Ondas

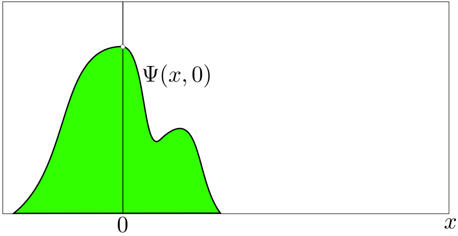
Pedro Velarde

Departamento de Ingeniería Energética
Instituto de Fusión Nuclear
Universidad Politécnica de Madrid

14 de febrero de 2019

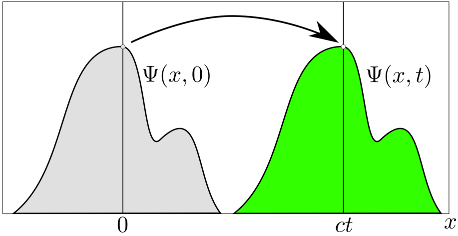
Ondas en 1D

- Supongamos una magnitud Ψ, que llamaremos amplitud, varía en toda la recta, y se tralada hacia la derecha con velocidad c
- Ψ se puede representar por una función de (x, t) de tal forma que tiempos distintos, por ejemplo 0 y t, la forma es la misma sólo se desplaza ct.



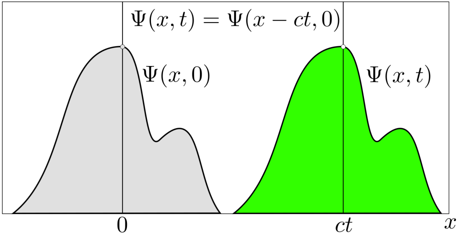
Ondas en 1D

- Supongamos una magnitud Ψ, que llamaremos amplitud, varía en toda la recta, y se tralada hacia la derecha con velocidad c
- Ψ se puede representar por una función de (x, t) de tal forma que tiempos distintos, por ejemplo 0 y t, la forma es la misma sólo se desplaza ct.



Ondas en 1D

- Supongamos una magnitud Ψ, que llamaremos amplitud, varía en toda la recta, y se tralada hacia la derecha con velocidad c
- Ψ se puede representar por una función de (x, t) de tal forma que tiempos distintos, por ejemplo 0 y t, la forma es la misma sólo se desplaza ct.



Ondas en 1D

- Esto mismo se puede expresar con la función $\Psi(x,t)$ de la forma

$$\Psi(x,t) = \Psi(x-ct,0) \equiv f(x-ct)$$

- Derivando con respecto a x y t la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -cf'(x-ct) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= f'(x-ct) \end{aligned}$$

- Operando con lo anterior, la amplitud Ψ verifica

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

- Lo contrario es igualmente cierto, una función que verifique la ecuación anterior ha de ser de la forma $\Psi(x,t) = f(x-ct)$ para cierta función $f(x)$
- El valor $|f|^2$ es positivo y verifica la misma ecuación. Generalmente se corresponde a una densidad de masa, de partículas, de probabilidad, etc o a la energía asociada a la onda misma.

Ondas planas en 1D

- Si la onda se desplazara con velocidad $-c$ la ecuación sería $\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$
- En 1D no hay más posibilidades de movimiento constante. La onda más general con propagación en ambos sentidos con velocidad c sería

$$\Psi(x,t) = f_0(x - ct) + f_1(x + ct)$$

- Derivando dos veces con respecto a x y t, vemos que Ψ verifica

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

- Esta es la ecuación la ecuación que verifica una onda cualquiera con velocidad de propagación c en una dimensión.
- La ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación de ondas* o brevemente EO.
- Las ondas con valores constantes en algunos puntos fijos del espacio se denominan ondas estacionarias.

Ondas en 3D

- La misma deducción de la EO se puede hacer en 3D

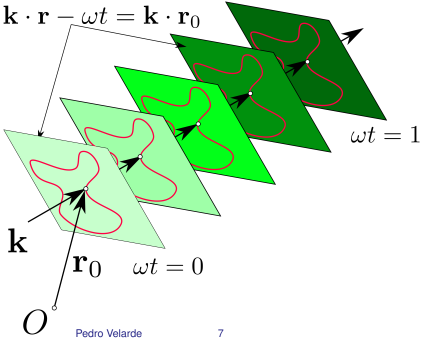
$$\Psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

donde $\mathbf{k}$ y ω son constantes. Ψ representa una onda plana moviéndose en la dirección $\mathbf{k}/k$ con velocidad $c = \omega/k$.

- Derivando dos veces con respecto a x y t, vemos que Ψ verifica

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

- Esta es la ecuación que verifica una onda cualquiera con velocidad de propagación c en tres dimensiones en una dirección arbitraria.



Descomposición en ondas simples

- Al ser la EO lineal, cualquier combinación de lineal de soluciones es solución de dicha ecuación.
- De esta forma podemos construir soluciones arbitrarias de dicha ecuación de la forma

$$\Psi(x,t) = \sum_s a_s f_s(x,t) \tag{1}$$

  donde f_s son soluciones particulares de la ecuación de ondas y a_s constantes del desarrollo en serie. La determinación de a_s se simplica mucho si las funciones f_s son ortogonales entre si.
- Cada f_s ha de cumplir la EO con velocidad c. Introduciendo f_s en la EO obtenemos la condición $c^2k^2 = \omega^2$
- Una ecuación que relacione ω y k recibe el nombre de *relación de dispersión*.
- La combinación lineal (1) puede expresarse mejor como

$$\Psi(x,t) = \sum_k a_k f_k(kx - |k|\, ct) \tag{2}$$

  para funciones f_k arbitrarias.

Descomposición en ondas simples

- Un grupo de soluciones especialmente interesante es las formadas por las funciones trigronométricas $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$. Es costumbre representar las dos funciones en una sola utilizando la identidad $e^{iz} = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$.
- En este caso las funciones f_k son $e^{i(kx-\omega t)}$ con $\omega = |k|\, c$, y reciben el nombre de ondas planas. En este caso la expresión (1) recibe el nombre de *desarrollo de Fourier*
- Podríamos hacer el mismo desarrollo sobre una esfera, especialmente importante en física atómica y nuclear, en cuyo caso serían funciones algo mas complejas denominadas armónicos esféricos.

Relación de dispersión

- En el caso general de ondas con una ralación de dispersión dada ¿qué ecuación verifica Ψ?
- Basta darse cuenta que si

$$F(k, \omega) = 0 \tag{3}$$

entonces

$$F(-i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial t})e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

por lo que multiplicando por constantes a_s y sumando llegamos a la ecuación que da lugar a la relación de dispersión (3)

$$F(-i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial t})\Psi(x,t) = 0$$

siendo $\Psi = \sum_s a_s e^{i(k_s x - \omega_s t)}$

Ejemplo de relación de dispersión

- Consideremos el caso $\omega^2 = \omega_p^2 + (kc)^2$, que es la relación de dispersión de ondas electromagnéticas en un plasma de densidad numérica de electrones libres n y ω_p la llamada frecuencia del plasma dada por $\omega_p^2 = e^2 n/m_e/\epsilon_0 = 56{,}4\sqrt{n}\ \mathrm{rad/s}$
- Observar que no puede darse propagación para $\omega < \omega_p$, y por lo tanto una onda electromagnética entrando en un plasma con frecuencia $\omega_p > \omega$ (k imaginario) ha de reflejarse, y esta es la causa de la reflexión de ondas de radio en la ionosfera, o de un laser en un plasma suficientemente denso.
- La ecuación correspondiente sería

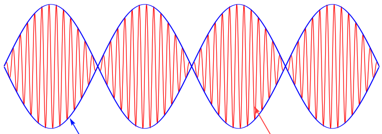
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \omega_p^2 \Psi$$

  en este caso la amplitud de la onda Ψ sería el campo eléctrico.
- Por ejemplo, para la zona F de la ionosfera, entre 150 y 500 km, la densidad de electrones libres (producidos por la radiación ultravioleta del sol) está entre 5×10^{10} y 2×10^{11} electrones por m^3, lo que da una frecuencia del plasma $\omega_p = 12{,}6$ MHz y $25{,}2$ MHz, dentro de la banda HF (de 3 a 30 MHz).

Velocidad de grupo

- La composición de ondas de frecuencia parecida da lugar al concepto de envolvente.
- Por ejemplo

$$\operatorname{sen} 25x + \operatorname{sen} 27x = 2\cos x \operatorname{sen} 26x$$



- En el caso general de composición de dos ondas, la amplitud efectiva sería $\Psi_{\text{ef}} = 2A\cos((k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t)$ dando lugar a una velocidad efectiva de fase de la onda $v_g = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1) \to d\omega/dk$
- Esta es la llamada velocidad de grupo. En el caso de ondas en el plasma visto anteriormente, tendríamos $v_g = \partial\omega/\partial k = c^2 k/\omega$

Transformada de Fourier

- Una función periódica L y continua a trozos f puede desarrollarse en términos de las funciones base $e^{in\alpha x}$, con $\alpha = \pi/L$,

$$f(x) = \sum_n c_n e^{in\alpha x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\alpha x}dx$$

  Insertando la expresión de c_n tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2L}\sum_n e^{in\alpha x}\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-in\alpha\xi}d\xi$$

- Para el caso continuo $L \to \infty$, sustituyendo $L = \pi/\alpha$ y llamando $k = n\alpha$ y $\alpha = dk$

$$f(x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_n \alpha\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-ik(\xi-x)}d\xi \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik(\xi-x)}d\xi \quad (5)$$

Transformada de Fourier

- Si definimos *transformada de Fourier* de f como

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

entonces tenemos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

- Es fácil mostrar que la energía de la onda, proporcional al cuadrado de su amplitud, se mide de igual forma en ambas representaciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

- La función f no necesita ser una función periódica, como sucedía con las series de Fourier. Ahora f puede estar localizada en una región del espacio, formando los llamados *paquetes de ondas*.

Función delta de Dirac

- Volviendo a la identidad (5) podemos definir una función, llamada *delta de Dirac* por

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} = \delta(x-\xi)$$

que verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = f(x)$$

es decir, la función δ es cero por doquier excepto en el origen, donde debe ser infinita, con integral unidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

.

- Una forma de escribir δ es como el límite de una Gaussiano de área unidad

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}e^{-x^2/\sigma^2}$$

Función delta de Dirac

- Algunas propiedades directas de la delta de Dirac son

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) \\ f(x)\delta(x-y) &= f(y)\delta(x-y) \\ x\delta(x) &= 0 \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) \end{aligned}$$

- Una generalización útil de la última relación es

$$\delta(f(x)) = \sum_{n, f(\xi_n)=0} \frac{\delta(x-\xi_n)}{|f'(\xi_n)|}$$

  con la suma extendida a los ceros de f, y siempre que estos no sean ceros de f'
- La función δ puede obtenerse como la derivada de la función escalón $\theta(x)$, definida como 1 para $x > 0$ y nula para $x < 0$.
- En 3D la definición de δ es semejante

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Paquete de ondas

- Si suponemos una onda $g(k)$ localizada en $k_0 < k < K_0 + \sigma$, su transformada es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0}^{k_0+\sigma} A e^{ikx} dk = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i(k_0+\sigma/2)x} \frac{sen(\sigma x/2)}{x}$$

- Se tiene el módulo

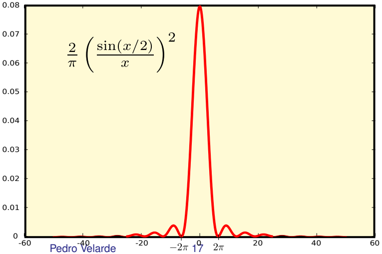
$$|f(x)|^2 = |A|^2 \frac{2}{\pi} \left(\frac{sen(\sigma x/2)}{x} \right)^2$$

cuyos primeros ceros están en $\pm 2\pi/\sigma$, con un ancho de intervalo de $4\pi/\sigma = \Delta x$.

- Como $\Delta k = \sigma$ tenemos

$$\Delta x \Delta k \approx 1$$

- Cualquier intento de estrechar uno de los paquetes (en la representación x o en k) lleva al ensanchamiento del otro.



Paquete de ondas

- Un caso especial es el de una Gaussiana

$$f(x) = Ae^{-x^2/2\sigma^2} e^{ik_0 x} \tag{6}$$

cuya transformada de Fourier es

$$g(k) = A\sigma e^{-(k-k_0)^2\sigma^2/2}$$

es decir, una Gaussiana también, con $\Delta x = 2\sqrt{2}\sigma$ y $\Delta k = 2\sqrt{2}/\sigma$, con el producto $\Delta x \Delta k$ mínimo.

- Podemos construir una onda con velocidad c y cuya amplitud venga modulada por una distribución gaussiana, reescribiendo (6) como

$$f(x,t) = Ae^{-x^2/2\sigma^2} e^{i(k_0 x - \omega t)} \tag{7}$$

que es precisamente un paquete de ondas viajando con velocidad c (aquí $\omega = ck_0$) en la dirección x.

Intensidad de ondas superpuestas

- La intensidad de las ondas es proporcional al cuadrado del módulo de la amplitud
- La suma de dos ondas iguales excepto en amplitud y fase, da una intensidad

$$y_1 = A_1 e^{i(kx-\omega t+\phi_1)} \ , \ y_2 = A_2 e^{i(kx-\omega t+\phi_2)}$$
$$I \propto |y_1 + y_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2Re\left(A_1 A_2^* e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right)$$

- Si $A_1 = A_2$ (ondas de igual intensidad) entonces

$$I = 2I_1(1+\cos(\phi_1-\phi_2))$$

que nos lleva a la interferencia constructiva ($I = 4I_1$) o destructiva ($I = 0$) cuando están en fase ($\phi_1 = \phi_2$) o fuera de fase ($\phi_1 = \phi_2 + \pi$)

Ejemplos de transformadas: Pulso cuadrado en frecuencia

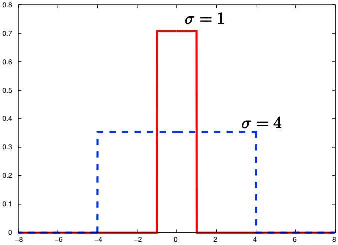
- Transformada de Fourier de un pulso cuadrado en frecuencia

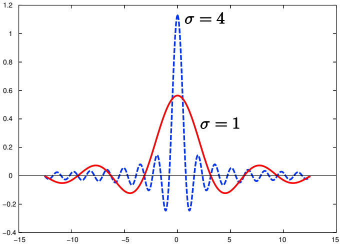
$$f(k) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad k > |a| \\ 1/\sqrt{2a} & \text{para} \quad k < |a| \end{cases}$$

entonces la transformada (inversa) de Fourier es

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-a}^{a} e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}$$

cumpliéndose $\Delta x \Delta k \geq 4\pi$





Ejemplos de transformadas: Exponencial

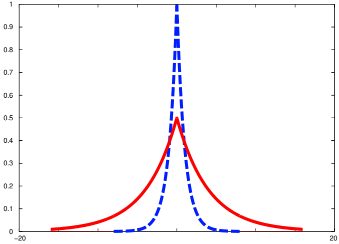
- Transformada de Fourier de una exponencial

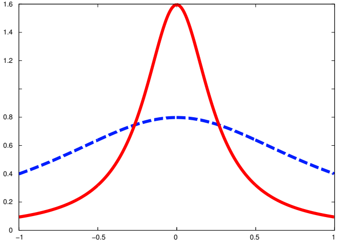
$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-|k|/a}$$

entonces la transformada (inversa) de Fourier es

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|/a} e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{1}{1+(ax)^2}$$

cumpliéndose $\Delta x \Delta k \geq 1$





Ejemplos de transformadas: Pulsos láser ultracortos

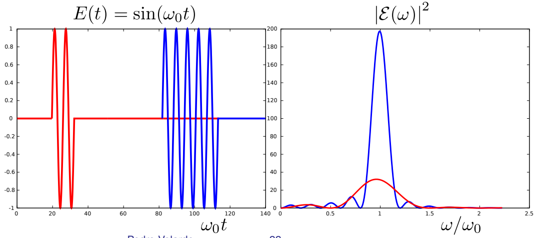
- Si consideramos dos pulsos láser de distinta duración pero igual frecuencia, entonces el pulso de mayor duración tiene una distribución espectral más cercana a la monocromática $\delta(\omega - \omega_0)$
- Si el pulso es de la forma

$$f(t,T) = \begin{cases} \mathrm{sen}(\omega_0 t) & \text{para} \quad t \in (0,T) \\ 0 & \text{para} \quad t < 0 \text{ o } t > T \end{cases}$$

entonces $\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(I(\omega) - I^*(-\omega))$ con

$$I(k) = \frac{i}{\omega_0 - \omega}\left(1 - e^{i(\omega_0 - \omega)T}\right)$$

- Para pulsos de fs el ancho de banda es del tamaño del expectro del visible, así que el láser sería de color *blanco* si estuviera en el visible.



¿A qué se debe la difracción de la luz?

- Cabe pensar que los fotones que forman un haz interaccionan entre si an el detector, generando una imagen o un patrón de interferencia.
- Sin embargo la generación de imagen no funciona así. Veamos un ejemplo.
- Situamos una fuente de luz por la noche, una farola de unos 2000 lumen. Fabricamos con un cartón dos ranuras de unos $5 \times 0{,}2$ mm lo mas juntas posible.
- Nos situamos a la máxima distancia que nos permita observar las líneas de interferencia, aproximadamente 1500 metros.
- Si la luz es LED, tiene una eficacia de unos 100 lumen/W lo que nos da una emisión de fotones por segundo en el visible (centrado en verde de 500 nm)

$$\dot{N} = \frac{2000}{100} \times \frac{6{,}24 \times 10^{18} \times 500}{1280} \sim 4{,}9 \times 10^{19}$$

- La fracción de fotones que salen de las ranuras es

$$\frac{\text{Área renuras}}{\text{Esfera de 1500 m}} = \frac{2 \times 5 \times 0{,}2 \times 10^{-6}}{4\pi(1500)^2} = 7 \times 10^{-14}$$

- Por lo tanto los fotones por segundo que cruzan la ranura son $5 \times 10^{19} \times 7 \times 10^{-14} = 4 \times 10^6$
- Y por lo tanto la distancia entre fotones sería $3 \times 10^8/4 \times 10^6 = 100\ \mathrm{m}$, por lo tanto no puede haber interferencia entre ellos.