Ejercicios (Derivación)

6.1 (Regla de Leibniz)**.** Sea I un intervalo, c un punto de I, f y g funciones definidas en I. Dado $n \in \mathbb{N}$, si f y g son funciones derivables hasta el orden n en el punto c, entonces el producto fg es derivable hasta el orden n en el punto c, y se tiene

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c) g^{(n-k)}(c).$$

6.2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar $f'(x)$, $f''(x)$, donde sea posible.

a) $f(x) = \sqrt{|x|}$, b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leqslant 0, \\ -x^2, & \text{si } x > 0, \end{cases}$ c) $f(x) = |x|^3$.

6.3. Hallar $f'(x)$, simplificando si es posible, en los siguientes casos:

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$, b) $f(x) = (x^2+1) \arctan x$,

c) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$, d) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$,

e) $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, f) $f(x) = x^{1/\log x}$,

g) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} x}{1 - \cos a \cos x}}$, h) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

6.4. Hallar el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones y dos enteros consecutivos entre los que se encuentra cada solución:

a) $3x^5 + 15x - 8 = 0$, b) $2x^3 - 9x^2 + 12x = -1$, c) $x^5 - 5x = 1$,
d) $3^{-x} = 0$, e) $e^x = 1 + x$, f) $x^5 + 2x + 1 = 0$

6.5. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x < x - \dfrac{x^3}{6}$, $x \in (0,1]$, b) $e^x > ex$, $x \neq 1$,

c) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, $x > -1, x \neq 0$,

d) $2x < \operatorname{sen} 2x + \tan x$, $x \in (0, \pi/2)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

6.6. Demostrar que $\operatorname{arc}\tan x - \operatorname{arc}\tan y < x - y$, si $x > y$. Deducir que la función $\operatorname{arc}\tan$ es de Lipschitz en $\mathbb{R}$.

6.7. Probar que $\operatorname{arc}\operatorname{sen} x + \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

6.8. Probar que $\operatorname{arc}\cos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc}\tan x$ para todo $x \geqslant 0$. ¿Y si $x < 0$?

6.9. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas en $[0,1]$, derivables en $(0,1)$, con $f(0) = 0$, $g(0) = 2$ y $|f'(x)| \leqslant 1$, $|g'(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in (0,1)$. Probar que $f(x) \leqslant g(x)$ para cada $x \in [0,1]$.

6.10. Supongamos que f es derivable en (a,b) y continua en $[a,b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para cada real λ existe un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

6.11. Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y que es dos veces derivable en el intervalo abierto (a,b). Supongamos que la cuerda que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ corta a la gráfica de la función f en un tercer punto P distinto de A y de B. Probar que $f''(c) = 0$ para un $c \in (a,b)$.

6.12. Si f es tres veces derivable en $[a,b]$ y si

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0,$$

probar que $f'''(c) = 0$ para un $c \in (a,b)$.

6.13. Sea f una función no negativa y tres veces derivable en $(0,1)$. Si f se anula en dos puntos, por lo menos, de $(0,1)$, entonces $f'''(c) = 0$ para algún $c \in (0,1)$.

6.14. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^a \log x, \quad a > 0,$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotan} x}{x}\right),$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\pi x/2)},$ e) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(\log \operatorname{cotan} x)^{\tan x},$ f) $\displaystyle \lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)},$

g) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}\right),$ h) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right),$

i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \log(1+\operatorname{sen}^2 x) \times \operatorname{cotan} \log^2(1+x),$ j) $\displaystyle \lim_{x\to 0} e^{1/(1-\cos x)} \operatorname{sen} x,$

k) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2+2x+\operatorname{sen} 2x}{(2x+\operatorname{sen} 2x)e^{\operatorname{sen} x}},$ l) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^{1/\log(e^x-1)},$ m) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right),$

n) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cosh x}{x \operatorname{senh} x}\right),$ ñ) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right),$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

6.15. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$, b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$,
c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, d) $f(x) = \cos x - x$,
e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$, f) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

6.16. Hallar los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$, b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$,
c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 82x + 8$, d) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$,
e) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x, \quad x \in [-2, 2]$.

6.17. Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, en los casos siguientes:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$,

b) $f(x) = x^5 + x + 1$, en $[-1, 1]$,

c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(1 + x)$, en su dominio,

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x + 1}$, en $(0, 1]$, $[0, 1]$, y $\mathbb{R}$,

e) $f(x) = e^{-x^2}$, en $[-1, 1]$, $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$,

f) $f(x) = x^2 \log x$, en $[e^{-1}, e]$ y $(0, \infty)$

6.18. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Demostrar que f tiene en 0 un mínimo local.

b) Demostrar que $f'(0) = f''(0) = 0$, y que no existe $f'''(0)$.

6.19. Sea $f(x) = ax - \frac{x^3}{1+x^2}$. Probar que f es creciente en $\mathbb{R}$ si y solo si $a \geqslant 9/8$.

6.20. ¿Qué número es mayor, e^π o π^e? Probar que si $x > e$, entonces $e^x > x^e$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

a) $f(x) = e^{x^2}$, b) $f(x) = (1+e^x)^2$, c) $f(x) = xe^x$,
d) $f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, f) $f(x) = (1+x)\log(1+x)$.

6.23. Escribir la fórmula de Taylor de orden n de:

a) $f(x) = (2-x)^{-1}$, en potencias de $x-1$,

b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{3x}{2}$, en potencias de $x-\pi$,

c) $f(x) = \log x$, en potencias de $x-2$,

d) $f(x) = e^x$, en potencias de $x-1$,

e) $f(x) = \sqrt{1+x}$, en potencias de $x-3$,

f) $f(x) = \log 2x - \frac{1}{x-1}$, en potencias de $x-2$.

6.24. Probar que el error cometido al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ es menor que 10^{-4}, si $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

6.25. Probar que el error cometido al sustituir $\operatorname{sen}(e^x - 1)$ por $x + \frac{1}{2}x^2$ es menor que $3 \cdot 10^{-3}$, si $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

6.26. Probar que el error cometido al sustituir $\cos^2 3x$ por $1 - 9x^2 + 27x^4$ es menor que $4 \cdot 10^{-5}$, si $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

6.27. Probar que el error cometido al sustituir $e^{\operatorname{sen} x}$ por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ es menor que $3 \cdot |x|^3$.

6.28. Hallar en cada caso el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p}$ es finito (se dice entonces que $f(x)$ es un *infinitésimo* de orden p cuando $x \to a$):

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, b) $f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$,
c) $f(x) = 1 - x + \log x$, $a = 1$, d) $f(x) = 1 - \cos x$, $a = 0$,
e) $f(x) = \tan x - \operatorname{sen} x$, $a = 0$, f) $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $a = 4$,
g) $f(x) = e^x - 1$, $a = 0$, h) $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2}$, $a = 0$,
i) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - \log(1+x^2)$, $a = 0$.

6.29. Calcular los límites siguientes, utilizando la fórmula de Young:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\sqrt{x(1+x)}\log\frac{1+x}{x}\right)$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x-\tan x}{\operatorname{sen} x-\operatorname{arc\,sen} x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\tan x}{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{arc\,tan} x}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}$,

i) $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{(\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x)^2}{(\cos 2x-\cos x)^3}$.

6.30. Estudiar el crecimiento, los extremos y la convexidad de las siguientes funciones, y dibujar su gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$, c) $f(x)=\sqrt{4x^2-x}$,

d) $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$, e) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, f) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$,

g) $f(x)=\tan^2 x$, h) $f(x)=x^6-3x^4+3x^2-5$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.