Departamento Inteligencia Artificial

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Lógica Primer Orden: Deducción (Natural)

Andrei Paun

apaun@fi.upm.es

http://web3.fi.upm.es/AulaVirtual/

Despacho 2201

Autor: David Pérez del Rey

Motivación para Utilizar Cálculos Deductivos

- Dificultad para determinar $\Gamma = \{A_1,\ldots,A_n\} \models B$ por medios semánticos:
  - En el caso de la Lógica proposicional, hay que explorar un número exponencialmente creciente de valoraciones
  - En el caso de la **Lógica de Primer Orden**, es **imposible** explorar todas las posibles asignaciones de significado (estructuras).
- Alternativa: determinar que B **se deduce** de Γ por medios sintácticos: $\Gamma \vdash B$
  - En lugar de razonar sobre el significado de las fórmulas (valoraciones)
  - Razonar sobre la forma de las fórmulas
- Cuestión pendiente: ¿coincidirán las nociones de consecuencia lógica y deducibilidad?
  - ¿Siempre que $\Gamma \models B$, sucede también que $\Gamma \vdash B$?
  - ¿Siempre que $\Gamma \vdash B$, sucede también que $\Gamma \models B$?

Departamento Inteligencia Artificial

Un Sistema Formal para Lógica de Primer Orden

- **Lenguaje formal** para la Lógica de Primer Orden
  - Conectivas: $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\forall$, $\exists$
  - Conjunto de variables: x, y, z...
  - Conjunto de funciones: f, g, h…
  - Conjunto de Predicados: P, Q, R…
  - Conjunto de constantes: a, b, c…

- **Axiomas lógicos** de la teoría: ninguno en los cálculos de deducción natural.

- **Reglas** de inferencia: 16 (dos por cada conectiva + dos para la igualdad =)

- Definición de **prueba**: una *prueba* de una fórmula en una teoría es una *secuencia* de fórmulas en la que cada elemento es:
  - Premisa o supuesto temporal de la teoría, o bien
  - Resultado de la aplicación de una regla de inferencia sobre fórmula/s anteriores en la secuencia, y tal que
  - la última fórmula de la secuencia es la fórmula probada.

- Definición de **teorema**: una fórmula B es *teorema* de una teoría $T[A_1,...,A_n]$ ($T[A_1,...,A_n]$ |- B) si B tiene una prueba en dicha teoría.

Departamento Inteligencia Artificial

Reglas Básicas de la Lógica Proposicional

- **Reglas para la conjunción:**
  - T[$A \wedge B$] |- A — Elim $\wedge$
  - T[A, B] |- $A \wedge B$ — Int $\wedge$

- **Reglas para la disyunción:**
  - T[$A \vee B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$] |- C — Elim $\vee$
  - T[A] |- $A \vee B$ — Int $\vee$

- **Reglas para la bicondicional:**
  - T[$A \leftrightarrow B$] |- $A \rightarrow B$ — Elim $\leftrightarrow$
  - T[$A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$] |- $A \leftrightarrow B$ — Int $\leftrightarrow$

- **Reglas para la negación:**
  - T[$\neg\neg A$] |- A — Elim $\neg$
  - T[$A \rightarrow (B \wedge \neg B)$] |- $\neg A$ — Int $\neg$

- **Reglas para la implicación:**
  - T[$A \rightarrow B$, A] |- B — Elim $\rightarrow$
  - T[A (supuesto), B] |- $A \rightarrow B$ — Int $\rightarrow$

Departamento Inteligencia Artificial

Reglas Derivadas de la Lógica Proposicional

- Reglas para la implicación:
  - $T[\, A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \,] \mid\!- A \rightarrow C$ — Transitividad
  - $T[\, A \rightarrow B,\ \neg B \,] \mid\!- \neg A$ — Modus Tollens
  - $T[\, A \rightarrow B \,] \mid\!- \neg A \vee B$ — Def $\rightarrow$

- Reglas para la disyunción:
  - $T[\, (A \vee B) \vee C \,] \mid\!- A \vee (B \vee C)$ — Asociatividad
  - $T[\, A \vee B \,] \mid\!- B \vee A$ — Conmutatividad

- Reglas de De Morgan:
  - $T[\, \neg(A \wedge B) \,] \mid\!- \neg A \vee \neg B$ — De Morgan
  - $T[\, \neg(A \vee B) \,] \mid\!- \neg A \wedge \neg B$ — De Morgan

- Reglas de corte (silogismo disyuntivo):
  - $T[\, A \vee B,\ \neg A \,] \mid\!- B$ — Corte
  - $T[\, A \vee B,\ \neg B \,] \mid\!- A$ — Corte
  - $T[\, A \vee B,\ C \vee \neg A \,] \mid\!- B \vee C$ — Corte

Reglas básicas de un CDN: Existencial

$$\frac{A(t)}{\exists x\, A}$$

Siendo ∃x A el resultado de sustituir apariciones del término t en la fórmula A(t) por una variable x

T[P(a) v Q(a)] ├ ∃x (P(x) v Q(a))

1.	P(a) v Q(a)	Premisa
2.	∃x (P(x) v Q(a))	Introd. ∃

$$\frac{\exists x\, A}{A\{x/c^*\}}$$

Siendo A{x/c*} el resultado de sustituir todas las apariciones de x por c* en ∃x A, c* una constante temporal que no ha aparecido hasta ese momento en la demostración

T[∃x (P(x) ∧ Q(x))] ├ ∃x P(x)

1.	∃x (P(x) ∧ Q(x))	Premisa
2.	P(a*) ∧ Q(a*)	Elim. ∃
3.	P(a*)	Elim. ∧
4.	∃x P(x)	Introd. ∃

Departamento Inteligencia Artificial

Reglas básicas de un CDN: Universal

$$\frac{A(x)}{\forall x\, A}$$

x aparece libre en A(x) y no aparece libre en ninguna premisa o supuesto no descargado, tampoco incluye ningún nombre temporal c*

T[∀x P(x)] |– ∀x (P(x) v Q(x))

∀x P(x)	Premisa
P(x)	Elim. ∀
P(x) ∨ Q(x)	Introd. ∨
∀x (P(x) ∨ Q(x))	Introd. ∀

$$\frac{\forall x\, A}{A\{x/t\}}$$

A{x/t} es el resultado de sustituir **todas** las apariciones de x en ∀x A por un término cualquiera t

T[∀x P(x)] |– P(f(b))

∀x P(x)	Premisa
P(f(b))	Elim. ∀

Reglas básicas de un CDN: Identidad

$$\frac{}{\forall x\,(x = x)}$$

T |– f(a) = f(a)

$\forall x\,(x = x)$	Introd. =
f(a) = f(a)	Elim. $\forall$

$$\frac{s = t,\ A(s)}{A\{s/t\}}$$

A{s/t} resulta de sustituir apareiciones de s por t en A(s)

T[a = b, P(a)] |– P(b)

1.	P(a)	Premisa
2.	a = b	Premisa
1.	P(b)	Elim. =

Departamento Inteligencia Artificial

Estrategias de Demostración

Fórmula	Como Premisa	Como Conclusión
$P \wedge Q$	Concluya P y concluya Q	Demuestre P y Q por separado
$P \vee Q$	Demuestre $P \rightarrow$ __, $Q \rightarrow$ __, y concluya --__	Demuestre o P o Q
$P \rightarrow Q$	Demuestre P, y concluya Q	Suponga P y demuestre Q
$\neg P$	Si $\neg P$ es $\neg\neg Q$, concluya Q	Suponga P y demuestre __ $\wedge$ $\neg$__
$P \leftrightarrow Q$	Concluya $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$	Demuestre $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$
$\forall x\ P(x)$	Concluya P(_)	Demuestre P(x) para la variable x
$\exists x\ P(x)$	Concluya P(c*) para algún nombre temporal nuevo	Demuestre P(_)

Ejemplos de deducciones (conclusiones particulares)

- **$T[\ P(a),\ P(a) \rightarrow Q(a)\ ] \mid\!-\ \exists x Q(x)$**
  1. $P(a)$ — Premisa
  2. $P(a) \rightarrow Q(a)$ — Premisa
  3. $Q(a)$ — Eliminación $\rightarrow$ (1,2)
  4. $\exists x Q(x)$ — Introducción $\exists$ (3)

- **$T[\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x)\ ] \mid\!-\ \neg\exists x P(x)$**
  1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ — Premisa
  2. $\forall x \neg Q(x)$ — Premisa
      3. $\exists x P(x)$ — Supuesto
      4. $P(a^*)$ — Eliminación $\exists$ (3, x/a*, a* nombre temporal)
      5. $P(a^*) \rightarrow Q(a^*)$ — Eliminación $\forall$ (1, x/a*)
      6. $Q(a^*)$ — Eliminación $\rightarrow$ (4,5)
      7. $\neg Q(a^*)$ — Eliminación $\forall$ (2, x/a*)
      8. $Q(a^*) \wedge \neg Q(a^*)$ — Introducción $\wedge$ (6,7)
  9. $\exists x P(x) \rightarrow (Q(a^*) \wedge \neg Q(a^*))$ — Introducción $\rightarrow$ (3 -8)
  10. $\neg\exists x P(x)$ — Introducción $\neg$ (9)

Ejemplos de deducciones (conclusiones universales)

- $T[\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)), \forall x R(a,x)] \vdash \forall x R(x,a)$

1.	$\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$	Premisa
2.	$\forall x R(a,x)$	Premisa
3.	$\forall y(R(a,y) \to R(y,a))$	Eliminación $\forall$ (1, x/a)
4.	$R(a,x) \to R(x,a)$	Eliminación $\forall$ (3, y/x)
5.	$R(a,x)$	Eliminación $\forall$ (2, x/x)
6.	$R(x,a)$	Eliminación $\to$ (4,5)
7.	$\forall x R(x,a)$	Introducción $\forall$ (6)

- $T[\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to \neg R(x))] \vdash \forall x(P(x) \to \neg R(x))$

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Premisa
2.	$\forall x(Q(x) \to \neg R(x))$	Premisa
3.	$P(x) \to Q(x)$	Eliminación $\forall$ (1, x/x)
4.	$Q(x) \to \neg R(x)$	Eliminación $\forall$ (2, x/x)
5.	$P(x) \to \neg R(x)$	Transitividad $\to$ (3,4)
6.	$\forall x(P(x) \to \neg R(x))$	Introducción $\forall$(5)

Ejemplos de deducciones (con identidad)

- $T[s(a) \geq s(b), s(a) = c, s(b) = d] \mid\!- \; c \geq d$
  1. $s(a) \geq s(b)$ Premisa
  2. $s(a) = c$ Premisa
  3. $s(b) = d$ Premisa
  4. $c \geq s(b)$ Eliminación = (1,2)
  5. $c \geq d$ Eliminación = (3,4)

- $T[R(a,b), b = c] \mid\!- \; R(a,c)$
  1. $R(a,b)$ Premisa
  2. $b = c$ Premisa
  3. $R(a,c)$ Eliminación = (1,2)

- *Pedro quiere a Teresa, Teresa es la delegada del 2S3M-IA. Pedro quiere a la delegada del 2S3M-IA.*

- *El sucesor de seis es primo, la suma de cuatro y dos es seis. El sucesor de la suma de cuatro y dos es primo.*

Reglas derivadas para la negación del cuantificador existencial

$$\frac{\neg\exists x A(x)}{\forall x \neg A(x)}$$

1.	$\neg\exists x A(x)$	Premisa
2.	$\quad A(x)$	Supuesto
3.	$\quad \exists x A(x)$	Int. $\exists$ (2)
4.	$\quad \exists x A(x) \wedge \neg\exists x A(x)$	Int. $\wedge$ (1,3)
5.	$A(x) \rightarrow (\exists x A(x) \wedge \neg\exists x A(x))$	Int. $\rightarrow$ (2-4)
6.	$\neg A(x)$	Int. $\neg$ (5)
7.	$\forall x \neg A(x)$	Int. $\forall$ (6)

$$\frac{\forall x \neg A(x)}{\neg\exists x A(x)}$$

1.	$\forall x \neg A(x)$	Premisa
2.	$\quad \exists x A(x)$	Supuesto
3.	$\quad A(a^*)$	Elim. $\exists$ (2)
4.	$\quad \neg A(a^*)$	Elim. $\forall$ (1)
5.	$\quad A(a^*) \wedge \neg A(a^*)$	Int. $\wedge$ (3,4)
6.	$\exists x A(x) \rightarrow (A(a^*) \wedge \neg A(a^*))$	Int. $\rightarrow$ (2-5)
7.	$\neg\exists x A(x)$	Int. $\neg$ (6)

Departamento Inteligencia Artificial

Reglas derivadas para la negación cuantificador universal

$$\frac{\neg\forall x A(x)}{\exists x \neg A(x)}$$

1.	$\neg\forall x A(x)$	Premisa
2.	$\neg\exists x\neg A(x)$	Supuesto
3.	$\neg A(x)$	Supuesto
4.	$\exists x\neg A(x)$	Int. $\exists$ (3)
5.	$\exists x\neg A(x) \wedge \neg\exists x\neg A(x)$	Int. $\wedge$ (4,2)
6.	$\neg A(x) \rightarrow (\exists x\neg A(x) \wedge \neg\exists x\neg A(x))$	Int. $\rightarrow$ (3-5)
7.	$\neg\neg A(x)$	Int. $\neg$ (6)
8.	$A(x)$	Elim. $\neg$ (7)
9.	$\forall x A(x)$	Int. $\forall$ (8)
10.	$\forall x A(x) \wedge \neg\forall x A(x)$	Int. (9,1)
11.	$\neg\exists x\neg A(x) \rightarrow (\forall x A(x) \wedge \neg\forall x A(x)$	Int. $\rightarrow$ (2-10)
12.	$\neg\neg\exists x\neg A(x)$	Int. $\neg$ (11)
13.	$\exists x\neg A(x)$	$\neg$Elim. (12)

$$\frac{\exists x\neg A(x)}{\neg\forall x A(x)}$$

1.	$\exists x\neg A(x)$	Premisa
2.	$\neg A(a^*)$	Elim. $\exists$ (1)
3.	$\forall x A(x)$	Supuesto
4.	$A(a^*)$	Elim. $\forall$ (1)
5.	$A(a^*) \wedge \neg A(a^*)$	Int. $\wedge$ (2,4)
6.	$\forall x A(x) \rightarrow (A(a^*) \wedge \neg A(a^*))$	Int. $\rightarrow$ (3-5)
7.	$\neg\forall x A(x)$	Int. $\neg$ (6)

Departamento Inteligencia Artificial

Reglas derivadas para la interdefinicón de cuantificadores (1)

$$\frac{\neg\forall x\neg A(x)}{\exists x A(x)}$$

1.	$\neg\forall x\neg A(x)$	Premisa
2.	$\neg\exists x A(x)$	Supuesto
3.	$A(x)$	Supuesto
4.	$\exists x A(x)$	Int. $\exists$ (3)
5.	$\exists x A(x) \wedge \neg\exists x A(x)$	Int. $\wedge$ (2,4)
6.	$A(x) \rightarrow (\exists x A(x) \wedge \neg\exists x A(x))$	Int. $\rightarrow$ (3-5)
7.	$\neg A(x)$	Int. $\neg$ (6)
8.	$\forall x \neg A(x)$	Int. $\forall$ (7)
9.	$\forall x \neg A(x) \wedge \neg\forall x \neg A(x)$	Int. (8,1)
10.	$\neg\exists x A(x) \rightarrow (\forall x \neg A(x) \wedge \neg\forall x\neg A(x))$	Int. $\rightarrow$ (2-9)
11.	$\neg\neg\exists x A(x)$	Int. $\neg$ (10)
12.	$\exists x A(x)$	$\neg$Elim. (11)

$$\frac{\exists x A(x)}{\neg\forall x\neg A(x)}$$

1.	$\exists x A(x)$	Premisa
2.	$\forall x\neg A(x)$	Supuesto
3.	$A(a^*)$	Elim. $\exists$ (1)
4.	$\neg A(a^*)$	Elim. $\forall$ (2)
5.	$A(a^*) \wedge \neg A(a^*)$	Int. $\wedge$ (3,4)
6.	$\forall x\neg A(x) \rightarrow (A(a^*) \wedge \neg A(a^*))$	Int. $\rightarrow$ (2-5)
7.	$\neg\forall x\neg A(x)$	Int. $\neg$ (6)

Departamento Inteligencia Artificial

Reglas derivadas para la interdefinicón de cuantificadores (2)

$$\frac{\neg\exists x\neg A(x)}{\forall x A(x)}$$

1.	$\neg\exists x\neg A(x)$	Premisa
2.	$\neg A(x)$	Supuesto
3.	$\exists x\neg A(x)$	Int. $\exists$ (2)
4.	$\exists x\neg A(x) \wedge \neg\exists x\neg A(x)$	Int. $\wedge$ (3,1)
5.	$\neg A(x) \rightarrow (\exists x\neg A(x) \wedge \neg\exists x\neg A(x))$	Int. $\rightarrow$ (2-4)
6.	$\neg\neg A(x)$	Int. $\neg$ (5)
7.	$A(x)$	$\neg$Elim. (6)
8.	$\forall x\,\neg A(x)$	Int. $\forall$ (7)

$$\frac{\forall x A(x)}{\neg\exists x\neg A(x)}$$

1.	$\forall x A(x)$	Premisa
2.	$\exists x\neg A(x)$	Supuesto
3.	$\neg A(a^*)$	Elim. $\exists$ (2)
4.	$A(a^*)$	Elim. $\forall$ (1)
5.	$A(a^*) \wedge \neg A(a^*)$	Int. $\wedge$ (2,4)
6.	$\exists x\neg A(x) \rightarrow (A(a^*) \wedge \neg A(a^*))$	Int. $\rightarrow$ (2-5)
7.	$\neg\exists x\neg A(x)$	Int. $\neg$ (6)

Ejercicios de demostración por deducción natural

1. $\{ M(a,b), M(b,c), \forall x \forall y \forall z(M(x,y) \land M(y,z) \rightarrow M(x,z)) \} \models M(a,c)$
2. $\{ D(a,b) \rightarrow E(b,f(b)), \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow \neg I(x,y)) \} \models D(a,b) \rightarrow \neg I(b,f(b))$
3. $\{ \forall x(L(x) \rightarrow G(x)), \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg G(x)), L(a) \} \models R(a)$
4. $\exists x(L(x) \land G(x)) \models \exists x L(x) \land \exists x G(x)$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \models \forall x(\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$

POLITÉCNICA

Departamento Inteligencia Artificial