AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Series y Transformadas de Fourier de funciones

1.- Calcula el periodo de las funciones $\operatorname{sen} ax$, $\cos ax$ y de e^{iax}.

2.- Comprueba que las siguientes familias de funciones son ortogonales en los dominios que se indican:
a) $\{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\geq 0}$ en $[-\pi,\pi]$ b) $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $[-\pi,\pi]$
c)Las familias $\{\cos nx\}_{n\geq 0}$ y $\{\operatorname{sen} nx\}_{n\geq 1}$ en $[0,\pi]$.

(*)3.- Sea f una función periódica de periodo T y continua en $[0,T]$, salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Prueba que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.- Sea $f \in C[-\pi,\pi]$ función 2π-periódica y derivable. Prueba que si f es par (e.d. $f(-x) = f(x)$), entonces se puede escribir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Y por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$, si f es impar (e.d. $f(-x) = -f(x)$).

5.- Halla las series de Fourier, sobre $[-\pi,\pi]$, de las funciones:
a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \cos^3 x$ c) $f(x) = e^x$ d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ e) $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$.

(*)6.- Sea (x_n) una sucesión numérica convergente a un número x. Sea

$$\tau_k = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k},\ k \in \mathbb{N},$$

la sucesión de medias Césaro de (x_n). Prueba que la sucesión (τ_k) converge a x.
(**El Teorema de Fejer** asegura que la sucesión de medias Césaro de una serie de Fourier de una función continua 2π-periódica converge uniformemente a dicha función).

7.- Para cada una de las funciones siguientes, en los intervalos que se indican,
a) Dibuja su gráfica
b) Justifica la existencia de un desarrollo de Fourier.
c) Calcula sus coeficientes de Fourier.
1) $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi,\pi]$ 2) $f(x) = |x|,\ x \in (-\pi,\pi)$ 3) $f(x) = |\operatorname{sen} x|,\ x \in (-\pi,\pi)$
4) $f(x) = x,\ x \in (-\pi,\pi)$ 5) $f(x) = x,\ x \in (0,2\pi)$ 6) $f(x) = x^2,\ x \in (0,2\pi)$
7) $f(x) = x(\pi - x),\ x \in [0,\pi]$

8.- Utilizando los resultados del ejercicio anterior deduce:
a partir de 1) el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4};$$

a partir de 2, el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4};$$

a partir de 7, el valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

9.- Sean las funciones $f(x) = (x-2)^2, x \in [0,4]$ y $g(x) = |x|^3, x \in [-3,3]$. Encuentra expresiones de estas funciones como series de senos y cosenos.

10.- Encuentra expresiones en serie de senos y cosenos (series de Fourier) de las funciones:

a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -T/2 < t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t < T/2 \end{cases}$, siendo f T-periódica.

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$, siendo f 1-periódica.

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$, siendo f $2-$periódica.

(*)11.- Sea f una función $2\pi-$periódica y tal que su serie de Fourier converja a $f(x)$ puntualmente para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Si las sucesiones de coeficientes de Fourier $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ verifican que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, prueba que la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

(*)12.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función par que verifica que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$. Prueba que la transformada de Fourier de la función f es real (e.d. $F[f](\lambda) \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$). Si f es impar, comprueba que $F[f](\lambda)$ es imaginario puro (e.d. $ReF[f](\lambda) = 0$).

13.-Calcula la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $\chi_{[-\delta,\delta]}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in[-\delta,\delta] \\ \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$, b) $f(x)=\cos(\alpha x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$

c) $f(t)=\begin{cases} k & \text{si} \quad -T\le t<0 \\ -k & \text{si} \quad 0\le t<T \\ 0 & \text{si} \quad t\notin[-T,T]\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x+\pi & \text{si} \quad -\pi\le x\le 0 \\ \pi-x & \text{si} \quad 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

14.- Sea la sucesión de funciones (f_n), con $f_n(x)=\cos(2\pi\alpha x)\chi_{[-\frac{n}{\alpha},\frac{n}{\alpha}]}(x),\ n\in\mathbb{N}$. Dibuja la gráfica de $F[f_n]$ y después calcula el límite puntual de la sucesión de funciones.

15.- Sea $h(t)=\begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si} \quad t\ge 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t<0\end{cases}$ donde A y α son parámetros positivos.

Prueba que $F[h](\lambda)=\frac{A}{\alpha+i\lambda}$ (Filtro de Butterworth). **(*)** Diseña un circuito **RC** de modo que su función de transferencia sea precisamente $\frac{3}{4+i\lambda}$ (La segunda parte del ejercicico puede dejarse hasta haber visto E.D.O.).

16.- Prueba en cada caso que las funciones f y g son las mismas, aunque se escriban de forma distintas:

a) $f(x)=\operatorname{sen}(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ y $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{1-s^2}\operatorname{sen} sx\,ds$

b) $g(x)=\operatorname{sen}(x)\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$ y $g(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{s\cos(\frac{s\pi}{2})}{1-s^2}\operatorname{sen} sx\,ds.$

(*)17.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una señal, la cuál filtramos con un filtro ideal paso bajo $\chi_{[-\delta,\delta]}$ ¿Qué es la componente en frecuencia f_δ de f acotada en la banda $[-\delta,\delta]$ (**Indicación:** $f_\delta(t)=(f*g)(t)$ donde g es el filtro en el dominio del tiempo).

(*)18.- Sea $f(t)=e^{-t}\chi_{[0,\infty)}(t)$.
a) Comprueba que $f(at)*f(bt)=\frac{f(at)-f(bt)}{b-a}$, para $a,b\in(0,\infty)$.
b) Deduce que $f(at)*f(at)=tf(at)$.