EJERCICIOS TEMA 3

3.1. Encuentra el menor residuo no negativo módulo 7 de los números: 23, 35, –48, –64. Idem. módulos 8, 9 y 11

3.2. ¿Cuál es el resto de la división 28×33 entre 35?

3.3. Simplifica las expresiones $120\,a \equiv 78 \pmod{44}$, $20\,a \equiv 48 \pmod{36}$, $12\,a \equiv 66 \pmod{30}$

3.4. Demuestra que si p es primo y $p \geq 5 \Rightarrow p \equiv 1$(mód 6) ó $p \equiv 5$(mód 6)

3.5. Encuentra el criterio de divisibilidad por 7.

3.6. Si $(x_n,x_{n-1},...,x_0)_{10}$ es la representación en base 10 de un entero positivo x, comprueba que $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - ... + (-1)^n x_n$ (mód 11). Describe el criterio de multiplicidad por 11. Comprueba si 1213141516171819 y 192837465564738291 son divisibles por 11. ¿Qué cifra falta en la igualdad 871782_1200 = 14!?

3.7. Halla los divisores de cero en $\mathbf{Z_7}$, $\mathbf{Z_{12}}$, $\mathbf{Z_{14}}$ y $\mathbf{Z_{24}}$

3.8. Halla los elementos inversibles (o unidades) en $\mathbf{Z_7}$, $\mathbf{Z_{12}}$, $\mathbf{Z_{14}}$ y $\mathbf{Z_{24}}$

3.9. Halla los inversos de:
a) 6 en Z_{17} b) 3 en Z_{10} c) 5 en Z_{12} d) 7 en Z_{16}. e) 5 en Z_{13} f) 777 en Z_{1009}.

3.10. Si p es primo, demuestra que en Z_p los únicos elementos que coinciden con su inverso son 1 y – 1

3.11. a) Demuestra que los enteros menores que 11, excepto el 1 y el 10, pueden agruparse de dos en dos de manera que cada uno de ellos es el inverso del otro en Z_{11}.
b) Demuestra que $10! \equiv -1$(mód 11).
c) Demuestra que si p es primo entonces $(p-1)! \equiv -1$(mód p). (Teorema de Wilson) Utiliza este resultado para hallar el resto de dividir 15! por 17

3.12. Demuestra, utlizando congruencias, que $3^{2n+5} + 2^{4n+1}$ es divisible por 7 para todo $n \geq 1$

3.13. ¿Cuál es el último dígito de los números 7^{93}, 23^{189}, 6^{20}?

3.14. Calcula los restos de dividir
a) 3^{47} entre 23 b) 6^{592} entre 11 c) 3^{15} entre 17 d) 125^{4577} entre 13 e) 6^{20} entre 23

3.15. Sean a y b enteros y p primo. Usar el teorema de Fermat para demostrar que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$ (mód p)

3.16. Demostrar que si $a,b \in Z+$ entonces $2^a - 1$ y $2^{a(\text{mód } b)} - 1$ son congruentes módulo $2^b - 1$. Usar este resultado para comprobar que:

$$\text{m.c.d.}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{m.c.d.}(a,b)} - 1$$

3.17. Un reloj analógico se pone en hora a las 12 en punto de un día determinado. ¿Qué hora marcaría depués de transcurridas 5^{100} horas exactas, si no se para nunca y es totalmente preciso?

3.18. Definimos $A_n = 2^n + 4^n + 8^n$ para todo n natural. Probar que si $n \equiv m \pmod 3$ entonces $A_n \equiv A_m \pmod 7$

3.19. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $5x \equiv 1(\text{mód } 11)$ b) $4x \equiv 3(\text{mód } 7)$ c) $5x \equiv 7(\text{mód } 15)$.

3.20. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $66x = 42$ en $\mathbf{Z}_{168}$ b) $21x = 18$ en $\mathbf{Z}_{30}$ c) $35x = 42$ en $\mathbf{Z}_{49}$.

3.21. ¿Qué entero al dividirlo por 2 da de resto 1 y al dividirlo por 3 da también de resto 1? ¿Qué entero es divisible por 5 pero queda resto 1 al dividirlo por 3?

3.22. Halla un número natural cuyos restos al dividirlo por 3, 4, 5 y 6 sean, respectivamente, 2, 3, 4 y 5. (Brahmagupta, s. VII)

3.23. Resuelve el sistema de congruencias $x \equiv 2(\text{mód } 5)$, $2x \equiv 1(\text{mód } 7)$, $3x \equiv 4(\text{mód } 11)$

3.24. Halla los números enteros n tales que n + 1 es múltiplo de 3, n + 3 es múltiplo de 4 y n + 5 es múltiplo de 7.

3.25. Resuelve el sistema de congruencias $\begin{cases} 120x \equiv 180 \pmod{450} \\ 24x \equiv 76 \pmod{100} \end{cases}$

3.26. Una banda de 17 piratas, se reúne para repartirse un cofre con más de cien monedas de oro. Efectuado equitativamente el reparto sobra una moneda. En la pelea resultante para adjudicarla muere un pirata y vuelven a realizar el reparto sobrando una moneda. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que puede contener el cofre?

Supongamos que la solución anterior es el número real de monedas que contenía el cofre y que la historia continúa: siempre que sobran monedas en el reparto hay pelea y muere un pirata, ¿cuántos piratas quedarán vivos cuando en el reparto no sobre ninguna moneda?

3.27. Se reparten cuatro bolsas iguales de caramelos entre tres grupos de niños. En el primer grupo, que consta de cinco niños, se reparten dos bolsas y sobra un caramelo. En el segundo grupo, de seis niños, se reparte una bolsa y sobran dos caramelos. En el tercer grupo, de siete niños, se reparte una bolsa y sobran tres caramelos. Sabiendo que, en total, el número de caramelos no llegaba a 500, ¿cuántos caramelos había en cada bolsa?

3.28. Un distribuidor de equipos informáticos efectuó un pedido de entre 1000 y 1500 equipos a un fabricante que se los envió en contenedores completos con capacidad para 68 equipos cada uno. El distribuidor los repartió a los diferentes puntos de venta usando furgonetas con capacidad para 20 equipos y quedando 32 equipos sin repartir en el almacén. ¿Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica?

3.29. Se tiene una cantidad par de monedas, menor que 600, que se quieren disponer en filas. Si se ordenan, de manera contigua, completando filas de 17 monedas cada una, sobran 8 monedas. Si se consideran únicamente la mitad de las monedas iniciales y se ordenan en filas de 7 monedas, sobran 3 monedas. Averigua la posible cantidad inicial de monedas. ¿Es única la solución?