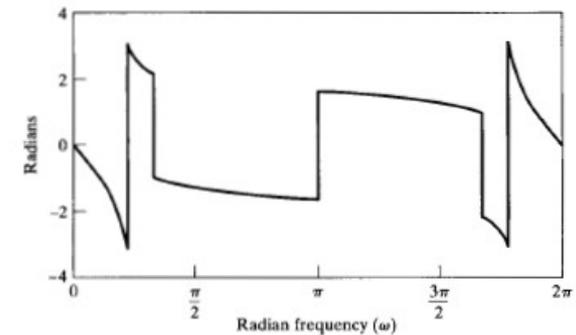
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

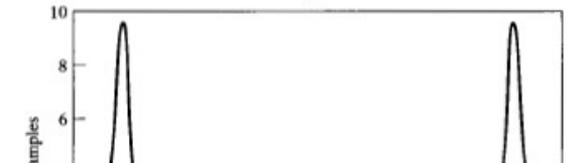
Ejemplo:
$$H(z) = \frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}$$



(a)



(b)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, dark green font. The "99" is significantly larger and more prominent than the "Cartagena" part. The text is set against a light blue, irregular shape that resembles a splash or a stylized wave. Below the text, there is a horizontal orange bar that tapers at both ends, creating a sense of motion or a shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background that tapers to the right, and a horizontal orange bar is positioned below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background that tapers to the right, and a horizontal orange bar is positioned below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

En general, no hay ninguna relación entre magnitud y fase para un sistema LTI. Sin embargo, si el sistema está definido por una ED, una vez especificada una de ellas, la otra queda determinada dentro de un número reducido de opciones.

$$\left| H(e^{j\omega}) \right|^2 = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} = C(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} [1]$$

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

$$C(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z)}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z)}$$

Polos $p_k, (p_k^*)^{-1}$ \longrightarrow Si uno está dentro del círculo unidad, el otro debe estar fuera. Los polos de un

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

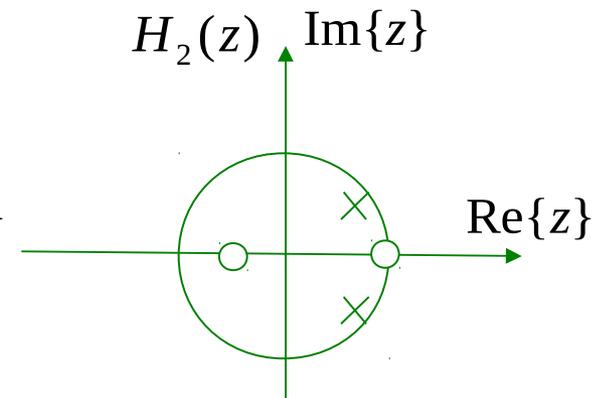
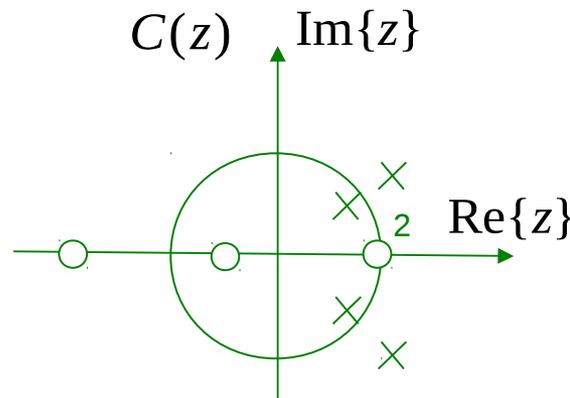
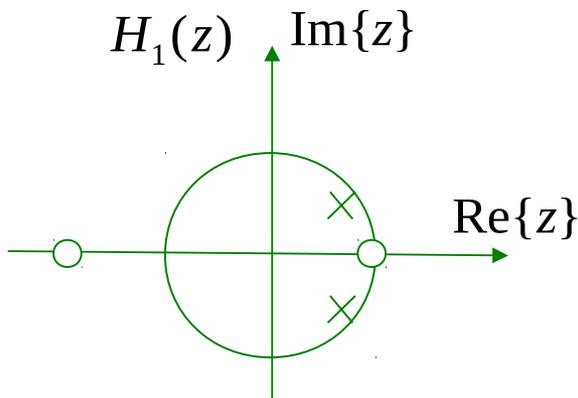
Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

Ejemplo:



$$C(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})(1 - z)(1 + 2z)}{(1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$

$$= \frac{2(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})2(1 - z)(1 + \frac{1}{2}z)}{(1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$



Cartagena99

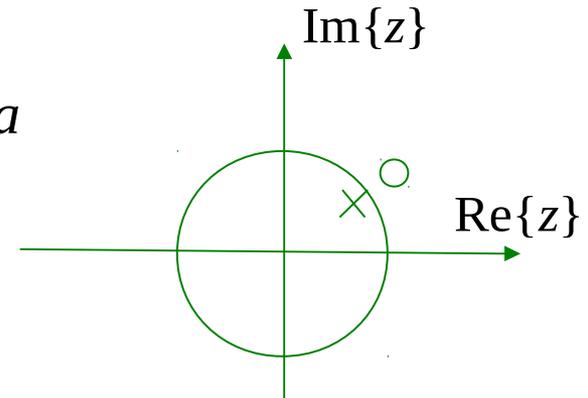
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas paso-todo

Ejemplo:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \longrightarrow z_1 = \frac{1}{a^*} \quad p_1 = a$$



$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = \frac{|e^{-j\omega} (1 - ae^{-j\omega})^*|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{|e^{-j\omega}| |1 - ae^{-j\omega}|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

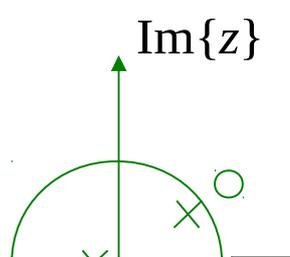
Sistemas paso-todo

Sistema paso todo de respuesta real

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k^* z^{-1}} \frac{z^{-1} - c_k}{1 - c_k z^{-1}} \quad a_k \in \mathbb{R}, c_k \in \mathbb{C}$$

$2M_c + M_r$ polos y ceros $z_r = \frac{1}{a_k}$ $p_r = a_k$ $z_c = \frac{1}{c_k^*}, \frac{1}{c_k}$ $p_c = c_k, c_k^*$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = A$$



$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M_r} \left(-\omega - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega - \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \theta_k)} \right) + \sum_{k=1}^{M_c} \left(-2\omega - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega - \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \theta_k)} \right)$$

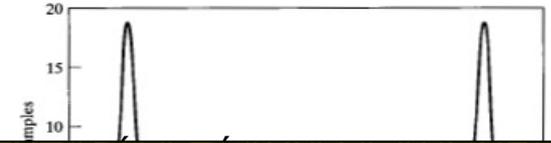
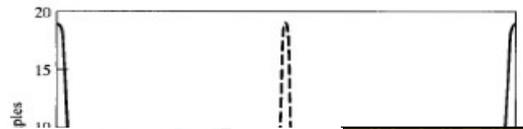
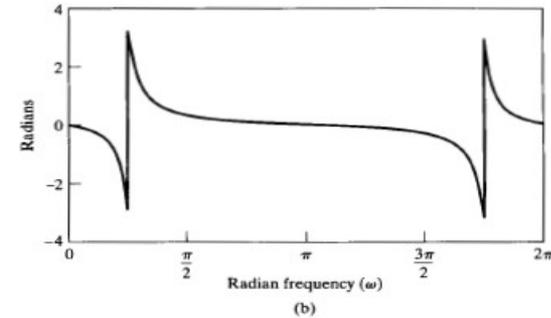
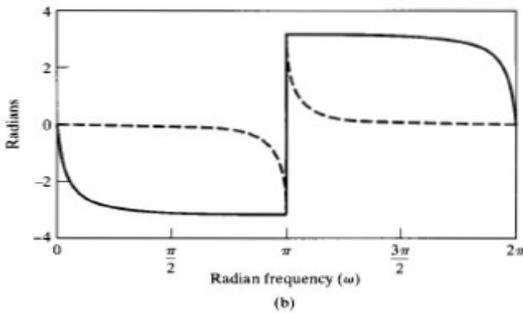
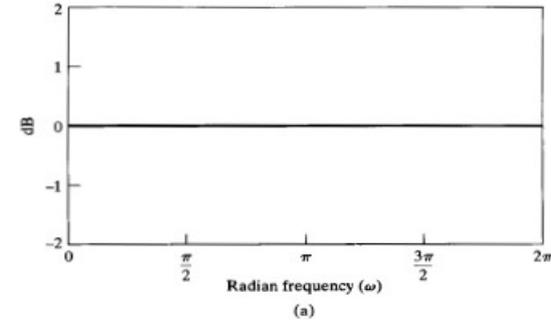
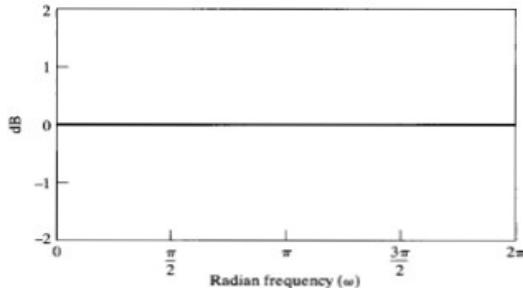
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002, Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Sistemas paso-todo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas paso-todo

$$\boxed{\text{grad}H_{ap}(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^{M_r} \underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} \right)}_{>0} + \sum_{k=1}^{M_c} \underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} + \frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{-j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} \right)}_{>0} \boxed{>0}$$

Sistema causal y estable $\Rightarrow |r_k| < 1$

$$H_{ap}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{1-a_k}{1-a_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{1-c_k^*}{1-c_k} \frac{1-c_k}{1-c_k^*} = A \Rightarrow \angle H_{ap}(e^{j0}) = 0$$

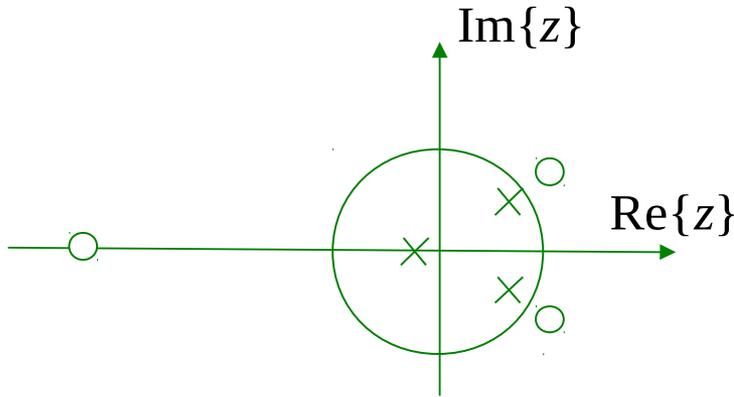
$$\boxed{\arg\{H_{ap}(e^{j\omega})\}} = \arg\{H_{ap}(e^{j0})\} - \int_0^\omega \text{grad}\{H_{ap}(e^{j\phi})\} d\phi \boxed{<0}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

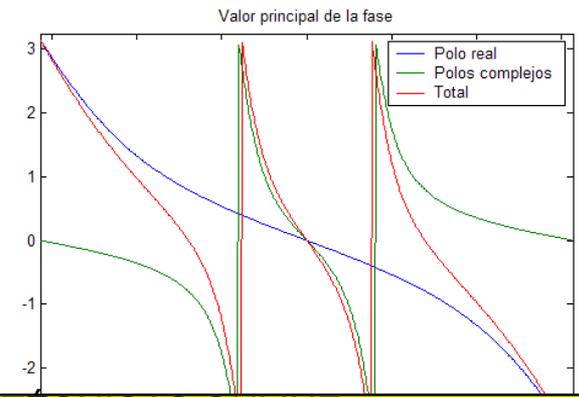
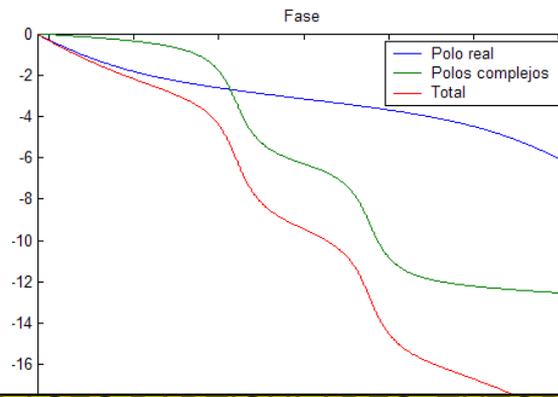
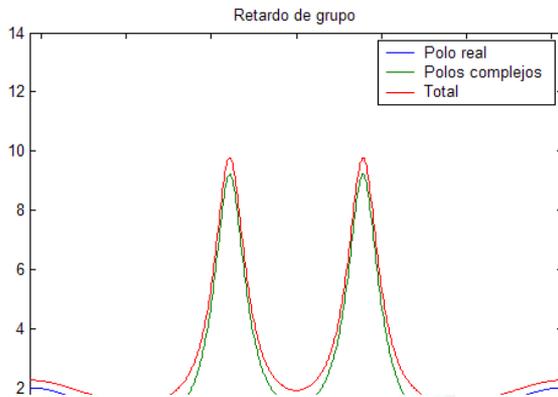
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas paso-todo



$$z_r = -3 \quad z_c = \frac{5}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}, \frac{5}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$p_r = -\frac{1}{3} \quad p_c = \frac{4}{5} e^{j\frac{\pi}{4}}, \frac{4}{5} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

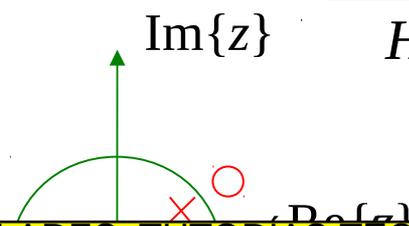
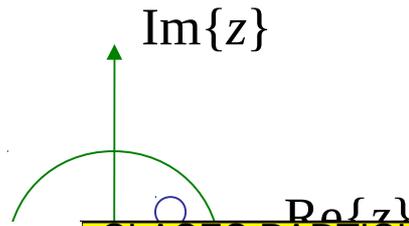
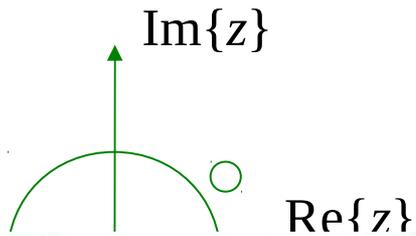
Un sistema es de fase mínima si todos sus polos y ceros están en el interior del círculo unidad.

Descomposición de un sistema LTI causal y estable

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

Supongamos que $H(z)$ tiene un cero fuera del círculo unidad en $z = \frac{1}{c^*}$; $|c| < 1$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{H_{\min}(z)} \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{H_{ap}(z)}$$



Cartagena99

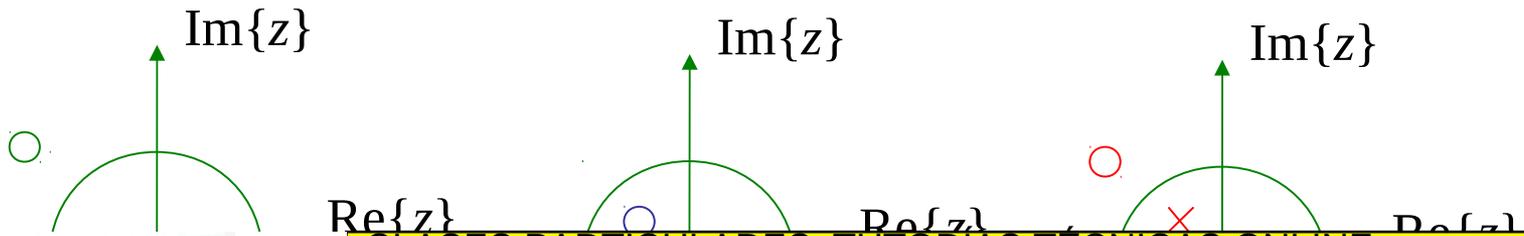
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\left(1 - \frac{3}{2} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{3}{2} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \stackrel{(1-z_0 z^{-1})(1-z_1 z^{-1}) = z_0 z_1 (z^{-1} - z_0^{-1})(z^{-1} - z_1^{-1})}{=} \frac{\frac{9}{4} \left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right) \left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \\
 &= \frac{\frac{9}{4} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \frac{\left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right) \left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}
 \end{aligned}$$



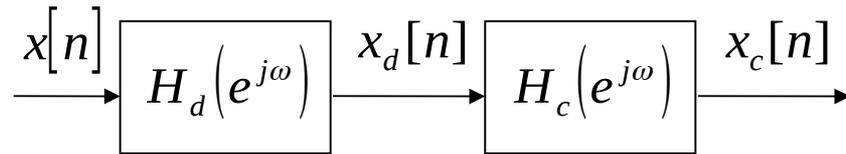
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

Compensación de la respuesta frecuencial



Caso Particular: $H_d(e^{j\omega})$ es de fase mínima, causal y estable

Se puede diseñar un sistema causal y estable tal que $x_c[n] = x[n]$

Caso General:

Se puede compensar la amplitud pero no la fase.

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{d\min}(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) \longrightarrow H_c(e^{j\omega}) = H_{d\min}^{-1}(e^{j\omega})$$

Cartagena99

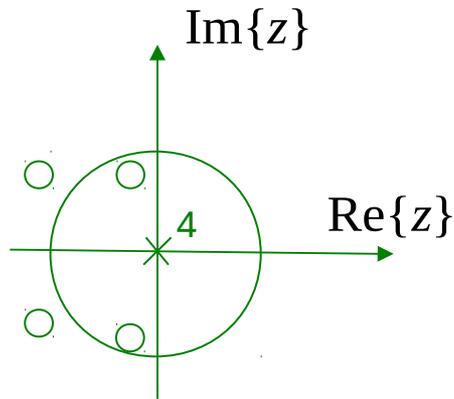
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$H_d(z) = \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)$$



$$H_d(z) = \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \frac{25}{16} \left(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi}\right) \left(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi}\right) =$$

$$H_d(z) = \frac{25}{16} \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \frac{\left(1 - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)}$$

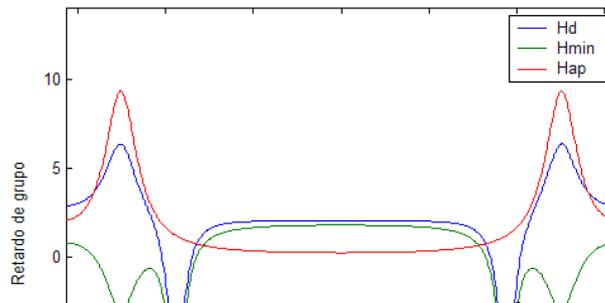
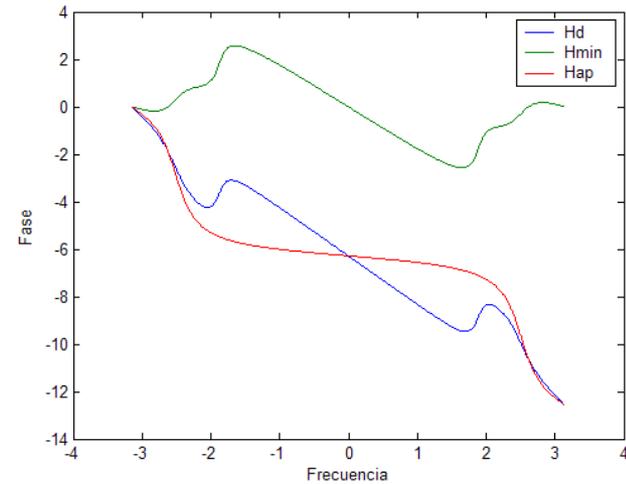
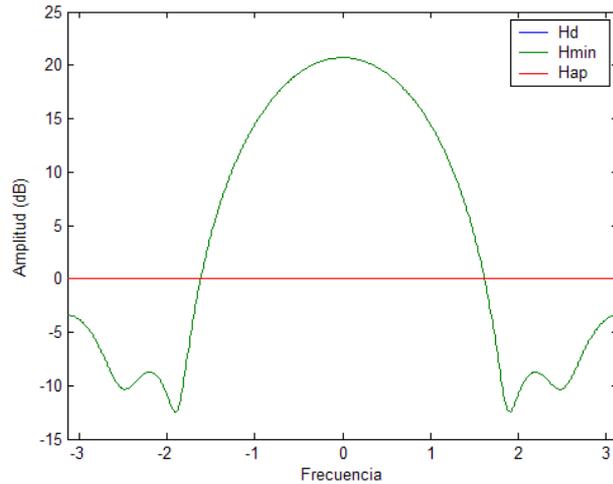
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:



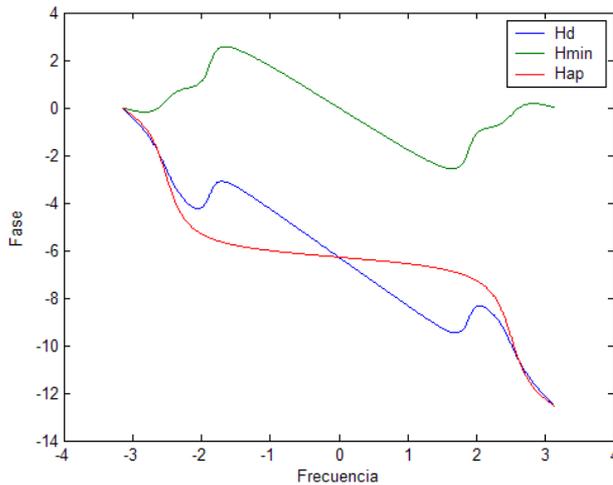
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Fase (*phase-lag*) mínima



$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\arg\{H(z)\} = \arg\{H_{\min}(z)\} + \arg\{H_{ap}(z)\} < 0$$

$$\text{phase-lag}\{H(z)\} = -\arg\{H(z)\}$$

Luego,

$$\text{phase-lag}\{H_{\min}(z)\} < \text{phase-lag}\{H(z)\}$$

Hay que tener cuidado con que $H_{\min}(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0$ porque

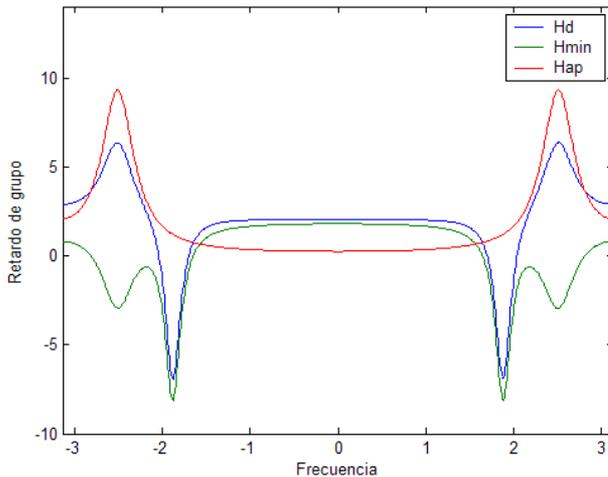
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de grupo mínimo



$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\text{grd}\{H(z)\} = \text{grd}\{H_{\min}(z)\} + \text{grd}\{H_{ap}(z)\} > 0$$

$$\text{Luego, } \text{grd}\{H_{\min}(z)\} < \text{grd}\{H(z)\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

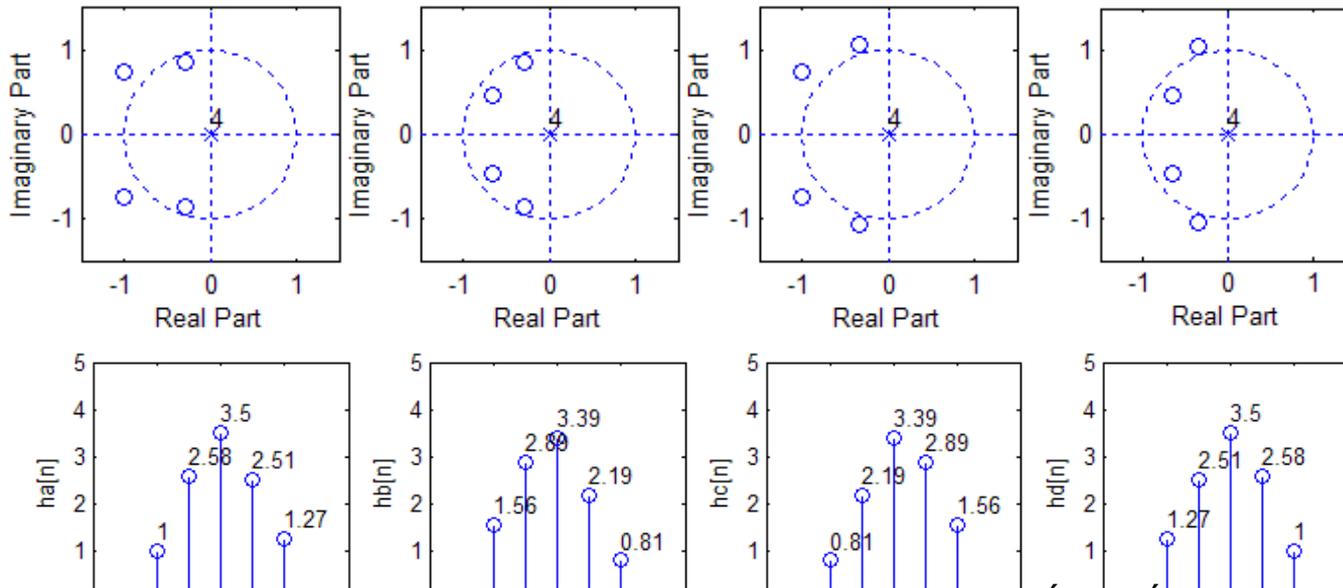
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de los sistemas de fase mínima

$$H_d(z) = \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)$$

Retardo de energía mínimo

Ejemplo: $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

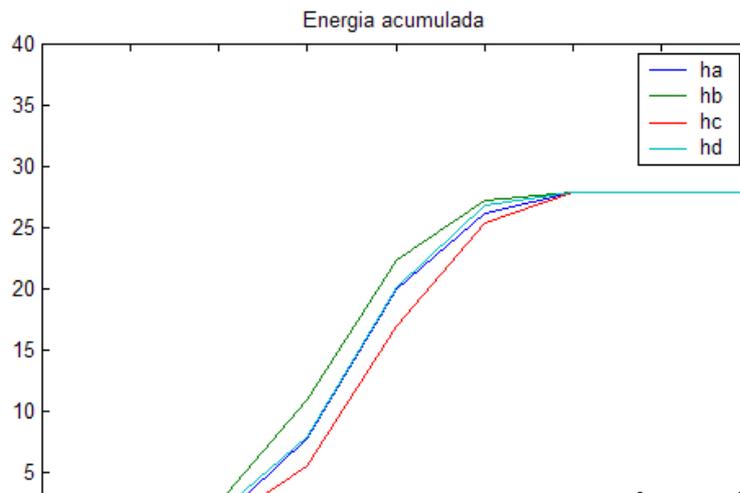
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de energía mínimo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2 \quad \text{pero} \quad \sum_{k=-\infty}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^n |h_{\min}[k]|^2$$

Ejemplo:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \quad |\omega| < \pi \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha \quad |\omega| < \pi \\ \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \alpha \\ h[n] = \text{sinc}(n - \alpha) \quad \alpha \in R \\ h[n] = \delta[n - \alpha] \quad \alpha \in Z \end{array} \right.$$

En general, un sistema de fase lineal es tal que $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$.

$h[n]$ es simétrica respecto a α si 2α es un entero, es decir, $h[2\alpha - n] = h[n]$

Cartagena99

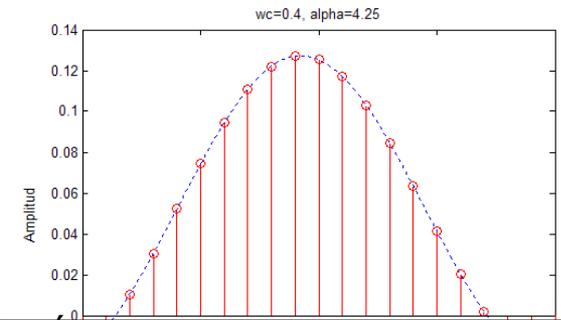
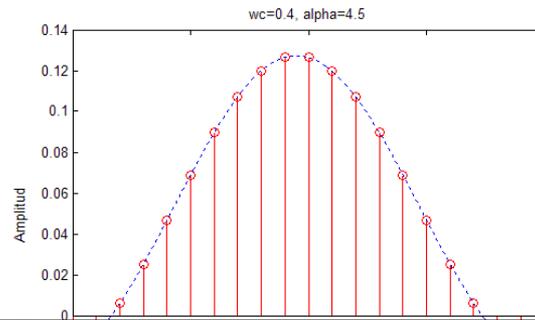
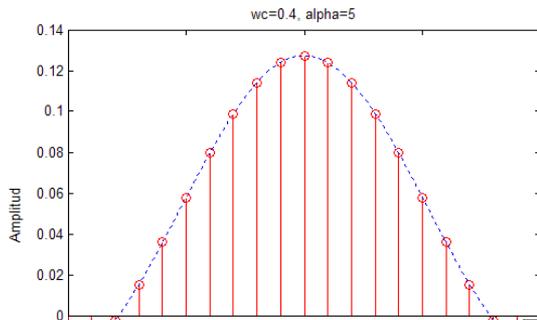
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Ejemplo:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{\omega_c}{\pi} (n - \alpha) \right)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j(\omega\alpha - \beta)} : A(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$$

Fase lineal Fase lineal generalizada (GLP)

Ejemplo: $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases}$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{\pi} \quad |\omega| < \pi$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \beta - \omega\alpha + \angle A(e^{j\omega})$$

$|\omega| < \pi$

$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \alpha$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Si $\forall \omega: \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $\beta \in \{0, \pi\}, 2\alpha \in \mathbb{Z}, h[2\alpha - n] = h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es par

Si $\beta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, 2\alpha \in \mathbb{Z}, h[2\alpha - n] = -h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es impar

Un sistema de fase 0 tiene todos sus polos y ceros en pares recíprocos conjugados.

Un sistema de fase lineal generalizada es un sistema de fase cero con polos o ceros

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada causales

Si $\forall \omega: \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real y par. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} -h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

$$h[n] = \begin{cases} h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \left(h[n]e^{-j\omega n} + h[M-n]e^{-j\omega(M-n)} \right) = \\ &= h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{M}{2}-n)} \right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right) \right) \\ &= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h\left[\frac{M}{2} - k\right] \cos(\omega k) \right) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

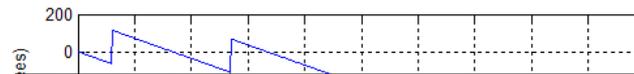
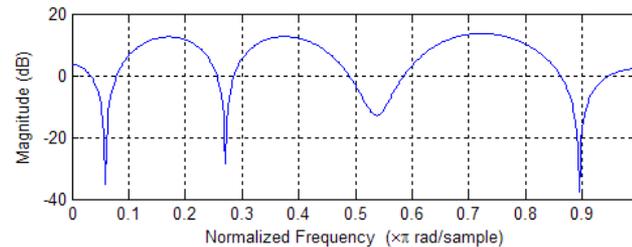
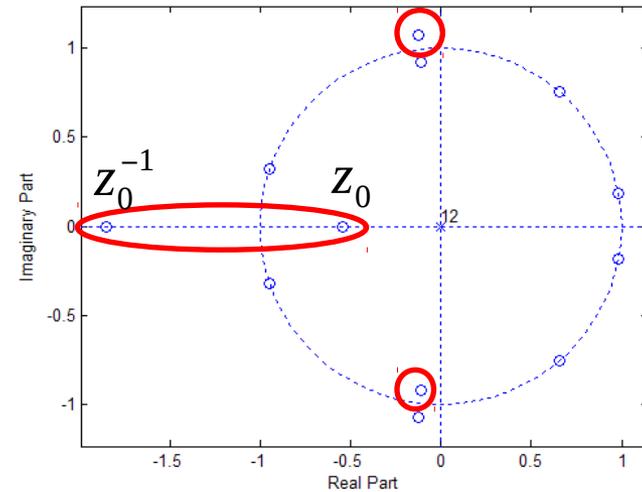
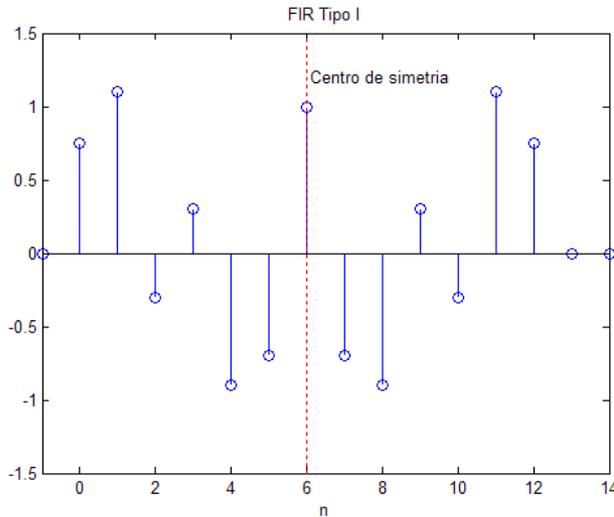
$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^M h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=0}^M h[k]z^{k-M} = z^{-M} H(z^{-1})$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

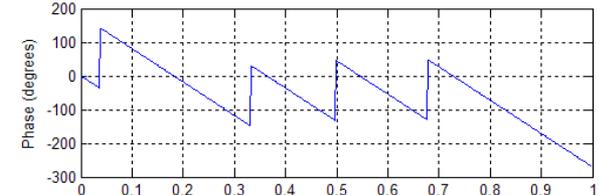
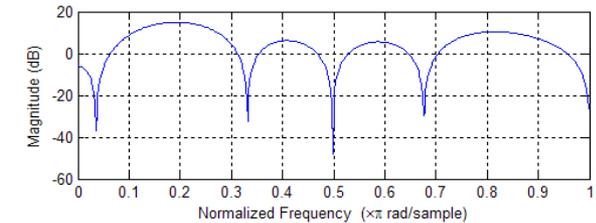
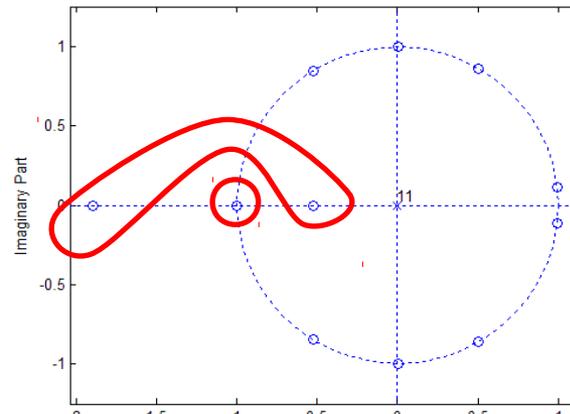
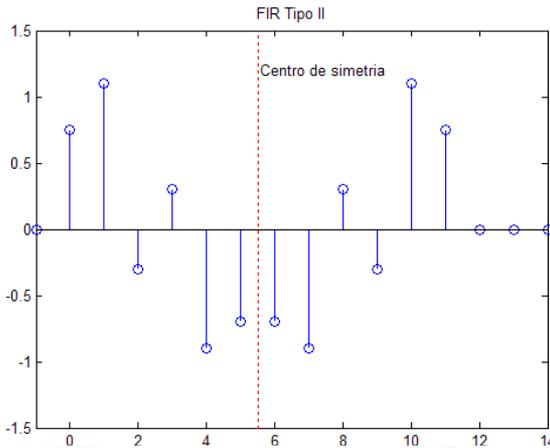
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo II

$$h[n] = \begin{cases} h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m + 1$$



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h\left[\frac{M-1}{2} - k\right] \cos\left(\omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

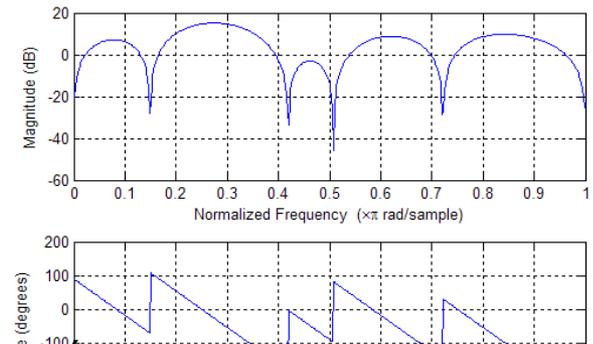
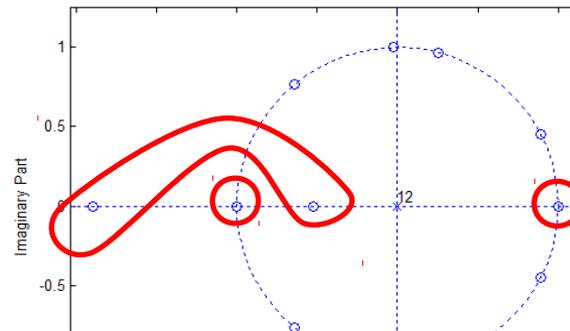
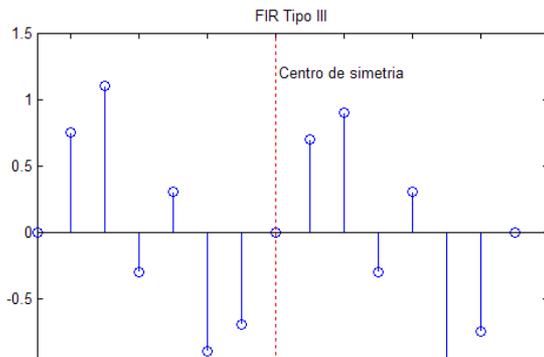
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas de fase lineal FIR de tipo III

$$h[n] = \begin{cases} -h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} 2h[\frac{M}{2} - k] \sin(\omega k)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

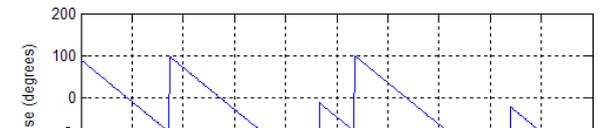
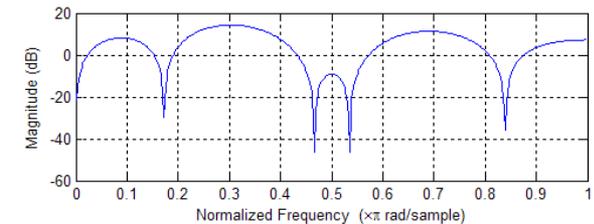
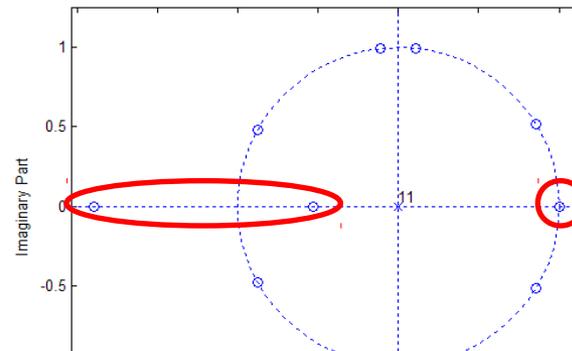
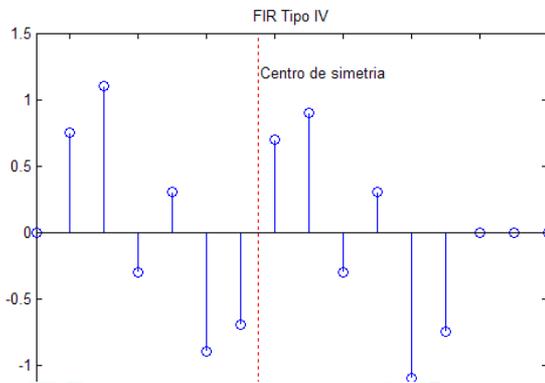
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo IV

$$h[n] = \begin{cases} -h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m + 1$$



$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\frac{M-1}{2} - k] \sin(\omega(k - \frac{1}{2}))$$



Cartagena99

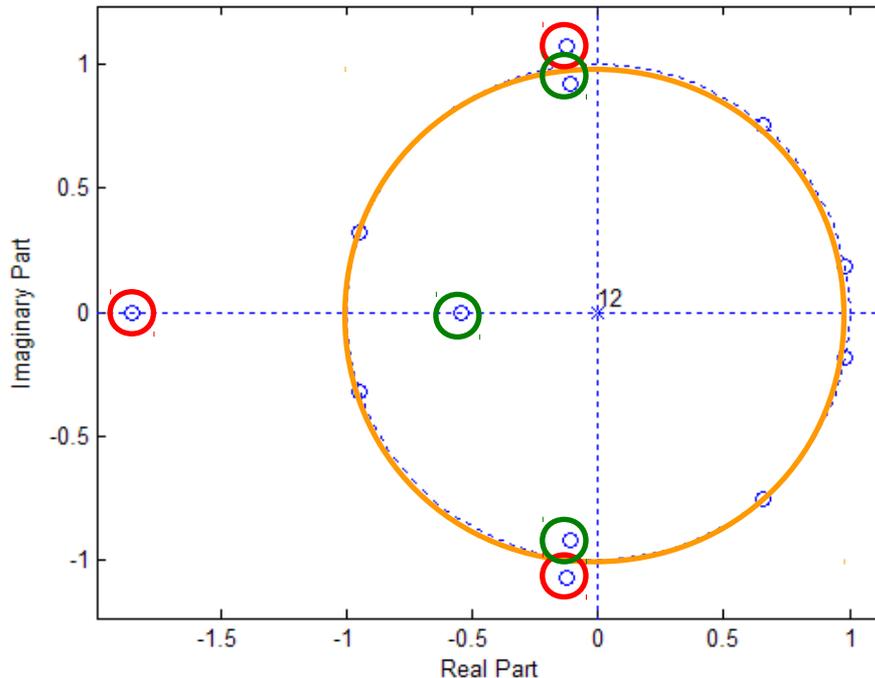
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Descomposición de un sistema FIR

$$H(z) = k H_{\min}(z) H_{\text{circ}}(z) H_{\max}(z)$$

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$$



M_i es el número de ceros de $H_{\min}(z)$

$$\begin{aligned} |H_{\max}(e^{j\omega})| &= |H_{\min}(e^{-j\omega})| = \\ &= |H_{\min}(e^{j\omega})| \end{aligned}$$

$$k = \frac{h[0]}{1}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Descomposición de un sistema FIR

Ejemplo:

$$h[n] = 0.75\delta[n] + 1.1\delta[n-1] - 0.3\delta[n-2] + 0.3\delta[n-3] - 0.9\delta[n-4] - 0.7\delta[n-5] \\ + \delta[n-6] \\ + 0.75\delta[n-7] + 1.1\delta[n-8] - 0.3\delta[n-9] + 0.3\delta[n-10] - 0.9\delta[n-11] - 0.7\delta[n-12]$$

$$H_{\min}(z) = (1 + 0.5412z^{-1}) (1 - 0.9242e^{j1.6881}z^{-1}) (1 - 0.9242e^{-j1.6881}z^{-1})$$

$$h_{\min}[n] = \delta[n] + 0.7574\delta[n-1] + 0.9711\delta[n-2] + 0.4622\delta[n-3]$$

$$H_{\max}(z) = (0.9242^2 0.5412) (1 + 1.8479z^{-1}) (1 - 1.0821e^{j1.6881}z^{-1}) (1 - 1.0821e^{-j1.6881}z^{-1})$$

$$h_{\max}[n] = 0.4622\delta[n] + 0.9711\delta[n-1] + 0.7574\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

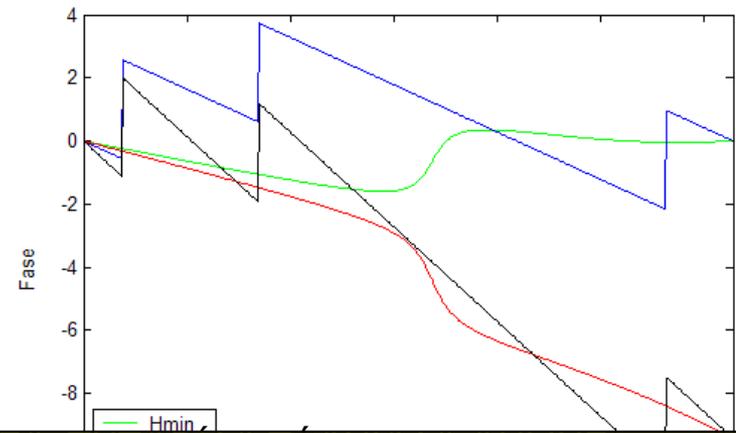
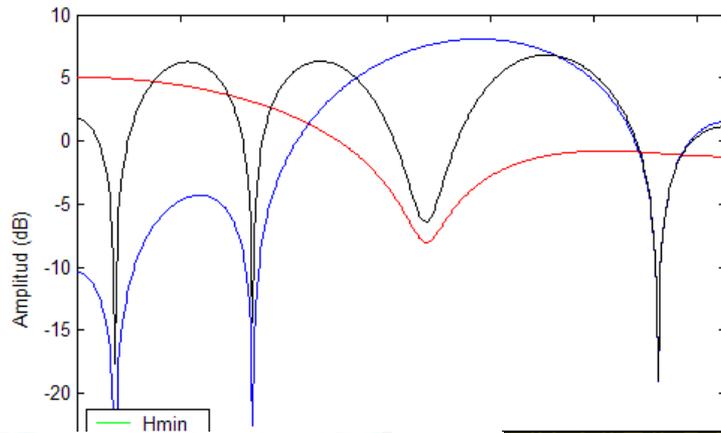
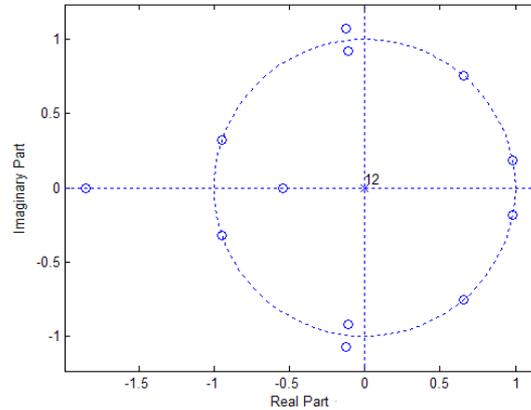
$$H_{\text{circ}}(z) = (1 + e^{j0.1852}z^{-1}) (1 + e^{-j0.1852}z^{-1}) (1 + e^{j0.8512}z^{-1}) (1 + e^{-j0.8512}z^{-1}) (1 + e^{j2.8118}z^{-1}) (1 + e^{-j2.8118}z^{-1})$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Descomposición de un sistema FIR



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resumen

- Filtros definidos por un sistema racional
- Propiedades (estabilidad, causalidad, invertibilidad)
- Retardo de grupo
- Respuestas tipo: 1 cero, 1 polo, 2 polos
- Relación magnitud-fase
- Sistemas paso-todo
- Sistemas de fase mínima
- Sistemas de fase lineal generalizada

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Tema 3 – Análisis de Sistemas LTI en el dominio transformado

Oppenheim II (Cap. 5), Proakis (Cap. 4)

Probl Opp: 5.1, 5.6, 5.28, 5.29, 5.30, 5.33, 5.71

Probl Pro: 4.83*, 4.84, 4.92, 4.93

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white shadow effect, and a yellow and orange gradient bar is positioned below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción

- <http://video.google.es/videoplay?docid=6726953938324261715>

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of water. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros ideales

Filtros Paso Bajo (Low Pass Filters)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad \xleftrightarrow{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{lp}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

Filtros Paso Alto (High Pass Filters)

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad \xleftrightarrow{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$$

Son filtros no causales y con respuesta impulsional infinita.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros realizables

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

Ejemplo:



$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] - \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2]$$

Ejercicio: Implementar este filtro y compararlo con la salida de la función filter de MATLAB

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Filtros definidos por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias no define de forma única la respuesta al impulso del sistema. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

sea $h'[n] = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n$ donde $\sum_{m=0}^N a_m p_k^{-m} = 0, A_k \in \mathbb{R}, p_i \neq p_j$, entonces



$$\sum_{k=0}^N a_k h'[n-k] = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^N a_k (h[n-k] + h'[n-k]) = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

Es decir, hay N coeficientes indeterminados A_k , que pueden ser fijados por medio de condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ si es causal ó $y[1], y[2], \dots, y[N]$ si es anticausal.

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Pág 37, Opp II. Ejercicio: Comprobar que la suma justo a la derecha es efectivamente 0.

Probl Opp: 5.2, 5.7

Probl Pro: 4.45, 4.46, 4.91

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta al impulso de un sistema racional

Expansión en fracciones parciales

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-k}} \rightarrow h[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]}_{\text{FIR Polos en el origen}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n]}_{\text{IIR Polos fuera del origen}}$$

sólo si $M \geq N$

Ejemplo: $h[n] = a^n (u[n] - u[n - M - 1])$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-(M+1)}}{1 - az^{-1}} \rightarrow \begin{cases} p_k = \cancel{0}, 0, \dots, 0 \ (M+1) \\ z_k = \cancel{ae^{j\frac{2\pi}{M+1}0}}, ae^{j\frac{2\pi}{M+1}1}, \dots, ae^{j\frac{2\pi}{M+1}M} \\ p_k = \cancel{a} \\ z_k = \cancel{0} \end{cases}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2 , Proakis 3.6

Probl Opp: 5.3*, 5.4

Probl Pro: 4.47, 4.48

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta de un sistema racional

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} \cdot \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

El sistema está inicialmente en reposo. No se producen cancelaciones polo-cero.

Polos del sistema
Respuesta natural

Polos de la entrada
Respuesta forzada

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n] + \sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u[n]$$

Respuesta transitoria Régimen permanente

Bibliografía: Oppenheim 5.2 , Proakis 3.6

No todas las X se pueden expresar como un cociente. Pero supongamos que ésta sí. Si el sistema no estuviese inicialmente en reposo debería usarse la TZ unilateral.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

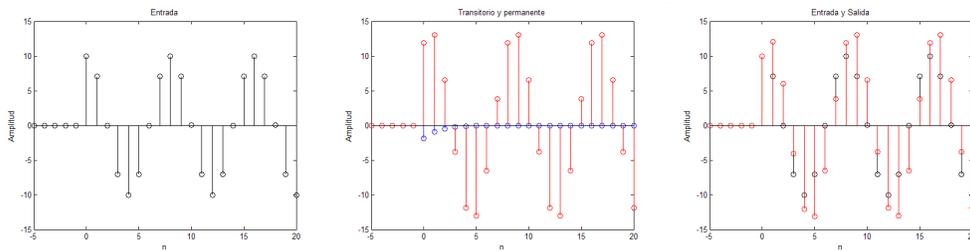
Respuesta transitoria y régimen permanente

Ejemplo: $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$x[n] = 10 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] \longleftrightarrow X(z) = 10 \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = 10 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{6.3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{11.894 - 13.015z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$y[n] = -1.907(0.5)^n u[n] + 13.56 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right) u[n]$$



Bibliografía: Proakis 3.6, 4.4

Aquí se ve muy bien la respuesta transitoria y la permanente.

Probl Opp: 5.34

Probl Pro: 4.29 (***) AQUÍ ME QUEDO), 4.31, 4.43

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Estabilidad y causalidad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]z^{-k}|_{|z|=1} < \infty$$

↓

$h[n]$ es estable si la ROC de $H(z)$ incluye al círculo unidad.

Acotada por la izquierda

$|p_k| < 1$

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Para que un filtro definido por una ED sea causal y estable tiene que ser que todos los polos estén dentro del círculo unidad. Si no fuese causal por ejemplo, $h[n]=a*\delta[n+1]+\delta[n]$ ($H(z)=az+1$), entonces tendría un polo en el infinito.

Probl Opp: 5.5*, 5.8, 5.9*, 5.10, 5.11

Probl Pro: 4.99, 4.104



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Estabilidad

Ejemplo: $y[n] - y[n-1] = x[n]$

$$x[n] = u[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

$$y[n] = (n+1)u[n]$$

La señal de entrada está acotada

$$\exists B_x : \forall n |x[n]| < B_x$$

Pero la salida, no

$$\neg \exists B_y : \forall n |y[n]| < B_y$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white shadow effect, and a blue arrow-like shape points to the right behind the text.

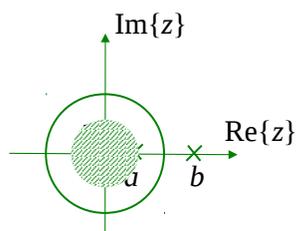
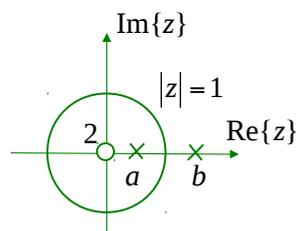
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

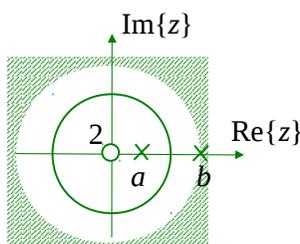
Estabilidad y Causalidad

Ejemplo: $y[n] - (a+b)y[n-1] + aby[n-2] = x[n]$

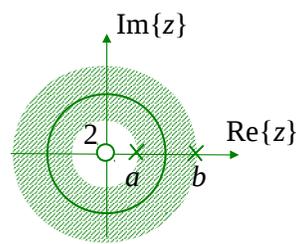
$$H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \quad a < 1 < b$$



El sistema no es ni causal ni estable



El sistema es causal pero no estable



El sistema es estable pero no causal

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Probl Pro: 4.88

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cancelaciones polo-cero

Ejemplo: $y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2]$

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \frac{(1 - 3z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$
$$= \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Cancelación polo-cero

$$h[n] = \delta[n] - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

El sistema es estable debido a la cancelación polo-cero pero en una implementación real no tienen por qué cancelarse exactamente.

Bibliografía: Proakis 3.6

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Notación

Polinomio de orden m : $A_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k^{(m)} z^{-k} \quad a_0^{(m)} = 1$

Polinomio inverso o recíproco: $\tilde{A}_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}^{(m)} z^{-k}$

Test

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$



1. $A_N(z) = A(z)$

2. $m = N$

4. mientras $m \neq 0$

4.1. Calcular $\tilde{A}_m(z)$

4.2. $K_m = a_m^{(m)}$

4.3. $A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m \tilde{A}_m(z)}{1 - K_m^2}$

4.4. $m = m - 1$

$A(z)$ tiene todas sus raíces dentro del círculo unidad si y sólo si

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, N\} : |K_m| < 1$$

Bibliografía: Proakis 3.6

Proakis pp 217

Ejercicio: Implementar este algoritmo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Ejemplo: $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$

$$A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$\tilde{A}_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

$$K_2 = a_2^{(2)} = -\frac{1}{2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2\tilde{A}_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1}$$

$$\tilde{A}_1(z) = -\frac{7}{2} + z^{-1}$$

$$K_1 = a_1^{(1)} = -\frac{7}{2} \longrightarrow |K_1| > 1 \longrightarrow \text{El sistema no es estable}$$

Bibliografía: Proakis 3.6

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Estabilidad de un sistema de 2º orden

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2 = 0 \\ p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -(p_1 + p_2) \\ a_2 = p_1 p_2 \end{array} \right.$$

Estabilidad $|K_i| < 1$

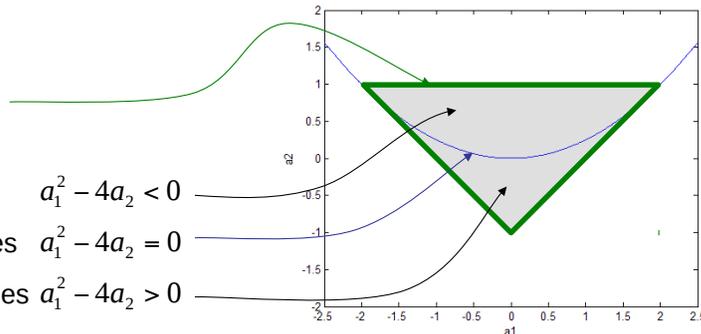
$$K_2 = a_2$$

$$K_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$$

Polos complejos $a_1^2 - 4a_2 < 0$

Polos reales dobles $a_1^2 - 4a_2 = 0$

Polos reales simples $a_1^2 - 4a_2 > 0$



Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Las condiciones de estabilidad que hemos dado definen una región en el plano de coeficientes (a_1, a_2 , ver figura) que tiene forma de triángulo. Es sistema estable si y solo si el punto (a_1, a_2) está dentro de este triángulo, que se conoce como *triángulo de estabilidad*.

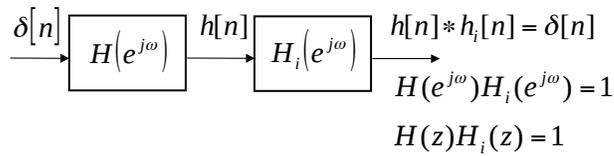
Las características del two-pole system dependen de la situación de sus polos, o, equivalentemente, de la situación del punto (a_1, a_2) en el triángulo de estabilidad. Los polos pueden ser reales o complejos conjugados, dependiendo del valor del discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_2$. La parábola $a_2 = a_1^2/4$ divide el triángulo de estabilidad en dos regiones (ver figura). La región por debajo de la parábola ($a_1^2 > 4a_2$) corresponde a polos reales distintos. Los puntos que están en la parábola ($a_1^2 = 4a_2$) proporcionan dos polos reales iguales. Por último, los puntos por encima de la parábola resultan en polos complejos conjugados.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Invertibilidad



$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})} \longrightarrow H_i(z) = \frac{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}$$

Es decir, los polos de un sistema son los ceros de su sistema inverso, y los ceros de un sistema son los polos de su inverso. La ROC del sistema inverso debe solaparse con la del sistema $H(z)$

Un sistema LTI es estable y causal y tiene un sistema inverso estable y causal sii todos los polos y ceros de $H(z)$ están dentro del círculo unidad

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Probl Opp: 5.31, 5.32, 5.36, 5.59, 5.72, 5.73, 5.74, 5.75

Probl Pro: 4.90

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

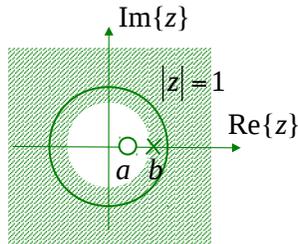
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Invertibilidad

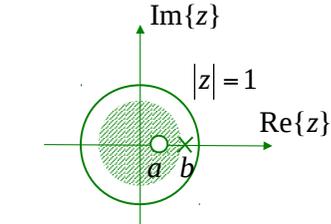
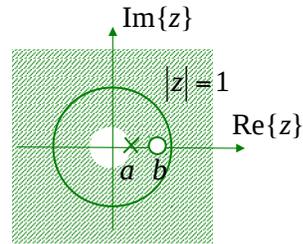
Ejemplo: $H(z) = \frac{1-bz^{-1}}{1-az^{-1}} \quad b, a < 1$

$$h[n] = a^n u[n] - ba^{n-1} u[n-1]$$

$$H_i(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$



$$h[n] = b^n u[n] - ab^{n-1} u[n-1]$$



$$h[n] = -b^n u[-n-1] + ab^{n-1} u[-n-2]$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Los dos pueden ser sistemas inversos porque los dos solapan con la ROC original. El problema del segundo sistema inverso es que no es estable.

Ejercicio: comprobar que los dos son sistemas inversos.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI

$$x[n] \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad |Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

Ejemplo: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0 \longrightarrow h[n] = \delta[n - n_0]$

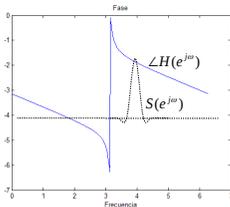
$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_0 \longrightarrow y[n] = |H(e^{j\omega_0})| s[n - n_0] \cos(\omega_0(n - n_0) - \phi_0)$$

$$x[n] = s[n] \cos \omega_0 n$$

donde $n_0 = \tau(\omega)|_{\omega=\omega_0}$

Retardo de grupo

$$\tau(\omega) = \text{grad}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

$S[n]$ una señal de banda estrecha. $\arg(\cdot)$ es la fase continua de $H(e^{j\omega})$. Cuanto más se aleje el retardo de grupo de una constante menos lineal es la fase del filtro.

Probl Opp: 5.21, 5.22, 5.25, 5.27, 5.47

Probl Pro: 4.41*, 4.42, 4.57, 4.59*, 4.89

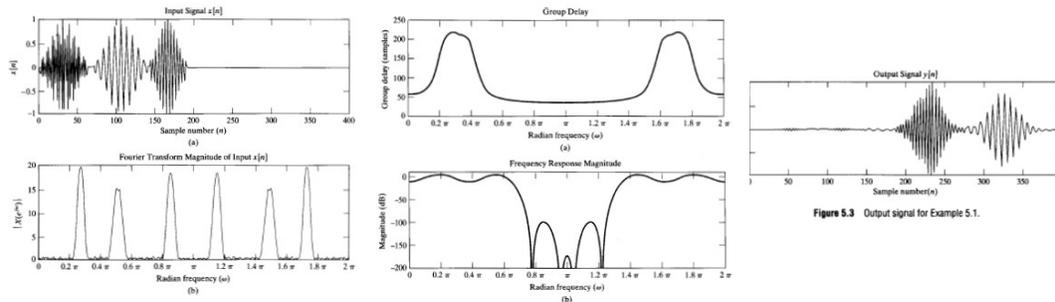
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Efectos del retardo de grupo

Ejemplo:



Entrada

Sistema

Salida

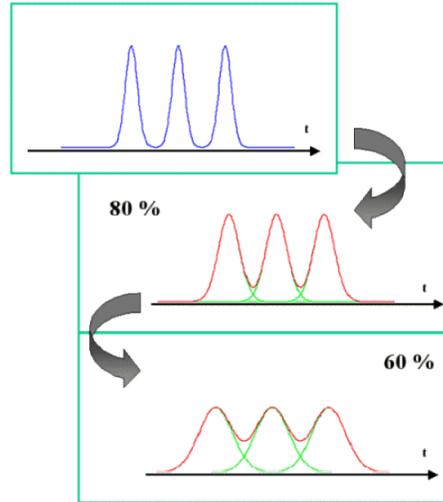
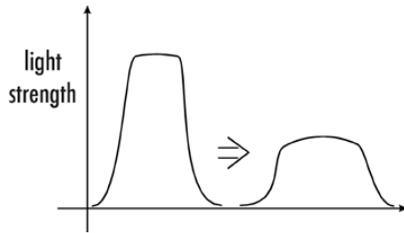
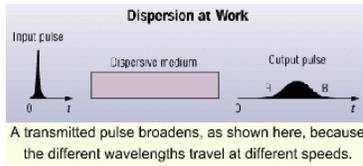
Bibliografía: Oppenheim 5.1, 5.3

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Efectos del retardo de grupo



Applet: <http://cnyack.homestead.com/files/afilt/afilt-phasegroup.htm>

Bibliografía: Oppenheim 5.1, 5.3

El pulso se ensancha porque las diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de amplitud

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k e^{-j\omega})}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k e^{-j\omega})(1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k e^{-j\omega})(1 - p_k^* e^{j\omega})}$$

Ganancia del filtro en dBs

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=0}^M 20 \log_{10} |1 - z_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=0}^N 20 \log_{10} |1 - p_k e^{-j\omega}|$$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.54, 4.79, 4.87, 4.106, 4.107, 4.108

El k=0 es k=1.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de fase

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{b_0}{a_0} \right) + \sum_{k=0}^M \angle(1 - z_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=0}^N \angle(1 - p_k e^{-j\omega}) = \overset{\text{Valor principal}}{\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\}} + 2\pi r(\omega)$$

donde

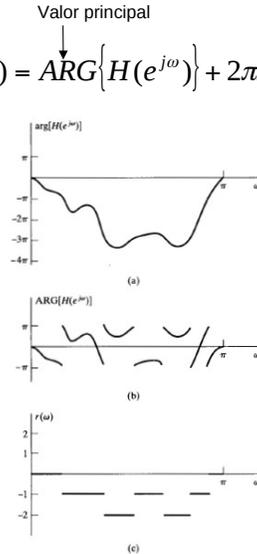
$$\pi < \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \leq \pi$$

$r(\omega) \in \mathbb{N}$ Sin restricción

$$\arg H(e^{j\omega}) = \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

$r(\omega) \in \mathbb{N}$ Es tal que $\arg H(e^{j\omega})$ es continua



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Retardo de grupo



$$\begin{aligned} \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} &= \sum_{k=0}^M \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - z_k e^{-j\omega}\} - \sum_{k=0}^N \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - p_k e^{-j\omega}\} = \\ &= \sum_{k=0}^M \frac{|z_k|^2 - \text{Re}\{z_k e^{-j\omega}\}}{1 + |z_k|^2 - 2 \text{Re}\{z_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=0}^N \frac{|p_k|^2 - \text{Re}\{p_k e^{-j\omega}\}}{1 + |p_k|^2 - 2 \text{Re}\{p_k e^{-j\omega}\}} \end{aligned}$$

Propiedades

$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} \equiv -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

salvo en las discontinuidades

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} - \arg\{H(e^{j0})\} = -\int_0^{\omega} \text{grd}\{H(e^{j\phi})\} d\phi$$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Ejercicio: cálculo de esta derivada

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

- Applet:
- <http://www.eas.asu.edu/~dsp/grad/anand/java/FreqResp/FreqResp.html>
- http://www.thole.org/manfred/polezero/en_idx.html

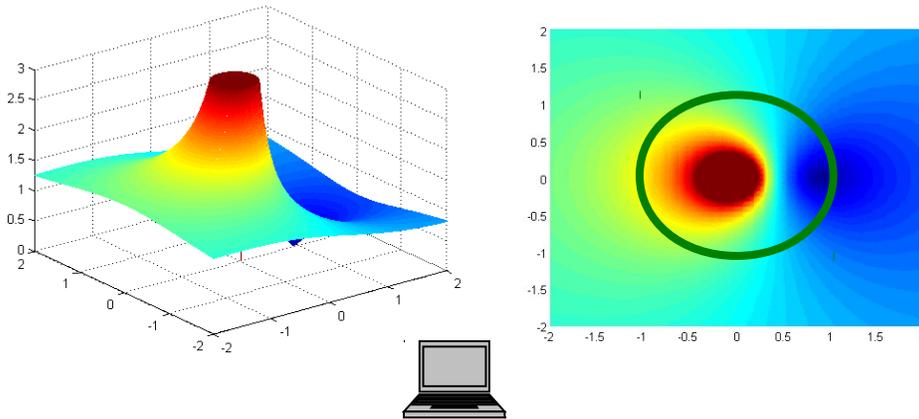
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of water. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}$$
$$z_0 = 0.9$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Ejercicio: Repetir estas gráficas

Cartagena99

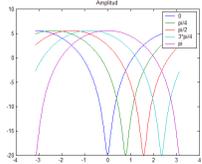
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

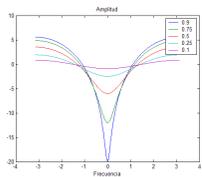
Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}$$

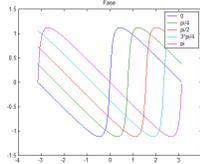
$$|H(e^{j\omega})|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta) \quad \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = \arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$



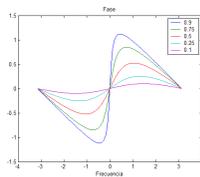
$r = 0.9$



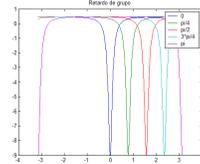
$\theta = 0$



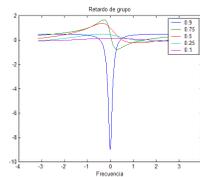
$r = 0.9$



$\theta = 0$



$r = 0.9$



$\theta = 0$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.61*

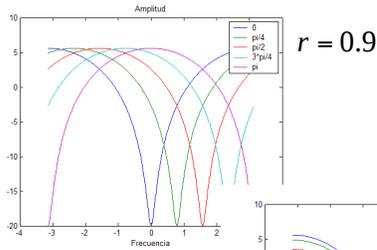
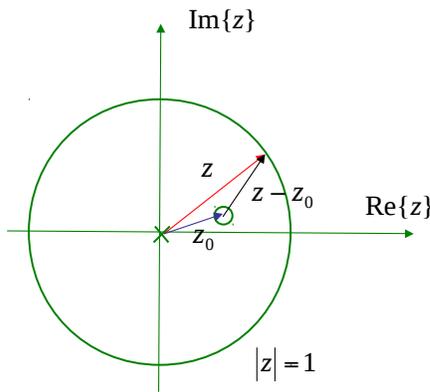
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

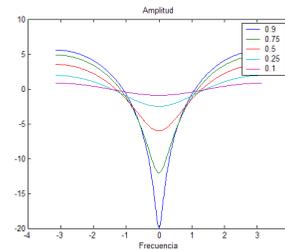
Cartagena99

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = 1 - re^{j\theta} z^{-1} = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow |H(z)| = \frac{|z - z_0|}{|z|} \longrightarrow |H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{|z|=1} = |e^{j\omega} - z_0|$$



$\theta = 0$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

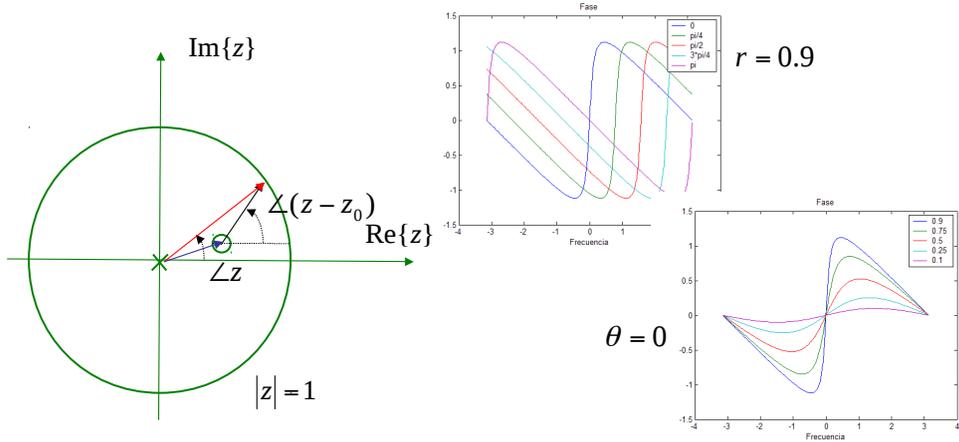
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow \angle H(z) = \angle(z - z_0) - \angle z \longrightarrow \angle H(e^{j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - z_0) - \omega$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

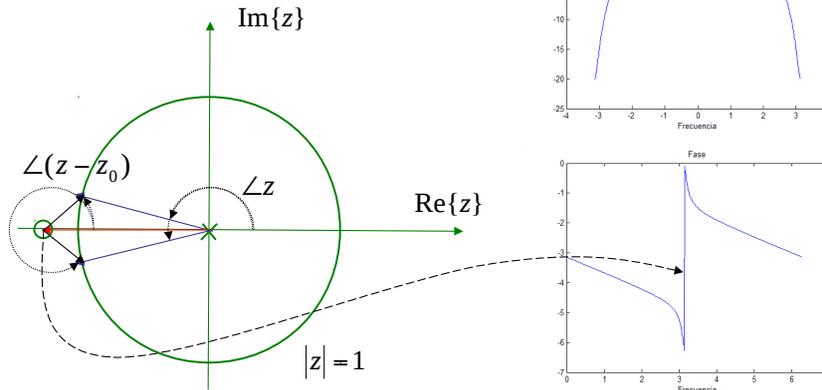
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

Para $|z_0| \geq 1$ hay una discontinuidad en la fase



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.50

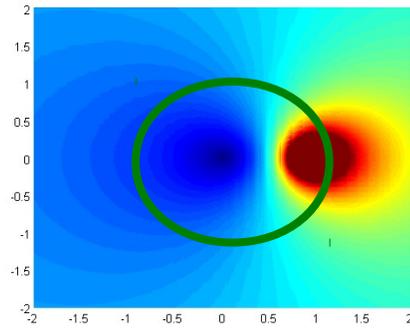
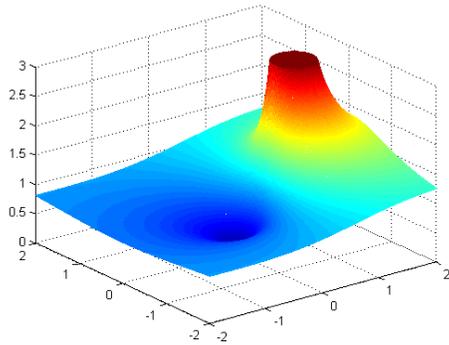
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Opp: 5.60

Probl Pro: 4.65, 4.66*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

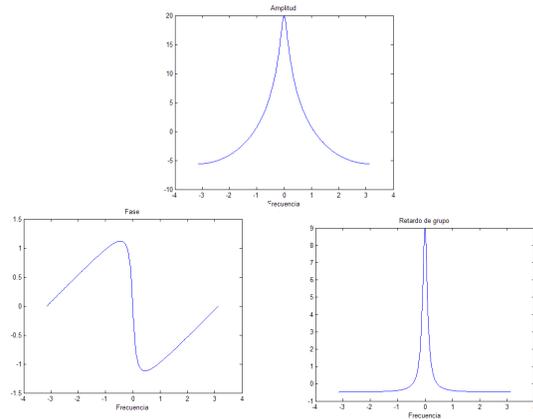
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)}$$

$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}$$

$$\text{grad}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$

Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con un solo cero.



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.62

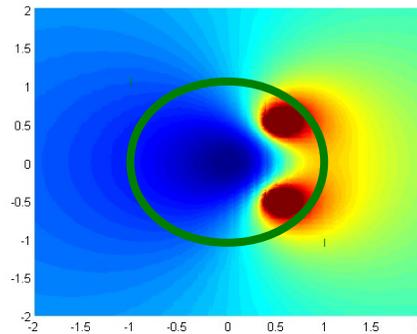
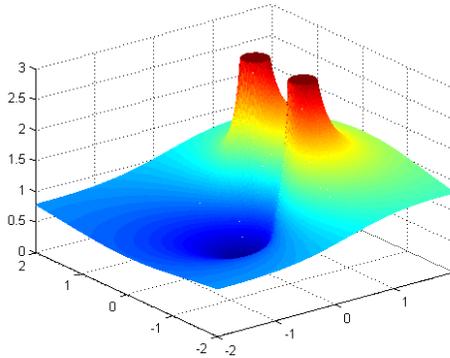
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - z_0 e^{-j\omega})(1 - z_0^* e^{-j\omega})} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Opp: 5.26

Probl Pro: 4.56, 4.60, 4.67, 4.68*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

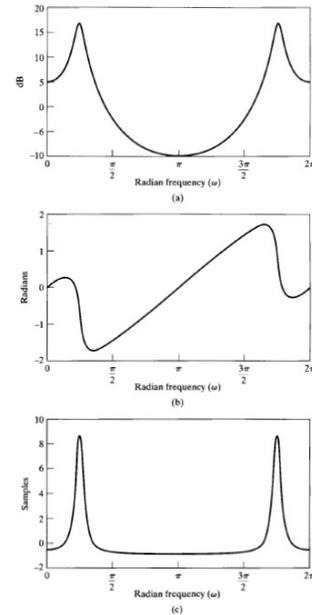
Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden IIR

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} \right) \left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)} \right)$$

$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \frac{r \sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)} - \arctan \frac{r \sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}$$

$$\text{grad}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} - \frac{r^2-r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}$$

Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con dos ceros.



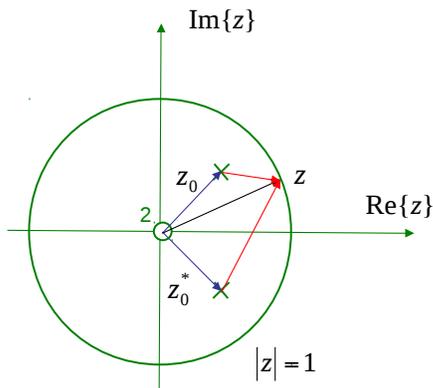
Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden



$$|H(z)| = \frac{|z|^2}{|z - z_0||z - z_0^*|}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_0||e^{j\omega} - z_0^*|}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

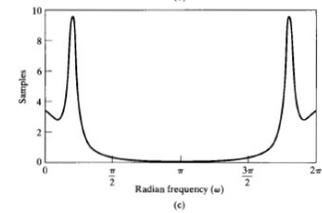
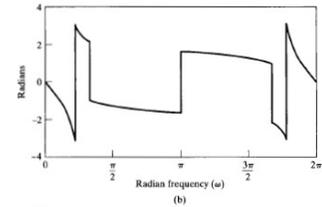
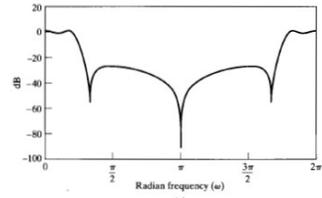
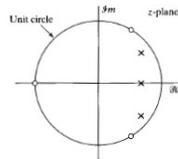
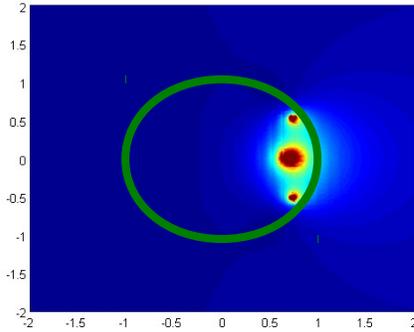
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Ejemplo:
$$H(z) = \frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.49, 4.51*, 4.53, 4.63, 4.64

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

En general, no hay ninguna relación entre magnitud y fase para un sistema LTI. Sin embargo, si el sistema está definido por una ED, una vez especificada una de ellas, la otra queda determinada dentro de un número reducido de opciones.

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} = C(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} [1]$$

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k^* z)}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k^* z)}$$

$$C(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z)}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z)}$$

Polos $p_k, (p_k^*)^{-1}$

Ceros $z_k, (z_k^*)^{-1}$

Si uno está dentro del círculo unidad, el otro debe estar fuera. Los polos de un sistema estable y causal están automáticamente determinados, pero no así los ceros.

Bibliografía: Oppenheim 5.4

Cartagena99

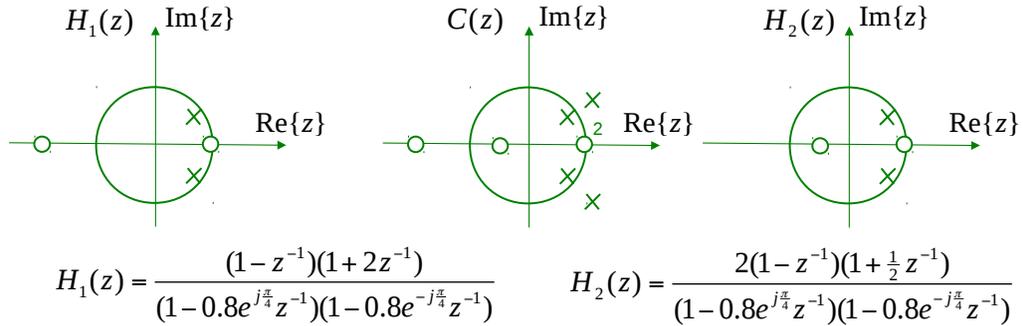
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

Ejemplo: $C(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$

$$= \frac{2(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})2(1-z)(1+\frac{1}{2}z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.4

Ejercicio: Calcular la respuesta de fase y de amplitud

Cartagena99

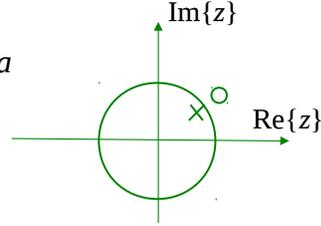
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas paso-todo

Ejemplo:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \longrightarrow z_1 = \frac{1}{a^*} \quad p_1 = a$$



$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = \left| e^{-j\omega} \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = |e^{-j\omega}| \left| \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = 1$$

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Ejercicio: Calcular la fase y el retardo de grupo

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

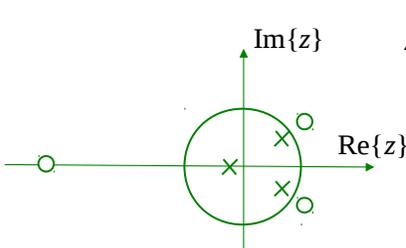
Sistemas paso-todo

Sistema paso todo de respuesta real

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k^* z^{-1}} \frac{z^{-1} - c_k}{1 - c_k z^{-1}} \quad a_k \in \mathbb{R}, c_k \in \mathbb{C}$$

$2M_c + M_r$ polos y ceros $z_r = \frac{1}{a_k}$ $p_r = a_k$ $z_c = \frac{1}{c_k^*}, \frac{1}{c_k}$ $p_c = c_k, c_k^*$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = A$$



$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M_r} \left(-\omega - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega - \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \theta_k)} \right) + \sum_{k=1}^{M_c} \left(-2\omega - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega - \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \theta_k)} - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega + \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega + \theta_k)} \right)$$

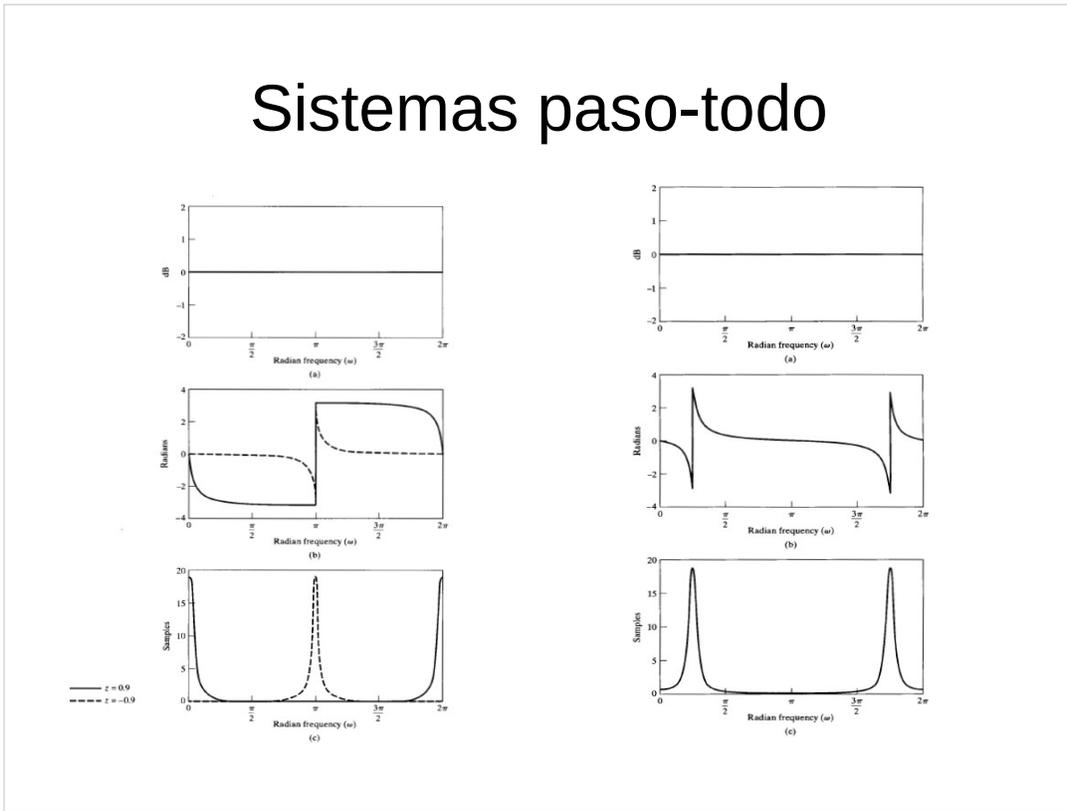
Bibliografía: Oppenheim 5.5

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas paso-todo



Bibliografía: Oppenheim 5.5



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas paso-todo

$$\boxed{\text{grad}H_{ap}(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^{M_r} \underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} \right)}_{>0} + \sum_{k=1}^{M_c} \underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} + \frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{-j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} \right)}_{>0} \boxed{>0}$$

Sistema causal y estable $\Rightarrow |r_k| < 1$

$$H_{ap}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{1-a_k}{1-a_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{1-c_k^*}{1-c_k} \frac{1-c_k}{1-c_k^*} = A \Rightarrow \angle H_{ap}(e^{j0}) = 0$$

$$\boxed{\arg\{H_{ap}(e^{j\omega})\}} = \arg\{H_{ap}(e^{j0})\} - \int_0^{\omega} \text{grad}\{H_{ap}(e^{j\phi})\} d\phi \boxed{<0}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Usos: Compensadores de fase; convertir filtros paso bajo en paso banda o paso alto; filtros de fase mínima

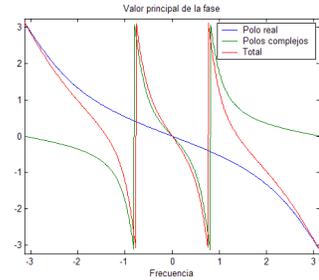
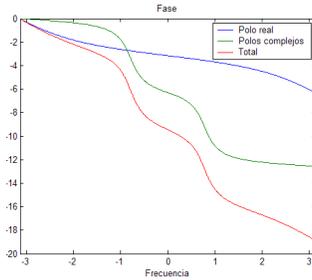
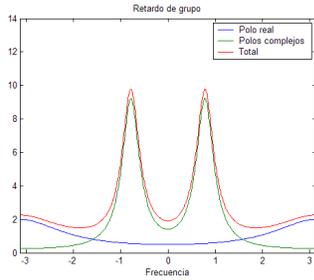
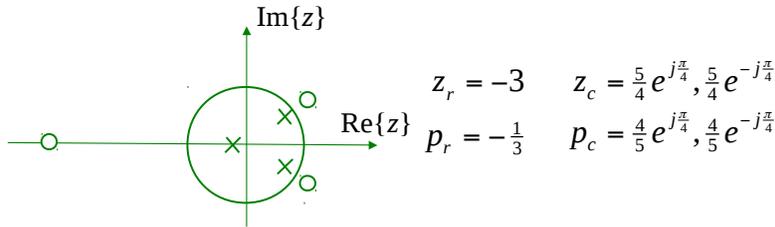
Probs Opp: 5.13, 5.24*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas paso-todo



Bibliografía: Oppenheim 5.5



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

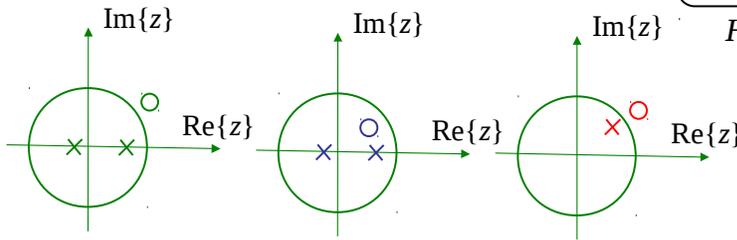
Un sistema es de fase mínima si todos sus polos y ceros están en el interior del círculo unidad.

Descomposición de un sistema LTI causal y estable

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

Supongamos que $H(z)$ tiene un cero fuera del círculo unidad en $z = \frac{1}{c}$; $|c| < 1$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) = H_1(z)(1 - cz^{-1}) \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{H_{ap}(z)}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.5

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

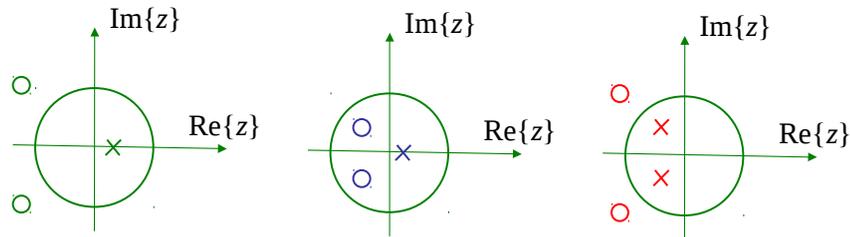
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\left(1 - \frac{3}{2} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{3}{2} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \stackrel{(1-z_0 z^{-1})(1-z_1 z^{-1}) = z_0 z_1 (z^{-1} - z_0^{-1})(z^{-1} - z_1^{-1})}{=} \frac{\frac{9}{4} \left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right) \left(z^{-1} - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \\
 &= \frac{\frac{9}{4} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \left(\frac{z^{-1} - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}}}{1 - \frac{2}{3} e^{-j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}} \right) \left(\frac{z^{-1} - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}}}{1 - \frac{2}{3} e^{j\frac{5\pi}{4}} z^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$



Bibliografía: Oppenheim 5.6

Probl Opp: 5.54

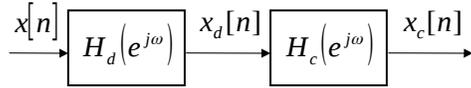
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas de fase mínima

Compensación de la respuesta frecuencial



Caso Particular: $H_d(e^{j\omega})$ es de fase mínima, causal y estable

Se puede diseñar un sistema causal y estable tal que $x_c[n] = x[n]$

Caso General:

Se puede compensar la amplitud pero no la fase.

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{d\min}(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) \longrightarrow H_c(e^{j\omega}) = H_{d\min}^{-1}(e^{j\omega})$$

$$X_c(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Probl Opp: 5.37

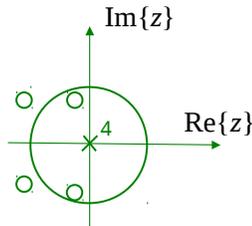
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$H_d(z) = (1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})$$



$$H_d(z) = (1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}) \frac{25}{16} (z^{-1} - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi})(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi}) =$$

$$H_d(z) = \frac{25}{16} (1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}) \frac{(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi})(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi})}{(1 - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Éste es un sistema FIR, estable y causal

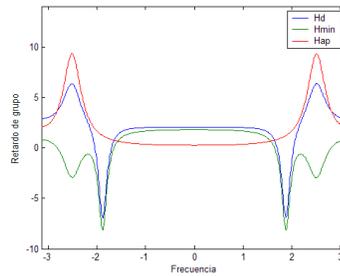
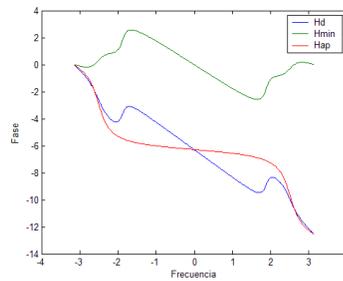
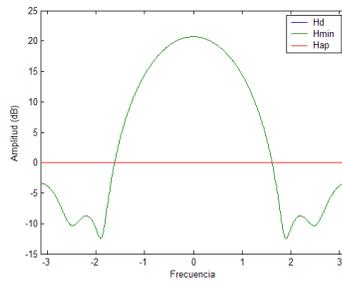
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:



Bibliografía: Oppenheim 5.6

Ejercicio: Repetir estas gráficas

Ejercicio: Diseñar el sistema de compensación y estudiar su estabilidad, causalidad, etc. Dibujar su respuesta de amplitud, fase y respuesta al impulso.

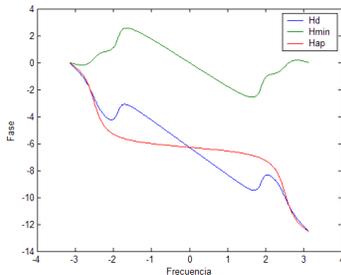
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Fase (*phase-lag*) mínima



$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\arg\{H(z)\} = \arg\{H_{\min}(z)\} + \arg\{H_{ap}(z)\} < 0$$

$$\text{phase-lag}\{H(z)\} = -\arg\{H(z)\}$$

Luego,

$$\text{phase-lag}\{H_{\min}(z)\} < \text{phase-lag}\{H(z)\}$$

Hay que tener cuidado con que $H_{\min}(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0$ porque

$h[n]$ y $-h[n]$ tienen los mismos polos y ceros pero un desfase de π

Bibliografía: Oppenheim 5.6

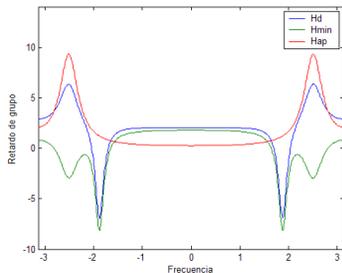
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de grupo mínimo



$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\text{grd}\{H(z)\} = \text{grd}\{H_{\min}(z)\} + \text{grd}\{H_{ap}(z)\} > 0$$

Luego, $\text{grd}\{H_{\min}(z)\} < \text{grd}\{H(z)\}$

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

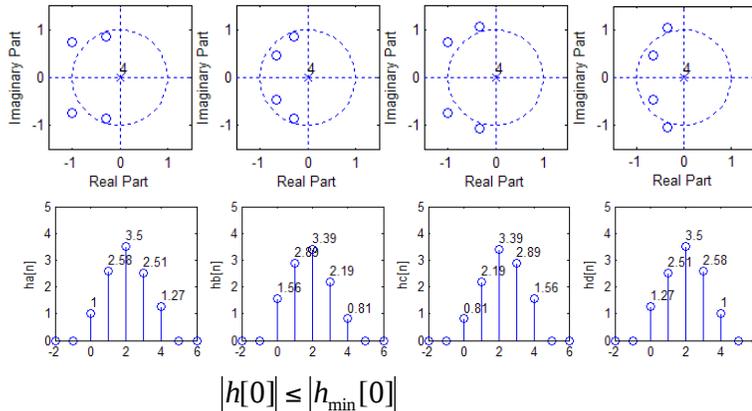
Propiedades de los sistemas de fase mínima

$$H_d(z) = \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)$$

Retardo de energía mínimo

Ejemplo:

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$



Bibliografía: Oppenheim 5.6

Todos estos sistemas tienen la misma respuesta en amplitud

Probl Opp: 5.39, 5.61, 5.62, 5.63

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

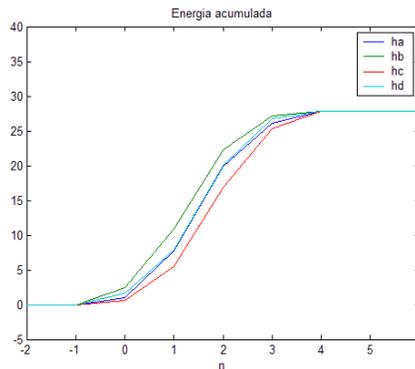
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de energía mínimo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2 \quad \text{pero} \quad \sum_{k=-\infty}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^n |h_{\min}[k]|^2$$

Ejemplo:



Bibliografía: Oppenheim 5.6

La energía de hmin es la misma que las de h por el Tma. de Parseval.

Probl Opp: 5.17*, 5.18, 5.65, 5.66, 5.67

Probl Pro: 4.85, 4.94, 4.98, 4.101*, 4.102, 4.103*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \quad |\omega| < \pi \longrightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha & |\omega| < \pi \\ \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \alpha \\ h[n] = \text{sinc}(n - \alpha) & \alpha \in \mathbb{R} \\ h[n] = \delta[n - \alpha] & \alpha \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En general, un sistema de fase lineal es tal que $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$.
 $h[n]$ es simétrica respecto a α si 2α es un entero, es decir, $h[2\alpha - n] = h[n]$

Si α es entero, entonces existe un sistema de fase 0 que es una versión desplazada de $h[n]$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Para sistemas causales no se puede conseguir fase 0 (par). Pero nos gustaría que por lo menos sea una fase lineal que tiene un retardo de grupo constante.

Probl Opp: 5.35, 5.49

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

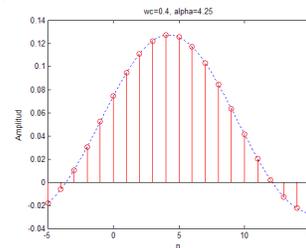
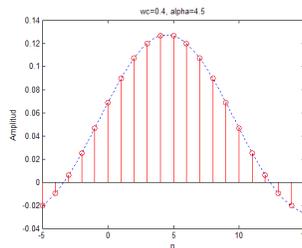
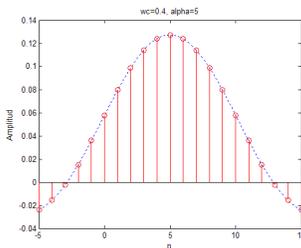
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Ejemplo:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c \frac{\omega_c}{\pi} (n - \alpha)$$



Bibliografía: Oppenheim 5.7

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\alpha-\beta)} : A(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$$

Fase lineal Fase lineal generalizada (GLP)

Ejemplo:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T_s} \quad |\omega| < \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} |H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| \\ \angle H(e^{j\omega}) = \beta - \omega\alpha + \angle A(e^{j\omega}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad |\omega| < \pi \\ \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \alpha \end{array} \right\}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

H1 es un filtro paso bajo con retardo. H2 es un moving average de tamaño M y retardado M/2 para que sea causal. Diferenciador de tiempo continuo implementado en tiempo discreto. El retardo de grupo es constante pero para ello hay que obviar las discontinuidades introducidas por la fase de A(e^{jw})



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Si $\forall \omega: \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $\beta \in \{0, \pi\}, 2\alpha \in \mathbb{Z}, h[2\alpha - n] = h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es par

Si $\beta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, 2\alpha \in \mathbb{Z}, h[2\alpha - n] = -h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es impar

Un sistema de fase 0 tiene todos sus polos y ceros en pares recíprocos conjugados.

Un sistema de fase lineal generalizada es un sistema de fase cero con polos o ceros adicionales en $z = 0, \pm 1, \infty$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

La segunda condición es la que habíamos impuesto a los sistemas de fase lineal

Probl Opp: 5.15*, 5.16, 5.20, 5.50, 5.51, 5.69

Probl Pro: 4.100*

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada causales

Si $\forall \omega: \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real y par. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} -h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real e impar. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})}$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Existen sistemas IIR que son causales y GLP, pero no se pueden expresar como un cociente de polinomios, y por lo tanto, no se pueden implementar como una ecuación en diferencias

Probl Opp: 5.40, 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.48, 5.53

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \left(h[n]e^{-j\omega n} + h[M-n]e^{-j\omega(M-n)} \right) = \\ &= h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{M}{2}-n)} \right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right) \right) \\ &= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h\left[\frac{M}{2}-k\right] \cos(\omega k) \right) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^M h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=0}^M h[k]z^{k-M} = z^{-M} H(z^{-1})$$

Si $H(z_0) = 0$, entonces $H(z_0^{-1}) = 0$

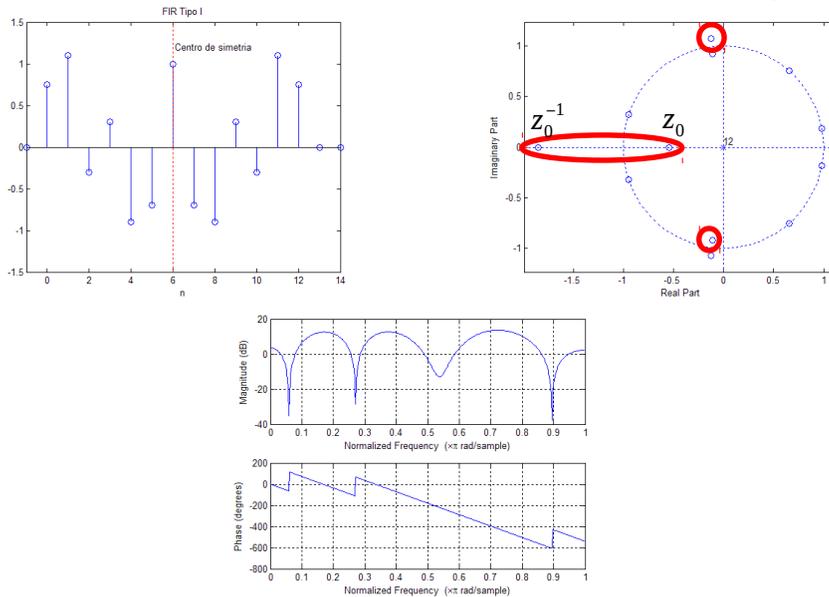
Bibliografía: Oppenheim 5.7



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I



Bibliografía: Oppenheim 5.7

Cartagena99

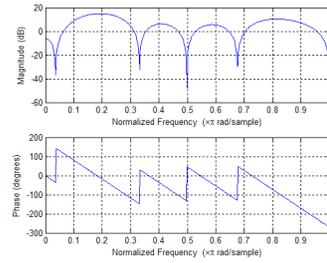
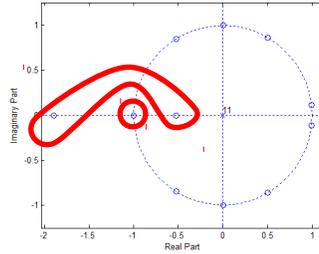
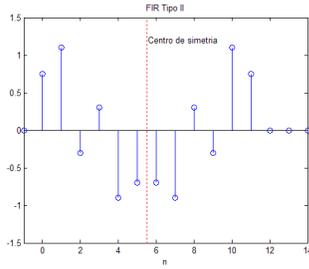
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo II

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m + 1$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\frac{M-1}{2} - k] \cos(\omega(k - \frac{1}{2}))$$



$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1}) \xrightarrow{z = -1} H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

El cero en -1 es una cosa característica de estos filtros. $H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$ viene del tipo I pero el desarrollo es el mismo para el tipo II. Ejercicio: calcular la TF

Probl Opp: 5.52



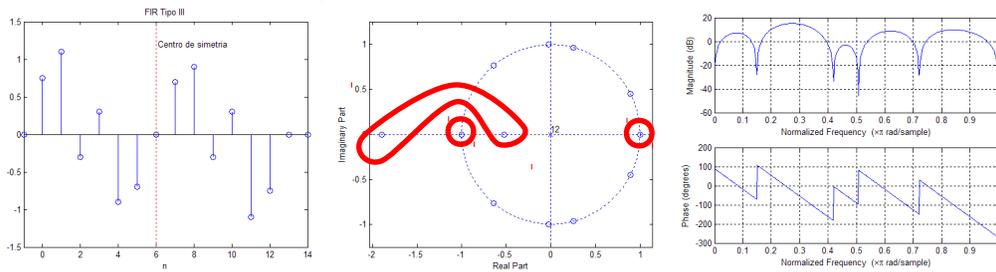
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de fase lineal FIR de tipo III

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} 2h[\frac{M}{2}-k] \sin(\omega k)$$



Bibliografía: Oppenheim 5.7

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

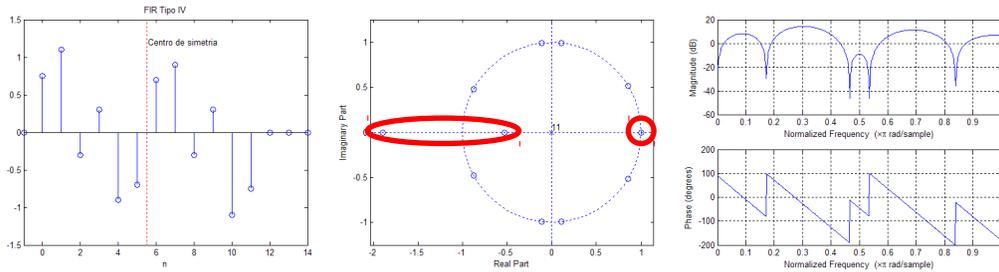
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Sistemas de fase lineal FIR de tipo IV

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m+1$$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\frac{M-1}{2}-k] \sin(\omega(k-\frac{1}{2}))$$



Bibliografía: Oppenheim 5.7

Probl Opp: 5.23, 5.56, 5.70

Probl Pro: 4.78

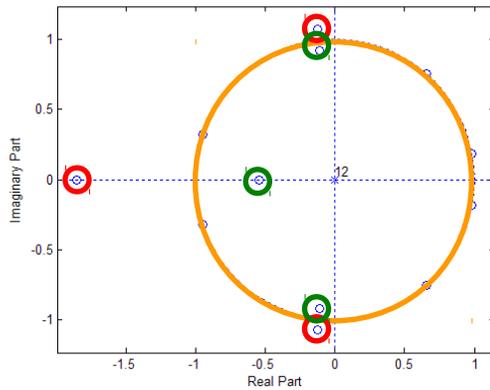
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Descomposición de un sistema FIR

$$H(z) = k H_{\min}(z) H_{\text{circ}}(z) H_{\max}(z)$$



$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

M_i es el número de ceros de $H_{\min}(z)$

$$\begin{aligned} |H_{\max}(e^{j\omega})| &= |H_{\min}(e^{-j\omega})| = \\ &= |H_{\min}(e^{j\omega})| \end{aligned}$$

$$k = \frac{h[0]}{\prod |z_{\min}|}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

h_{\max} es el flipr de h_{\min} (todo en el dominio del tiempo)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Descomposición de un sistema FIR

Ejemplo:

$$h[n] = 0.75\delta[n] + 1.1\delta[n-1] - 0.3\delta[n-2] + 0.3\delta[n-3] - 0.9\delta[n-4] - 0.7\delta[n-5] \\ + \delta[n-6]$$

$$+ 0.75\delta[n-7] + 1.1\delta[n-8] - 0.3\delta[n-9] + 0.3\delta[n-10] - 0.9\delta[n-11] - 0.7\delta[n-12]$$

$$H_{\min}(z) = (1 + 0.5412z^{-1}) (1 - 0.9242e^{j1.6881}z^{-1}) (1 - 0.9242e^{-j1.6881}z^{-1})$$

$$h_{\min}[n] = \delta[n] + 0.7574\delta[n-1] + 0.9711\delta[n-2] + 0.4622\delta[n-3]$$

$$H_{\max}(z) = (0.9242^2 0.5412) (1 + 1.8479z^{-1}) (1 - 1.0821e^{j1.6881}z^{-1}) (1 - 1.0821e^{-j1.6881}z^{-1})$$

$$h_{\max}[n] = 0.4622\delta[n] + 0.9711\delta[n-1] + 0.7574\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$H_{\text{circ}}(z) = (1 + e^{j0.1852}z^{-1}) (1 + e^{-j0.1852}z^{-1}) (1 + e^{j0.8512}z^{-1}) (1 + e^{-j0.8512}z^{-1}) (1 + e^{j2.8118}z^{-1}) (1 + e^{-j2.8118}z^{-1})$$

$$k = \frac{0.75}{0.9242^2 0.5412}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

El 1/6.9034 de Hmax es para hacer que tenga ganancia 1 a frecuencia 0. 6.9034 es la suma de todos los coeficientes de hmax

Probl Opp: 5.12*, 5.38, 5.45, 5.46, 5.64

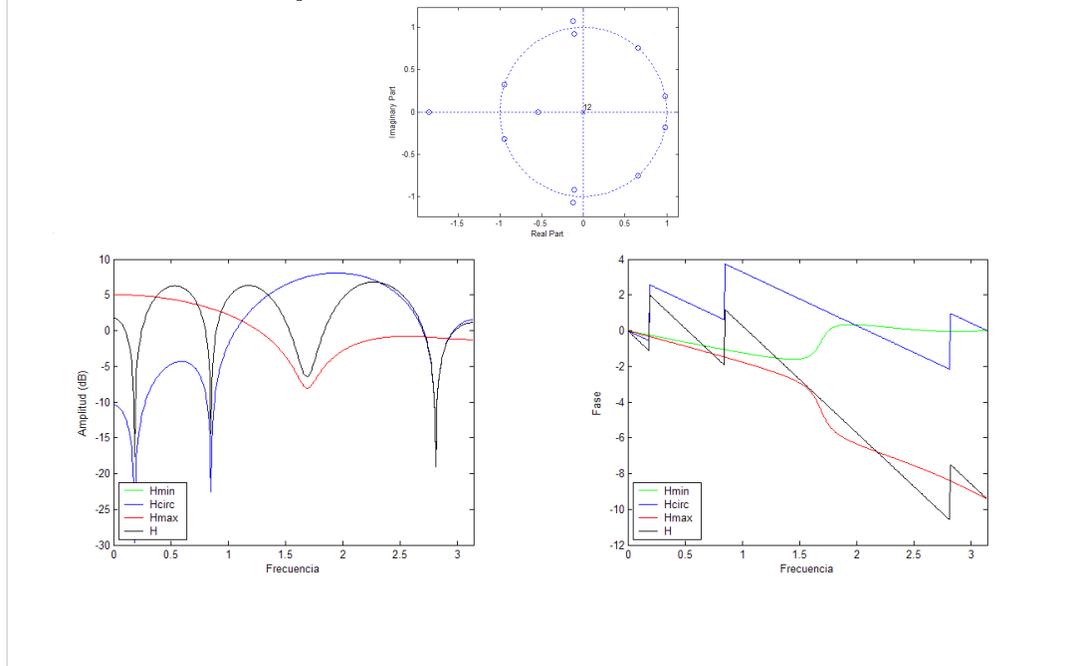
Probl Pro: 4.109*

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Descomposición de un sistema FIR



Bibliografía: Oppenheim 5.7

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resumen

- Filtros definidos por un sistema racional
- Propiedades (estabilidad, causalidad, invertibilidad)
- Retardo de grupo
- Respuestas tipo: 1 cero, 1 polo, 2 polos
- Relación magnitud-fase
- Sistemas paso-todo
- Sistemas de fase mínima
- Sistemas de fase lineal generalizada
 - Filtros FIR

Probl Opp: 5.58, 5.68

Probl Pro: 4.95, 4.97, 4.105

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow effect at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70