Ejercicios (Límites de funciones y continuidad)

5.1. Hallar los límites siguientes, si existen. Utilizar la definición de límite para justificar la respuesta.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+2x+1)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-1}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\sqrt{x}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+|x|}{x}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}+sen\frac{1}{|x|}\right)$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}$, i) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x-2}}$.

5.2. Calcular los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\log x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+2}{e^{x+5}}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\log x}{\sqrt{x^4+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{e^x-1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{e^x+4}\right)^x$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{x\operatorname{cotan}\frac{\pi x}{2}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\quad(a>0)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$ l) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^p-1}{x^q-1}\quad(q\neq 0)$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}\quad(a,b,c,d>0)$ n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen}x}}{x-\operatorname{sen}x}$

ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^x$ o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{x^x}$ p) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

q) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x\quad(a,b,c>0)$ r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}x-1}{\log(1+x)}$

s) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}2x-2\operatorname{sen}x)^4}{(3+\cos 2x-4\cos x)^3}$ t) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$

u) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\tan 2x\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ v) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/6}\frac{\operatorname{sen}(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}$

5.3. Demostrar que los siguientes límites no existen:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \cos x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{1/\operatorname{sen} x}$

5.4. Hallar los siguientes límites laterales, si es que existen:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \neq 2, \\ 0, & \text{si } x = 2. \end{cases}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{si } x \geqslant 1, \\ 3x-5, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x|}{x^2+x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{2-2^{1/x}}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 1^{\pm}} (x-1)e^{x/(x-1)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{e^{1/x}+1}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{e^{1/x}+1}$ k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} e^{1/x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x}-1}$ m) $\displaystyle\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ n) $\displaystyle\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2+x+6}{x^2-4}$

5.5. Calcular el límite cuando x tiende a 1 de la función

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[p]{x}-1)}{(x-1)^{p-1}}.$$

Indicación: Expresar esta función como producto de $p-1$ factores.

5.6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{sen} x \leqslant 0, \\ 1/e & \text{si } \cos 2x = 0, \operatorname{sen} x > 0 \\ (2\operatorname{sen}^x)^{1/\cos 2x} & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2(1+e^{-1/x})^{-1} & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+|x|(1+x)}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$

5.7. Para cada una de las funciones que siguen, hallar todos los puntos de continuidad.

a) $\sqrt{1-x^2}$, b) $\operatorname{sen} e^{-x^2}$, c) $\log(1+\operatorname{sen} x)$, d) $e^{-1//1-2x)}$,

e) $\operatorname{sen} \dfrac{1}{(x-1)^2}$, f) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$, g) $(1-\operatorname{sen}^2 x)^{-1/2}$, h) $\operatorname{cotan}(1-e^{-x^2})$,

i) $\cos \dfrac{1}{x}$.

5.8. Determínese $c > 0$ para que sea continua la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{c}x, & x \leqslant c, \\ \frac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}}, & x > c, \end{cases}$$

5.9. a) Hállese una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{\,\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\,\}$, pero continua en los demás puntos.

b) Hállese una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{\,\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\,\} \cup \{\,0\,\}$, pero continua en los demás puntos.

5.10. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en cualquier punto de $\mathbb{R}$, pero tal que la función $|f|$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

5.11. Sean f y g continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, y supóngase que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. ¿Es cierto que $f = g$?

5.12. Supongamos que f está definida en todo $\mathbb{R}$ y que tiene las dos siguientes propiedades:

A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$,

b) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(rx) = \big(f(x)\big)^r$ si $r \in \mathbb{Q}$. En particular, $f(r) = \big(f(1)\big)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

d) Si $f(1) = 1$ entonces f es constante.

e) Si $f(1) > 1$ entonces f es estrictamente creciente, y además

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

f) Si $f(1) < 1$ entonces f es estrictamente decreciente, y además

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

(Obsérvese que las funciones exponenciales a^x verifican estas propiedades. Este ejercicio, junto con el ejercicio 5.11, nos sugiere un método para definir las exponenciales en todo $\mathbb{R}$.)

5.13. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x comprendido entre n y $n+1$:

a) $f(x) = x^3 - x + 3$

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = x^5 + x + 1$

5.14. Demostrar:

a) La ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una solución positiva no mayor que 1.

b) La ecuación

$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$$

tiene al menos una solución real.

c) La ecuación $\operatorname{sen} x = x - 1$ tiene al menos una solución real.

d) La ecuación $\frac{\pi}{2} - x - \operatorname{sen} x = 0$ posee solución en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

e) La ecuación $x \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{4} = 0$ poesee al menos dos soluciones en $[0, \pi]$.

5.17. Sea f continua del intervalo $[0,1]$ a $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe un punto $c \in [0, \frac{1}{2}]$ en el que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ (*Indicación:* Considérese $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$). Concluir que existen, en cualquier momento, puntos opuestos en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

5.18 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer)**.** Sea I un intervalo cerrado y acotado. Pruébese que si una función $f : I \to I$ es continua, entonces existe un punto $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$.

5.19. Sea I un intervalo. Pruébese que si una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$, entonces existe un punto $c \in I$ tal que $f(c) = \frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)}{n}$.

5.20. Sea f definida y acotada en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$. Si $S \subset I$, el número

$$\omega_f(S) = \sup\{\, f(x) - f(y) \mid x, y \in S \,\}$$

se llama *oscilación* de f en S. Si $x \in I$, la oscilación de f en x se define como el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0^+} \omega_f((x - h, x + h) \cap I).$$

Probar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x) = 0$ si, y solo si, f es continua en x.

5.21. Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Demostrar que f está acotada, y que alcanza un máximo o un mínimo. Dar un ejemplo para indicar que no necesariamente se tienen por qué alcanzar tanto un máximo como un mínimo.

5.22. Ver cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:

a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \infty)$, b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1)$,
c) $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$, d) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$,
e) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$, f) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 1$,
g) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x > 0$, h) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x > 1$,
i) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1)$, j) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1)$.