Análisis Matemático I. Primer curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación.

HOJA 2

Tema 1: Los números complejos. Conjugación y módulo. Representación polar. Desigualdad triangular.

1.- Demuéstrese que $|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\,w|$, para $z,\ w \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

2.- Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, y que la igualdad se tiene si y sólo si $|x| = |y|$.

Ayuda: Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$ (con igualdad sólo si $a = b$).

3.- Encuentre la parte real y la parte imaginaria de los siguiente números.

(1) $\dfrac{1}{z}$, (2) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1+i}$, (3) $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$.

4.- Calcule los valores de

(1) $\sum_{k=1}^{2016} i^k$,

(2) $(1+i)^{14}$,

(3) $(1+i)^n + (1-i)^n$,

(4) $(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12})^{20}$,

(5) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}$.

5.- Compruebe la identidad $|1 + z\overline{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$, donde $z,\ w \in \mathbb{C}$.

6.- Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

(1) $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z| < 1\}$.

(2) $\{z \in \mathbb{C} : \quad 2 < |z| < 3, \quad \pi/4 < \arg z \leq 3\pi/2\}$.

(3) $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z - a| < |1 - a\overline{z}|\}$ con $a \in \mathbb{R}$, tal que $|a| < 1$.

7.- Demuestre las siguientes afirmaciones:

(1) Si $|z| = 1$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{-\overline{(a/b)}\}$ se cumple

$$|az + b|$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

8.- Demuestre que

$$\left(\frac{1 + i\,\tan\theta}{1 - i\,\tan\theta}\right)^n = \frac{1 + i\,\tan(n\theta)}{1 - i\,\tan(n\theta)},$$

para cualquier $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

9.- Demuestre las siguientes afirmaciones:

(1) Si $z \neq 1$ entonces

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(2) Si $\omega \neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = 0\,,$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

(3) $(*)$ Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\cos(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}},$$

y

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \ldots + \operatorname{sen} n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Ayuda: Use el apartado (1) con $z = e^{i\theta}$.

Comentario: $(*)$ ejercicio difícil

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.