AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Números enteros.

1.- Para cada una de las siguientes parejas de números enteros, halla el máximo común divisor, el mínimo común múltiplo y una identidad de Bezout.
a) 10672, 4147; b) 12075, 4655; c) 2597, 1369; d)1312, 800; e) 322,406.

2.- Sean a y b dos enteros positivos. Prueba que si d es el máximo común divisor de a y b, entonces d divide a $na + mb$ para todo par de enteros n y m.

3.- Prueba que $\text{mcd}(n, n+1) = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles son los posibles valores de $\text{mcd}(n, n+2)$ y $\text{mcd}(n, n+6)$?

4.- Sean $a, b, bc \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a, c) = 1$. Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) $\text{mcd}(ab, a) = 1$; b) $\text{mcd}(b, c) = 1$; c) $\text{mcd}(bc, a) = 1$; d) $\text{mcd}(ab, c) = 1$

5.-Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $a \equiv b \pmod{m}$, prueba que $a \equiv b \pmod{\text{mcm}(n, m)}$

6.- Sea $[n] \in \mathbb{Z}_m$. Prueba que la existencia de $[n]^{-1}$ es equivalente a que $\text{mcd}(n, m) = 1$

7.- Halla los inversos de a) 6 en $\mathbb{Z}_{17}$; b) 3 en $\mathbb{Z}_{10}$; c) 7 en $\mathbb{Z}_{16}$.

8.- Halla los elementos de $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{15}$ y $\mathbb{Z}_{24}$ que tienen inverso respecto del producto.

9.- Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones.
a) $12x = 2$ en $\mathbb{Z}_{19}$; b) $7x = 2$ en $\mathbb{Z}_{24}$; c) $31x = 1$ en $\mathbb{Z}_{50}$; d) $25x = 10$ en $\mathbb{Z}_{65}$.

10.- Resuelve las congruencias siguientes:
a) $5x \equiv 17 \pmod{19}$; b) $5x \equiv 17 \pmod{15}$; c) $34x \equiv 60 \pmod{98}$;
d) $35x \equiv 119 \pmod{139}$; e) $125x \equiv 27 \pmod{256}$; f) $211x \equiv 658 \pmod{900}$.

11.- Resuelve los siguientes sistemas de congruencias cuando tengan solución:

a) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 18 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{5} \\ x \equiv 11 \pmod{28} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{18} \\ x \equiv 5 \pmod{19} \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod{5} \\ 2x \equiv 1 \pmod{7} \\ 3x \equiv 4 \pmod{11} \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l} 2x \equiv 3 \pmod{7} \\ 5x \equiv 4 \pmod{9} \\ 3x \equiv 1 \pmod{10} \end{array}\right\}$

12.- Calcula las soluciones positivas de las siguientes ecuaciones diofánticas lineales:
a) $18x + 5y = 48$; b) $54x + 21y = 906$ c) $1588x - 5y = 7$.

13.- Determina los enteros $10 < c < 20$ tales que $84x + 990y = c$ tiene solución y hállala en su caso.

14.- Estando en Estados Unidos el Sr. Herrera se quedó sin dinero en efectivo y fue al banco a cambiar un cheque de viaje. El cajero al pagarle confundió el número de dólares con el número de centavos y viceversa. Sin darse cuenta de este hecho el Sr. Herrera gastó 68 centavos en sellos, y entonces vio para su sorpresa que la cantidad de dinero en efectivo que tenía era exactamente el doble del valor del cheque de viaje que había cambiado. Determina el valor mínimo que podría tener dicho cheque.

15.- Un distribuidor de equipos informáticos efectuó un pedido de entre 100 y 1500 equipos a un fabricante que se los envió en contenedores completos de capacidad para 68 equipos cada uno. El distribuidor los repartió a diferentes puntos de venta utilizando furgonetas con capacidad para 20 equipos y dejó 32 equipos sin repartir en el almacén. Halla cuántos equipos se pidieron al fabricante.

16.- Calcula (i) $(a+b)^2$ en $\mathbb{Z}_2$, (ii) $(a+b)^3$ en $\mathbb{Z}_3$. (iii) Prueba que si p es primo y $1 \leq k \leq p-1$ entonces el coeficiente binomial $\binom{p}{k}$ es divisible por p. Deduce, usando el binomio de Newton, una fórmula para $(a+b)^p$ en $\mathbb{Z}_p$, con p un número primo.

17.- Halla los múltiplos de 28 cuyas dos últimas cifras sean iguales a 16.

18.- Prueba que para todo entero n, los números $n^3 - 7n + 7$ y $n - 1$ son primos entre sí.

19.- a) **Suma Rápida** Sea la aplicación $f : \mathbb{Z}_{140} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ dada por $f([n]_{140}) = ([n]_4, [n]_5, [n]_7)$. Prueba que f es un biyección y calcula $f^{-1}(f(35) + f(56))$.
b) **Producto Rápido** Sea la aplicación $g : \mathbb{Z}_{2052} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_{19}$ dada por $g([n]_{2052}) = ([n]_4, [n]_{27}, [n]_{19})$. Prueba que g es un biyección y calcula $g^{-1}(g(35)g(56))$.

20.- a) Si φ es la función de Euler prueba que $\varphi(m)$ es igual al cardinal de $\mathbb{Z}_m^*$ el conjunto de los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_m$.
b) Calcula $\varphi(11), \varphi(16), \varphi(17), \varphi(25)$ y $\varphi(100)$.
(**Usa** que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ si $m.c.d(n,m) = 1$ ¿Por qué?).

21.- a) Determina la última cifra de 2^{333} y de 3^{1313}.
b) Calcula el resto de dividir $(2^{37})^{73}$ por 37.
c) Determina las dos últimas cifras de 2^{4927} y de $4^{4^{4^4}}$.

22.- Encuentra todos los ceros en $\mathbb{Z}_5$ de cada uno de los polinomios $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x$ y $g(x) = 2x^{219} + 2x^{57} + 3x^{44}$ de $\mathbb{Z}_5[x]$

(*)23.- A las 27 letras del alfabeto $\{A, B, ..., \tilde{\mathrm{N}}, ...\}$ se les asignan un número del 0 al 26; a la A el 0, a la B el 1 ..etc. Asi la ecuación modular $C(x) = (x + k) \pmod{27}$, donde x varia en las letras del mensaje que se quiere enviar, permite codificar un mensaje con clave $k = 0, 1, 2, ...$ ó 26. (Cifrado del César).
a) Recibimos el mensaje: "GQQEUASKKJÑYQUBK"; además sabemos que la clave es 6 ¿Qué significa nuestro mensaje?
b) ¿Qué formúla hemos utilizado para descifrar el mensaje?
c) Usa el código César, con clave $k = 3$, para cifrar el mensaje: "PACIENCIA".