AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Convergencia de sucesiones y series de funciones.

1.- Se consideran las siguientes sucesiones de funciones:
$f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$ y $f_n(x) = (\cos \pi x)^{2n}$.

Se pide:
1) Representar $f_1(x), f_2(x)$ y $f_3(x)$.
2) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de cada sucesión de funciones.

2.- Estudia la convergencia puntual y uniforme en el intervalo $[0,1]$ de las sucesiones de funciones:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \quad \text{y} \quad g_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

3.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

$$\text{a)} f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{-x}{n-1} + \frac{1}{n-1} & \text{si} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \qquad b) f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n} \text{ si } 1 \le x < \infty$$

$$\text{c)} f_n(x) = x - x^n \text{ si} x \in [0,1] \qquad \text{d)} f_n(x) = (1-x)^n \text{ si } 0 \le x \le 1.$$

4.- a) Sea $f_n(x) = xe^{-nx},\ x \ge 0$. Prueba que esta sucesión converge uniformente en $[0,\infty)$.
b) Sea $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{1+nx},\ x \ge 0$. Prueba que para todo $a > 0$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a,\infty)$, pero no así en $[0,\infty)$.
c)$f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx},\ x \ge 0$. Prueba que para todo $a > 0$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a,\infty)$, pero no así en $[0,a]$.

5.- Prueba que la sucesión de funciones $\frac{x^n}{1+x^n}$ no converge uniformemente en el intervalo $[0,2]$.

6.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n(x) = n^2xe^{-nx^2}$ en el intervalo $[0,1]$.

7.- Determina $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx$.

8.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las series de funciones siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \in [0,1]$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1}$

9.- Escribe en forma de serie las siguientes integrales:

$$\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt \qquad \text{y} \qquad \int_1^a \frac{e^{-x^2}}{x}dx$$