Física Cuántica. 3° Físicas. Grupo 34

Curso 2000-2001. Examen Final. 2 Junio 2001

PROBLEMA (6 puntos)

Considérese una partícula de masa m y un potencial unidimensional

$$V(x) = -\lambda\,\delta(x)\,, \qquad \lambda > 0\,.$$

a) Calcular las energías de los estados ligados. ¿Cuántos estados ligados pueden existir? ¿Depende ésto del valor de λ?
b) Determinar la función de onda normalizada del estado fundamental y evaluar la relación de indeterminación $\Delta x\,\Delta p$. Comentar el resultado. ¿Qué se puede decir de $\Delta E\,\Delta t$?
c) Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión de una partícula con momento bien definido que incide en este potencial desde $x = -\infty$. ¿Para qué valor de la energía de la partícula la probabilidad de que se transmita o se refleje es la misma? Comentar el resultado.

[Ayuda: Para el cálculo de las condiciones de continuidad, integrar la ecuación de Schrödinger en un entorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $x = 0$, y luego hacer $\varepsilon \to 0$.]

$$\int dx\, x^2\, e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}\Big(x^2 - \frac{2}{a}\,x + \frac{2}{a^2}\Big)$$

CUESTIONES (4 puntos) La expresión relativista no da buenos resultados

1. Un fotón, un electrón y un neutrón tienen energías de 10 keV, 98 eV y 0.053 eV, respectivamente. Calcular las longitudes de onda de de Broglie asociadas a cada partícula. ¿Cómo determinarías la naturaleza corpuscular *y* ondulatoria de cada una?

2. En un experimento Compton se hace incidir un haz monocromático de rayos X de longitud de onda λ sobre un cristal de grafito y se observan, a 90° del haz incidente, dos picos de intensidad similar para longitudes de onda λ y $\lambda+\lambda_c$, donde $\lambda_c = h/m_e c$ es la longitud de onda Compton del electrón. ¿Cuál es el origen de cada uno de los picos?

3. Un átomo muónico contiene un protón p^+ y un muón μ^-, de masa $m_\mu = 206.77\, m_e$. Usando el principio de indeterminación, estimar el radio y la energía del estado fundamental de dicho átomo.

$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$

$\alpha^2 = \frac{2m^2}{2\hbar^4}\lambda^2 \Rightarrow \frac{m\lambda}{\hbar^2} = \alpha$

Junio 2001

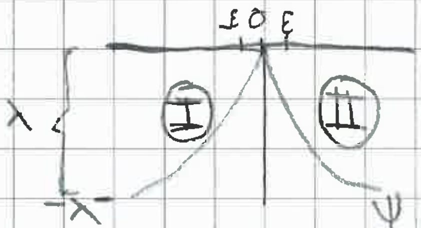
Problema

Masa m, $V(x) = -\lambda\,\delta(x)$, $\lambda > 0$

a) Queremos calcular los estados ligados.

$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

(I) $\psi_I = A_I e^{\alpha x} + \cancel{B_I e^{-\alpha x}}$



(II) $\psi_{II} = \cancel{A_{II} e^{\alpha x}} + B_{II} e^{-\alpha x}$

$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow B_{II} = A_I = A$

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A e^{\alpha x} & \longrightarrow \psi_I'(x) = A\alpha\, e^{\alpha x} \\ \psi_{II}(x) = A e^{-\alpha x} & \longrightarrow \psi_{II}'(x) = -A\alpha\, e^{-\alpha x} \end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''\,dx - \lambda\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi\,\delta(x)\,dx = \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\psi\,dx} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_{II}'(0) - \psi_I'(0)\right) - \lambda\psi(0) = 0 \Rightarrow \psi_{II}'(0) - \psi_I'(0) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A\alpha = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}A \Rightarrow \hbar^4\alpha^2 = m^2\lambda^2 \Rightarrow 2mE = \frac{m^2\lambda^2}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}}$$

Un sólo estado. No depende de A.

b) $$1 = A^2\left[\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x}\,dx\right] = A^2\left[\frac{1}{2\alpha}(1+1)\right] \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\alpha}}$$

Donde $\alpha = \frac{m\lambda}{\hbar^2}$

$$\boxed{\begin{cases} \psi_I(x) = \sqrt{\alpha}\, e^{\alpha x} \\ \psi_{II}(x) = \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x} \end{cases}}$$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{2\alpha x} x\, dx + \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-2\alpha x} x\, dx$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$* \int_{-\infty}^{0} x e^{\alpha 2x} dx = \left[\frac{1}{2} x e^{\alpha 2 x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha 2 x} dx = -\frac{1}{4}$$

$$* \int_{0}^{\infty} x e^{-2x\alpha} dx = +\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2x\alpha} dx = +\frac{1}{4}$$

$\boxed{\langle x\rangle = 0}$ (Se podría ver por simetría)

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{2\alpha x} x^2 dx + \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-2\alpha x} x^2 dx$$

$$* \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{2\alpha x} dx = \left[\frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha}\left(x^2 - \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4\alpha^3}$$

$$* \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x} dx = \left[\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\left(x^2 + \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right)\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{4\alpha^3}$$

$\boxed{\langle x^2\rangle = \frac{1}{2\alpha^2}}$

$$* \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{\alpha x}(-i\hbar\partial x) e^{\alpha x} dx = -\int_{-\infty}^{0} i\alpha^2 e^{2\alpha x}\hbar\, dx = -\frac{i\hbar\alpha^2}{2}\left[e^{2\alpha x}\right]_{-\infty}^{0} =$$

$$= -\frac{i\hbar\alpha^2}{2}$$

$$* \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}(-i\hbar\partial x) e^{-\alpha x} dx = -\frac{i\hbar\alpha^2}{2}\left[e^{-2\alpha x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{i\hbar\alpha^2}{2}$$

$\boxed{\langle p\rangle = 0}$ $\quad p^2 = (-i\hbar\partial x)^2 = -\hbar^2\partial x^2$

$$* \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{\alpha x}(-\hbar^2\partial x^2) e^{\alpha x} dx = \frac{\hbar^2\alpha^3}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x} dx = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2}$$

$$* \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}(-\hbar^2\partial x^2) e^{-\alpha x} dx = \hbar^2\alpha^3\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2}$$

CURSOS DE VERANO

FUNDACIÓN GENERAL DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

El Escorial

Santander UNIVERSIDADES

FUNDACIÓN GENERAL UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

$$\boxed{\langle p^2\rangle = -\hbar^2\alpha^2}$$

$$\Delta x^2 = \langle x^2\rangle - \cancel{\langle x\rangle^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}$$

$$\Delta p^2 = \langle p^2\rangle - \cancel{\langle p\rangle^2} = \hbar^2\alpha^2 \Rightarrow \Delta p = \hbar\alpha$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{Verifica } \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\right) \checkmark$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v_x \Delta t$$

$$\Delta E = \Delta p \, v_x \Rightarrow \Delta p = \frac{\Delta E}{v_x}$$

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

c) Momento bien definido, $\Delta p = 0 \Rightarrow ¿\alpha = 0?$

Cuestiones

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

1. $E_\gamma = 10\,keV$; $E_{e^-} = 98\,eV$; $E_n = 0{,}053\,eV$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \hbar K \qquad E = h\nu = \hbar \omega$$

$$E_\gamma^2 = \cancel{m_\gamma^2 c^4}^{\,0} + p_\gamma^2 c^2 = \frac{h^2 c^2}{\lambda_\gamma^2} \Rightarrow \lambda_\gamma = \frac{hc}{E_\gamma} \Rightarrow \boxed{\lambda_\gamma = 1{,}24\ \text{Å}}$$

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e \lambda_e^2} \Rightarrow \lambda_e^2 = \frac{h^2}{2m_e E_e} \Rightarrow \lambda_e = h(2m_e E_e)^{-1/2} \Rightarrow \boxed{\lambda_e = 1{,}75\text{Å}}$$

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m_n} \Rightarrow \lambda_n = h\left(2m_n E_n\right)^{-1/2} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = 1{,}24\ \text{Å}}$$

Para determinar la naturaleza ondulatoria se podrían hacer interferencias de Bragg en una red cristalina con la distancia interplanar adecuada ($\sim$ Å).
Para la naturaleza corpuscular un experimento de efecto fotoeléctrico con algún metal para γ. Para los otros, por el rango energético, quizá un efecto Compton con un fotón.

2. Rayos X (λ), $\theta = 90°$ λ y $\lambda + \lambda_c$; $\lambda_c = \frac{h}{mc}$.
En el grafito los electrones se encuentran fundamentalmente libres (aunque algunos ligados a los átomos). Siendo así:

* El pico de $\lambda + \lambda_c$ corresponde a la radiación que ha sufrido un efecto Compton con los electrones que están libres.

* El pico de λ corresponde a la interacción de la radiación con los electrones ligados. En este caso la masa efectiva es m_A y por tanto $\lambda_c = \frac{h}{m_A c} \approx 0$, por tanto no hay dispersión Compton.

3. Átomo muónico con μ^+ y μ^- con $m_\mu = 206{,}77\, m_e$. Pro. indeterminación radio y energía del estado fundamental.

$\Delta r \cdot \Delta p \sim \hbar$