Física Cuántica. 3° Físicas. Grupo 34

Curso 1999-2000. Examen Final. 22 Diciembre 2000

1. ¿Qué relación debe de existir entre la anchura a y la profundidad V_0 de un pozo cuadrado finito centrado en el origen para que las probabilidades de hallar la partícula fuera y dentro del pozo, en el estado fundamental, sean iguales?

   [Ayuda: Debeis hallar la solución de una ecuación transcendente por el método iterativo: $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, donde $f(x)$ es una función convergente.]

2. Una partícula de masa m se mueve en un potencial unidimensional armónico de frecuencia ω, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

   a) Escribir la función de onda de la partícula para todo tiempo, $\psi(x,t)$, sabiendo que para $t = 0$:
   i) la medida de su energía da $\frac{1}{2}\hbar\omega$ y $\frac{3}{2}\hbar\omega$ con igual probabilidad;
   ii) $\psi(x, 0)$ es real;
   iii) es más probable hallar la partícula en la mitad izquierda del potencial.

   b) ¿Es $\psi(x, 0)$ autofunción del Hamiltoniano; y $\psi(x,t)$ para algún tiempo t?

   c) ¿Para qué instante de tiempo la función de onda es ortogonal a la inicial?

   d) ¿Cómo varía con el tiempo la probabilidad de encontrar la partícula en el origen de coordenadas?

   e) Calcular la evolución temporal del valor esperado del operador posición. Interpretar la solución.

   f) Hallar la relación de incertidumbre entre posición y momento en este estado, como función del tiempo.

   [Ayuda: Usar la relación entre operadores:

   $$X = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(a^\dagger + a)\,, \qquad P = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)\,, \qquad [a, a^\dagger] = \mathbb{1}\,.$$]

$\cos\left(\frac{Ka}{2}\right) = \pm \frac{Ka/2}{\varepsilon/2}$

CURSOS DE VERANO

FUNDACIÓN GENERAL DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Santander UNIVERSIDADES

FUNDACIÓN GENERAL
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

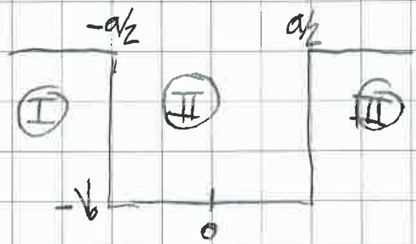
El Escorial

$\varepsilon^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$

Diciembre 2000

1. Relación entre a y V_0, pozo cuadrado finito centrado en el origen. Probabilidad dentro y fuera del pozo iguales en el estado fundamental.

Escribimos la función de onda como:



$K^2 = \frac{2m(V_0-|E|)}{\hbar^2}$ $\quad \alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$

$$\psi(x) = \begin{cases} u_I = B\cos\left(\frac{Ka}{2}\right) e^{\alpha(x+a/2)} \\ u_{II} = B\cos(Kx) \\ u_{III} = B\cos\left(\frac{Ka}{2}\right) e^{-\alpha(x-a/2)} \end{cases}$$

$$|B|^2 \int_{-\infty}^{-a/2} \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right) e^{\alpha(2x+a)} dx + |B|^2 \int_{a/2}^{\infty} \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right) e^{-\alpha(2x-a)} dx =$$

$$= |B|^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos^2(Kx) \Rightarrow \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\frac{1}{2\alpha}\left[e^{\alpha(2x+a)}\right]_{-\infty}^{-a/2} +$$

$$+ \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\frac{-1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha(2x-a)}\right]_{a/2}^{\infty} = \frac{\cos^2(Ka/2)}{2\alpha}(1+1) =$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}{\alpha} = \frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2} dx\left[1+\cos(2Kx)\right] = \frac{a}{2} + \frac{1}{4K}\left[\operatorname{sen}(2Kx)\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{2K}\operatorname{sen}(Ka) \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} + \frac{\cos(Ka)}{2\alpha} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2K}\operatorname{sen}(Ka) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - a\right) + \frac{\cos(Ka)}{2\alpha} = \frac{1}{2K}\operatorname{sen}(Ka)$$

2. Potencial armónico, m, frecuencia w, $V(x) = \frac{1}{2} m w^2 x^2$ $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar w$

a) Escribir $|\psi\rangle_t$ sabiendo que en $t=0$:

* $E_0 = \frac{\hbar w}{2}$ y $E_1 = \frac{3\hbar w}{2}$ se miden con la misma probabilidad;

$$|\langle 0|\psi_0\rangle|^2 = |\langle 1|\psi_0\rangle|^2$$

* $\psi(x,0) = \langle x|\psi\rangle_t$ es real.

* Es más probable encontrar a la partícula en la mitad izquierda del potencial.

$$|\psi\rangle_0 = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\delta}|1\rangle$$

$$|\langle 0|\psi_0\rangle| = |\langle 1|\psi_0\rangle| \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

$$|{}_0\langle\psi|\psi\rangle_0|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} = |\beta|}$$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(\alpha x) + e^{i\delta}\psi_1(\alpha x)\right]$$ Para que $\psi(x,0) = \psi^*(x,0)$

necesariamente $e^{i\delta} = e^{-i\delta} \Rightarrow \cos\delta + i\,\text{sen}\,\delta = \cos\delta - i\,\text{sen}\,\delta \Rightarrow 2\,\text{sen}\,\delta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\delta = 0 \Rightarrow \delta = n\pi$ $\rightarrow$ Tomamos $\delta = \pi$ (por la probabilidad)

$$\boxed{|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)}$$

$N_0 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^{-1/2}$ $N_1 = \left(\frac{\sqrt{\pi}\,2}{\alpha}\right)^{-1/2}$ $\psi_1(\alpha x) = N_1 (2\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi_1(0) = 0$

$\operatorname{sen}(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$

$\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar} = \frac{\omega}{2}$

$\omega_1 = \frac{E_1}{\hbar} = \frac{3\omega}{2}$

$\psi_0(\alpha x) = N_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \Rightarrow \psi_0(0) = N_0$

$$|\psi\rangle_t = U(t)\,|\psi\rangle_0 = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\,|\psi\rangle_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_0 t}|0\rangle - e^{-i\omega_1 t}|1\rangle\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - e^{-i\omega t}|1\rangle\right)}$$

b) $|\psi\rangle_0$ no es autofunción ya que es combinación lineal de dos autoestados. $|\psi\rangle_t$ lo sería si existiera algún t tal que $e^{-i\omega t} = 0$, lo que nunca sucede.

c) $|\psi\rangle_t \perp |\psi\rangle_0$ para un t_* tal que $e^{-i\omega t_*} = -1 \Rightarrow \omega t_* = 2(n+\frac{1}{2})\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t_* = 2\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{\omega}}$ el primer instante en que ocurre es $t_* = \frac{\pi}{\omega}$

d) $P(0,t) = |\psi(0,t)|^2 = \psi^*(0,t)\,\psi(0,t) = \frac{1}{2}\left[\psi_0^*(0) - \right.$

$\left. - e^{i\omega t}\,\cancel{\psi_1^*(0)}^{\,0}\right]\left[\psi_0(0) - e^{-i\omega t}\,\cancel{\psi_1(0)}^{\,0}\right] = \frac{1}{2} N_0^2 \Rightarrow \boxed{P(0,t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}}$

(No varía en el tiempo)

e) $\langle X\rangle_t$; $X = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(a^+ + a)$

$$\frac{1}{2}\left(\langle 0| - e^{i\omega t}\langle 1|\right) X \left(|0\rangle - e^{-i\omega t}|1\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-i\omega t}\langle 0|\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(a^+ + a)|1\rangle - e^{i\omega t}\langle 1|\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(a^+ + a)|0\rangle\right] =$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-i\omega t}\frac{1}{\alpha\sqrt{2}} + e^{i\omega t}\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x\rangle_t = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\cos(\omega t)}$$

El valor esperado de x realiza una cierta oscilación que se puede equiparar de algún ~~modo~~ a la del oscilador clásico.

$$aa^+ - a^+a = \mathbb{1}$$

f) $$X^2 = \frac{1}{2\alpha^2}\left(a^{+2} + a^+a + aa^+ + a^2\right) = \qquad P = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\left(a^{+2} + 2a^+a + a^2 + \mathbb{1}\right)$$

$$P^2 = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2}\left(a^{+2} - a^+a - aa^+ + a^2\right) = \frac{-\hbar^2\alpha^2}{2}\left(a^{+2} - 2a^+a - \mathbb{1} + a^2\right)$$

$${}_t\langle\psi|\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^2}\left(\cancel{a^{+2}} + 2a^+a + \cancel{a^2} + \mathbb{1}\right)\left(|0\rangle - e^{-i\omega t}|1\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left(\langle 0| - e^{i\omega t}\langle 1|\right)\left(-2\, e^{-i\omega t}|1\rangle + |0\rangle - e^{-i\omega t}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left(1 + \cancel{2} + 1\right) \Rightarrow \langle x^2\rangle_t = \frac{1}{\alpha^2}$$

$${}_t\langle\psi|\frac{i\hbar\alpha}{2\sqrt{2}}(a^+ - a)\left(|0\rangle - e^{-i\omega t}|1\rangle\right) = \left(\langle 0| - e^{i\omega t}\langle 1|\right)\frac{i\hbar\alpha}{2\sqrt{2}}\left(|1\rangle + e^{-i\omega t}|0\rangle\right) =$$

$$= \frac{i\hbar\alpha}{2\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right) = \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P\rangle_t = \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\omega t)}$$

$${}_t\langle\psi|\frac{-\hbar^2\alpha^2}{4}\left(\cancel{a^{+2}} - 2a^+a - \mathbb{1} + \cancel{a^2}\right)\left(|0\rangle - e^{-i\omega t}|1\rangle\right) =$$

$$= \frac{-\hbar^2\alpha^2}{4}\left(\langle 0| - e^{i\omega t}\langle 1|\right)\left(+2e^{-i\omega t}|1\rangle - |0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle\right) =$$

$$= \frac{-\hbar^2\alpha^2}{4}\left(-1 - \cancel{2} - 1\right) \Rightarrow \langle P^2\rangle_t = \hbar^2\alpha^2$$

Por tanto:

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \left(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\right)\left(\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2\right) = \left[\frac{1}{\cancel{\alpha^2}} - \frac{1}{2\cancel{\alpha^2}}\cos^2(\omega t)\right]$$

$$\left[\hbar^2\cancel{\alpha^2} - \frac{\hbar^2\cancel{\alpha^2}}{2}\operatorname{sen}^2(\omega t)\right] = \frac{\hbar^2}{4}\left[2-\cos^2(\omega t)\right]\left[2-\operatorname{sen}^2(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[4 - 2\operatorname{sen}^2(\omega t) - 2\cos^2(\omega t) + \cos^2\operatorname{sen}^2(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[2 + \cos^2(\omega t)\operatorname{sen}^2(\omega t)\right] = \frac{\hbar^2}{4}\left[2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2\omega t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}\left[2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2\omega t)\right]^{1/2}}$$