

## Ejercicios (Sucesiones y series de funciones)

**9.1.** Hallar el límite puntual de las siguientes sucesiones de funciones. Decidir en cada caso si la convergencia es uniforme o solo puntual.

a)  $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $x \in [0, a]$ ,  $a > 0$ .

b)  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ , en  $\mathbb{R}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ .

c)  $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ .

d)  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ , en  $[0, \infty)$ , en  $[0, 1]$  y en  $[0, a]$ ,  $0 < a < 1$ .

e)  $f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{1+nx}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $[0, a]$ ,  $a > 0$ .

f)  $f_n(x) = \text{arc tan } nx$ , en  $\mathbb{R}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ .

g)  $f_n(x) = e^{-nx}$ , en  $\mathbb{R}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $[a, \infty)$ .

h)  $f_n(x) = xe^{-nx}$ , en  $\mathbb{R}$  y en  $[0, \infty)$ .

i)  $f_n(x) = x^2e^{-nx}$ , en  $\mathbb{R}$  y en  $[0, \infty)$ .

j)  $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$ , en  $\mathbb{R}$ , en  $[0, \infty)$  y en  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ .

**9.2.** Supóngase que  $(f_n)$  es una sucesión de funciones continuas en un intervalo  $I$  que converge de manera uniforme a una función  $f$  en  $I$ . Si  $(x_n)$  es una sucesión en  $I$  que converge a un punto  $c \in I$ , probar que  $\lim_n f_n(x_n) = f(c)$ .

**9.3.** Definamos dos sucesiones de funciones  $(f_n)$  y  $(g_n)$  por

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = 0 \text{ o } x \notin \mathbb{Q}, \\ q + \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \text{ m. c. d. } \{p, q\} = 1. \end{cases}$$

Sea  $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**9.4.** Estudiar la convergencia uniforme de las siguientes series de funciones:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  en  $[-1, 1]$  y en  $[0, \infty)$ .

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$  en  $[0, 1]$ .

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$  en  $(0, \infty)$ .

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ , en  $[0, 1]$  y en  $[1, \infty)$ .

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$  en todo  $\mathbb{R}$ .

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$  en  $[1/3, 2]$ .

**9.5.** Dada una serie convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , probar que la serie de Dirichlet  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$  converge uniformemente en  $[0, \infty)$ . Utilizar esto para probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**9.6.** Probar que si los términos  $f_n$  de una serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  son todos monótonos en un intervalo cerrado y acotado, entonces dicha serie converge absoluta y uniformemente en dicho intervalo.

**9.7.** Investigar el dominio y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

es derivable en todo su dominio. Probar que para todo  $x > 1$  la derivada en  $x$  se puede expresar en la forma

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}.$$

Obtener una forma similar para la derivada  $k$ -ésima de  $\zeta$ .

**9.9.** Probar que

$$\lim_n \int_1^2 e^{-nx^2} dx = 0.$$

**9.10.** Si  $a > 0$ , probar que

$$\lim_n \int_0^a \frac{\text{sen } nx}{nx} dx = 0.$$

¿Qué sucede si  $a = 0$ ?

**9.11.** Sea

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}, \quad x \in [0, 1].$$

Probar que  $(f_n)$  converge puntualmente a una función integrable  $f$  y no lo hace uniformemente, pero que, sin embargo,

$$\int_0^1 f = \lim_n \int_0^1 f_n.$$

**9.12.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones continuas en  $[0, 1]$  y supóngase que  $(f_n)$  converge a  $f$  uniformemente. Discutir si es cierto o no que

$$\lim_n \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70