Examen de Física Cuántica

Curso 1999-2000. Primer Parcial, 11 Febrero 2000

OBLIGATORIO: Problema 1 (5 puntos).
A ELEGIR: Problemas 2 ó 3 (5 puntos).

1. a) Calcular los niveles de energía correspondientes a una partícula alfa de masa $m_\alpha = 3727.38$ MeV en un nucleo atómico, cuya energía potencial se puede aproximar por el pozo unidimensional:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0\,, \\ -V_1 & 0 < x < a\,, \\ V_2 & a < x < a+b\,, \\ 0 & x > a+b\,, \end{cases}$$

donde la profundidad del pozo es de $V_1 = 6$ MeV y la barrera tiene una altura $V_2 = 4$ MeV. La anchura del pozo es de $a = 6.5$ fm y la de la barrera es de $b = 43.7$ fm.

[Ayuda: Para el cálculo de los niveles de energía es posible usar la aproximación física $b \gg a$. Resolved la ecuación transcendente $\sin x = \pm x/\epsilon$ con la fórmula

$$x_n = n\pi - \arcsin \frac{x_n}{\epsilon},$$

para el estado n-simo, en radianes. Converge en pocos pasos.]

b) ¿Existe algún estado metaestable? En caso afirmativo,

i) Calcular el coeficiente de transmisión T.

i) Estimar la vida media τ del estado metaestable.

iii) ¿Qué energía tendrá la partícula alfa emitida?

[Ayuda: Suponed que la partícula alfa oscila dentro del núcleo con una frecuencia dada por $v/2a$, siendo $p = \hbar k = m_\alpha v$ el momento no relativista de la partícula alfa dentro del núcleo. La vida media se puede estimar a partir de $\tau^{-1} = (v/2a)\, T$.]

2,1225

5,6101

8,2618

Inverse Compton

$\nu' > \nu$

($\bar{e}$ loses energy)

(Melania confirmar si está bien seguro)

2. a) Un haz monocromático de fotones de longitud de onda λ sufren dispersión Compton inversa con los electrones de un plasma caliente a la temperatura $T_{\text{gas}} = 1.16 \times 10^8$ K. Suponiendo que la energía cinética media de los electrones del plasma es de $K_e = kT_{\text{gas}}$, calcular la longitud de onda de los fotones incidentes para que el haz sea dispersado un ángulo $\theta = 90°$.

[Ayuda: Suponed que, en la dispersión Compton inversa, el electrón del plasma transfiere toda su energía cinética al fotón, quedando el electrón en reposo.]

b) El haz dispersado incide sobre una red critalina de período $d = 1.7$ Å. ¿Cuántos máximos de difracción correspondientes a las reflexiones de Bragg se pueden observar entre $\alpha = 0°$ y $90°$? ¿Qué resolución angular necesito tener para distinguir unos máximos de otros?

[Ayuda: La ley de Bragg es $n\lambda = 2d\sin\phi = 2d\cos\frac{\alpha}{2}$]

$\Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

Un haz de electrones se hace pasar por un dispositivo de tipo Stern-Gerlach con el gradiente de campo magnético en la dirección del eje z, de tal manera que se prepara el sistema en el estado $|\uparrow\rangle$, autoestado del operador S_z con autovalor $+\hbar/2$. A continuación se hace pasar el haz por un campo magnético homogéneo, de intensidad $B_0 = 0.01$ T, en la dirección del eje y, $\vec{B} = B_0\,(0,1,0)$.

a) Calcular el factor giromagnético del electrón, g_s, sabiendo que después de un tiempo $t_* = 1.7841$ ns, el sistema se encuentra en un estado ortogonal al inicial.

$$\frac{1}{2}\left(i\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\i\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = -i\,|\rightarrow$$

$$e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$$

b) Considérese el operador $A = (\mathbb{1} + \alpha\,\sigma_x)^2$.

i) ¿Qué condición debe satisfacer α para que A represente un observable?

ii) Calcular la dispersión de A, $\Delta A \equiv \left[\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\right]^{1/2}$, en el estado inicial.

iii) Calcular la evolución temporal de la dispersión de A. ¿Es posible que $\Delta A(t) = 0$ para algún tiempo t? Calcular ese tiempo y discutir el resultado.

[Ayuda: El Hamiltoniano de un sistema de espines sometido a un campo magnético $\vec{B}$ está dado por

$$H = -\vec{B}\cdot\vec{\mu} \;=\; \mu_B\frac{g_s}{\hbar}\,\vec{B}\cdot\vec{S}$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr, g_s es el factor giromagnético del electrón, y el operador de espín se pueder escribir en función de las matrices de Pauli, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$,

$b=1$
$a=i$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.]$$

$a - ib = 0$
$ia + b = 0$

$-a - ib = 0$
$ia - b = 0$

$$\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$$

$b=1$
$a=-i$

$i\,i=0$
$1-1=0$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$E = -\frac{k^2\hbar^2}{2m}$

$\varepsilon^2 = \frac{2m(V_1+V_2)a^2}{\hbar^2}$

Febrero 2000

1.

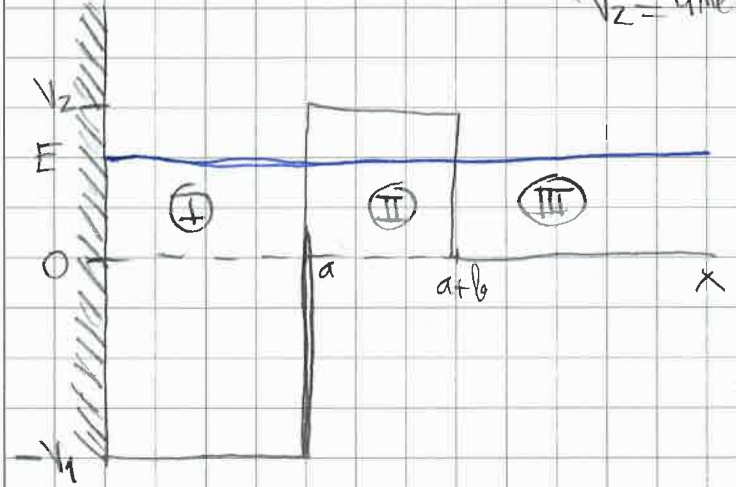
a) $m_\alpha = 3727{,}38\ MeV/c^2$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<0 \\ -V_1 & 0<x<a \\ V_2 & a<x<a+b \\ 0 & x>a+b \end{cases}$$

El potencial no es simétrico $\rightarrow$ no hay paridad bien definida.

$V_1 = 6$ MeV $\quad a = 6{,}5$ fm

$V_2 = 4$ MeV $\quad b = 4{,}7$ fm



* Estados ligados $\rightarrow E<V_2$

* Aproximamos $b \gg a$ para calcular E_n

$E < V_1+V_2$

I) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_I'' = E\psi_I \Rightarrow \psi_I'' = -\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\psi_I$ $\quad [\psi_I(0) = 0]^{(1)}$

$\psi_I(x) = A_I \operatorname{sen}(kx) + \cancel{B_I \cos(kx)}^{0\ (1)}$

$[\psi_{II}(\infty) \to 0]^{(2)}$

II) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{II}'' + (V_1+V_2)\psi_{II} = E\psi_{II} \Rightarrow \psi_{II}'' = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_1+V_2-E)}_{\alpha^2}\psi_{II}$

$\psi_{II}(x) = \cancel{A_{II}}^{0}\, e^{\alpha x\ (2)} + B_{II}\, e^{-\alpha x}$

$(A_I = A)$

$\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \Rightarrow A_I \operatorname{sen}(ka) = B_{II}\, e^{-\alpha a} \Rightarrow B_{II} = e^{\alpha a}\operatorname{sen}(ka)\, A$

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A\,\text{sen}(Kx) \longrightarrow \psi_I'(x) = AK\cos(Kx) \\ \psi_{II}(x) = A\,\text{sen}(Ka)\,e^{-\alpha(x-a)} \rightarrow \psi_{II}'(x) = -A\alpha\,\text{sen}(Ka)\,e^{-\alpha(x-a)} \end{cases}$$

$$\psi_I'(a) = \psi_{II}'(a) \Rightarrow \cancel{A}K\cos(Ka) = -\cancel{A}\,\alpha\,\text{sen}(Ka) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}(Ka) = -\frac{K}{\alpha} \Rightarrow \text{cotg}^2(Ka) = \frac{\alpha^2}{K^2} =$$

$$= \cancel{\frac{2m}{\hbar^2}}(V_1+V_2-E)\cancel{\frac{\hbar^2}{2m}}\frac{1}{E} = \left(\frac{V_1+V_2}{E}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cotg}^2(Ka)+1 = \frac{V_1+V_2}{E} \Rightarrow \overbrace{\cos^2(Ka)+\text{sen}^2(Ka)}^{1} =$$

$$= \frac{V_1+V_2}{E}\text{sen}^2(Ka) \Rightarrow \text{sen}^2(Ka) = \frac{E}{V_1+V_2} = -\frac{K^2\hbar^2}{2m}\frac{1}{(V_1+V_2)} =$$

$$= -\frac{K^2a^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \boxed{\text{sen}(Ka) = -\frac{Ka}{\varepsilon}} \longrightarrow \text{sen}\,x = -\frac{x}{\varepsilon}$$

El nº total de estados será

$$\varepsilon^2 = \frac{2(mc^2)(V_1+V_2)a^2}{(\hbar c)^2} = 80{,}89 \simeq 81 \Rightarrow \boxed{\varepsilon \simeq 9} \qquad \boxed{N = \left[1+\frac{\varepsilon}{\pi}\right] = 3}$$

Usamos:

$$x_n = n\pi - \text{arcsen}\frac{x_n}{9}$$

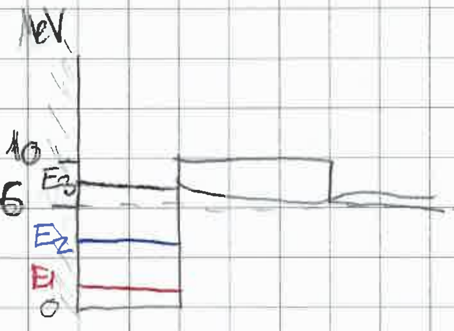
$$x_1 = 2{,}8225 \Rightarrow K_1^2a^2 = x_1^2 \Rightarrow \frac{2mE_1}{\hbar^2}a^2 = x_1^2 \Rightarrow E_1 = \frac{\hbar^2x_1^2}{2ma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = 0{,}98\ \text{MeV}}$$

$$x_2 = 5{,}6101 \Rightarrow E_2 = \frac{\hbar^2x_2^2}{2ma^2} \Rightarrow \boxed{E_2 = 3{,}89\ \text{MeV}}$$

$$x_3 = 8{,}2618 \Rightarrow E_3 = \frac{\hbar^2x_3^2}{2ma^2} \Rightarrow \boxed{E_3 = 8{,}44\ \text{MeV}}$$

b) Estado metaestable



El único estado metaestable es el de energía E_3, ya que existe cierta posibilidad no nula de que sufra efecto túnel.

$$\left[\nu = \frac{v}{2a} = \frac{p}{2m_\alpha a} = \frac{\hbar K}{2m_\alpha a}\right]$$

$$\tau^{-1} = \left(\frac{\hbar K}{2m_\alpha a}\right) T$$

i) Estamos ante el caso habitual de un escalón, por lo que podemos usar las fórmulas ya conocidas:

$\mathcal{E} = 9 \gg 1$

$$\alpha^2 a^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2}(V_1+V_2-E_3) = 12{,}62 \Rightarrow \alpha a = 3{,}55 \ (\gg 1)$$

$$T = \frac{16E_3}{V_1+V_2}\left(1-\frac{E_3}{V_1+V_2}\right)e^{-2\alpha a} = 2{,}3\cdot 10^{-11} \sim 0$$

Es una buena aproximación

$$T = \left[1 + \frac{\sinh^2(\alpha a)}{4\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)}\right]^{-1} = 2{,}3\cdot 10^{-11} \sim 0$$

El coeficiente de transmisión es pequeño, necesitaríamos mucho tiempo o muchos átomos para ver el efecto túnel.

ii) $$\tau = \frac{2m_\alpha a}{\hbar K}\frac{1}{T} \Rightarrow \tau^2 = \frac{2m_\alpha^2 a^2 \hbar^2}{\hbar^2\, 2m_\alpha E_3}\frac{1}{T^2} =$$

$$= \frac{2m_\alpha a^2}{E_3}\frac{1}{T^2} \Rightarrow \left[\tau = 2{,}52\ \mathrm{Ms} = 2{,}52\cdot 10^6\ \mathrm{s}\right]$$

iii)

2. λ, dispersión Compton inversa, $T_{gas} = 1{,}16 \cdot 10^8 K$; $K_e = KT_{gas}$. Longitud de onda incidente (γ) para dispersión $\theta = 90°$?

a)

Para este caso podemos usar la ecuación:

$$\lambda - \lambda' = \frac{hc}{m_e c^2}(1 - \cancel{\cos\theta}^{\,0}) \Rightarrow \lambda - \lambda' = \frac{hc}{m_e c^2}$$

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_{\gamma'} = \frac{hc}{\lambda'} \qquad K_e = K_B T_{gas}$$

$$E_\gamma + K_e = E_{\gamma'} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} + K_B T_{gas} = \frac{hc}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda' = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} + K_B T_g} = \frac{hc\lambda}{hc + K_B T_g \lambda} = \frac{\lambda}{1 + \frac{K_B T_g}{hc}\lambda}$$

$$\lambda\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{K_B T_g}{hc}\lambda}\right) = \frac{hc}{m_e c^2} \Rightarrow \frac{hc}{m_e c^2 \lambda} - 1 = -\frac{1}{1 + \frac{K_B T_g}{hc}\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_e c^2 \lambda - hc}{m_e c^2 \lambda} = \frac{1}{1 + \frac{K_B T_g}{hc}\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_e c^2 \lambda - hc)\left(1 + \frac{K_B T_g}{hc}\lambda\right) = m_e c^2 \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m_e c^2 \lambda} + \frac{K_B T_g m_e c}{h}\lambda^2 - hc - K_B T_g \lambda = \cancel{m_e c^2 \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K_B T_g m_e c}{h}\lambda^2 - K_B T_g \lambda - hc = 0 \Rightarrow \frac{m_e c}{h}\lambda^2 - \lambda - \frac{hc}{K_B T_g} = 0$$

14,34411493

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4mec}{h}\frac{hc}{K_BT_g}}}{\frac{2mec}{h}} = \frac{h\left(1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{mec^2}{K_BT_g}}\right)}{2mec} = \boxed{1{,}86 \cdot 10^{-11}\ m}$$

b) Haz de $\lambda = 1{,}86 \cdot 10^{-11}$ m, red cristalina $d = 1{,}7$ Å. Máximos entre $\alpha = 0°$ y $90°$.

$$n\lambda = 2d \operatorname{sen}\phi = 2d\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = 0° \rightarrow n = \frac{2d}{\lambda} \Rightarrow n = 18{,}28 \Rightarrow n_{max} = 18$$

$$\alpha = 90° \rightarrow n = \frac{2d}{\lambda}\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}d}{\lambda} = 12{,}92 \Rightarrow n_{min} = 13$$

Se pueden ver 6 máximos de difracción.

$$n\lambda = 2d\cos\frac{\alpha'}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha'}{2} = \frac{n\lambda}{2d} \Rightarrow \alpha' = 2\arccos\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)$$

$$(n+1)\lambda = 2d\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\arccos\left[\frac{(n+1)\lambda}{2d}\right]$$

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha' = 2\left\{\arccos\left[\frac{(n+1)\lambda}{2d}\right] - \arccos\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)\right\}$$

$$n = 12 \Rightarrow \Delta\alpha \sim 0{,}15\ rad \qquad n = 17 \Rightarrow \Delta\alpha \sim 0{,}13\ rad$$

Un mínimo de $\Delta\alpha \sim 0{,}15$ rad.

3. $|\uparrow\rangle$; $S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$. Después por $B_0 = 0{,}01$ T, $\vec{B} = B_0(0,1,0)$

a) Calcular g_s sabiendo que después de un tiempo $t_* = 1{,}7841$ ns es sistema está en un estado ortogonal, $|\downarrow\rangle$

$$H = -\vec{B}\cdot\vec{\mu} = \mu_B \frac{g_s}{\hbar} \vec{B}\cdot\vec{S} \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$\vec{B} = B_0(0,1,0)$$

$$|\Psi\rangle_0 = |\Uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |\Downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$H = \mu_B \frac{g_s}{\hbar} \frac{B_0 \hbar}{2} (0,1,0)\cdot(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z) \Rightarrow H = \mu_B \frac{g_s B_0}{2} \sigma_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \mu_B \frac{g_s B_0}{2} \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

El estado inicial está expresado en la base de S_z. Para poder actuar con mayor facilidad con S_y lo cambiaremos a su base de vectores propios.

Estos se ve facilmente que son:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

Podemos por tanto escribir $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = |\Uparrow\rangle$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = |\Downarrow\rangle$$

Por tanto:

$$|\Psi_0\rangle = |\Uparrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

$$|\Psi\rangle_t = U(t)\,|\Psi_0\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\,|\Psi_0\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\mu_B\frac{g_s B_0}{2\hbar}t}\,|+\rangle - e^{+i\mu_B\frac{g_s B_0}{2\hbar}t}\,|-\rangle\right)$$

Si está en t_* en un estado ortogonal, $e^{i\mu_B\frac{g_s B_0}{2\hbar}t_*} = i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu_B \frac{g_s B_0}{2\hbar} t_* = \frac{\pi}{2} \Rightarrow g_s = \frac{\pi\hbar}{\mu_B B_0 t_*} \Rightarrow g_s = 2{,}002 \Rightarrow \boxed{g_s \simeq 2}$$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

b) $A = (\mathbb{1} + \alpha \sigma_x)^2 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}$

i) Para que A sea un observable debe estar representado por un operador autoadjunto.

$$A = (\mathbb{1} + \alpha\sigma_x)^2 = \overset{\mathbb{1}}{\mathbb{1}^2} + \alpha^2 \overset{\mathbb{1}}{\sigma_x^2} + 2\,\mathbb{1}\alpha\sigma_x =$$

$$= (1+\alpha^2)\mathbb{1} + 2\alpha\sigma_x$$

$$A^+ = (1+\alpha^{*2})\overset{\mathbb{1}}{\mathbb{1}^+} + 2\alpha^*\overset{\sigma_x}{\sigma_x^+} = (1+\alpha^{*2})\mathbb{1} + 2\alpha^*\sigma_x$$

A simple vista podemos ver que la condición $A = A^+ \Rightarrow \alpha = \alpha^*$ y por tanto $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Calcular $\Delta A = [\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2]^{1/2}$ en el estado $|\psi\rangle_0 = |\uparrow\rangle$

Vemos que $\sigma_x|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$. Por tanto:

$$\langle A\rangle_0 = \langle\uparrow|\left[(1+\alpha^2)|\uparrow\rangle + 2\alpha|\downarrow\rangle\right] \Rightarrow \boxed{\langle A\rangle = 1+\alpha^2}$$

$$A^2 = (1+\alpha^2)^2\mathbb{1} + 4\alpha^2\mathbb{1} + (1+\alpha^2)2\alpha\sigma_x$$

$$\langle A^2\rangle = 6\alpha^2 + \alpha^4 + 1$$

$$\Delta A^2 = 6\alpha^2 + \cancel{\alpha^4} + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\alpha^4} - 2\alpha^2 \Rightarrow \boxed{\Delta A = 2\alpha}$$

iii)

$$[H, A] = \left[\mu_B \frac{g_s B_0}{2}\sigma_y ,\ (1+\alpha^2)\mathbb{1} + 2\alpha\sigma_x\right] \neq 0$$

$\text{sen}\,\omega t = \frac{i}{2}\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right)$

A no es una cte. del movimiento.

Para el siguiente apartado vemos que:

$e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} = \cos(\omega t) - i\,\text{sen}\,\omega t - \cos\omega t - i\,\text{sen}\,\omega t = -2i\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow$

$$\sigma_x|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = -i|-\rangle$$

$$\sigma_x|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = i|+\rangle$$

$\mu_B \frac{g_s B_0}{\hbar} = \omega$

$${}_t\langle\Psi|\left[(1+\alpha^2)\mathbb{1} + 2\alpha\sigma_x\right]\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - e^{i\mu_B \frac{g_s B_0}{\hbar}t}|-\rangle\right)\right] =$$

$$= {}_t\langle\Psi|\left[(1+\alpha^2)\frac{i}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\alpha e^{i\omega t}\right]|+\rangle + \left[-(1+\alpha^2)\frac{ie^{i\omega t}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\alpha\right]|-\rangle =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[(1+\alpha^2)\frac{i}{\sqrt{2}} + \alpha\sqrt{2}e^{i\omega t}\right] + \frac{i\,e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\alpha - (1+\alpha^2)\frac{ie^{i\omega t}}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1+\alpha^2) - i\alpha e^{i\omega t} + i\alpha e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}(1+\alpha^2) =$$

$$= (1+\alpha^2) - 2\alpha\,\text{sen}(\omega t) \Rightarrow \langle A\rangle_t = (1+\alpha^2) - 2\alpha\,\text{sen}(\omega t)$$

$${}_t\langle\Psi|\left\{\left[(1+\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\right]\mathbb{1} + 2\alpha(1+\alpha^2)\sigma_x\right\}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|-\rangle\right] =$$

$$= {}_t\langle\Psi|\left[(\alpha^4+6\alpha^2+1)\frac{i}{\sqrt{2}} + \alpha\sqrt{2}(1+\alpha^2)e^{i\omega t}\right]|+\rangle + \left[-\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}(\alpha^4+6\alpha^2+1) + \sqrt{2}\alpha(1+\alpha^2)\right]|-\rangle = \frac{1}{2}(\alpha^4+6\alpha^2+1) - i\alpha(1+\alpha^2)e^{i\omega t} +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}(\alpha^4+6\alpha^2+1) + \sqrt{2}\alpha(1+\alpha^2)\right] = (\alpha^4+6\alpha^2+1) +$$

$$+ i\alpha(1+\alpha^2)(-2i)\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow \langle A^2\rangle_t = (\alpha^4+6\alpha^2+1) + 2\alpha(1+\alpha^2)\,\text{sen}\,\omega t$$

(Debería ser $\langle A^2\rangle_t = (\alpha^4+6\alpha^2+1) + 4\alpha(1+\alpha^2)\,\text{sen}(\omega t)$)

$$[(1+\alpha^2) - 2\alpha\,\mathrm{sen}(wt)]^2 = (1+\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\,\mathrm{sen}^2 wt - 4(1+\alpha^2)\alpha\,\mathrm{sen}(wt)$$

CURSOS DE VERANO

FUNDACIÓN GENERAL DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Santander UNIVERSIDADES

FUNDACIÓN GENERAL UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

El Escorial

$$\Delta A_t^2 = (\cancel{\alpha^4} + 6\alpha^2 + \cancel{1}) + 4(\cancel{\alpha + \alpha^3})\,\mathrm{sen}(wt) - (\cancel{1} + 2\alpha^2 + \cancel{\alpha^4}) -$$

$$- 4\alpha^2\,\mathrm{sen}^2 wt - 4(\cancel{\alpha + \alpha^3})\,\cancel{\mathrm{sen}(wt)} = 4\alpha^2 - 4\alpha^2\,\mathrm{sen}^2 wt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta A_t^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha^2\,\mathrm{sen}^2 wt}$$

$$\Delta A_t = 0 \Rightarrow \cancel{4\alpha^2} = \cancel{4\alpha^2}\,\mathrm{sen}^2 wt \Rightarrow \mathrm{sen}\, wt = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_B \frac{g_s B_0}{\hbar} t = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = n\frac{\pi\hbar}{2\mu_B g_s B_0}$$

(Esta hecho en la Hoja 5 de ejercicios. Los errores acumulados hacen que no obtenga $t = t^*$, que es lo debido.)

La interpretación es clara, $\Delta A = 0$ en $t = t^*$ porque es estado hace el cambio al ortogonal y por tanto el único resultado posible de la medida es $|\psi\rangle$, es decir, no hay indeterminación.