

## Ejercicios (Integral de Riemann)

7.1. Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| (1) $\frac{(1 + \sqrt{x})^3}{x^{1/3}}$ ,           | (2) $\frac{(\arcsen x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ ,           | (3) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ ,                  |
| (4) $4 \cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen} x$ , | (5) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ , | (6) $\frac{1}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}}$ ,          |
| (7) $x^5 \sqrt{1-x^3}$ ,                           | (8) $\frac{1}{x(x^7+1)}$ ,                           | (9) $\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ , |
| (10) $\arcsen x$ ,                                 | (11) $\cos x \log(1 + \cos x)$ ,                     | (12) $\log^2 x$ ,                               |
| (13) $\frac{\cos 2x}{e^x}$ ,                       | (14) $\frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,            | (15) $x \tan^2 x$ ,                             |
| (16) $\frac{x e^x}{(1+x)^2}$ ,                     | (17) $\frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ ,           |   |
| (18) $\frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}$ ,    |  | (19) $\frac{3x + 5}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ ,        |
| (20) $\frac{x}{x^4 + (a+b)x^2 + ab}$ ,             | (21) $\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$ ,                     | (22) $\frac{1}{x^4 + 1}$ ,                      |
| (23) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ,                   | (24) $\frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}$ ,                    | (25) $\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2+\sqrt{x}}$ ,      |
| (26) $\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$ ,                    | (27) $\frac{1}{x\sqrt{2x+1}}$ ,                      | (28) $\frac{1}{x(\sqrt{1+x}-2)}$ ,              |
| (29) $\frac{3x^{2/3}-7}{x-7x^{1/3}+6}$ ,           | (30) $\frac{3}{x+3(x+4)^{2/3}}$ ,                    | (31) $\frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}$ ,      |
| (32) $\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$ ,   | (33) $\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{3+x}{x-1}}$ ,         | (34) $\sec^3 x$ ,                               |
| (35) $\frac{1}{(a+b\cos x)\operatorname{sen} x}$ , | (36) $\frac{1}{2+3\tan x}$ ,                         | (37) $\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$ ,              |
| (38) $\frac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$ ,         | (39) $\frac{x^2}{\sqrt{3x^2-x+1}}$ .                 |   |

7.2. Calcular los límites siguientes mediante integrales definidas:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$c) \lim_n \left( \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4 + 2^4}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n^4}} \right),$$

$$d) \lim_n \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}, \quad k \geq 0.$$

**7.3.** Sea  $f$  continua en  $[0, a]$ . Comprobar que

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a - x) dx$$

y calcular, para  $n = 1$  y  $n = 3$ ,  $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1 + \cos^2 x}$ .

**7.4.** Calcular las integrales definidas siguientes:

$$a) \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx, \quad b) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx, \quad c) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{3 + \operatorname{sen}^2 x} dx,$$

$$d) \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx, \quad e) \int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{(1 + x)^2} dx \quad f) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

**7.5.** Probar que las siguientes funciones son derivables y hallar sus derivadas:

$$a) F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t dt,$$

$$b) F(x) = \int_a^b f(x + t) dt, \text{ con } f \text{ continua,}$$

$$c) F(x) = \int_0^x x f(t) dt, \text{ con } f \text{ continua,}$$

$$d) F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt, \text{ con } h \text{ continua y } f \text{ y } g \text{ derivables.}$$

**7.6.** Demostrar que, si  $f$  es continua,

$$\int_0^x f(u)(x - u) du = \int_0^x \int_0^u f(t) dt du.$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**7.8.** Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx,$$

para cada  $n \geq 2$ . Probar que para cada  $n \geq 1$  se tiene:

a) 
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)},$$

b) 
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

**7.9.** Hallar el área de la figura limitada por la parábola  $y = -x^2 - 2x + 3$ , su tangente en el punto  $(2, -5)$  y el eje  $y$ .

**7.10.** Calcular el área de la figura limitada por la curva  $y^2 = x(x-1)^2$ .

**7.11.** La corona circular centrada en el origen y de radio interior  $\sqrt{2}$  y radio exterior  $\sqrt{6}$  se corta con la parábola de ecuación  $x = y^2$ . Hallar el área de una de las dos superficies que se forman.

**7.12.** Hallar el valor del parámetro  $\lambda$  para el que la curva  $y = \lambda \cos x$  divide en dos partes de igual área la región limitada por el eje  $x$ , la curva  $y = \operatorname{sen} x$  y la recta  $x = \pi/2$ .

**7.13.** Hallar la longitud del arco que la recta  $x = 4/3$  corta en la curva  $y^2 = x^3$ .

**7.14.** Calcular la longitud del arco de la curva  $y = \log \cos x$  entre los puntos de abscisas  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ .

**7.15.** Calcular la longitud del arco de la curva  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \log y$  entre los puntos  $y = 1$  e  $y = 2$ .

**7.16.** Hallar la longitud de la astroide  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , donde  $a > 0$ .

**7.17.** Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva  $a^2 y^2 = ax^3 - x^4$  alrededor del eje  $x$  ( $a > 0$ ).

**7.18.** Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje  $x$  la

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

**7.20.** Hallar el área del elipsoide formado al girar alrededor del eje  $x$  la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

**7.21.** Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje  $y$  la porción de la curva  $y = x^2/2$  cortada por la recta  $y = 3/2$ .

**7.22.** Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje  $x$  la porción de la curva  $y^2 = 4 + x$  cortada por la recta  $x = 2$ .

**7.23.** Determinar el carácter de las siguientes integrales impropias:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ,                   | b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ ,                 | c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{ x-1 }$ ,         |
| d) $\int_0^1 \log x \, dx$ ,                              | e) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x}$ ,               | f) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x} \, dx$ ,   |
| g) $\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^4+3}}$ ,       | h) $\int_1^2 \frac{dx}{(x^3-4x^2+4x)^{1/3}}$ ,        | i) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$ ,         |
| j) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ,                   | k) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{x^4+1}$ ,        | l) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^5)^{1/6}}$ , |
| m) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ ,            | n) $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ ,                  | ñ) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ ,     |
| o) $\int_0^3 \frac{dx}{(x(3-x))^{1/3}}$ ,                 | p) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1+x^2} \, dx$ , | q) $\int_2^{\infty} e^{-x^3} \, dx$ ,           |
| r) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen x}{1+x^2} \, dx$ , | s) $\int_0^1 \log x \sen \frac{1}{x} \, dx$ ,         | t) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\log x}$ .        |

**7.24.** Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x(1-x^2)|}}$$

**7.25.** Estudiar la convergencia de las siguientes integrales y, si convergen, calcular su valor:

- |  |   |                                     |
|--|---|-------------------------------------|
| a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ , | b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ , | c) $\int_{-\infty}^0 x e^x \, dx$ , |
|--|---|-------------------------------------|

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

j)  $\int_0^{\infty} |x - 3|e^{-x} dx$ ,    k)  $\int_0^{\infty} xe^{|x-2|} dx$ ,    l)  $\int_1^3 |x - 2| \log x dx$ ,  
m)  $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ .

**7.26** (Funciones gamma y beta de Euler).

a) Probar que, dados  $x, y \in (0, \infty)$ , las siguientes integrales son convergentes:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

b) Probar que  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  para todo  $x > 0$ .

c) Probar que  $\Gamma(n + 1) = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**7.27.** Teniendo en cuenta la función  $\Gamma$  y sabiendo que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , calcular las siguientes integrales:

a)  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ ,    b)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ ,    c)  $\int_0^{\infty} 3^{-4x^2} dx$ ,  
d)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x-1|} dx$ ,    e)  $\int_0^1 x^2 \log^4 x dx$ ,    f)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ ,  
g)  $\int_0^{\infty} (x - 3)e^{-x^2} dx$ ,    h)  $\int_0^{\infty} (x^2 + 1)e^{-\sqrt{x}} dx$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70