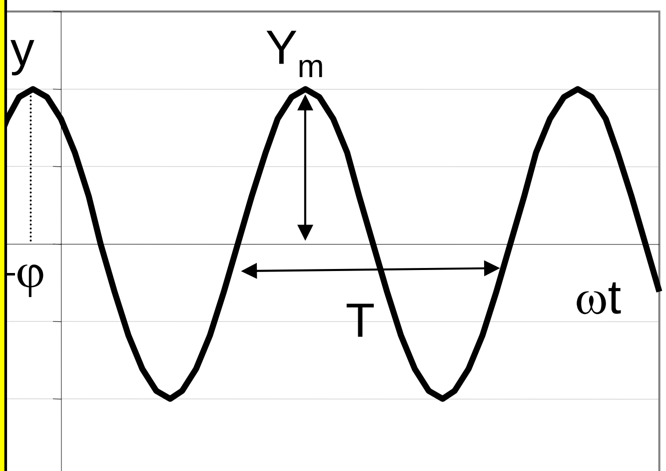
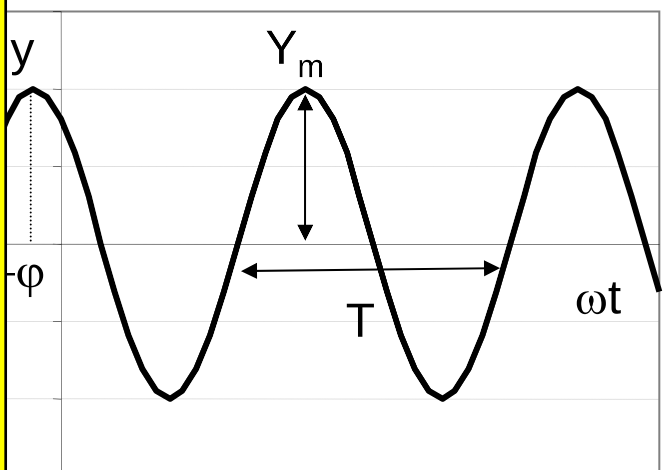
aracterísticas de una onda sinusoidal



$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- alor máximo= valor de pico=valor de cresta
- /alor instantáneo
- odo= tiempo que se tarda en completar un ciclo completo [s]
- cuencia= número de ciclos que se describen por segundo=1/T [Hz]

...aracterísticas de una onda sinusoidal



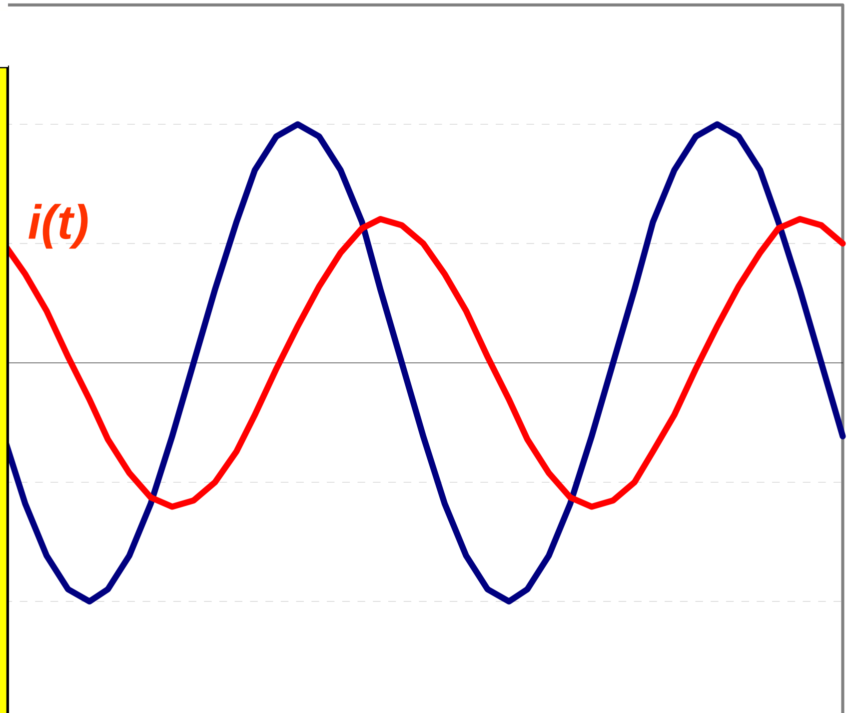
$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

...lsación; $\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi f$ [rad s^{-1}]

...gulo de fase [rad]

...ulo de fase en ocasiones se expresará en grados por comodidad, ... es correcto dimensionalmente)

Desfase relativo



tá adelantada 70 º respecto a i

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Desfase entre u e i

$$\boxed{\varphi = \varphi_U - \varphi_I}$$

- $\varphi<0$ u en retraso resp a i
- $\varphi>0$ u en adelanto resp i
- $\varphi=0$ “en fase”
- $\varphi=90º$ “en cuadratura”
- $\varphi=180º$ “en oposición”

Valor medio y valor eficaz

$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

lor medio

$$Y_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Y_m \cos(\omega t + \varphi)dt = 0$$

alor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt} = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}}$$

lor eficaz de una corriente periódica es el valor de una corriente nua que al circular por una resistencia R produce en un tiempo T la a cantidad de energía disipada

Resumen de notación

$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} Y \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

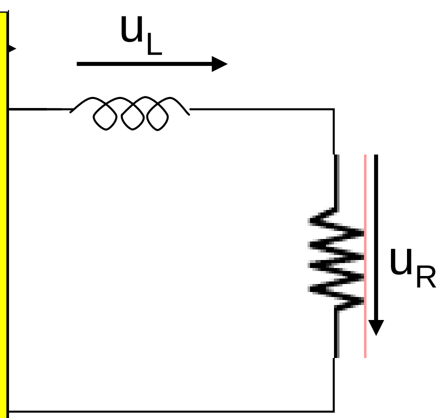
Valor instantáneo: y

Valor eficaz: Y

Valor máximo: Y_m

Fasor: *Y*

Análisis de circuitos con excitación alterna



Conocemos u(t) y queremos calcular i(t)

$$u(t) = u_C + u_L + u_R$$

$$u_c = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \qquad u_L = L\frac{di(t)}{dt} \qquad u_R = Ri$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + L\frac{di(t)}{dt} + Ri}$$

ner el valor de i(t) se debe resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{C}i + L\frac{d^2 i(t)}{dt} + R\frac{di(t)}{dt}$$

$i(t)=i_h+i_p$

(Reg. permanente+Reg.transitorio)

Representación fasorial

$$y(t)=\sqrt{2}Y\cos(\omega t+\varphi)$$

...os a demostrar que existe una correspondencia entre una ...ón sinusoidal y(t) y un número complejo Y que se defina ...:

$$Y = Y\angle\varphi$$

Relación entre senoides y fasores

$$= \sqrt{2}Y\cos(\omega t+\varphi)$$

$$Y\big|\varphi = Ye^{j\varphi}$$ multiplicando por $e^{j\omega t}$

$$e^{j\omega t} = Ye^{j(\varphi+\omega t)} = Y\big(\cos(\varphi+\omega t)+ jsen(\varphi+\omega t)\big)$$

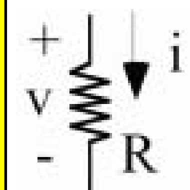
relación de Euler

$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ye^{j\omega t}\right)=\sqrt{2}Y\cos(\varphi+\omega t)}$$

unción sinusoidal queda unívocamente representada por su **fasor**
alente

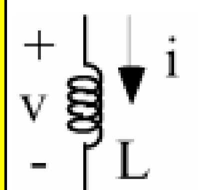
esumen elementos pasivos

tencia



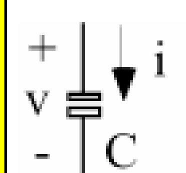
$$u(t) = Ri(t) \qquad i(t) = Gu(t)$$

na



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)dt$$

ensador



$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \qquad i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

espuesta de los elementos pasivos

mos a analizar la respuesta de los tres elementos
sivos (resistencia, inductancia y capacidad) a una
itación sinusoidal en el domino del tiempo y en el
ninio de la frecuencia.

aginemos que conocemos la corriente que circula
cada uno de ellos que es de la forma

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

ueremos calcular la tensión entre sus terminales,
será del tipo

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

espuesta de los elementos pasivos

partir de las relaciones entre u(t) e i(t) en cada uno los elementos pasivos determinaremos su puesta.

scamos encontrar los valores de U y φ_u en función I, φ_i y los valores de los parámetros R, L y C.

s fasores corriente y corriente son:

$$\left.\begin{array}{l} = I\angle\varphi_i \\ \\ = U\angle\varphi_u \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) \\ \\ u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) \end{array}$$

Resistencia

$$2\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right)$$

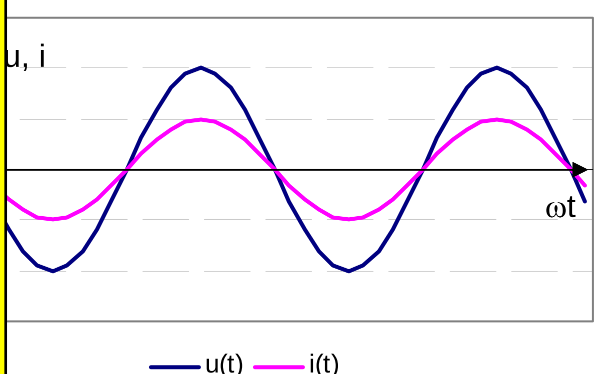
$$2\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right)$$

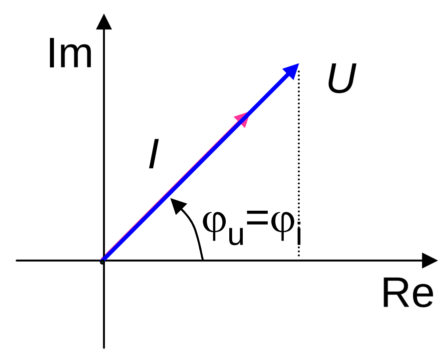
$$\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) = R\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(RIe^{j\omega t}\right)$$

$$R \in \mathrm{Re}$$

$\boxed{I}$ => $U|\varphi_u = RI|\varphi_i \quad \begin{cases} U = RI \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases}$

En una resistencia la tensión y la intensidad están **en fase**





Bobina

$$\frac{di}{dt}$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right)$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}I\,\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}Ij\omega e^{j\omega t}\right)$$

I no depende del tiempo

$$u = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) = L\,\mathrm{Re}\left(Ij\omega e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(LIj\omega e^{j\omega t}\right)$$

$$L \in \mathrm{Re}$$

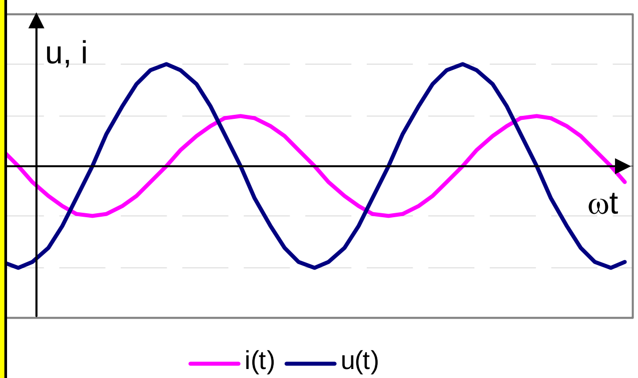
$$\boxed{\omega LI} \Rightarrow U\angle\varphi_u = \omega jLI\angle\varphi_i = \omega LIe^{j90}e^{j\varphi_i} = \omega LI\angle\varphi_i + 90^{\circ}$$

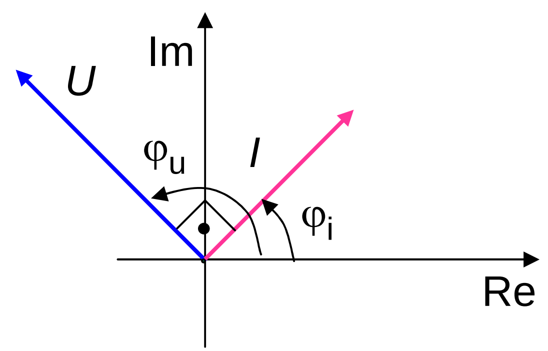
Bobina

$$= \omega LI\angle\varphi_i + 90^{o} \quad \begin{cases} U = \omega LI \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^{o} \end{cases}$$

En una bobina la tensión está **adelantada** 90º respecto a la corriente

$$(\varphi_u > \varphi_i)$$





Condensador

$$\frac{du}{dt}$$

$$\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right)$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(U\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Uj\omega e^{j\omega t}\right)$$

U no depende del tiempo

$$= C\frac{du}{dt} \Rightarrow \mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left(Uj\omega Ce^{j\omega t}\right) \Rightarrow \boxed{I = Uj\omega C}$$

$$C \in \mathrm{Re}$$

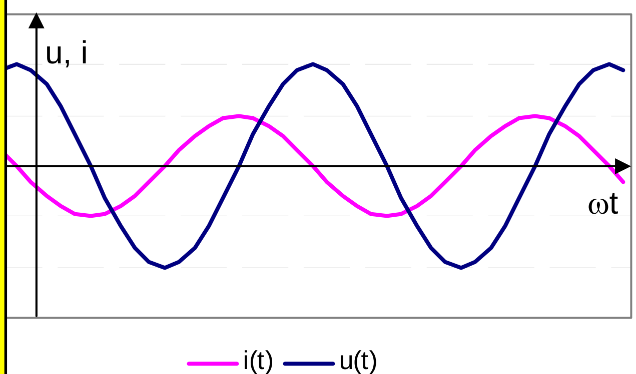
$$\boxed{\frac{-j}{\omega C}I} \Rightarrow U\angle\varphi_u=\frac{-j}{\omega C}I\angle\varphi_i=\frac{1}{\omega C}Ie^{-j90}e^{j\varphi_i}=\frac{1}{\omega C}I\angle\varphi_i-90^{\circ}$$

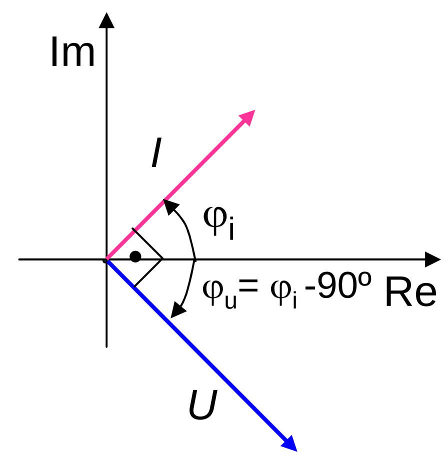
Condensador

$$\frac{1}{\omega C} I\angle\varphi_i - 90^{o} \begin{cases} U = \dfrac{1}{\omega L} I \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^{o} \end{cases}$$

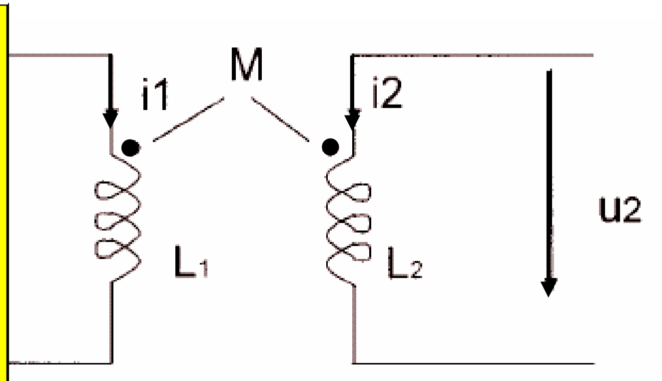
En un condensador la tensión está **retrasada** 90º respecto a la corriente

$$(\varphi_u < \varphi_i)$$





Bobinas acopladas



$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = M_{12} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

endo de modo análogo a los casos anteriores se as siguientes relaciones fasoriales:

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot I_1 + j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot I_2 \\ U_2 &= j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot I_1 + j\omega \cdot L_2 \cdot I_2 \end{aligned}}$$

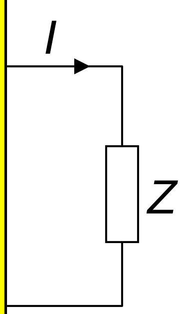
Impedancia compleja

relaciones fasoriales U=f(I) en los elementos pasivos son:

stencia	Bobina	Condensador
$= RI$	$U = j\omega L I$	$U = \dfrac{-j}{\omega C} I$

El fasor tensión puede expresarse como el producto de una cantidad compleja por el fasor corriente

dancia: Cociente entre el fasor tensión y el fasor corriente



Se verifica la "Ley de Ohm en notación fasorial"

$$\boxed{U = ZI}$$

Z es un número complejo, pero no un fasor, ya que no se corresponde con ninguna función sinusoidal en el dominio del tiempo

Impedancia

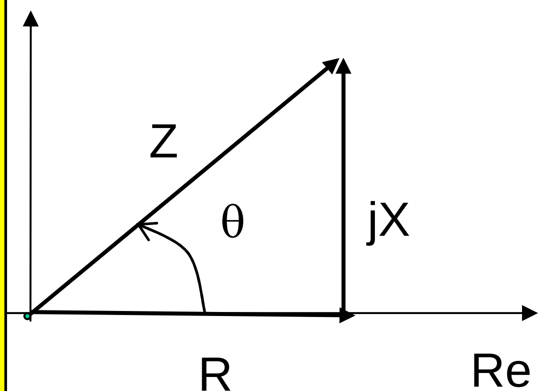
stencia $\quad$ Bobina $\quad$ Condensador

$$_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

$$+ jX \begin{cases} \mathrm{Re}(Z) = R \text{ componente resistiva: “Resistencia”} \\ \mathrm{Im}(Z) = X \text{ componente reactiva : “Reactancia”} \begin{cases} X_L = \omega L > 0 \\ X_C = -\dfrac{1}{\omega C} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

X se expresan en [Ω]

Triángulo de impedancias



$$Z = R + jX$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta = arctg\,\frac{X}{R}$$

$$R = Z\cos\theta \qquad X = Zsen\theta$$

mpedancia y admitancia

$$Z = R + jX$$

tancia $$Y = \frac{1}{Z} = G + jB \begin{cases} \mathrm{Re}(Y) = G & \text{“Conductancia”} \\ \mathrm{Im}(Y) = B & \text{“Susceptancia”} \end{cases}$$

Y , G y B se expresan en [S]

Resistencia	Bobina	Condensador
$Y_R = G$	$Y_L = -j/\omega L$	$Y_C = j\omega C$

mas de Kirchhoff en forma fasorial

mer Lema de Kirchhoff: La suma algebraica de los ores corriente en un nudo es igual a cero

$$\sum I = 0$$

egundo Lema de Kirchhoff: En un lazo o malla, la ma de las elevaciones de tensión de los neradores, expresadas en forma fasorial, es igual a suma de las caídas de tensión en las impedancias mplejas

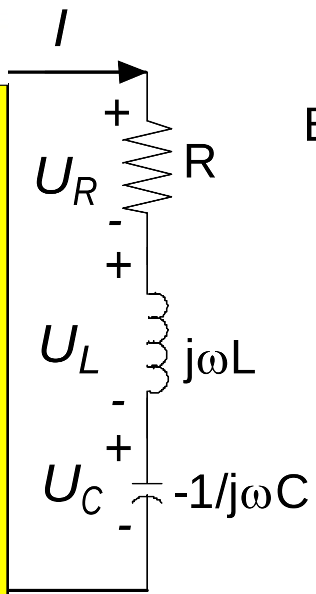
$$\sum U = \sum ZI$$

ociación de impedancias en serie y en paralelo

régimen sinusoidal permanente es posible agrupar mentos pasivos de distinta naturaleza (resistencias inductancias y/o capacidades) una vez que cada de ellos ha sido caracterizado por su impedancia respondiente.

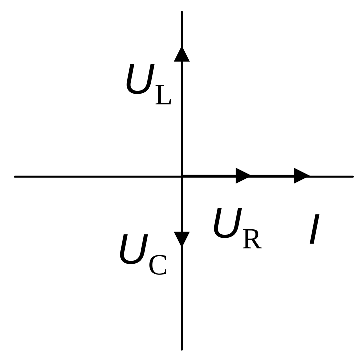
reglas para determinar las impedancias ivalentes de combinaciones de elementos pasivos, idénticas a las estudiadas para los elementos stivos, sustituyendo las resistencias por las edancias complejas.

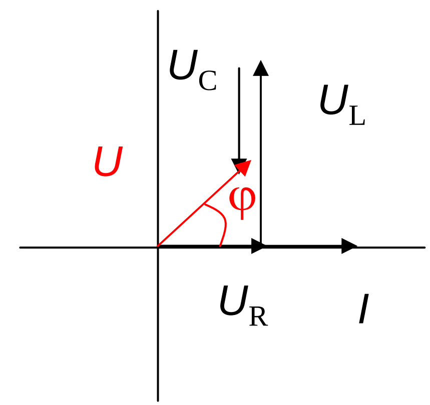
agrama fasorial circuito RLC serie



En un circuito serie tomamos *I* como origen de fases

$$\mathbf{I} = I\angle 0^{o}$$





$$= RI\angle 0^{o} = U_R\angle 0^{o}$$

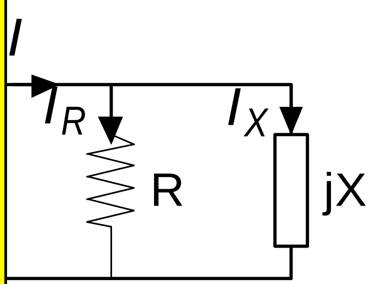
$$= j\omega L\mathbf{I} = \omega L I\angle 90^{o}$$

$$\frac{-j}{\omega C}\mathbf{I} = \frac{1}{\omega C} I\angle -90^{o}$$

- $U_L > U_C$ => $\varphi > 0$ circuito inductivo
- $U_L < U_C$ => $\varphi < 0$ circuito capacitivo

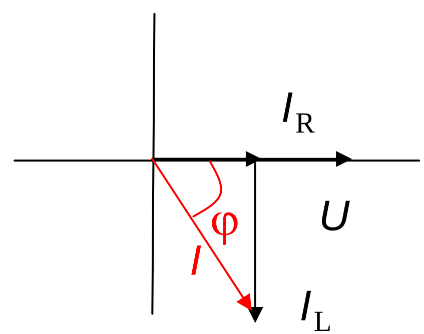
Diagrama fasorial circuito RX paralelo

En circuito serie tomamos *U* como origen de fases $U = U\angle 0^{o}$

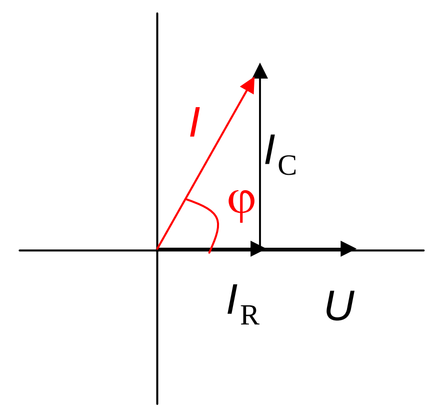


$\frac{U}{R} = \frac{U}{R}\angle 0^{o}$

Bobina



Condensador



$\frac{U}{jX}$

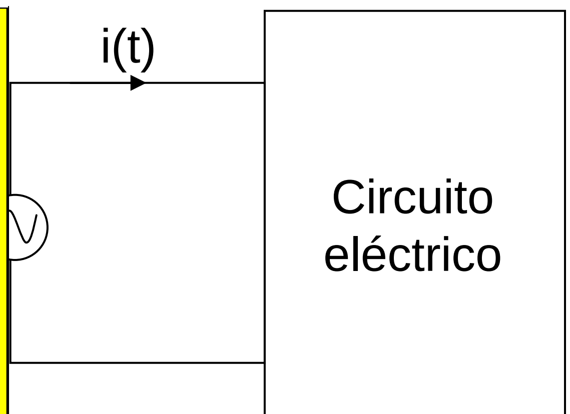
- Bobina $I_X = \frac{U}{X_L}\angle -90^{o}$
- Condensador $I_X = \frac{U}{X_C}\angle 90^{o}$

...étodos de resolución de circuitos

...dos los métodos estudiados para la resolución de ...uitos alimentados en corriente continua, son ...ectamente aplicables a circuitos alimentados en ...erna, trabajando en el dominio de la frecuencia.

- ...étodo de las corrientes de malla
- ...étodo de las tensiones de nudo
- ...rincipio de superposición: Especialmente útil cuando en un ...ircuito existen fuentes de distinta frecuencia que actúan ...imultáneamente
- ...eoremas de Thevenin y Norton

tencia en un circuito de C.A.



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

maremos la tensión como origen de fases

- $\varphi>0$ (i retrasada respecto a u): Carga inductiva
- $\varphi<0$ (i adelantada respecto a u): Carga capacitiva

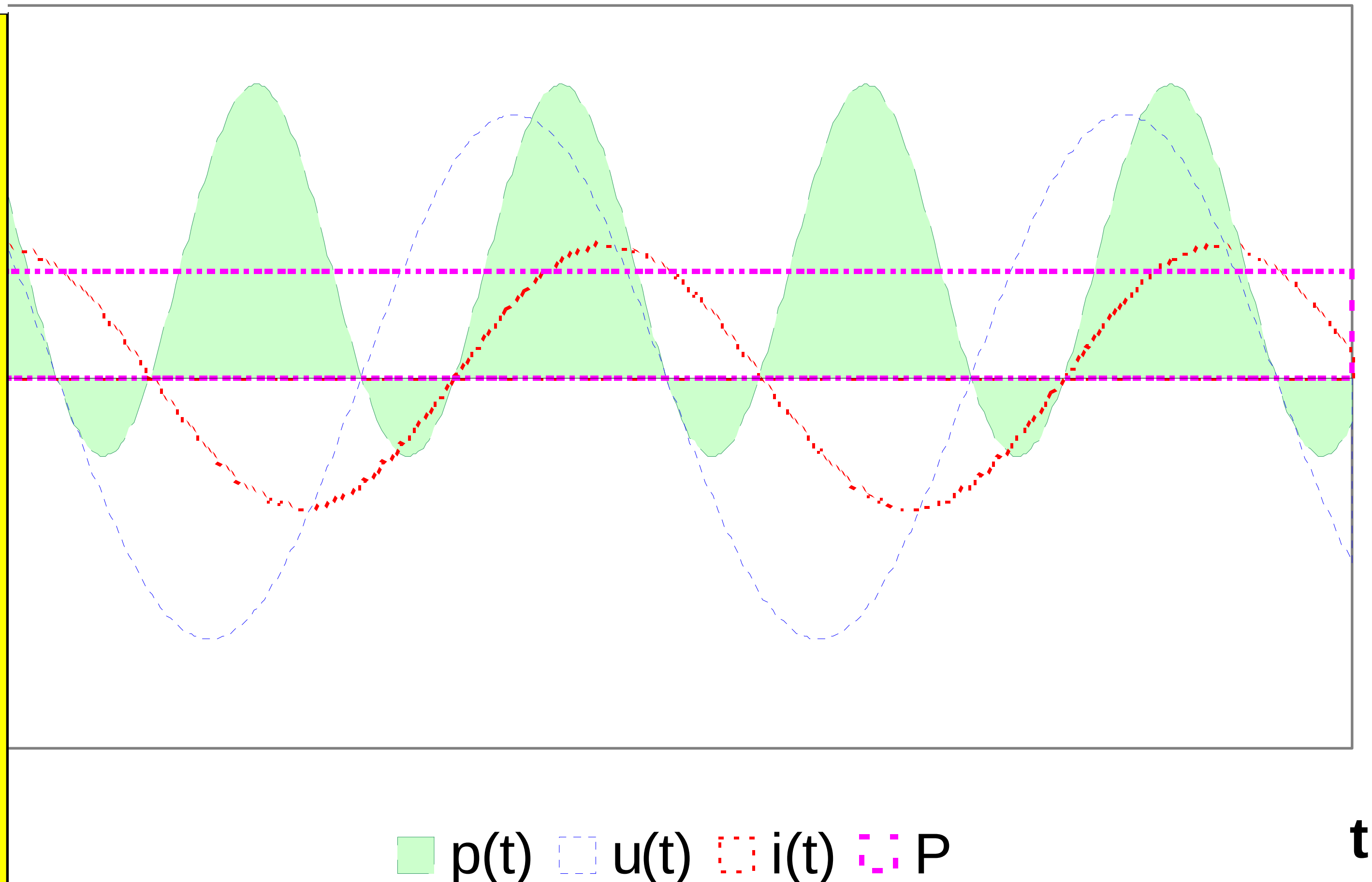
Potencia instantánea

$$u(t)i(t) = 2UI\cos\omega t\cos(\omega t - \varphi) =$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right) = \underbrace{UI\cos\varphi}_{\text{término constante}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{término fluctuante de frecuencia doble que u e i}}$$

Potencia instantánea



Potencia media

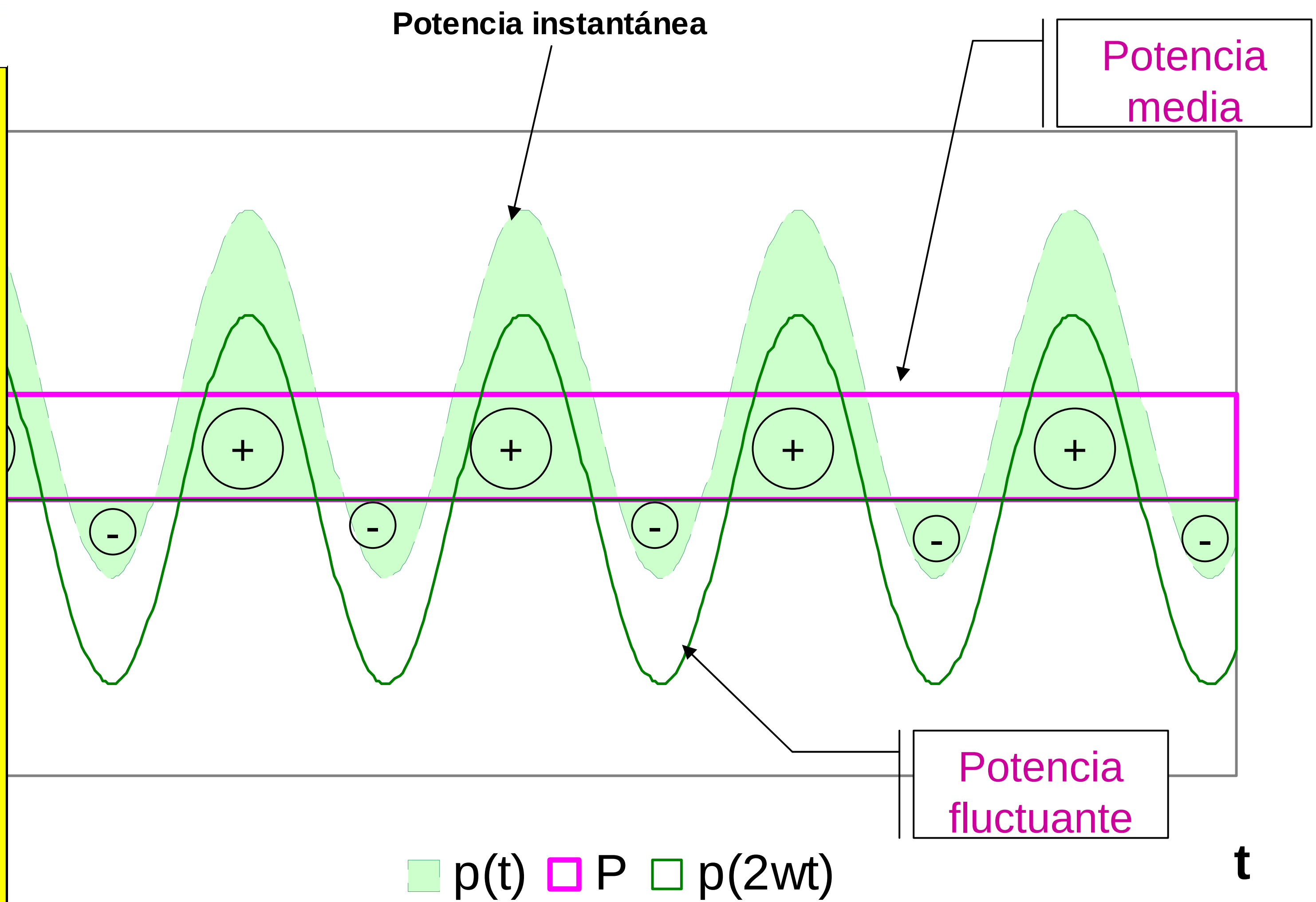
$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U \cdot I \cdot \cos\varphi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)\right]dt =$$

$$\cdot I \cdot \cos\varphi$$

tencia instantánea se puede expresar como la de una potencia media y una potencia fluctuante

$$p(t) = P + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

Potencia



Potencia instantánea
Potencia media
+
-
Potencia fluctuante
p(t)
P
p(2wt)
t

Potencia activa y reactiva

$$P + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha \cos\beta + sen\alpha sen\beta)$$

$$+ U \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \cos 2\omega t + U \cdot I \cdot sen\varphi \cdot sen 2\omega t$$

ción:

Potencia media = potencia activa $\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi}$

Potencia reactiva $\boxed{Q = U \cdot I \cdot sen\varphi}$

$$p(t) = P(1 + \cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

Potencia instantánea

$$p(t) = P(1+\cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

otencia instantánea absorbida o generada por un ito consta de dos términos

érmino constante: P = POTENCIA ACTIVA, igual al valor medio de la otencia instantánea

érmino oscilante de pulsación 2ω, que a su vez se descompone en os sumandos

- Amplitud P y pulsación 2ω $P\cos 2\omega t$
- Amplitud Q, pulsación 2ω, retrasado 90º $Qsen\, 2\omega t$

litud de a potencia fluctuante: "Potencia aparente"

$$S = UI$$

Resumen

encia activa $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ [W]

encia reactiva $Q = U \cdot I \cdot sen\varphi$ [VAr]

encia aparente $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [VA]

tor de potencia $f.p. = \dfrac{P}{S} = \cos\varphi$ $0 < f.p. \leq 1$

argumento impedancia compleja

–Cargas inductivas $\varphi > 0$

–Cargas capacitivas $\varphi < 0$

otencia en una resistencia

$= R$

$= RI \quad \begin{cases} \varphi = 0^{o} \\ U = RI \end{cases}$

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos \omega t$$

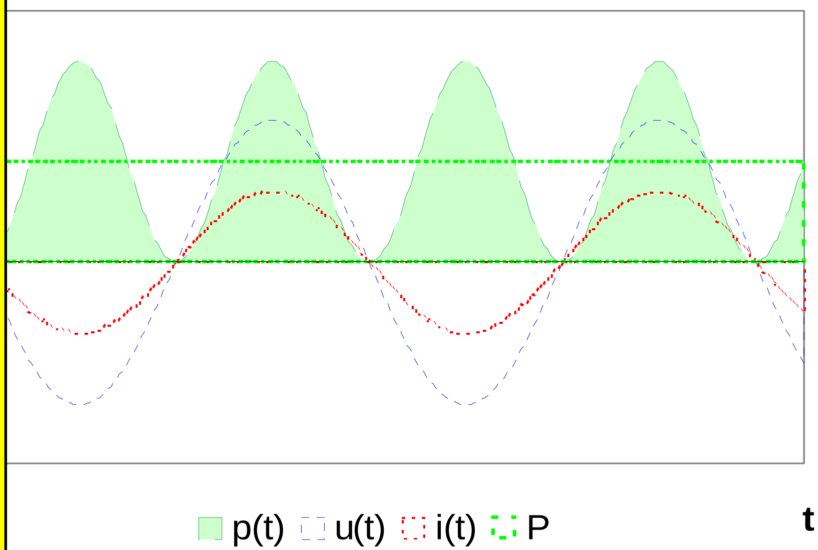
$I \cos \varphi = UI = RI^{2}$

$UIsen\varphi = 0$

$UI = P_{R}$

Una resistencia únicamente consume potencia activa

tencia en una resistencia



$$p(t)_R = P_R(1+\cos 2\omega t)$$

potencia activa consumida varía entre 0 y $2P_R$ en función de los valores absolutos de u e i

Potencia en una bobina

$j\omega L$

$\omega L I$ $\Rightarrow I = \frac{U}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L}\angle -90^{\circ}$ *I* retrasada 90º respecto a *U*

$L\omega I$ $\varphi = 90^{\circ}$

$= \sqrt{2}U\cos\omega t$ $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t - 90^{\circ})$

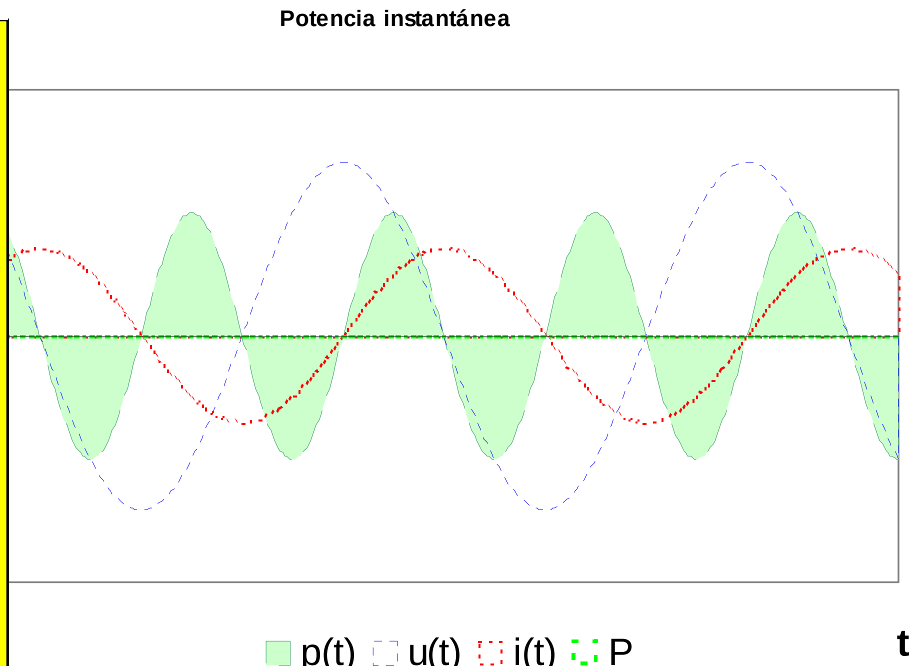
$\cos\varphi = 0$

$I sen\varphi = UI = L\omega I^2 = X_L I^2 > 0$

$I = Q_L$

Una bobina **consume** potencia reactiva

Potencia en una bobina



$$p(t)_L = Q_L(sen2\omega t)$$

encia reactiva va oscilando entre la fuente y la bobina

encia media es 0

otencia en un condensador

$$\frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{1}{\omega L} I \quad \Rightarrow I = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = U\omega C\angle 90^{o}$$ *I* adelantada 90º respecto a *U*

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos\omega t$$

$$\frac{1}{\omega C} I \qquad \varphi = -90^{o}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega t - 90^{o}\right)$$

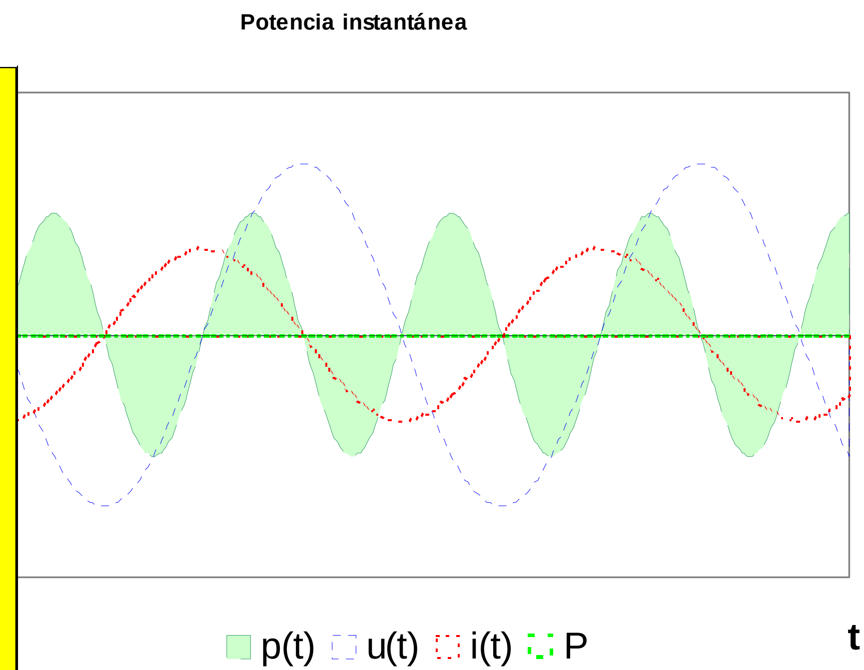
$$\mathrm{os}\,\varphi = 0$$

$$\mathrm{en}\varphi = UI = -\frac{1}{\omega C} I^{2} = -X_{C} I^{2} < 0$$

Un condensador **cede** potencia reactiva

$$= Q_{C}$$

otencia en un condensador



$$p(t)_C = Q_C(sen2\omega t)$$

- encia reactiva va oscilando entre la fuente y el sador
- ste disipación de energía sino intercambio (P_{med}=0)

Conclusión P y Q

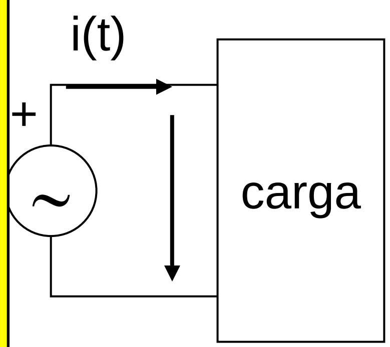
epresenta el consumo de energía en las istencias (P es el valor medio de la potencia pada)

epresenta un intercambio de energía entre las binas y condensadores y la fuente (Q es la plitud de la energía intercambiada)

Q_C<0=> un condensador cede potencia reactiva

Q_L>0=> una bobina consume potencia reactiva

Potencia compleja



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t \qquad \mathbf{U} = U\angle 0^{\circ}$$

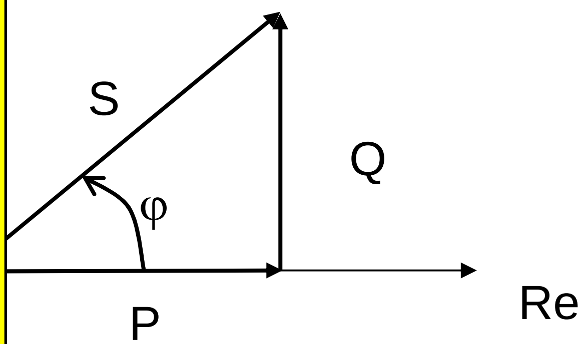
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi) \qquad \mathbf{I} = I\angle -\varphi$$

define potencia compleja

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{I}^{*} = U\angle 0^{\circ}\, I\angle \varphi = UI\angle \varphi$$

$$\mathbf{S} = UI\cos\varphi + jUIsen\varphi = P + jQ$$

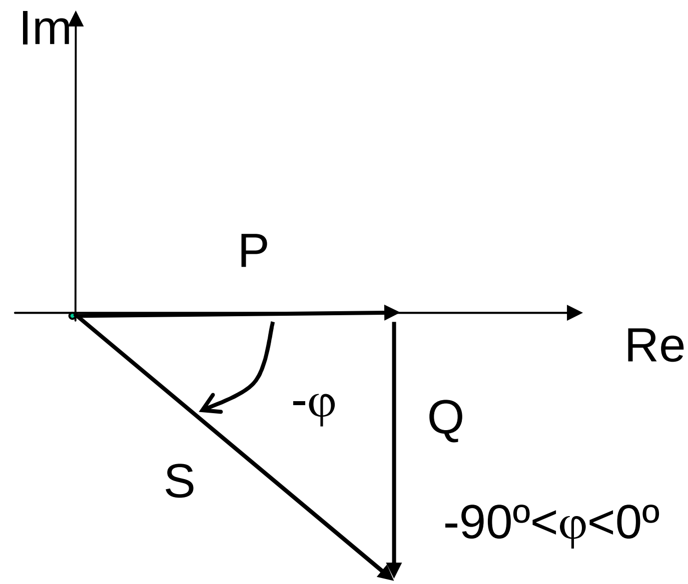
Triángulo de potencias



0º<φ<90º

Q>0 carga inductiva

(P>0 carga)



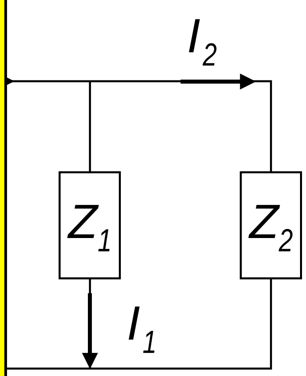
-90º<φ<0º

Q<0 carga capacitiva

(P>0 carga)

Teorema de Boucherot

ipio de conservación de la potencia compleja



$$S = UI^* = U\left(I_1 + I_2\right)^* = UI_1^* + UI_2^* = S_1 + S_2$$

La potencia compleja suministrada por las fuente/s es igual a la suma de las potencias complejas absorbidas por las cargas

$$P_G = \sum_k P_k$$

$$Q_G = \sum_k Q_k$$

$$\Rightarrow \quad S_G = \sqrt{P_G^2 + Q_G^2}$$

Importancia del factor de potencia

$$p(t) = P(1+\cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

potencia media consumida (consumo de potencia en R)

Amplitud de la fluctuación de energía entre la fuente y la
a (carga y descarga de las bobinas y condensadores)

o requiere aportación de energía por parte de la fuente (P
es 0), pero hace circular corriente por las líneas

circulación de corriente produce pérdidas de potencia activa

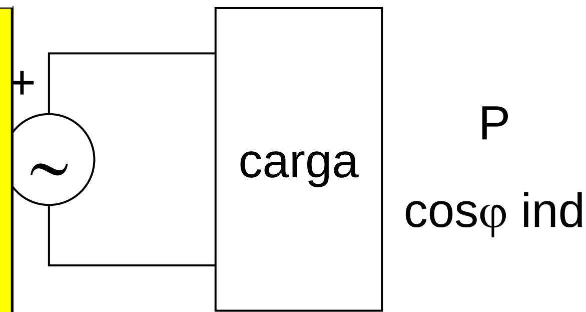
necesario limitar el consumo de reactiva

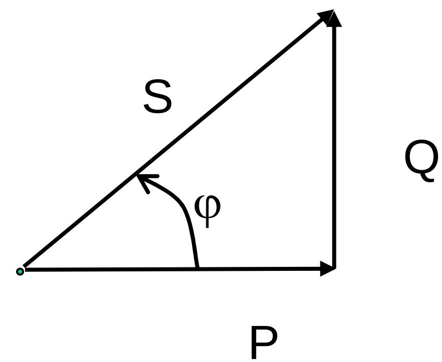
resa que el f.d.p. sea lo más alto posible

ompensación del factor de potencia

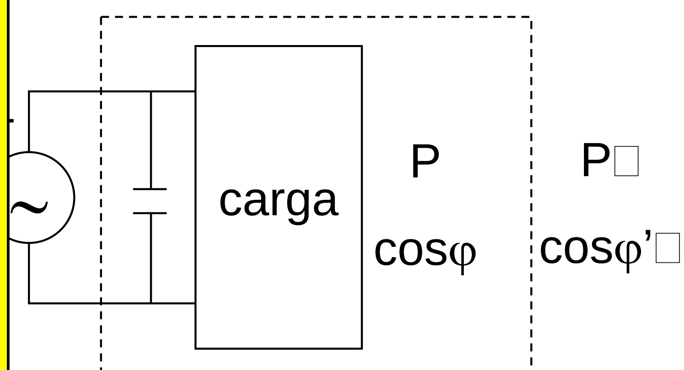
- onveniente trabajar con factores de potencia mos a la unidad
- las cargas pueden necesitar para su onamiento potencia reactiva (generalmente son de nductivo= alimentación de motores)
- ecesario compensar el consumo de potencia tiva mediante baterías de condensadores

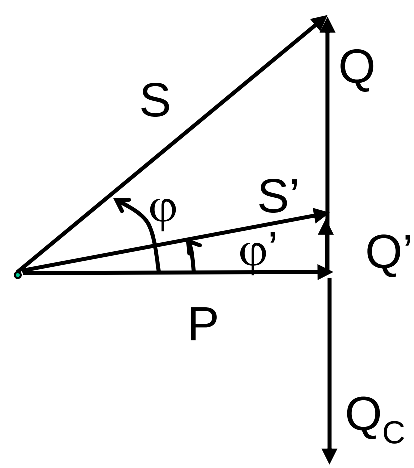
ompensación de reactiva





puede colocar una batería de condensadores de capacidad C
n paralelo con la carga que genere parte de la Q consumida



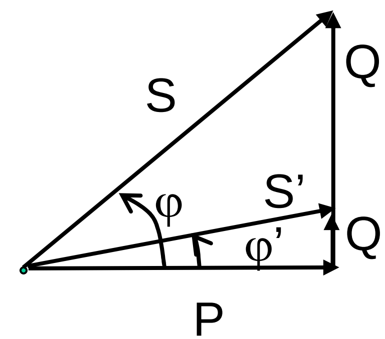


:ompensación de reactiva

ncia reactiva cedida por el condensador

$$= UIsen\varphi_C = -UI = -\omega CU^2$$

$$sen\varphi_C = -1$$



$$Q' = \Delta Q = \omega CU^2 \qquad Q - Q' = Ptg\varphi - Ptg\varphi'$$

$$U^2 = P(tg\varphi - tg\varphi')$$

$$\boxed{C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega U^2}}$$

Capacidad de la batería de condensadores para compensar ΔQ