

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Cuarto día de revisión

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICAS

Universidad Complutense de Madrid

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

*Supongamos que no
Aníbal*

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The 'C' is significantly larger and more decorative than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow rectangular box.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Resumen

El análisis de variable real es, junto con el álgebra, la herramienta básica con la que todo matemático comienza a formarse, y es por ello que desde el principio de su aprendizaje debe tener plena consciencia y dominio de las herramientas que ha de necesitar para otros campos de la matemática más complejos y abstractos.

Este manual contiene la transcripción de las clases de *Análisis de variable real*, impartidas por el catedrático de Matemática Aplicada D. Aníbal Rodríguez-Bernal durante el curso 2011-2012, a los alumnos de sendos dobles grados de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Esperamos que estas breves notas ayuden al estudiante en sus inicios, al desarrollar completas muchísimas de las demostraciones, y que con el tiempo el alumno adquiera la destreza necesaria para, por sí mismo, obtener resultados de las demostraciones que en ocasiones, por analogía, quedan incompletas. Se incluyen además más de 200 ejercicios con lo que el matemático *amateur* podrá no sólo ejercitar los contenidos aprendidos, sino también ampliar la teoría.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white, stylized wave or arrow shape pointing to the right, and a yellow shadow or underline beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis de variable real

David Peñas

Cuarto día de revisión

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map or a stylized 'C'. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Índice general

1. Conjuntos de números	7
1.1. Introducción. Estructura y orden del cuerpo	7
1.1.1. Operaciones. Adición y producto	7
1.1.2. Consecuencias de la estructura de un cuerpo	8
1.1.3. Propiedades de orden	8
1.2. Propiedades de los números reales	11
1.2.1. Desigualdades notables	11
1.2.2. Valor absoluto	12
1.3. Los números complejos	14
1.3.1. Producto de números complejos	14
1.3.2. Propiedades de los números complejos	15
1.4. Los números reales y la propiedad del supremo	16
1.4.1. Existencia de raíces de números reales	18
1.4.2. La propiedad arquimediana	18
1.4.3. Principio de intervalos encajados de Cantor	19
2. Conceptos métricos	23
2.1. El espacio \mathbb{R}^n	23
2.2. Espacios métricos	25
2.2.1. Elementos básicos de topología. Subconjuntos acotados	27
2.2.2. Elementos básicos de topología. Subconjuntos abiertos y cerrados.	30
2.2.3. Sucesiones convergentes en espacios métricos.	34
2.3. Espacios completos. Espacios compactos. Teorema de Heine-Borel	37
2.3.1. Espacios completos	37
2.3.2. Conjuntos compactos	38
2.3.3. Teorema de Heine-Borel	40
3. Sucesiones y series	41
3.1. Sucesiones	41
3.1.1. Convergencia. Propiedades de sucesiones.	41
3.1.2. Algunos ejemplos.	44
3.2. Series.	46
3.2.1. Convergencia. Propiedades	46
3.2.2. Criterios de convergencia	46
4. Funciones continuas	51
4.1. Funciones continuas	51
4.1.1. Límites de funciones	51



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

5.2.1.	Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Teorema de Darboux	63
5.2.2.	Aplicaciones de la derivada	65
5.2.3.	Reglas de l'Hôpital	67
5.3.	Teorema de Taylor	69
5.3.1.	Teorema y polinomios de Taylor	69
6.	Cálculo integral	73
6.1.	La integral de Riemann	73
6.1.1.	Particiones. Sumas de Riemann	73
6.1.2.	La integral de Riemann	74
6.2.	Cálculo de integrales. Teoremas destacados.	82
6.2.1.	Cálculo de integrales.	82
6.3.	Integrales impropias	85
6.3.1.	Integrales impropias. Convergencia integral absoluta	87
7.	Sucesiones y series de funciones	91
7.1.	Sucesiones de funciones	91
7.1.1.	Convergencia. Criterio de Cauchy	91
7.1.2.	Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de sucesiones de funciones	94
7.1.3.	Criterio de Dini	97
7.2.	Series de funciones	97
7.2.1.	Convergencia	97
7.2.2.	Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de series de funciones.	98
7.2.3.	Criterio M de Weierstrass	99
7.2.4.	Series de potencias	99
7.3.	Series de Fourier	103
7.3.1.	Funciones 2π -periódicas. Propiedades	103
7.3.2.	Lema de Riemann-Lebesgue y criterio de Dini	106



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Introducción

Comencemos introduciendo brevemente las notaciones y convenios que seguiremos a lo largo del desarrollo de estas notas.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map or a stylized 'C'. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Capítulo 1

Conjuntos de números

1.1. Introducción. Estructura y orden del cuerpo

Distinguiamos, en primer lugar, los siguientes conjuntos:

- Los números naturales, designados por \mathbb{N} . $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Los números enteros, designados por \mathbb{Z} . $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Los números racionales, designados por \mathbb{Q} . $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- Los números reales, designados por \mathbb{R} , en el que se incluyen todos los decimales.
- Los números complejos, designados por \mathbb{C} , que además incluye los imaginarios.

Luego es claro que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

1.1.1. Operaciones. Adición y producto

Definición 1. Propiedades de la adición sobre un conjunto.

1. Operación interna, esto es, todos los elementos de la suma son del mismo conjunto, al igual que el resultado.
Es decir que la suma $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$
2. Propiedad conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{K} \quad a + b = b + a$
3. Propiedad asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
4. Elemento neutro: $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
5. Elemento opuesto: $a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{K}$

De esta operación se obtiene su opuesta, la sustracción: $a + (-b) = c$. $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ y \mathbb{Z} poseen estas propiedades, luego forman por ello un grupo conmutativo. Los números naturales sólo cumplen las tres primeras.

Notación. Designamos por \mathbb{K} a un cuerpo arbitrario.

Definición 2. Propiedades del producto sobre un conjunto

1. Operación interna: $(\cdot) : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

1.1.2. Consecuencias de la estructura de un cuerpo

Sólo válidos para \mathbb{Q}, \mathbb{R} y \mathbb{C}

Proposición 1. *Consecuencia de la estructura de un cuerpo*

1. El elemento neutro de la adición y el producto es único.
2. Si $x + a = a \Rightarrow x = 0$
3. Si $x \cdot a = a, a \neq 0 \Rightarrow x = 1$
4. $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$
5. $-x = (-1)x$
6. La ecuación $x + a = b$, conocidos a, b , tiene una única solución. Si $a \neq 0$, entonces la ecuación $ax = b$ tiene una única solución.
7. Si $ab = ac \Rightarrow b = c$
8. Si $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$
9. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

Demostración.

1. Para el caso de la adición: Supongamos que hay dos elementos neutros para la adición. Sean e_n y e'_n esos elementos neutros. Entonces: $a = a + e_n = a + e'_n \Rightarrow e_n = e'_n$. Para el del producto es análogo.
2. $x + a + (-a) = a + (-a); x + (a - a) = 0; x = 0$
3. $x \cdot a \cdot 1/a = a \cdot 1/a; x(a \cdot 1/a) = 1 \Rightarrow x = 1$
4. $0 = 0 + 0; x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \rightarrow x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$, que sumando el opuesto a ambos lados: $(-x \cdot 0) + x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$
5. Sumamos el opuesto de $(-x)$ y sacamos factor común: $-x = (-1)x; -x + x = (-1)x + x \rightarrow 0 = x(-1 + 1) \Rightarrow 0 = x \cdot 0$. Como se cumple 4., 5. se cumple.
- 6.
7. $\frac{1}{a}ab = \frac{1}{a}ac \Rightarrow b = c$
8. Supongamos que $a = 0$, entonces todo perfecto. Ahora, su suponemos que $a \neq 0 \rightarrow \frac{1}{a}ab = 0 \Rightarrow b = 0$
9. Partimos de que $ab \frac{1}{ab} = 1; b \left(\frac{1}{ab}\right) = \frac{1}{a}; \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

□

1.1.3. Propiedades de orden

Existen un subconjunto $P \in \mathbb{R} \parallel P = \{p \in \mathbb{R}, p > 0\}$.

- Si $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$
- Si $a, b \in P \Rightarrow ab \in P$

$\{a \in P$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

1.1.3.1. Consecuencias de las propiedades de orden

Proposición 2. *Consecuencias del orden*

1. $a \geq a, a - a = 0 \in P \cup \{0\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
2. Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$
3. Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$
4. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$
5. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$
6. $1 > 0$
7. Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$
8. Si $a > b$, entonces $a + x > b + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
9. Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$
10. Si $a > b$ y $\begin{cases} c > 0 \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ ac < bc \end{cases}$
11. Si $a > 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab < 0$
12. Si $\begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a > 0 \\ 1/a < 0 \end{cases}$
13. Si $a > b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$
14. Si $0 \leq a < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$
15. Si $ab > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, & b > 0 \\ a < 0, & b < 0 \end{cases}, a \neq 0, b \neq 0$
16. Si $ab < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0, & b > 0 \\ a > 0, & b < 0 \end{cases}, a \neq 0, b \neq 0$
17. Si $a > b > 0$ y $a > c > 0 \Rightarrow ac > bd$
18. Si $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^2 < b^2 \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{cases}$
19. Si $\begin{cases} a > 1 \\ a < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a < 1 \\ 1/a > 1 \end{cases}$
20. Si $a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Si $a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > a^3 > \dots > a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Demostración.

1. Trivial
2. $a - b \in P \cup \{0\}$ y $b - c \in P \cup \{0\}$, $(a - b) + (b - c) \in P \cup \{0\}$, $a - c \in P \cup \{0\} \Rightarrow a \geq c$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

6. Por 5, $1 \cdot 1 > 0$
7. $1 > 0 \Rightarrow 2 > 1 > 0 \Rightarrow 3 > 2 > 1 > 0$
 Sea $S = \{k \in \mathbb{N} \mid k > 0\}$. Entonces $1 \in S$. Si $k \in S \Leftrightarrow k > 0 \Leftrightarrow k + 1 > 1 > 0 \Rightarrow k + 1 \in S$
8. Si $a - b > 0 \in P \Rightarrow (a + x) - (b + x) > 0 \in P \Rightarrow a + x > b + x$
9. Tenemos que $a - b > 0$ y $c - d > 0$, luego $a - b + c - d > 0 \Rightarrow (a + c) - (b + d) > 0 \Rightarrow a + c > b + d$
10. Si $a > b \Rightarrow a - b > 0$ y $c > 0 \Rightarrow c(a - b) > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc$
 Si $a > b \Rightarrow a - b > 0$ y $-c > 0 \Rightarrow -c(a - b) > 0 \Rightarrow -ac + bc > 0 \Rightarrow bc > ac$
11. Como $a > 0$ y $-b > 0 \Rightarrow a(-b) > 0 \Rightarrow ab < 0$, por 10.
12. Para $a > 0$, supongamos que $1/a < 0 \Rightarrow a \cdot 1/a = 1 < 0$, lo cual es absurdo. Luego si $a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$
 Para $a < 0$, supongamos que $1/a > 0 \Rightarrow -a \cdot 1/a = -1 > 0$, lo cual es absurdo. Luego si $a < 0 \Rightarrow 1/a < 0$
13. Como $a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$
 Por otro lado, como $a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$
 En particular, si $0 < b \Rightarrow 0 < b/2 < b$, lo cual quiere decir que no hay un menor número positivo.
14. Si $a > 0$, por ejemplo supongamos $0 \leq a/2 < a$, llamando $\varepsilon = a/2$, tenemos que $0 \leq \varepsilon < a$, lo cual contradice la hipótesis. Entonces, $a = 0$
- Consecuencia 1: Si $a < b + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$
 Consecuencia 2: Si $a - \varepsilon < b \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$
15. Si $a > 0 \Rightarrow 1/a > 0 \Rightarrow 1/a(ab) > 0 \cdot (ab) \Rightarrow b > 0$
 Si $a < 0 \Rightarrow 1/a < 0 \Rightarrow 1/a(ab) > 0 \cdot (ab) \Rightarrow b < 0$
16. Para $a < 0$, $1/a < 0 \Rightarrow 1/a(ab) > 0 \Rightarrow b > 0$
 Para $a > 0$, $1/a > 0 \Rightarrow 1/a(ab) < 0 \Rightarrow b < 0$
17. Como $\begin{matrix} a - b > 0 \\ c - d > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} c(a - b) > 0 \cdot c \Rightarrow ac - ab > 0 \\ b(c - d) > 0 \cdot b \Rightarrow bc - bd > 0 \end{cases}$, que al sumar, queda: $ac - bc + bc - bd > 0 \Rightarrow ac - bd > 0 \Rightarrow ac > bd$
18. Si $b^2 > a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow (b - a)(b + a) > 0$. Como, por hipótesis, tenemos que $b - a > 0$, entonces $b + a > 0$ también.
 Análogo para $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
19. $a > 1 > 0$, multiplicando por el inverso de a a ambos lados: $a \cdot 1/a > 1/a \Rightarrow 1 > 1/a$
 De la misma forma $0 < a < 1 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a - 1 < 0$, y al multiplicar por el inverso de a : $1/a(a - 1) < 0 \Rightarrow 1 - 1/a < 0 \Rightarrow 1 < 1/a$
20. Caso $a > 1$: $a > 1$, luego $a \cdot a > a \Rightarrow a^2 > a$. Entonces $a^2 \cdot a > a \cdot a \Rightarrow a^3 > a^2 \dots$
 Caso $a < 1$: $a < 1$, luego $a \cdot a < a \Rightarrow a^2 < a$. Entonces $a^2 \cdot a < a \cdot a \Rightarrow a^3 < a^2 \dots$

□

1.1.3.2. El principio de inducción

Definición 4. Buen orden

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración. Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Entonces:

Sea $A = \mathbb{N} \setminus S$, $A \neq \emptyset$

Por la propiedad de buen orden, $\exists m \in A \mid m \leq a \quad \forall a \in A$. Dicho m no puede ser 1, ya que $1 \in S$, y hemos construido A eliminando S de los números naturales. Luego: $1 \notin A \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow m > 1 \Rightarrow m - 1 < m \Rightarrow m - 1 \in S$, porque si m es el primer elemento de A , $m - 1$ no está en A , sino que está en S .

Inferimos ahora que el sucesor de $m - 1$ está en $S \Rightarrow (m - 1) + 1 \in S \Rightarrow m \in S$. La conclusión entra en contradicción con la hipótesis inicial.

Como m lo obtuvimos suponiendo que $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$, esto resulta ser falso, con lo cual $\mathbb{N} \setminus S = \emptyset \Rightarrow \mathbb{N} = S$. \square

Proposición 4. *Principio de inducción*

Sea $P(n)$ una propiedad que se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Si $P(1)$ es cierta, $P(k)$ es cierta si y sólo si $P(k + 1)$.

Demostración.

$$S = \{k \mid P(k) \text{ es cierta}\} \Rightarrow \begin{cases} 1 \in S \\ \text{Si } k \in S \Rightarrow k + 1 \in S \end{cases} \Rightarrow S = \mathbb{N} \quad \square$$

1.2. Propiedades de los números reales

1.2.1. Desigualdades notables

Proposición 5. *Ecuación de segundo grado.*

Si se tiene $ax^2 + bx + c = 0$, para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ buscamos $x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0$

1. Tomamos $ax^2 + bx + c = 0$ y dividimos entre a : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
2. Sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ a la igualdad y pasamos $\frac{c}{a}$ al otro lado: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
3. En el lado izquierdo de la igualdad lo que tenemos es la expresión extendida de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, por lo que la juntamos. Hemos “completado el cuadrado”: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
4. Reducimos a común denominador el lado derecho: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$.
5. Pasamos la raíz y despejamos x : $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

\square

Observación 1. Llamamos discriminante, Δ , a: $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta < 0$, entonces $\nexists x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0$
2. Si $\Delta \geq 0$, entonces, si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones en \mathbb{R} . Si $\Delta = 0$, la ecuación tienen una solución doble en \mathbb{R}

Proposición 6. *Desigualdad de segundo grado*

Si tenemos que $ax^2 + bx + c \geq 0$, para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Entonces:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Si $D > 0$, entonces. Sea $y = x + \frac{b}{2a}$ y $A = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$y \geq A \Rightarrow y^2 \geq A^2 \Rightarrow y^2 - A^2 \geq 0 \Rightarrow (y - A)(y + A) \geq 0 \begin{cases} y \geq A & \text{e } y \geq -A \Leftrightarrow y \geq A \\ y \leq A & \text{e } y \leq -A \Leftrightarrow y \leq -A \end{cases}$$

Proposición 7. La desigualdad de Cauchy

Sean a_1, \dots, a_n y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

Demostración. Sea $F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \dots + (a_n - tb_n)^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Si desarrollamos la función, queda como sigue:

$$F(t) = (a_1^2 + \dots + a_n^2) + t(b_1^2 + \dots + b_n^2) - 2t(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) \geq 0$$

Llamemos $A = (a_1^2 + \dots + a_n^2)$, $B = 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)$, $C = (b_1^2 + \dots + b_n^2)$, tenemos que $F(t) = At^2 - Bt + C \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Puesto que $F(t)$ es siempre positiva para todo t real, no puede tener dos raíces diferentes (como mucho tendrá una, o ninguna, ya que la parábola es siempre positiva o al menos corta al eje X en un punto), luego su discriminante $\Delta = (-B)^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$ debe cumplir que $B^2 \leq AC$, que es precisamente la desigualdad que tenemos enunciada arriba. \square

Observación 3. La igualdad se da unicamente si $B^2 = AC$, y en este caso $\exists! s \in \mathbb{R} \parallel As^2 - 2Bs + C = 0 \Leftrightarrow (a_i - sb_i)^2 = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow a_i = sb_i$, esto es, que a_i es múltiplo de b_i

Corolario 1. Propiedad triangular: desigualdad de Minkowski

Sean a_1, \dots, a_n y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

Demostración. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2 + 2a_ib_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_ib_i$.
Llamemos $A = \sum_{i=1}^n a_i$ y $B = \sum_{i=1}^n b_i$.

Aplicando la desigualdad de Cauchy, tenemos que $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_ib_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2$.

Entonces, tenemos que $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ \square

Observación 4. La igualdad se alcanza si, y sólo si $\exists s \in \mathbb{R} \parallel a_i = sb_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

1.2.2. Valor absoluto

Definición 5. Valor absoluto

Decimos que el valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$, $|a|$, es:

$$|a| = \max \{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Definición 6. Orden total



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3. $|ab| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
4. Sea $c \geq 0$. Entonces $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c \quad \forall a \in \mathbb{R}$
5. $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Demostración.

1. Si $a \neq 0 \Leftrightarrow -a \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq 0 \Rightarrow$ Si $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$
2. Si $a > 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow |a| = a = -(-a)$. Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow |a| = -a = |-a|$
3. Si a ó b son 0, es claro que $|ab| = |a| \cdot |b| = 0$. Si ambos son positivos, $a \cdot b > 0$, de donde $|ab| = |a| \cdot |b|$. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -ab = a(-b) = |a| \cdot |b|$. El caso $a < 0, b > 0$ es enteramente análogo.
4. Supongamos que $|a| \leq c$. Entonces $a \leq c$ y $-a \leq c$, de lo que se deduce que $-c \leq a \leq c$, por lo que se tiene que $a \leq c$ y $-a \leq c$ ¿por qué?, porque $|a| \leq c$
5. Procedamos de forma similar, partiendo ahora de que $c = a$. Supongamos que $a \leq a$. Entonces $a \leq a$ y $-a \leq a$. También se deduce que $-a \leq a \leq a$ /////////no me convence.

□

Proposición 9. *Desigualdad del triángulo.*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración. Por la propiedad 5 anterior, sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. Si sumamos miembro a miembro, tenemos:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Aplicando 4, tenemos que $|a + b| \leq |a| + |b|$. De forma general podemos aplicar la regla a la suma de n términos: $|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$ □

Corolario 2. *Más propiedades del valor absoluto.*

A partir de la propiedad triangular, es fácil deducir que:

1. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
2. $|a - b| \leq |a| + |b|$

Demostración.

1. Podemos escribir $a = a + b - b$ y aplicamos la propiedad triangular, entonces: $|a| = |(a + b) - b| \leq |a + b| + |b|$. Restamos $|b|$ a ambos lados y obtenemos:

$$|a| - |b| \leq |a + b| - |b| \leq |a|$$

De la misma forma obramos con $b : b = b - a + a$, que aplicando valor absoluto y la propiedad triangular queda como: $|b| \leq |b - a| + |a|$, y restando $|a|$:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

1.3. Los números complejos

Definición 7. Número complejo

Un número complejo describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra i). Son de la forma:

$$z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Definición 8. Espacio vectorial

Un conjunto \mathcal{A} es espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} si, y sólo si es cerrado para la **suma** y el **producto por escalares**, esto es:

1. Si $a, b \in \mathcal{A}$, entonces $a + b \in \mathcal{A}$
2. Si $a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda \cdot a \in \mathcal{A}$

Definición 9. Los números complejos tienen estructura de espacio vectorial.

1. Suma de complejos: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, esto es, es operación **interna**.
 - a) Propiedad conmutativa: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$
 - b) Propiedad asociativa: $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \quad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$
 - c) Elemento neutro: $(0, 0)$. $(a, b) + (0, 0) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{C}$
 - d) Elemento opuesto: Dado $(a, b) \in \mathbb{C} \quad \exists -(a, b) \parallel (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, esto es, es operación **externa**.
 - a) Propiedad asociativa: $\lambda(\mu(a, b)) = \lambda\mu(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{C}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - b) Elemento neutro: $1 \cdot (a, b) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{C}$
 - c) Propiedad distributiva: $(\lambda + \mu)(a, b) = \lambda(a, b) + \mu(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{C}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1.3.1. Producto de números complejos

Definición 10. Producto de números complejos.

Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$$

Proposición 10. Propiedades del producto de números complejos

1. Propiedad conmutativa: $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b) \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$
2. Propiedad asociativa: $[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] \quad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$
3. Elemento neutro: $(1, 0) \cdot (a, b) = (a - 0, b + 0) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{C}$
4. Elemento inverso: $\forall (a, b) \neq (0, 0) \quad \exists (a, b)^{-1} \parallel (a, b) \cdot (a, b)^{-1} = (1, 0)$
5. Propiedad distributiva: $(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \quad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$

Por tanto $\mathbb{C}(+, \cdot)$ es un espacio vectorial. Además (\mathbb{R}^2, \cdot) es grupo conmutativo.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

1.3.2. Propiedades de los números complejos

Definición 11. Módulo y argumento de un número complejo.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$

1. Entonces el **módulo** de z es:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación: Si $b = 0, z = a \in \mathbb{R}$, luego $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

2. Sea $\theta \in [0, 2\pi]$. Decimos que θ es el **argumento de** z , y verifica:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

3. Si $\theta \in \mathbb{R}$ (en radianes), entonces:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$$

Proposición 11. Más propiedades de los números complejos

- $|e^{i\theta}| = 1$
- Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, siendo θ es argumento, entonces:

$$z = |z| e^{i\theta} = |z| \cos(\theta) + |z| \operatorname{sen}(\theta)$$

- $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$
- Si $z, w \in \mathbb{C}$ con $z = |z| e^{i\alpha}$ y $w = |w| e^{i\beta}$, entonces:

$$zw = |z| \cdot |w| e^{i(\alpha+\beta)}$$

Demostración.

- $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow e^{i\theta}$ es vector unitario.
- El argumento verifica que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ y que $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|} \Leftrightarrow a = |z| \cos(\theta)$ y $b = |z| \operatorname{sen}(\theta) \Leftrightarrow z = a + bi = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = |z| e^{i\theta}$
- $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)) = [\cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)] + [i \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)] e^{i(\alpha+\beta)}$
- Claro a partir de 3).

Observación: Multiplicar un vector z por $w = |w| e^{i\theta}$ hace girar z un ángulo θ y multiplica los módulos.

□

Teorema 1. Teorema fundamental del álgebra

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Corolario 3. Raíces de un polinomio complejo.

Sea $P(z)$ un polinomio de orden n con coeficientes complejos.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad a_i, z \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

Entonces $P(z)$ tiene n raíces (contando las dobles, triples... m -ésimas, las veces que se repitan)

$$\text{Luego } \exists z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C} \text{ y } m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \text{ y } \sum_{i=1}^k m_i = n \text{ y } \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{m_i} = P(z)$$

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra, $P(z)$ tiene una raíz compleja, z_0 , de multiplicidad m $1 \leq m \leq n$. Luego $P(z) = (z - z_0)^m \cdot Q(z)$, y el grado de $Q(z)$ es $n - m$. Como también es un polinomio complejo, tiene otra raíz compleja, con lo cual $Q(z) = (z - z_1)^k R(z)$, con lo cual $P(z) = (z - z_0)^m (z - z_1)^k R(z)$, y $R(z)$ es otro polinomio complejo... Así sucesivamente, hasta que descomponemos $P(z)$ en $j \leq n$ raíces, y la suma de las multiplicidades es igual a n . \square

Definición 12.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b))$$

1. Si $b = 0 \Rightarrow e^{\alpha+0i} = e^\alpha$, luego $|e^z| = e^\alpha$
2. $e^{\alpha+bi} = e^{\alpha+(2\pi k)i} \quad k \in \mathbb{Z}$
3. Si $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, entonces $e^x \neq e^y$
4. El conjugado de $z, \bar{z} = a - bi$

1.3.2.1. Raíces de números complejos

Sea $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Buscamos entonces $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = w\}$.

Escribimos w en forma polar: $z^n = |z|^n e^{i\alpha n} = w = |w| e^{i\theta}$. Entonces, es claro que $|z|^n = |w|$. Además $e^{i\alpha n} = e^{i\theta} \Rightarrow \alpha n = \theta + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

Luego $\alpha_k = \frac{\theta+2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$, lo que implica n soluciones para α

¿Por qué? Cuando $k = n$, entonces $\alpha_n = \frac{\theta}{n} + 2\pi k$, el número complejo vuelve a repetirse, porque $\alpha_0 = \frac{\theta}{n}$, luego existen desde 0 hasta $n-1$ soluciones.

1.4. Los números reales y la propiedad del supremo

Definición 13. Cotas superiores e inferiores.

Sea $A \subset \mathbb{R}$

1. $M \in \mathbb{R}$ es cota superior de $A \Leftrightarrow a \leq M \quad \forall a \in A$
2. A se dice acotado superiormente si tiene cota superior.
3. $m \in \mathbb{R}$ es cota inferior de $A \Leftrightarrow m \leq a \quad \forall a \in A$
4. A se dice acotado inferiormente si tiene cota inferior.
5. A se dice acotado si tiene cota superior e inferior

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- a) s es cota inferior de A
- b) s es la menor de las cotas inferiores de A , esto es, siendo m otra cota inferior de A , $m \leq s$

Observación 7. Ni el supremo ni el ínfimo tienen por qué pertenecer al conjunto. Si así fuera, decimos que son máximo y mínimo del conjunto, respectivamente.

Hecho. *Propiedad del supremo*

Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, entonces $\exists \sup(A) \in \mathbb{R}$

Observación 8. Los números racionales no cumplen esta propiedad.

Consecuencias.

- El supremo de un conjunto es único.

Demostración. Supongamos $S_1, S_2 \parallel S_1 \neq S_2$, ambos supremos de A . Entonces, por tricotomía, $S_1 < S_2$ ó $S_1 > S_2$, lo cual contradice que uno de los dos sea supremo, porque no sería la mínima de las cotas superiores de A . Luego $S_1 = S_2$ □

- Si $A \neq \emptyset \Rightarrow S \in \mathbb{R}$ es el supremo de A si, y sólo si:

- S es cota superior de A
- Si $y \in \mathbb{R} \parallel y < S \Rightarrow \exists a \in A \parallel y < a \leq S$

Demostración. Primero el sólo si, luego el si.

\Rightarrow)

1. el primer punto es claro, por definición.
2. Sea $y \in \mathbb{R} \parallel y < S$. Supongamos que lo dicho no se cumple. Entonces $\forall a \in A \quad a \leq y \Leftrightarrow y$ es cota superior de A ya que $y < S$, y $S = \sup(A) \Rightarrow$ contradicción.

$(\Leftarrow$

Suponemos que ambas propiedades son ciertas. Entonces S es cota superior de A , pero hay que probar que es la menor de las cotas superiores, esto es, que es supremo.

Sea M cota superior de A , luego $S \leq M$. Supongamos que no, entonces $M < S$. Por la segunda afirmación se tendría que $\exists a \in A \parallel M < a \leq S \Rightarrow M$ no puede ser supremo de A □

- Podemos definir entonces el supremo de la siguiente forma: En $A \subset \mathbb{R} \parallel A \neq \emptyset$, $S = \sup(A)$ si, y solo si:

- S es cota superior de A
- Si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \parallel S - \varepsilon < a \leq S$

- Sean $E \subset F \subset \mathbb{R} \quad (E \neq \emptyset \Rightarrow F \neq \emptyset)$. Si F está acotado superiormente $\Rightarrow E$ también lo está y $\sup(E) \leq \sup(F)$

Demostración. Si M es cota superior de $F \Leftrightarrow x \leq M \quad \forall x \in F \Rightarrow M$ es cota superior de $E \Leftrightarrow x \leq M \quad \forall x \in E$. Como $\sup(F)$ es cota superior de F , y las cotas de F lo son también de E , entonces $\sup(E) \leq \sup(F)$ □

- De forma análoga, $\inf(F) \leq \inf(E)$.

Hecho. *Propiedad de ínfimo.*

Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente, entonces $\exists \inf(A) \in \mathbb{R}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



1.4.1. Existencia de raíces de números reales

Teorema 2. Existencia de raíces en los números reales.

Sea $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ fijo. Entonces

$$\exists! r > 0 \parallel r^n = a$$

y podremos decir que $r = \sqrt[n]{a}$

Demostración. Probemos primero la unicidad, luego la existencia.

1. **Unicidad.** Supongamos $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 = \sqrt[n]{a}$ y $r_2 = \sqrt[n]{a}$. Si $r_1 \neq r_2$ entonces, supongamos (spdg) que $r_1 < r_2 \Rightarrow (r_1)^n < (r_2)^n \Rightarrow a < a \Rightarrow$ contradicción. Luego sólo existe un r que verifica que $r^n = a$.
2. **Existencia.** Sea $A = \{x > 0 \parallel x^n \leq a\}$. Probemos que A es no vacío:


$$\frac{a}{a+1} < a \text{ y } \frac{a}{a+1} < 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^n < \frac{a}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{a+1} \in A$$

Ahora veamos que A está acotado superiormente.

- a) Si $a \leq 1 \Rightarrow M = 1$ es, claramente, cota superior de A . Si $\exists x \in A \parallel x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \geq a \Rightarrow$ contradicción, porque los elementos de A , al elevarlos a n son siempre menores estrictos que a .
- b) Si $a > 1$, entonces el propio a acota al conjunto A , luego $M = a$. Si $\exists x \in A \parallel x > a (> 1) \Rightarrow x^n > a \Rightarrow$ contradicción, ya que suponíamos que $x \in A$ y a es una cota superior de A , luego entonces x sería también cota superior de A , porque hemos dicho que $x > a$

Bien, hemos visto que ambos casos A está acotado superiormente, luego ha de existir un supremo para este conjunto.

Veamos que $r = \sqrt[n]{a}$

- a) Supongamos que $r^n \neq a$, sino que $r^n < a$. Sea $\varepsilon = a - r^n, r > 0$ y sea $h \parallel 0 < h < 1$. 

$$(r+h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j} = r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \leq r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j = r^n + h((1+r)^n - r^n) < a.$$

//////retocar: Despejamos la desigualdad y queda que $h < \frac{a-r^n}{(1+r)^n - r^n} < 1 \Rightarrow (r+h)^n \leq r^n + h < \frac{a-r^n}{(1+r)^n - r^n} < 1 \Rightarrow (r+h)^n \in A$, pero r es cota superior de A , luego $(r+h)^n$ no puede estar en A , entonces estamos ante una contradicción. Luego no es cierto que $r^n < a$.

- b) Supongamos ahora que $r^n > a$ y vuelva a ser $\varepsilon = r^n - a$ y $h \parallel 0 < h < 1$.

$$(r-h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} r^j h^{n-j} = r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-j} h^{n-j-1} \geq r^n - h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \geq r^n - h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j$$

Despejando de forma similar: $(r-h)^n \geq r^n - h[(1+r)^n - r^n]$. Escogemos $h \parallel h < \frac{r^n - a}{(1+r)^n - r^n}$ y así: $(r-h)^n \geq r^n - h[(1+r)^n - r^n] > a$, lo que me lleva a decir que $r-h$ es cota superior de A . Supongamos que $\exists x \in A \parallel r-h < x \Rightarrow (r-h)^n < x^n \leq a \Rightarrow$ contradicción. Luego no es cierto que $r^n > a$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración. Supongamos que no ocurre. Entonces se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x \geq n \Rightarrow x$ es cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow \exists S = \sup(\mathbb{N}) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \parallel S - 1 < m \leq S$.

¿Cómo sabemos eso? Bien, supongamos lo contrario. $m \leq S - 1 < S$, que contradice que S es la menor de las cotas superiores.

Si ahora sumamos 1: $S < m + 1 \in \mathbb{N}$ y así infinitamente, luego \mathbb{N} no tiene cotas superiores, no es un conjunto acotado. \square

Corolario 4. *Propiedades derivadas de la propiedad arquimediana.*

1. Si $x < 0$, entonces $\exists z \in \mathbb{Z} \parallel z < x$
2. Si $x, y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} \parallel y < nx$
3. Si $x > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} \parallel 0 < 1/n < x$
4. Si $x > 0$, entonces $\inf \{ \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N} \} = 0$
5. Si $x < 0$, entonces $\sup \{ \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N} \} = 0$
6. Si $x > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} \parallel n - 1 \leq x < n$
7. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists z \in \mathbb{Z} \parallel z - 1 \leq x < z$
8. Si $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, entonces $\exists z \in \mathbb{N} \parallel x(z - 1) \leq y < nx$

Demostración. Vayamos una por una:

1. Entonces $-x > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \parallel -x < m \Leftrightarrow -m < x$
2. Como $x, y > 0$, entonces $\frac{y}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{y}{x} < n \Rightarrow y < nx$
3. $0 < \frac{1}{x} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{x} < n \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x$
4. 0 es cota inferior de $A = \{ \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N} \}$, luego existe $I = \inf A$. Supongamos que $I > 0$. Si $I > 0$, entonces $I < \frac{x}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < \frac{x}{I} \Rightarrow$ contradicción, ya que estamos acotando los naturales. Luego $I = 0$.
5. 0 es cota superior de $B = \{ \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N} \}$, luego existe $S = \sup B$. Supongamos que $S < 0 \Rightarrow S \leq \frac{-x}{n} \Rightarrow n \leq \frac{-x}{S} \Rightarrow$ contradicción, ya que estamos acotando los naturales. Luego $S = 0$.
6. Fijemos $x < 0$. Sea $A = \{ m \in \mathbb{N} \parallel x < m \} \neq \emptyset$. Por el Buen Orden de los naturales, existe $n \in A \parallel n \leq m$, un primer elemento de A y además $n - 1 \leq x$. Si suponemos lo contrario tenemos que $x < n - 1 \Leftrightarrow n - 1 \in A$, lo que contradice que n es el primer elemento de A .
7. Como $x \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana $\exists z \in \mathbb{Z} \parallel x < z \Rightarrow z - 1 \leq x < z$.
8. Para $\frac{y}{x}$ tenemos $m, n \parallel \frac{y}{x} < n$. Sea $A = \{ m \in \mathbb{N} \parallel \frac{y}{x} < m \}$. Entonces existe un $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n' \leq m$. Aplicamos 5. y por la propiedad arquimediana $\frac{y}{x} < n \Rightarrow n - 1 \leq \frac{y}{x} < n \Leftrightarrow x(n - 1) \leq y < nx$

\square

1.4.3. Principio de intervalos encajados de Cantor

Definición 15. Intervalo.

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ y además $a < b$ llamamos intervalo:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Teorema 4. *Densidad de los números racionales en los reales.*

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces

$$\exists r \in \mathbb{Q} \mid r \in (a, b)$$

Demostración. Sea $h = b - a > 0 \Rightarrow \exists n \mid \frac{1}{n} < h$ (h es la longitud del intervalo). Tenemos que $a \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, luego por la propiedad arquimediana tenemos que:

$$\exists m \in \mathbb{Z} \mid m \leq an < m + 1$$

Luego

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + h = a + (b - a) = b$$

con lo cual

$$a < \frac{m+1}{n} < b \Leftrightarrow r = \frac{m+1}{n} \in (a, b)$$

□

Observación 9. De hecho, dados (a, b) hay infinitos números racionales en (a, b) . Dado (a, r) , entonces $\exists r_1 \in \mathbb{Q} \mid r_1 \in (a, r)$. Y así sucesivamente...

Corolario 5. *Densidad de los irracionales en los reales.*

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y además $a < b$, entonces

$$\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x \in (a, b)$$

Demostración. Aplicamos el teorema anterior a $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$ ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, luego $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) $\Rightarrow r \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < r \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < \sqrt{2}r < b \Leftrightarrow \sqrt{2}r \in (a, b)$ □

Definición 16. Familia de intervalos encajados.

Sea \mathcal{F} una familia de intervalos (finitos o infinitos) cerrados. Entonces se dice que \mathcal{F} es un sistema de intervalos encajados si, y sólo si

$$\forall I_1, I_2 \in \mathcal{F} \text{ cumplen que } I_1 \subset I_2 \text{ ó } I_2 \subset I_1$$

Teorema 5. *Principio de intervalos encajados de Cantor.*

Sea \mathcal{F} una familia de intervalos encajados, y sea $\xi = \sup \{a \mid [a, b] \in \mathcal{F}\}$ y $\eta = \inf \{b \mid [a, b] \in \mathcal{F}\}$.

Entonces $\xi \leq \eta$ y

$$[\xi, \eta] = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \quad \forall I \in \mathcal{F}\}$$

En \mathbb{Q} no es posible, únicamente se da en \mathbb{R} .

Demostración. Sea $A = \{a \mid [a, b] \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ y $B = \{b \mid [a, b] \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

A es acotado superiormente porque fijado $b_0 \in B \mid [a_0, b_0] \in \mathcal{F}$, tenemos que $\forall a \in A \quad a \leq b_0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$[\xi, \eta] = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \quad \forall I \in \mathcal{F}\}$$

□

Proposición 12. *La intersección de una familia de intervalos encajados es un punto.*

Sea \mathcal{F} un sistema de intervalos cerrados encajados, entonces

$$\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \quad \forall I \in \mathcal{F}\}$$

es un único punto si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \in \mathcal{F} \mid l(I) < \varepsilon$$

siendo $l(I)$ la longitud del intervalo. Es decir, la intersección es un punto si puedo crear intervalo dentro de la familia tan pequeños como queramos.

Demostración. Veamos la implicación en ambos sentidos, primero el sólo si:

\Rightarrow |

Si $\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = [\xi, \eta]$ es un único punto $\Leftrightarrow \xi = \eta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \in \mathcal{F} \mid \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \xi$. Como $\eta = \inf B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I' \in \mathcal{F} \mid \eta \leq b' < \eta + \frac{\varepsilon}{2}$.

Dado $\varepsilon > 0$, entonces al ser \mathcal{F} una familia de intervalos cerrados encajados, entonces $I \subset I'$ ó $I' \subset I$. Como $\xi = \eta$, tenemos que $\begin{cases} \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \xi \\ \xi \leq b < \xi + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

$$\text{Si } I \subset I' \Leftrightarrow a' \leq \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq b < \xi + \frac{\varepsilon}{2} \leq b' \Rightarrow b - a < (\xi + \frac{\varepsilon}{2}) - (\xi - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$

$$\text{Si } I' \subset I \Leftrightarrow a \leq \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a' \leq b' < \xi + \frac{\varepsilon}{2} \leq b \Rightarrow b' - a' < (\xi + \frac{\varepsilon}{2}) - (\xi - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Capítulo 2

Conceptos métricos

2.1. El espacio \mathbb{R}^n

Definición 17. El espacio \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n \text{ veces}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i \in [1, n]\}$$

- Espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Grupo conmutativo:

- Conmutativa: $(x + y) = (y + x) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- Elemento neutro: $0 = \overbrace{(0, 0, 0, 0, \dots, 0)}^n$ $x + 0 = x \forall x \in \mathbb{R}$
- Elemento opuesto: Dado $x \in \mathbb{R}^n \exists -x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \parallel x + (-x) = 0$

- Operación externa

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $(\delta, x) \mapsto \delta \times x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$
 - Asociativa: $(\delta, \mu)x = \delta(\mu x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \delta, \mu \in \mathbb{R}$
 - Elemento neutro: $1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

- Propiedades distributivas:

- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Definición producto escalar:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración. $\langle x + y, z \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \langle \lambda x, z \rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)z_i = \sum_{i=1}^n \lambda(x_i z_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i z_i = \lambda \langle x, z \rangle$ □

- iii) *Definido positivo:* $\langle x, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad y \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$

Demostración. $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$0 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \iff \forall i = 1, \dots, n \quad x_i^2 = 0 \iff x_i = 0$

□

Definición 18. Norma euclídea

Si $x \in \mathbb{R}^n$ se llama “norma” euclídea de x -a:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Proposición 14. Desigualdades del producto escalar

- i) *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.* Si $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Demostración. $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \implies \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$ □

- ii) *Desigualdad de Minkowski.* $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\|x + y\|_2 = \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} = \sqrt{\langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle} =$
 $\sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y \rangle}$
 $\leq \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2} = \sqrt{(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2} = \|x\|_2 + \|y\|_2 \implies \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

Definición 19. Ángulos y producto escalar

- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ x e y son “ortogonales” $\iff \langle x, y \rangle = 0$ ($x \perp y$)
- Si $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ el ángulo entre x e y es $\alpha \in \mathbb{R}$ $\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

Observación. Por la desigualdad de Cauchy: $|\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}| \leq 1 \quad -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2} \leq 1$ ($\cos \alpha$)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Proposición 15.

- i) $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$

Demostración. $d_2(x, y) = 0 \iff \|x - y\|_2 = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ □

- ii) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$

Demostración. $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = \|y - x\|_2 = d_2(y, x)$ □

- iii) *Propiedad triangular:* Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \|(x - z) + (z - y)\|_2 \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \|x - z\|_2 + \|z - y\|_2 = d_2(x, z) + d_2(z, y)$ □

2.2. Espacios métricos

Definición 20. Distancia o métrica

Sea M un conjunto, una *distancia ó métrica* en M es una función que coge parejas de elementos de M y devuelve un número mayor o igual que cero

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

que verifica:

- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- **Propiedad triangular:**

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$$

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \|(x - z) + (z - y)\|_2 \leq \|x - z\|_2 + \|z - y\|_2 = d_2(x, z) + d_2(z, y)$$

Definición 21. Espacio métrico

Se llama *espacio métrico* a un par (M, d) donde M es un conjunto y d una métrica en M .

Ejemplo 1.


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Definición 22. Norma infinito

En \mathbb{R}^n , se llama *norma infinito* al máximo de un conjunto de elementos finito.

$$\|x\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

y definimos $d_{\infty}(x, y) = \|x - y\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$ es una métrica, ya que cumple a), b), c). Veamos que ocurre con la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} \text{Demostración. } x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad d_{\infty}(x, y) &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \\ &\max_{i=1,\dots,n} |x_i - z_i| + \max_{i=1,\dots,n} |z_i - y_i| \quad \square \\ &\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{d_{\infty}(x,z)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{d_{\infty}(z,y)} \end{aligned}$$

Definición 23. Norma 1

En \mathbb{R}^n , se llama *norma 1* a

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

y

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Cumple a), b), c). Veamos que ocurre con la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} \text{Demostración. } d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i + z_i - z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \\ &d_1(x, z) + d_1(z, y) \quad \square \end{aligned}$$

Definición 24. Distancia entre funciones. Norma infinito

Fijamos un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

Sea $V = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C \mid |f(t)| \leq C \forall t \in [a, b]\}$

Definimos *norma infinito*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \quad \forall f \in V$$

y

$$d_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| \quad \forall f, g \in V$$

Demostración. Es una métrica porque cumple a), b), c). Veamos que ocurre con la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} d_{\infty}(f, g) &= \|f - g\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} (|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|) \leq \\ &\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - h(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| = d_{\infty}(f, h) + d_{\infty}(h, g) \quad \square \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades

a)

b) $d_1(f, g) = 0 \Leftrightarrow |f(t) - g(t)| = 0 \Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad \forall t \in [a, b]$

c) $d_1(f, g) = d_1(g, f) \quad \forall f, g \in V$

d) Propiedad triangular:

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt = \int_a^b |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| dt \leq \int_a^b (|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|) dt = \int_a^b |f(t) + h(t)| dt + \int_a^b |h(t) - g(t)| dt = d_1(f, h) + d_1(h, g)$$

Observación.

En \mathbb{C} $(a, b) = a + bi = z$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\|_2$

$$d(z, w) = |z - w| = d_2((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

2.2.1. Elementos básicos de topología. Subconjuntos acotados**Definición.** Sea (M, d) un espacio métrico, llamamos:**i) Bola Abierta**Si $x_0 \in M$ y $r > 0$ llamamos *bola abierta* centrada en x_0 y radio r a:

$$B(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x_0, x) < r\}$$

ii) Bola CerradaSi $x_0 \in M$ y $r > 0$ llamamos *bola cerrada* centrada en x_0 y de radio r a:

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x_0, x) \leq r\}$$

iii) EsferaSi $x_0 \in M$ y $r > 0$ llamamos *esfera* de centro x_0 y radio r a:

$$S(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x_0, x) = r\}$$

Ejemplo 3.En \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Ejemplo 4.En \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

Ejemplo 5.En \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Caso 2. con $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1..n} |x_i - y_i|$, $x_0 = 0$, $r = 1$

$$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(0, x) = \sup_{i=1..n} |x_i| < 1\}$$

Caso 3. con d_1 , $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $x_0 = 0$

$$B(0, 1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid d_1(x, 0) = \sum_{i=1}^n |x_i| < 1\right\}$$

Definición. Conjunto acotado

Sea (M, d) un espacio métrico, y sea $A \subset M$, $A \neq \emptyset$

Decimos que A es un *conjunto acotado*, si y sólo si el supremo de las distancias de x e y en A existe:

$$\exists \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

y en el caso de que sea acotado llamamos *diámetro* de A al supremo de las distancias entre dos puntos cualesquiera.

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Observación 10. Sea (M, d) un espacio métrico:

Una bola cerrada, $\bar{B}(x_0, r)$ es acotada.

Demostración.

Sea $\bar{B} = \{x \in M \mid d(x, x_0) \leq r\}$

Sean $x, y \in \bar{B}(x_0, r)$

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq r + r = 2r$$

La bola abierta es subconjunto de la bola cerrada, luego por la observación 2 (la siguiente), también las bolas abiertas son acotadas □

Observación 11. Todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado.

Demostración.

Supongamos que $A \subset M$ es acotado y sea $B \subset A$

Veamos que B es acotado:

$$\{d(x, y), x, y \in B\} \subset \underbrace{\{d(x, y), x, y \in A\}}_{\text{es cota superior}}$$

Una cota superior de D_2 es también cota superior de D_1 , luego D_2 tiene cotas superiores por hipótesis, por lo que D_1 también las tiene al estar contenido en $D_2 \Rightarrow D_1$ es acotado □

Observación 12. En un espacio métrico, A es acotado **si y solamente si** A se puede meter en una bola.

A es acotado $\iff A$ se puede meter en una bola

Demostración.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$A \subset \mathbb{R} \text{ es acotado} \iff \exists C > 0 \parallel |a| \leq C \quad \forall a \in A$$

Demostración. Sale de la demostración de la proposición 5, con $n = 1$ (espacio real usual) $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$

$$A \subset \mathbb{R} \text{ es acotado} \iff \exists \sup \{|y|, y \in A\} \iff \exists C > 0 \parallel |y| \leq C \quad \forall y \in A$$

□

Demostración. Demostración del segundo si y sólo si

\Rightarrow) Si $\exists C > 0 \parallel |a| \leq C \quad \forall a \in A$ C es cota superior de A y $-C$ es cota inferior de A

$$-C \leq a \leq C$$

(\Leftarrow) A tiene una cota superior M y una cota inferior m

$$\text{Sea } C = \max\{|M| + 1, |m| + 1\} > 0$$

$\forall a \in A$

$$-C \leq -|m| - 1 \leq -|m| \leq m \leq a \leq M \leq |M| \leq |M| + 1 \leq C$$

□

Proposición 17. Acotación de subconjuntos de \mathbb{R}^n

Si en \mathbb{R}^n consideramos una métrica d ,

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ es acotado} \iff \exists \sup \{d(0, y), y \in A\}$$

Demostración.

\Rightarrow) Si A es acotado, sea $x_0 \in A$ un punto fijo, entonces $\forall y \in A$

$$d(0, y) \leq d(y, x_0) + d(x_0, 0) \leq \text{diam}(A) + d(x_0, 0)$$

(\Leftarrow) La hipótesis es equivalente a que $A \subset \bar{B}(0, R)$, siendo $R = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$

□

Proposición 18. $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado para d_1, d_2, d_∞ si y sólo si sus proyecciones son un conjunto acotado. Es decir si

$$P_i(A) = \{x_i \parallel \exists x = (\dots, x_i, \dots) \in A\} \subset \mathbb{R} \quad i = 1 \dots n$$

son acotadas.

Demostración.

\Rightarrow) Sea $x \in A$ y sea $i = 1, \dots, n$ (fijo)

(Con d_1)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Como A es acotado (para d_2) $\Rightarrow \exists \sup \{d_2(x, 0), x \in A\} = R_2$ y así $|x_i| \leq R_2 \quad \forall x \in A$

(Con d_∞)

$$|x_i| \leq \|x\|_\infty = \max \{|x_j|, j = 1 \dots n\} = d_{\infty(x,0)}$$

Como A es acotado (para d_∞) $\Rightarrow \exists R_\infty = \sup \{d_\infty(x, 0), x \in A\}$ y así $|x_i| \leq R_\infty \quad \forall x \in A$

Demostración. $\Leftarrow \forall i = 1 \dots n \quad \exists C > 0 \parallel |x_i| \leq C_i \quad \forall x \in A$

(Con d_1)

$$\|x\|_1 = d_1(x, 0) = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n C_j = R_1 \Rightarrow A \text{ es acotado para } d_1$$

(Con d_2)

$$\|x\|_2 = d_2(x, 0) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n C_j^2} = R_2 \Rightarrow A \text{ es acotado para } d_2$$

(Con d_∞)

$$\|x\|_\infty = d_\infty(x, 0) = \max \{|x_j|, j = 1 \dots n\} \leq \max \{C_j, j = 1 \dots n\} = R_\infty \Rightarrow A \text{ es acotado para } d_\infty$$

□

□

Observación. La afirmación inicial de la derecha (*en negrita*) es independiente de d_1, d_2, d_∞ y por tanto las métricas d_1, d_2, d_∞ tienen los mismos conjuntos acotados.

2.2.2. Elementos básicos de topología. Subconjuntos abiertos y cerrados.

Definición 25. Puntos interiores. Puntos frontera

Sea (M, d) espacio métrico y $A \subset M$,

1. Un punto $x_0 \in A$ es **interior** a $A \iff \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset A$
2. $x_0 \in M$ es **punto frontera** de $A \iff \forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$
3. El conjunto de puntos interiores de A se representa por $\overset{\circ}{A}$
4. El conjunto de los puntos frontera de A se representa por $\partial(A)$
($A^c = M \setminus A$)

Definición 26. Conjuntos abiertos y cerrados

Sea (M, d) un espacio métrico, y $A \subset M$

A es **abierto** si $A = \overset{\circ}{A}$ y **cerrado** si $A = \overline{A}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Proposición 19. *La unión de abiertos es abierta*

Sea (M, d) un espacio métrico y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos de M ($I =$ conjunto de índices)

Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in M \mid \exists i \in I \mid x \in A_i\}$ es abierto.

Demostración.

Sea $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \mid x_0 \in A_{i_0}$

Como A_{i_0} es abierto $\exists r > 0 \mid B(x_0, r) \subset A_{i_0} \Rightarrow B(x_0, r) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

□

Proposición 20. *La intersección finita de abiertos es abierta*

Sea (M, d) un espacio métrico y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos de M ($I =$ conjunto de índices)

Si I es finito, $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in M \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$ es un abierto.

Demostración.

Sea $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow \forall i \in I \quad x_0 \in A_i$

Como A_i es abierto $\Rightarrow \exists r_i > 0 \mid B(x_0, r_i) \subset A_i$

Sea $r = \min \{r_i, i \in I\} > 0$
 I es finito

Veamos que $B(x_0, r) \subset A_i \mid A_i \in I \left(\Leftrightarrow B(x_0, r) \subset \bigcap_{i \in I} A_i \right)$ ya que $B(x_0, r) \subset B(x_0, r_i) \subset A_i$

□

Observación. Para demostrar que la intersección es abierta se hace necesaria la condición de que el número de conjuntos sea finito, ya que si no lo fuera no puede asegurarse que el radio mínimo que se coge sea estrictamente mayor que 0. Tiene que ver con que el ínfimo de un conjunto está contenido en el conjunto si el conjunto es finito.

Proposición 21. *La intersección de cerrados es cerrada*

Sea (M, d) espacio métrico y $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces el conjunto

$\bigcap_{i \in I} C_i = \{x \in M \mid x \in C_i \quad \forall i \in I\}$ es cerrado

Demostración.

Veamos que $\left(\bigcap_{i \in I} C_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} C_i^c$

$x \in \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right)^c \Leftrightarrow \exists i \in I \mid x \notin C_i \Rightarrow \exists i \in I \mid x \in C_i^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} C_i^c$

Ahora C_i^c es abierto $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} C_i^c$ es abierto $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ es cerrado

□

Proposición 22. *La unión finita de cerrados es cerrada.*

Sea (M, d) espacio métrico y $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces si I es finito $\bigcup_{i \in I} C_i$ es un conjunto cerrado.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración.

Sea $y \in B(x_0, r) \Leftrightarrow d(x_0, y) < r$

Sea $R = r - d(x_0, y)$ y veamos que $B(y, R) \subset B(x_0, r)$

Sea $z \in B(y, R) \parallel d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < d(x_0, y) + R = d(x_0, y) + r - d(x_0, y) = r$ \square

Proposición 24. Las bolas cerradas son cerradas.

Sea (M, d) espacio métrico y tomamos un punto $x_0 \in M$ y $r > 0$, entonces $\bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado

Demostración.

Veamos $(\bar{B}(x_0, r))^c$ es abierto

Sea $y \in (\bar{B}(x_0, r))^c$ y sea $R = d(x_0, y) - r$

Sea $z \in B(y, R) \rightarrow d(x_0, z) > r?$

$(d_0, y) \leq d(x_0, z) + d(z, y) \Rightarrow d(x_0, z) \geq d(x_0, y) - d(z, y) > d(x_0, y) - R = r \Rightarrow d(x_0, z) > R$ \square

Ejemplo 6.

Sea $A_n = (0, 1 + \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} \parallel 0 < x < 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n\} = (0, 1]$ es cerrado

$\forall r > 0 \quad B(1, r) = (1 - r, 1 + r)$

$(1 - r, 1 + r) \cap (0, 1] \neq \emptyset$

$(1 - r, 1 + r) \cap (0, 1]^c \neq \emptyset$

Ejemplo 7. Ejemplo de que la unión infinita de intervalos cerrados no tiene por que ser cerrado

Sea $C_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ cerrado

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \{x \in \mathbb{R} \parallel \exists n \in \mathbb{N} \parallel 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\}$

" \subset " $[0, 1)$

" \supset " Si $x \in [0, 1)$ es decir $(0 \leq x < 1) \exists n \in \mathbb{N} \parallel x < 1 - \frac{1}{n}$

Si no, $x \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n$

$x - 1 \geq -\frac{1}{n} \quad \forall n$

$x - 1 \geq \text{Sup} \{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \} = 0$

$x \geq 1$ **Absurdo!**

Por tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = [0, 1)$ no es cerrado, ya que su complementario $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ no es abierto

Teorema 7. En \mathbb{R} todo abierto es unión finita o numerable de intervalos abierto, disjuntos dos a dos.

Demostración.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ abierto y $x \in A$

Sea $S = \{y \in \mathbb{R} \parallel x < y, \quad y \notin A\}$,

Si $S = \emptyset \Rightarrow [x, \infty) \subset A \Rightarrow \eta = \infty$

Si $S \neq \emptyset \Rightarrow x$ es cota inferior $\Rightarrow \exists \eta = \inf(S)$

Sea $T = \{z \in \mathbb{R} \parallel z < x \parallel z \notin A\}$

Si $T = \emptyset \Rightarrow (-\infty, x] \subset A \Rightarrow \xi = -\infty$

Si $T \neq \emptyset \Rightarrow x$ es cota superior $\Rightarrow \exists \xi = \sup(T)$

Entonces $x \in (\xi, \eta) \subset A \Rightarrow \eta \geq x \geq \xi$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\exists h \in I \subset A \parallel h \notin (\xi, \eta) \Rightarrow h > \eta > x \Rightarrow \eta \in I \subset A$ **Absurdo!!**

Resumen: dado $x \in A \subset \mathbb{R}$ (abierto) \Rightarrow Existe el intervalo “más grande” dentro de A , que contiene a x , intervalo que llamamos **componente conexa de A**

□

Definición 27. Componente conexa

Llamamos componente conexa de A al intervalo “más grande” dentro de A y que contiene a x

Veamos ahora que dos componentes conexas de A son disjuntas:

Si (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) son dos componentes de A , veamos $(\xi_1, \eta_1) \cap (\xi_2, \eta_2) = \emptyset$

Supongamos que $(\xi_1, \eta_1) \cap (\xi_2, \eta_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \parallel \xi_1 < x < \eta_1, \xi_2 < x < \eta_2 \Rightarrow \max\{\xi_1, \xi_2\} < \min\{\eta_1, \eta_2\}$
 $(\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\eta_1, \eta_2\}) \subset (\xi_1, \eta_1) \cup (\xi_2, \eta_2) \subset A$ **Absurdo!!!**

Queda así demostrado que todo abierto es unión de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos (unión de componentes), y veamos ahora que la unión es finita o numerable:

Si (ξ, η) es una componente de A , es decir $((\xi, \eta) \subset A, \xi, \eta \notin A)$

Sea $r \in \mathbb{Q} \parallel r \in (\xi, \eta)$

Asignamos un número racional a cada componente de A

$\{\text{Componentes de } A\} \rightarrow \mathbb{Q}$

$(\xi, \eta) \rightarrow r$

Al ser esa correspondencia inyectiva, ya que seguro que a dos componentes distintas le asignaremos dos números racionales distintos, por ser las componentes disjuntas. Y con esto queda demostrado que la unión es finita o numerable ya que \mathbb{Q} es numerable, es decir $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ biyectiva.

Definición 28. Punto de adherencia, de acumulación y aislado

Sea (M, d) espacio métrico y sea $A \subset M$, entonces $x_0 \in M$

- Es un **punto de adherencia** de $A \iff \forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$
El conjunto de todos los puntos de adherencia de A , se escribe \bar{A} (Adherencia de A , o cierre de A)
- Es un **punto de acumulación** de $A \iff \forall r > 0 \quad (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$
El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se escribe A'
- Es un **punto aislado** de $A \iff \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$
El conjunto de los puntos aislados de A se escribe $A_{is}(A)$

Proposición. $A \subset \bar{A}$

Demostración. Si $x_0 \in A \Rightarrow \forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \supset \{x_0\}$

□

Proposición. $A' \subset \bar{A}$

Demostración. Si $x_0 \in A' \Rightarrow \forall r > 0 \quad (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \bar{A}$

□

Proposición. $\bar{A} = A' \cup A_{is}(A)$

Demostración.

” \subset ”, Si $x \in \bar{A}$, y si $x \notin A'$ veamos que $x \in A_{is}(A)$

Como $x \notin A' \iff \exists r_0 > 0 \parallel (B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow x_0 \in A$ y $\exists r_0 > 0 \parallel B(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$

” \supset ”, Sabemos $A' \subset \bar{A}$ y $A_{is}(A) \subset A \subset \bar{A}$

$A' \cup A_{is}(A) \subset \bar{A}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Proposición 25. $\overset{\circ}{A}$ es el abierto más grande contenido en A

Demostración.

$\overset{\circ}{A}$ es abierto: si $x_0 \in \overset{\circ}{A} \rightarrow \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset A$

Afirmo: $B(x_0, r) \subset \overset{\circ}{A}$ por tanto todos los puntos de dicha bola son puntos interiores de A

Si $y \in B(x_0, r)$ sabemos $\exists R > 0 \parallel B(y, R) \subset B(x_0, r) \subset A \Rightarrow y \in \overset{\circ}{A}$

Veamos que es el más grande:

Supongamos que no, supongamos G es abierto $\parallel \overset{\circ}{A} \subset G \subset A$

y supongamos $x \in G \setminus \overset{\circ}{A}$ entonces como G es abierto $\exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset G \subset A \Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{A}$

□

Proposición 26. \bar{A} es el cerrado más pequeño que contiene a A

Demostración.

\bar{A} es cerrado: Veamos que $(\bar{A})^c$ es abierto.

Si $x_0 \in (\bar{A})^c \Leftrightarrow \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B(x_0, r) \subset (A)^c$

De hecho $B(x_0, r) \subset (\bar{A})^c$, si no: $\exists y \in \bar{A} \parallel y \in B(x_0, r) \Rightarrow \exists R > 0 \parallel B(y, R) \subset B(x_0, r), B(y, R) \subset B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ **Absurdo!!**

Si C es un cerrado $\parallel C \supset A$, veamos que $A \subset \bar{A} \subset C$,

en caso contrario $\bar{A} \not\subset C \Leftrightarrow \exists x_0 \in \bar{A} \parallel x_0 \notin C \Leftrightarrow x_0 \in C^c$ (abierto) $\Rightarrow \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset C^c \Rightarrow B(x_0, r) \cap A = \emptyset$ **Absurdo!!**

□

Proposición 27. $\bar{A} = \{y \in M \parallel \inf\{d(y, a), a \in A\} = 0\}$

Demostración.

" \subset " Tenemos que $y \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 \parallel B(y, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \parallel d(y, a) < r \Leftrightarrow \inf\{d(y, a)\} = 0$

" \supset " Sea $a \in A \Rightarrow \inf\{d(y, a)\} = 0 \Leftrightarrow \forall r > 0 \exists a \in A \parallel d(y, a) < r \Leftrightarrow \forall r > 0 \parallel B(y, r) \cap A \neq \emptyset$

□

Proposición 28. A es acotado $\Leftrightarrow \bar{A}$ es acotado

Demostración.

\Rightarrow) Sean $x, y \in \bar{A}$, $\exists p, q \in A \parallel d(x, p) < \varepsilon$ y $d(y, q) < \varepsilon \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, q) + d(q, y) \leq 2\varepsilon + d(p, q) \leq 2\varepsilon + \text{diam } A$

(\Leftarrow Trivial, ya que $A \subset \bar{A}$)

□

Proposición 29. A es cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que $A \subsetneq \bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial(A)$. Como $\overset{\circ}{A} \subset A \Rightarrow \exists x_0 \in \partial(A) \setminus A \Rightarrow x_0 \in A^c$, A^c abierto $\Rightarrow \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset A^c$ lo cual contradice que $x_0 \in \partial(A)$

(\Leftarrow Si $A = \bar{A}$ sea $x_0 \in A^c \Rightarrow x_0 \notin \partial(A) \Rightarrow \exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset A^c \Rightarrow$ absurdo. Luego $\exists r > 0 \parallel B(x_0, r) \subset A^c$ por tanto A^c es abierto $\Rightarrow A$ es cerrado)

□

2.2.3. Sucesiones convergentes en espacios métricos.

Definición. Sucesión

Sea (M, d) espacio métrico. Una sucesión en (M, d) es un conjunto etiquetado con los números naturales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \parallel x_n \in M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definición. Sucesión convergente a cero

En \mathbb{R} una sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \parallel \forall n > n_0 \parallel |r_n| < \varepsilon \Leftrightarrow r_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Demostración.

Supongamos que no, supongamos $x_1, x_2 \in M \parallel x_1 \neq x_2$ verifican que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_1$ y $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_2$

Sea $\varepsilon < \frac{d(x_1, x_2)}{2} \Rightarrow B(x_1, \varepsilon) \cap B(x_2, \varepsilon) = \emptyset$

y dado este $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^1 \parallel \forall n \geq n_0^1 \quad x_n \in B(x_1, \varepsilon)$

$\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^2 \parallel \forall n \geq n_0^2 \quad x_n \in B(x_2, \varepsilon)$ **Absurdo!!**

□

Proposición 31. *Toda sucesión convergente es acotada*

Demostración.

Si $\{x_n\}$ es convergente a $x_0 \in M$, tomando $\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x_0, 1)$

Sea $R = \max\{d(x_j, x_0) \mid j = 1, \dots, n_0 - 1\} + 1$,

claramente $\{x_n\} \subset B(x_0, R)$

□

Proposición 32. *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$*

Demostración.

$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| = |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_0) + d(x_n, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_0)| + |d(x_n, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq d(y_n, y_0) + d(x_n, x_0)$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^1 \in \mathbb{N} \parallel \forall n \geq n_0^1 \quad d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\exists n_0^2 \in \mathbb{N} \parallel \forall n \geq n_0^2 \quad d(y_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leq d(y_n, y_0) + d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

□

Proposición. *En \mathbb{R} para d_1, d_2, d_∞ , se tiene que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \ (\in \mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots N \ (x_n)_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (x_0)_i$ (en \mathbb{R})*

Es decir, que el límite de una sucesión de vectores de N componentes tiende a un vector límite cuando cada componente de los vectores de la sucesión tiende a la correspondiente componente del vector límite.

Demostración.

" \Rightarrow " Para d_1, d_2, d_∞ y $\forall i = 1 \dots N$ se tiene que $|(x_n)_i - x_i| \leq d(x_n, x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N |(x_n)_j - x_j| & \text{para } d_1 \\ \left(\sum_{j=1}^N |(x_n)_j - x_j|^2 \right)^{1/2} & \text{para } d_2 \\ \text{Max}_{j=1 \dots N} |(x_n)_j - x_j| & \text{para } d_\infty \end{cases}$

Como $d(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \forall i = 1 \dots N \quad |(x_n)_i - x_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

" \Leftarrow "

$d_1(x_n, x) = \sum_{i=1}^N |(x_n)_i - x_i|$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Observación. La propiedad antes mencionada que nos dice que para que un vector converja en otro, cada una de sus coordenadas tiene que converger a cada coordenada correspondiente no depende de la métrica (d_1, d_2, d_∞) Por tanto (d_1, d_2, d_∞) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Proposición 33. Para todo punto de adherencia existe una sucesión que converge a él

Sea (M, d) espacio métrico y sea $A \subset M$
 $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \parallel x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$

Demostración.

" \Rightarrow " Sea $\forall n \in \mathbb{N}$ $B(x_0, \frac{1}{n})$ y sea $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$
 Veamos que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ ya que $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ ya que

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \frac{1}{n} < \varepsilon \left(\text{ya que } \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right) \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$

" \Leftarrow " Sea $r > 0$ veamos que $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

Como $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \Leftrightarrow d(x_n, x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_0) < \varepsilon$

$x_n \in B(x_0, \varepsilon)$

Tenemos $\varepsilon = r \Rightarrow \exists x_0 \quad \exists n \parallel d(x_n, x_0) < r \Leftrightarrow x_n \in B(x_0, r) \cap A$ □

Proposición 34. Para todo punto de acumulación existe una sucesión que converge a él

$x_0 \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \parallel x_n \neq x_0 \forall n \parallel x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$

Demostración.

Igual que la anterior, sólo que añadiendo que $x_n \neq x_0 \forall n$ en la demostración. □

Teorema 8. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ y $A \subset [a, b]$ un subconjunto infinito, entonces A tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración.

Sea $I_0 = [a, b]$

Observemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$ y ahora consideramos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$ entonces uno de ellos contiene infinitos elementos de A y lo llamamos I_1 , a I_1 le hacemos el mismo procedimiento y obtenemos I_2 con infinitos elementos de A . Por inducción tenemos $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n intervalo cerrado $\parallel I_{n+1} \subset I_n$; I_n tiene infinitos elementos de A y $l(I_n) = \frac{l(I_0)}{2^n}$

Así $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son un sistema de intervalos cerrados encajados y $l(I_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$

Veamos que x_0 es punto de acumulación de A .

Sea $\varepsilon > 0$ veamos que en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ hay puntos de A

$\exists n \parallel l(I_n) < \frac{\varepsilon}{10} \Rightarrow x_0 \in I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y en I_n hay infinitos elementos de A . □

Definición 29. Subsucesión

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (ó M espacio métrico)

Una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \dots\} \parallel n_k < n_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Corolario 6. Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\rho_2 = d(x_{n_2}, x_0)$$

$$r_3 = \frac{\rho_2}{2} < \rho_1 \quad \exists n_3 \in \mathbb{N} \quad n_3 > n_2 \parallel x_{n_3} \in B(x_0, r_3)$$

Por inducción tenemos $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión y $\{m_k\} \subset \mathbb{N} \parallel d(x_{n_k}, x_0) < r_k = \frac{1}{m_k}$; así $d(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ es

$$\text{decir } x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

Caso 2. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto finito $\Rightarrow \exists$ un número en la sucesión que se repite infinitas veces. \Leftrightarrow Subsucesión constante que es convergente.

Observación.

Sea (M, d) espacio métrico y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M \parallel$ que converge a $x_0 \in M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0$
 $\underbrace{x_n \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ si $n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2.3. Espacios completos. Espacios compactos. Teorema de Heine-Borel

2.3.1. Espacios completos

Definición. Sucesión de Cauchy

Sea (M, d) espacio métrico.

Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ se dice de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \parallel \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Definición. Espacio métrico **completo**

Un espacio métrico (M, d) se dice **completo** si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Observación.

En (M, d) espacio completo.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy
2. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo. Por ejemplo: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$ y $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
3. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Teorema 9. \mathbb{R} es completo

Demostración.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de Cauchy \Rightarrow es acotada

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \parallel \forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon)$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad a_N = \text{Inf} \{x_n, n \geq N\}$$

$$b_N = \text{Sup} \{x_n, n \geq N\}$$

$$\text{Así } a_N < b_N$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Como los intervalos son encajados $\forall n \geq n_0 \quad |a_n - b_n| < \varepsilon$

Aplicando el teorema de Cantor se tiene que: $\exists! x^* \in \mathbb{R} \parallel \bigcap_{N=1}^{\infty} [a_N, b_N] = \{x^*\}$

Veamos que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < x_n < b_n$ y $a_n < x^* < b_n \Rightarrow |x_n - x^*| \leq b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ □

Proposición 35. \mathbb{R}^N con d_1, d_2, d_∞ es completo

Demostración.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ una sucesión de Cauchy

Veamos $\forall i = 1, \dots, N$ se tiene que $\{(x_n)_i\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy. Si $n, m \in \mathbb{N}$

$$|(x_n)_i - (x_m)_i| \leq d(x_n, x_m) = \begin{cases} d_1(x_n, x_m) = \sum_{j=1}^N |(x_n)_j - (x_m)_j| \\ d_2(x_n, x_m) = \left(\sum_{j=1}^N |(x_n)_j - (x_m)_j|^2 \right)^{1/2} \\ d_\infty(x_n, x_m) = \max_{j=1 \dots N} |(x_n)_j - (x_m)_j| \end{cases}$$

Si $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \parallel \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow |(x_n)_i - (x_m)_i| < \varepsilon$

Por tanto, como \mathbb{R} es completo, tenemos que $\forall i = 1, \dots, N \quad \exists x_i^* \in \mathbb{R} \parallel (x_n)_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i^*$

Veamos que $x_n \rightarrow x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_N^* \end{pmatrix}$

$$d(x_n, x^*) = \begin{cases} d_1(x_n, x^*) = \sum_{j=1}^N |(x_n)_j - x_j^*| & \leq N \cdot \varepsilon \\ d_2(x_n, x^*) = \left(\sum_{j=1}^N |(x_n)_j - x_j^*|^2 \right)^{1/2} & \leq \sqrt{N} \cdot \varepsilon \\ d_\infty(x_n, x^*) = \max_{j=1 \dots N} |(x_n)_j - x_j^*| & \leq \varepsilon \end{cases}$$

Sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \exists n_0(i) \parallel \forall n \geq n_0(i) \quad |(x_n)_i - x_i^*| < \varepsilon$. Sea $n_0 = \max_{j=1, \dots, N} \{n_0(j)\} \Rightarrow \forall n \geq n_0$ (columnas de la derecha de las distancias) □

Observación. Las columnas de la derecha provienen de acotar la distancia por el resultado de la suma (en caso de d_1 y d_2) y por el propio epsilon en el caso de d_∞ al ser éste arbitrario.

Proposición 36. En un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, $A \subset M$, (A, d_A) siendo d_A una métrica inducida, también es completo.

Demostración.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ una sucesión de Cauchy \Rightarrow es también sucesión de Cauchy en M .

Como M es completo $\Rightarrow \{x_n\}$ converge a $x_0 \in M$

$(A \ni x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0) \Rightarrow x_0 \in \bar{A} = A$ □

2.3.2. Conjuntos compactos

Definición 30. Recubrimiento por abiertos

Sea (M, d) un espacio métrico, sea $A \subset M$ y sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de abiertos de M , se dice que $\{G_\alpha\}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Es decir, que para cualquier recubrimiento por abiertos de A podemos quedarnos con una cantidad finita de ellos y seguimos cubriendo completamente a A

Observación 13. En \mathbb{R} , \mathbb{N} no es compacto

$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ un recubrimiento por abiertos de \mathbb{N}

$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, pero no puede extraerse de ahí un subrecubrimiento finito, luego \mathbb{N} no es compacto.

Proposición 37. Un compacto es cerrado y acotado

Sea (M, d) un espacio métrico. Si $K \subset M$ es compacto $\Rightarrow K$ es cerrado y acotado

Demostración.

Veamos primero que K es acotado:

Sea $\varepsilon > 0$ $\forall x \in K$, $B(x, \varepsilon)$ se tiene que $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon) \rightarrow$ recubrimiento por abiertos de K

Como K es compacto $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_1, \dots, x_N \in K \parallel K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon) \Rightarrow K$ es acotado

Veamos ahora que K es cerrado:

Para ello, comprobemos que K^c es abierto: Sea $y \in K^c$, si $x \in K \exists r_1(x), r_2(x) > 0 \parallel B(y, r_2(x)) \cap B(x, r_1(x)) = \emptyset$

Entonces, $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_1(x))$, que es un recubrimiento por abiertos de K .

Como K es compacto, nos quedamos con un subrecubrimiento finito: $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_1(x_i))$

Sea $r = \min \{r_2(x_i), i = 1, \dots, N\} > 0$, entonces $B(y, r) \cap B(x_i, r_2(x_i)) = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, N$, ya que $B(y, r) \subset B(y, r_2(x_i))$ no corta a $B(x_i, r_2(x_i))$

Por tanto $B(y, r) \subset K^c$, por lo que K^c es abierto, luego K es cerrado. \square

Proposición 38. Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto

Sea $K \subset M$ compacto y $A \subset K$ cerrado $\Rightarrow A$ es compacto

Demostración.

Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recubrimiento por abierto de A , entonces $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$

Como A^c es abierto y $K \setminus A = \{x \in K \parallel x \notin A\} \subset A^c$, entonces $K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cup A^c$, que es un recubrimiento por abiertos de K

Como K es compacto, extraigo un subrecubrimiento finito, es decir, $\exists N \in \mathbb{N} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_N \in I \parallel K \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \cup A^c$ entonces, como $A \subset K \Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$ \square

Proposición 39. La intersección de un cerrado y un compacto es compacta

Si $K \subset M$ es compacto y $F \subset M$ es cerrado $\Rightarrow F \cap K$ es compacto

Demostración.

Sea $A = F \cap K \subset K$. A es cerrado porque K lo es, luego por la proposición anterior tenemos que A es compacto. \square

Proposición 40. En \mathbb{R} si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, entonces $[a, b]$ es compacto

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Por el teorema de Cantor, $\exists! x^* \in \mathbb{R} \parallel \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x^*\}$

Ahora, $x^* \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$

$\exists \alpha_0 \in I \parallel x^* \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 \parallel (x^* - r, x^* + r) \subset G_{\alpha_0}$; $\exists n \parallel l(J_n) < r$ y $x^* \in J_n \Rightarrow J_n \subset (x^* - r, x^* + r) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow$ absurdo, ya que según esto, J_n está cubierto por un intervalo de la familia, y esto contradice la hipótesis de partida, ya que hemos construido J_n basándonos en que no era compacto. \square

2.3.3. Teorema de Heine-Borel

Teorema 10. *Teorema de Heine-Borel*

En \mathbb{R} o \mathbb{R}^n , con d_1, d_2, d_∞ las siguientes afirmaciones equivalentes:

1. A (\mathbb{R} o \mathbb{R}^n) es compacto
2. A es cerrado y acotado
3. Todo conjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A

Demostración.

1) \Rightarrow 2): Proposición anterior. Válido en cualquier espacio métrico

2) \Rightarrow 1): Si A es cerrado y acotado. En \mathbb{R} $A \subset [a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$. En \mathbb{R}^n las proyecciones son acotadas, entonces $\exists a_i \leq b_i$ $i = 1, \dots, N \parallel P_i(A) \subset [a_i, b_i] = C$. Entonces como C es compacto y $A \subset C \Rightarrow A$ es compacto

1) \Rightarrow 3): Sea $S \subset A$ un subconjunto infinito tal que no tiene ningún punto de acumulación $\Rightarrow \forall x \in A \exists r(x) > 0$ $(B(x, r(x)) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$ (Si hubiera un punto de acumulación $\exists x \in A \parallel \forall r > 0 B(x, r) \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset$)

Así, $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r(x))$ y como A es compacto: $\exists N \in \mathbb{N}$ $x_1, \dots, x_N \in A \parallel S \subset A \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r(x_i)) \Rightarrow S \subset \{x_1, \dots, x_N\}$, que es finito, y entra en contradicción con la hipótesis de que S era infinito.

3) \Rightarrow 2): Supongamos que A no acotado. Vamos a crear una sucesión que no converge.

Sea $k_1 = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in A \parallel d(x_1, 0) > k_1$

Sea $k_2 = d(x_1, 0) + 1 \Rightarrow \exists x_2 \in A \parallel d(x_2, 0) > k_2$

Inductivamente, tenemos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \parallel d(x_{n+1}, 0) > d(x_n, 0) + 1$, por tanto, si $n, m \in \mathbb{N}$ (supuesto $n > m$) $d(x_n, x_m) \geq d(x_n, 0) - d(x_m, 0)$, con lo cual $\{x_n\}$ no tiene puntos de acumulación, lo cual es absurdo

Veamos que A es cerrado, es decir que $A = \bar{A} = A \cup A'$

Si $x \in A' \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset A \parallel x_n \rightarrow \bar{x}$ ¿Pertenece \bar{x} a A ?

Por 3), $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación en A , por lo tanto debe ser \bar{x} y por lo tanto $\bar{x} \in A$ \square

Proposición 41. *Todo compacto es completo*

Si $K \subset M$ es compacto $\Rightarrow K$ es completo

Demostración.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ una sucesión de Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$. $n, m > n_0 \parallel d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Capítulo 3

Sucesiones y series

3.1. Sucesiones

3.1.1. Convergencia. Propiedades de sucesiones.

Definición 32. Convergencia.

Se dice que una sucesión, $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, converge a $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad d(x, x_n) = |x - x_n| < \varepsilon$$

Notación. Notamos la convergencia de una de las siguientes maneras, todas ellas equivalentes:

1. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
3. $\{x_n\}$ converge a x .

Observación 14. Consideramos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, con lo cual si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi \equiv (a, b)$. Así $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|a - b\|_2$ y $d(z, w) = |z - w|$.

Ahora sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z \Leftrightarrow d(z, z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, y así $z_n = a_n + b_n i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \\ b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \end{cases}$

Definición 33. Operaciones con sucesiones

1. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}
 - a) $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$
 - b) $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$
2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} y $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó \mathbb{C}), entonces $\{\lambda \cdot x_n\} = \lambda \{x_n\}$

Observación 15. El conjunto de las sucesiones en \mathbb{R} (ó \mathbb{C}) constituyen un espacio vectorial.

Proposición 42. La estructura de espacio vectorial de las sucesiones convergentes.

Sean $\{x_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ e $\{y_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$, ambas sucesiones en \mathbb{R} ó \mathbb{C} . Entonces:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración. Vayamos por apartados.

1. Sea $\varepsilon > 0$, con lo cual $\exists n_0^1 \parallel n \geq n_0^1 \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists n_0^2 \parallel n \geq n_0^2 \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomamos $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$. Si $n \geq n_0$, entonces

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n (y_n - y)| + |y (x_n - x)| = |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x|$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, $\exists M > 0 \parallel |x_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual:

$$|x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \leq M |y_n - y| + |y| |x_n - x|$$

Caso 1. Si $y = 0$, el segundo término no existe, luego dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \text{si } n \geq n_0 \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{M}$, entonces

$$|x_n y_n - xy| \leq M |y_n - y| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Caso 2. Si $y \neq 0$, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0^1 \parallel \text{si } n \geq n_0^1 \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}$ y además $\exists n_0^2 \parallel \text{si } n \geq n_0^2 \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$, luego

$$|x_n y_n - xy| \leq M |y_n - y| + |y| |x_n - x| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |y| \cdot \frac{\varepsilon}{2|y|} = \varepsilon$$

3. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Entonces, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \text{si } n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$

$$|\lambda \cdot x_n - \lambda \cdot x| = |\lambda (x_n - x)| = |\lambda| |x_n - x| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

4. Como $\{x_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y $x \neq 0$, entonces $\exists n_0^1 \parallel \forall n \geq n_0^1$ se tiene que $|x_n| > \frac{|x|}{2} > 0$.

Bien, ahora dado $\varepsilon = \frac{|x|}{2} \quad \exists n_0^1 \parallel \forall n \geq n_0^1 \quad |x| - |x_n| \leq ||x| - |x_n|| \leq |x - x_n| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} \leq |x_n|$

Con lo cual, $\frac{1}{|x_n|} > \frac{2}{|x|}$ y entonces dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 (n_0 \geq n_0^1) \parallel \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x| < \varepsilon \frac{|x|^2}{2}$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x - x_n}{x_n x} \right| = \frac{|x - x_n|}{|x_n| |x|} \leq \frac{|x - x_n|}{|x|^2} < \varepsilon$$

5. Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad |x - x_n| < \varepsilon$. Se tiene que

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$$

luego $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$.

□

Definición 34. Sucesión monótona

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.

- Se dice que la sucesión es monótona creciente si y sólo si $x_i \leq x_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$
- Se dice que la sucesión es monótona decreciente si y sólo si $x_{i+1} \leq x_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Notación.

- $\{x_n\} \uparrow$ denota una sucesión monótona creciente.
- $\{x_n\} \downarrow$ denota una sucesión monótona decreciente.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Observación 16. El recíproco es cierto en ambos casos.

Demostración. Abordemos ambos apartados:

1. Si $\{x_n\}$ es acotada, entonces $\exists L = \sup \{x_m, m \in \mathbb{N}\}$ y es claro que $x_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \parallel L - \varepsilon < x_n \leq L$, con lo cual $\forall n \geq n_0 \quad L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L \Rightarrow x_n \in (L - \varepsilon, L]$
2. Si $\{x_n\}$ es acotada, entonces $\exists L = \inf \{x_m, m \in \mathbb{N}\}$ y es claro que $L \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \parallel L \leq x_n < L + \varepsilon$, con lo cual $\forall n \geq n_0 \quad L \leq x_n \leq x_{n_0} < L + \varepsilon \Rightarrow x_n \in [L, L + \varepsilon)$

□

Proposición 44.

1. Si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, entonces $x \geq 0$
2. Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones reales convergentes, esto es, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ y $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$ y $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$
3. Si $a \leq x_n \leq b \quad \forall n$ y $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, entonces $a \leq x \leq b$
4. **Regla del sandwich:** Sean x_n y z_n dos sucesiones convergentes tales que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ y $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$. Entonces toda sucesión y_n tal que $x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n$ cumple $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ y además $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$

Demostración.

1. Supongamos lo contrario, es decir, que $x < 0$. Entonces $\exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad x_n < 0$, que entra en contradicción con la hipótesis.
2. Sea $z_n = y_n - x_n \geq 0 \quad \forall n$. Es claro que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y - x$, que por el apartado 1., $y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$
3. Si llamamos $z_n = x_n - a \geq 0$, entonces $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x - a \geq 0$ e $y_n = b - x_n \geq 0$, entonces $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b - x \geq 0$, con lo cual $a \leq x \leq b$
4. Sea $\alpha_n = z_n - x_n \geq 0$. Obviamente, $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Entonces $0 \leq y_n - x_n \leq \alpha_n$, con lo cual, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - x_n = 0$, ya que dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad y_n - x_n \leq \alpha_n$
Bien, ahora $y_n = (y_n - x_n) + x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + x = x$, con lo cual $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$

□

Definición 35. Límites infinitos

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión.

1. Se dice que la sucesión tiende a más infinito, esto es, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (o análogamente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$) si y sólo si $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad x_n \geq M$
2. Se dice que la sucesión tiende a menos infinito, esto es, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ (o análogamente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) si y sólo si $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad x_n \leq -M$

Proposición 45.

1. Si $\{x_n\} \uparrow$ y no acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

□

Observación 18.

1. Si $\{x_n\} \uparrow$, entonces x_n siempre tiene límite (a un número real o a $+\infty$)
2. Si $\{x_n\} \downarrow$, entonces x_n siempre tiene límite (a un número real o a $-\infty$)
3. Trabajaremos con límites en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Llamaremos a esto \mathbb{R} *ampliado* ($\overline{\mathbb{R}}$).

Proposición 46. *Límites de la sucesión inversa.*

1. Si $\{x_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pm\infty$, entonces $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
2. Si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}, x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, entonces $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
3. Si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}, x_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, entonces $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

Demostración.

1. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \parallel n \geq n_0$ y $x_n > \frac{1}{\varepsilon} (= M) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$.

Caso 1. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \Rightarrow \exists M > 0 \parallel 0 < M < x_n \quad \forall n, 0 < \frac{1}{\varepsilon} < x_n \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Caso 2. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \Rightarrow \exists M > 0 \parallel x_n < -M < 0 \Rightarrow x_n < \frac{-1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon < \frac{-1}{x_n} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

2. Dado $M > 0 \quad \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad 0 < x_n < \frac{1}{M} \Leftrightarrow 0 < M < \frac{1}{x_n}$

Caso 1. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ y $x_n > 0 \Rightarrow x_n < \varepsilon; x_n < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

Caso 2. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ y $x_n < 0 \Rightarrow \varepsilon > x_n; \frac{1}{x_n} > x_n; \frac{-1}{\varepsilon} < x_n \Rightarrow \frac{-1}{x_n} < \varepsilon; \frac{1}{x_n} > -\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

□

Corolario 7. *Límites en \mathbb{R} ampliado.*

Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ e $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$, entonces $x_n + y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x + y$

Observación 19. Si $x = \infty, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = -\infty$. Si $x \in \mathbb{R}, y = -\infty \Rightarrow x + y = -\infty$ y viceversa.

2. Si $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \cdot x$

3. Si $x_n \leq y_n \quad \forall n$ y $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ e $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$, entonces $x \leq y$ y si $x = \infty \Rightarrow y = \infty$ y si $y = -\infty \Rightarrow x = -\infty$

4. **Regla del sandwich:** Si $x_n \leq z_n \leq y_n$ y si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ e $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, entonces z_n tiene límite y $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

Observación 20. Trabajando con límites ampliados, hay operaciones con límites que no pueden determinarse. Éstas son $\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0$.

3.1.2. Algunos ejemplos.

Ejemplo 8. Sea $x_n = \frac{1}{x^p}$, con $p > 0$ fijo, $n \in \mathbb{N}$.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$ para cualquier $x > 0$ y cualquier $p > 0$. (si fuese negativo: $\exists M > 0, -x < M, \forall n$ lo cual es absurdo)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo 10. Sea $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ fijo, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Demostración. Supongamos que $a > 1$. Si $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$. $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ es monótona decreciente y $1 < a^{\frac{1}{n}} \quad \forall n$ (si $a^{\frac{1}{n+1}} < 1 \Rightarrow a \leq 1$, cosa que es absurda).

Como x_n es monótona decreciente, $\exists l = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$.

Supongamos que $1 < l \leq a^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \Rightarrow l^n \leq a$, que es absurdo, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = \infty$ ya que $l > 1$. Con lo cual, necesariamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Caso 1. Supongamos que $a = 1$, entonces $\sqrt[n]{a} = 1$.

Caso 2. Supongamos que $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a^{1/n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \left(\frac{1}{a} > 1\right) \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$

□

Ejemplo 11. Sea $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Demostración. Como $n^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n$, $k_n > 0 \Rightarrow n = (1 + k_n)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} k_n^j \geq 1 + \binom{n}{2} k_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$ (hemos cogido el primer y tercer término del sumatorio, el resto lo desecharnos.)

$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$; $n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$, tachamos el $n - 1$ y tenemos $1 \geq \frac{n}{2} k_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} \geq k_n^2 \Rightarrow k_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ □

Ejemplo 12. Sea $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. x_n es monótona creciente y acotada superiormente, con lo cual $\exists \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{def.}{=} e$, el número de Euler.

Ejemplo 13. Si $p > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fijos, y sea

$$x_n = \frac{n^\alpha}{(1+p)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2. Series.

3.2.1. Convergencia. Propiedades

Definición 36. Sumas parciales y series.

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} .

1. Llamamos sumas parciales de x_n a:

$$S_M = \sum_{n=1}^M x_n, \quad M \in \mathbb{N}$$

2. Llamamos serie de la sucesión x_n a:

$$S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$$

supuesto que existe. Lo denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M x_n$

Notación.

1. Si $\exists \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.
2. **Sólo en \mathbb{R}** si $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \pm\infty$ se dice que la serie es divergente.
3. Si $\nexists \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no converge.

Observación 21. Si $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. $S_M = \sum_{n=1}^M z_n = \sum_{n=1}^M a_n + i \sum_{n=1}^M b_n$ y por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si y sólo si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes.

Ejemplo 14. Serie de una progresión geométrica.

Sea $a \in \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} fijo y sea $x_n = a^n$. $S_M = \sum_{n=1}^M x_n = \sum_{n=1}^M a^n = \frac{a-a^{M+1}}{1-a}$

Caso 1. $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M a^n = \frac{a}{1-a}$

Caso 2. $|a| > 1 \Rightarrow |S_M| = \left| \frac{a-a^{M+1}}{1-a} \right| = \left| \frac{a^{M+1}-a}{a-1} \right| \geq \frac{|a|^{M+1}-|a|}{|a-1|} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty$

Caso 3. $a > 1 \Rightarrow S_M = \frac{a^{M+1}-a}{a-1} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} +\infty$

Caso 4. $a = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^M a^n = M \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M a^n = +\infty$

Caso 5. $a = -1 \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} a^n = 0$, $-1 \Rightarrow$ la serie es divergente.

En particular, si $a = \frac{1}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

Ejemplo 15. Sea $x_n = \frac{1}{n}$.

$S_M = \sum_{n=1}^M x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M}$. S_M es monótona creciente ($S_M \leq S_{M+1}$) y se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M = +\infty$

3.2.2. Criterios de convergencia

Proposición 47. Generalidades sobre convergencia

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración.

1. Las sumas parciales de $\{x_n + y_n\}$ son: $\sum^M x_n + y_n = \sum^M x_n + \sum^M y_n \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \sum^{\infty} x_n + \sum^{\infty} y_n$
2. Las sumas parciales de $\{c \cdot x_n\}_n^{\infty}$ son: $S_M = \sum_{n=1}^M c \cdot x_n = c \sum_{n=1}^M x_n \xrightarrow{M \rightarrow \infty} c \sum_{n=1}^{\infty} x_n$
3. Sabemos que $S_M = \sum_{n=1}^M x_n$ tiene límite cuando $M \rightarrow \infty$. Entonces $x_M = S_M - S_{M-1} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} l - l = 0$
4. Como $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $S_M = \sum_{n=1}^M x_n$ es monótona creciente ($S_M \leq S_{M+1} \quad \forall M \in \mathbb{N}$), por tanto S_M tiene límite si y sólo si es acotada, esto es $\exists k > 0 \parallel S_M \leq k \quad \forall M \in \mathbb{N}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente si y sólo si $\{S_M\}_{M \in \mathbb{N}}$, la sucesión de sumas parciales, tiene límite si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \parallel \text{si } M, N \geq N_0 \text{ (suponiendo } N > M) \mid S_N - S_M \mid < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{n=M+1}^N x_n \right| < \varepsilon$

□

3.2.2.1. Convergencia absoluta. Reordenamientos

Definición 37. Convergencia absoluta. Convergencia condicional

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ no lo es, decimos que la serie es condicionalmente convergente.

Proposición 48. *Convergencia absoluta*

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$$

El recíproco no es cierto.

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, entonces $\tilde{S}_M = \sum_{n=1}^M |x_n|$, la sumas parciales de la sucesión en valor absoluto, es de Cauchy. Entonces, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \parallel \text{si } N, M \geq N_0 \text{ (supuesto } N > M) \text{ se tiene que } \left| \tilde{S}_N - \tilde{S}_M \right| < \varepsilon$. Por la propiedad triangular, vemos que $\left| \tilde{S}_N - \tilde{S}_M \right| = \sum_{n=M+1}^N |x_n| \geq \left| \sum_{n=M+1}^N x_n \right| = |S_N - S_M|$, siendo S_N, S_M las sumas parciales de la sucesión normal. Con lo cual, como $\left| \sum_{n=M+1}^N x_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |x_n|$, entonces $|S_M - S_N| < \varepsilon$, con lo cual $\{S_M\}_M$ es de Cauchy y por tanto $\exists \lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. □

Definición 38. Reordenamiento.

Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva y $\{x_n\}$ una sucesión real o compleja. Entonces a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} \text{ se le llama } \mathbf{reordenamiento} \text{ de } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Los siguientes teorema, que no demostraremos, proporciona un resultado poderoso acerca de los reordenamientos de las series.

Teorema 11. *Teorema de reordenamiento de Riemann.*

Sea $\{x_n\}$ una sucesión real o compleja. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente, entonces para todo reordenamiento se tiene que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.2.2.2. Criterios de convergencia absoluta

Proposición 49. *Criterios de convergencia absoluta.*

Sean a_n, b_n sucesiones de términos positivos.

- Supongamos que $\exists c > 0$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq c \cdot b_n \quad \forall n \geq n_0$,
 - Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
 - Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l, l \neq 0, \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Demostración. Vayamos por apartados.

- Sean $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ y $\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^N b_n$, entonces si $N \geq n_0$, $S_N = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^N a_n \leq A + c \cdot \sum_{n=n_0+1}^N b_n$. Con lo cual $S_N \leq A + c \cdot \sum_{n=n_0+1}^N b_n + c \cdot \sum_{n=1}^{n_0} b_n = A + c \cdot \tilde{S}_N$. Ahora,

Caso 1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \{\tilde{S}_N\}$ es acotada, luego $\{S_N\}$ también lo es $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Caso 2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \{S_N\}$ no es acotada, luego $\{\tilde{S}_N\}$ tampoco lo es $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$

- Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l, l \neq 0, \infty$, eso significa que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel$ si $n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, con lo cual $\frac{a_n}{b_n} \in (l/2, 3l/2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}b_n < a_n < 3\frac{1}{2}b_n$. Esto significa que ambas sucesiones se acotan mutuamente, con lo cual, por 1., tienen el mismo carácter.
- Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, con lo cual $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel$ si $n \geq n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Leftrightarrow a_n < \varepsilon b_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, tenemos que $a_n < b_n$, luego si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
- Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \parallel$ si $n \geq n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} > M \Leftrightarrow a_n > M \cdot b_n$. Tomando $M = 1$, tenemos que $a_n > b_n$, luego si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

□

Proposición 50. *Criterio del cociente o d'Alambert.*

Sea $\{a_n\}$ una sucesión real de términos positivos. Tenemos que

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, no puede asegurarse con certeza qué sucede.

Demostración.

- Si $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Sea $k \parallel l < k < 1$, entonces $\exists n_0 \parallel$ si $n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < k$, con lo cual $\forall n \geq n_0 \quad a_{n+1} \leq k \cdot a_n, a_{n_0+1} \leq k \cdot a_{n_0}, a_{n_0+2} \leq k \cdot a_{n_0+1} \leq k^2 \cdot a_{n_0}$, que por inducción queda $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq k^{n-n_0} a_{n_0} = k^n \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^M a_n \leq \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \sum_{n=n_0}^M k^n \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{\infty} k^n < \infty$ (por ser serie de progresión geométrica de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, entonces no se puede asegurar el carácter de la serie.

Demostración.

1. Si $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Sea $k \parallel l < k < 1 \Rightarrow \exists n_0 \parallel$ si $n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \leq k \Leftrightarrow a_n \leq k^n$. Como $k < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} k^n < \infty$, por el criterio de comparación se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Sea $k \parallel 1 < k < l \Rightarrow \exists n_0 \parallel$ si $n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} > k \Leftrightarrow a_n \geq k^n$. Como $k > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} k^n = \infty$, que por el criterio de comparación se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

□

Proposición 52. *Criterio de condensación de Cauchy.*

Sea $\{a_n\}$ una sucesión real de términos positivos monótona decreciente. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ tiene el mismo carácter que } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

Demostración.

Las sumas parciales son crecientes en M . $\{S_M\}$ es acotada si y sólo si $\{S_{2^k}\}$ es acotada:

\Rightarrow) Obviamente, ya que S_{2^k} tiene menos términos que S_M .

$(\Leftarrow$ Dado $M > 0 \exists k \parallel M < 2^k \Rightarrow S_M \leq S_{2^k}$.

Bien, el desarrollo de S_{2^k} es: $S_{2^k} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k-2}} + a_{2^{k-1}} + a_{2^k}$. Ahora, si agrupamos los términos en potencias de 2, el sumatorio queda: $S_{2^k} = \sum_{j=1}^k a_{2^{j-1}+1} + \dots + a_{2^j}$.

Vamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{j=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$.

$S_{2^k} = \sum_{j=1}^k a_{2^{j-1}+1} + \dots + a_{2^j}$, y $S_{2^k} \geq \sum_{j=1}^k 2^{j-1} a_{2^j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j}$. Por último $S_{2^k} \leq \sum_{j=1}^k 2^{j-1} + 1 \leq \sum_{j=1}^k 2^{j-1} a_{2^{j-1}} = \sum_{m=0}^{k-1} 2^m a_{2^m}$. □

3.2.2.3. Criterios de convergencia para series de términos arbitrarios.

Proposición 53. *Criterio de Leibniz para series alternadas.*

Sea $\{a_n\}$ una serie real de términos positivos monótona decreciente tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

es convergente.

Demostración.

$S_M = \sum_{n=1}^M (-1)^{n+1} a_n$. Veamos que para $N \in \mathbb{N}$, las sumas parciales pares S_{2N} son crecientes. $S_{2N+2} = \sum_{n=1}^{2N+2} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} a_n + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) \geq S_{2N}$. Veamos que S_{2N} son acotadas: $S_{2N} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - a_{2N} \leq a_1$, ya que $(a_i - a_{i+1}) \geq 0 \quad i = 2, \dots, 2N-1$ por ser la sucesión decreciente.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Capítulo 4

Funciones continuas

Nota del autor: Para sucesiones, se notarán de la forma $x_n \rightarrow x$, entendiéndose que la tendencia es con la variable hacia el infinito, salvo que se indique lo contrario.

Las expresiones “tal que” o “tales que” se notarán con una barra ‘/’ a partir de cierto punto.

4.1. Funciones continuas

4.1.1. Límites de funciones

Definición 39. Límite de una función

Sea (M, d) y (N, d') espacios métricos y $f : M \rightarrow N$ tal que $x \mapsto f(x)$

Sea $x_0 \in M$. Decimos que $l \in N$ es el límite de $f(x)$ (y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$) cuando $x \rightarrow x_0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel f(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset B(l, \varepsilon) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel d(x, x_0) < \delta \ x \neq x_0 \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon$$

Es decir, que las imágenes de los puntos en la bola de centro x_0 están en la bola de centro l

Observación. Si $M = N = \mathbb{R}$ $d = d'$ la definición queda:

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición 54. Límites de funciones. Sucesiones

- $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall \{x_n\} \subset M \quad x_n \neq x_0 \forall n \quad \parallel x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$ cuando $n \rightarrow \infty$
- Si existe, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ es único

Demostración.

1. \Rightarrow)

Sea $\{x_n\} \subset M \parallel x_n \rightarrow x_0 \ x_n \neq x_0 \forall n$ y sea $y_n = f(x_n)$, $\{y_n\} \subset N$. Veamos que $y_n \rightarrow l$

Sea $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel f(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset B(l, \varepsilon)$.

Como $x_n \rightarrow x_0$, dado $\delta > 0 \quad \exists n_0 \parallel \text{si } n \geq n_0 \ x_n \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \ x_n \neq x_0 \forall n \Rightarrow y_n = f(x_n) \in B(l, \varepsilon)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sea $\varepsilon > 0 \parallel B'(l', \varepsilon) \cap B''(l'', \varepsilon) = \emptyset$ y dado éste ε :

$$\exists \delta' > 0 \parallel f(B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}) \subset B(l', \varepsilon)$$

$$\exists \delta'' > 0 \parallel f(B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}) \subset B(l'', \varepsilon)$$

Lo cual es absurdo, porque los mismos términos de una sucesión (léase función) no pueden estar contenidos en bolas disjuntas, como es el caso. Por lo tanto, necesariamente $l' = l''$

F

□

Proposición 55. *Propiedades de límites*

Supongamos que $N = \mathbb{R}$ (\mathbb{C}), y (M, d) , ambos espacios métricos y $x_0 \in M$

Sean $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) y supongamos: $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $m = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Entonces

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l + m$
2. Si $a \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}): $\lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \cdot l$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \cdot m$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$

Demostración. Propiedades de los límites

1. Sea $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta' > 0 \parallel f(B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}) \subset B(l, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{y} \quad \exists \delta'' > 0 \parallel g(B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}) \subset B(m, \frac{\varepsilon}{2})$$

Sea $\delta = \min\{\delta', \delta''\} > 0$. Si $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$:

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| = |f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2. por sucesiones:

$$\text{Sea } x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \neq x_0 \forall n \Rightarrow f(x) \rightarrow l \Rightarrow a \cdot f(x) \rightarrow a \cdot l$$

3. Sea $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta', \delta'' > 0 / f(B(x_0, \delta') \setminus \{x_0\}) \subset B(l, \frac{\varepsilon}{2M})$ y $g(B(x_0, \delta'') \setminus \{x_0\}) \subset B(m, \frac{\varepsilon}{2})$

Sea $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ entonces:

$$|f(x)g(x) - lm + f(x) \cdot m - f(x) \cdot m| = |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - l)| \leq |f(x)| |g(x) - m| + |m| |f(x) - l|$$

Como $\lim f(x) = l$ con $\varepsilon_0 = 1$, $\exists \delta_0 > 0 / f(B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\}) \subset B(l, 1)$; en particular $\exists M > 0 / \forall x \in (B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\}) \quad |f(x)| \leq M$

Con lo cual:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Dado $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ se tiene que $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{M}$

4. Por 3. basta hacerlo con $f \equiv 1$, ya que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, con lo cual va a ser el $1/g(x)$ lo que vamos a demostrar.

Como la que puso Aníbal no quedó demasiado clara, por ser muy directa, la detallo a continuación adaptándola. [?]

Tenemos primero que:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{g(x) - m}{m \cdot g(x)} \right| = \frac{|g(x) - m|}{|m| |g(x)|} \quad \text{Como } m \neq 0 \Rightarrow \exists \delta_1 / \text{si } x \in B(x_0, \delta_1) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$$

Entonces si $x \in B(x_0, \delta_1) \setminus \{x_0\}$:

$$|g(x)| > \frac{|m|}{2}, \text{ de lo cual obtenemos que } \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$$

Luego

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)| |m|} \leq \frac{2 |g(x) - m|}{m^2}$$

$$\text{Dado } \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in B(x_0, \delta_2) \setminus \{x_0\} \quad |g(x) - m| < \frac{m^2 \varepsilon}{2}$$

Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $B(x_0, \delta)$ entonces:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)| |m|} \leq \frac{2 |g(x) - m|}{m^2} < \frac{m^2 \varepsilon}{2}$$

. Tachando lo oportuno, queda:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

Definición 40. Límites en el infinito. Límites infinitos

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 / \text{si } M < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 / \text{si } x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ decimos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 / x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad x \neq x_0 \Rightarrow M < f(x)$
Si $x_0 \in \mathbb{R}$ decimos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 / x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < -M$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0 / \text{si } k < x \Rightarrow M < f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0 / \text{si } k < x \Rightarrow f(x) < -M$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0 / \text{si } -k < x \Rightarrow M < f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k > 0 / \text{si } -k < x \Rightarrow f(x) < -M$

Observación.

Por tanto, si $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \ni l$ tenemos definido $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ y en este caso $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, que cumplen las propiedades antes enunciadas. Quedan excluidas las indeterminaciones $0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$

Además es cierto que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \neq x_0)$ se tiene que $f(x_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow l$

Definición 41. Función continua en un punto.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset M / x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ se tiene que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$

Definición 42. Continuidad en espacios

Si $f : M \rightarrow N$, f es continua en $M \Leftrightarrow f$ es continua en $x_0 \forall x_0 \in M$

Definición 43. Continuidad en conjuntos. Antiimagen

Si $f : A \rightarrow B$ A, B conjuntos:

1. Si $C \subset B$, se define antiimagen $f^{-1}(C) = \{a \in A / f(a) \in C\}$
2. Si $D \subset A$, $f(D) = \{f(a), a \in D\}$

Teorema 13. Caracterización de la continuidad por imágenes inversas

Sea (M, d) , (N, d') espacios métricos y $f : M \rightarrow N$ una función

Entonces:

1. f es continua (en M) $\Leftrightarrow \forall A \subset N$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto (en M)
2. f es continua (en M) $\Leftrightarrow \forall C \subset N$ cerrado $f^{-1}(C)$ es cerrado (en M)

Demostración.

1.

\Rightarrow) Sea $A \subset N$ un abierto y sea $x_0 \in f^{-1}(A)$

Si $f^{-1}(A) = \emptyset$, el vacío es abierto, y la demostración es trivial.

$f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x_0) \in A$

Como A abierto $\exists \varepsilon > 0 / B(f(x_0), \varepsilon) \subset A$

Como f es continua por hipótesis, para ese $\varepsilon \exists \delta > 0 / f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset A \Rightarrow B(x_0, \delta)$

$(\Leftarrow$

Sea $x_0 \in M$, veamos que f es continua en x_0

Sea $\varepsilon > 0$, como $B(f(x_0), \varepsilon)$ es abierta $\Rightarrow f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \Rightarrow f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset B(x_0, \delta) \Rightarrow$ cumple la definición de continuidad \square

2.

Veamos que para cualquier conjunto $D \subset N$:

$f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$

$x \in f^{-1}(D^c) \Leftrightarrow f(x) \in D^c \Leftrightarrow f(x) \notin D \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(D))^c$

Tomando $D = C$ un cerrado $\Leftrightarrow D^c$ es abierto

$f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$

\Rightarrow) Por 1. $f^{-1}(C^c)$ es abierto $\Leftrightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado

\Leftarrow) Sea $A \subset N \Rightarrow A^c$ es cerrado $\Rightarrow f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ es cerrado $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ es abierto.

Proposición 57. Preservación de la compacidad.

Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos y sea también $f : M \rightarrow N$ función

Si f es continua (en M) y $L \subset M$ es un compacto $\Rightarrow f(L) \subset N$ es un compacto.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Proposición 58. *Composición de funciones*

Sean (M, d) , (N, d') y (O, d'') espacios métricos y $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow O$ funciones.

Sea $x_0 \in M$. Si f es continua en x_0 y la función g es continua en x_0 entonces, la composición de f en g $(g \circ f) \stackrel{\text{def.}}{=} g(f(x))$ $x \in M$ es continua en x_0

Demostración.

Sea $x_n \rightarrow x_0$ (en M). Como f es continua $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Como g es continua en $x_0 \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$ □

4.1.2. Algunos teoremas importantes. Weierstrass. Bolzano. Darboux.**Teorema 14.** *Teorema de Weierstrass*

Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Si $k \subset M$ es compacto, entonces

$$\exists a, b \in k / f(a) = \inf\{f(x) / x \in k\} \text{ y } f(b) = \sup\{f(x) / x \in k\}$$

(como el supremo y el ínfimo están contenidos en el conjunto, podemos referirnos a ellos como máximo y mínimo)

Con lo cual, el teorema de Weierstrass establece que dado una función real, en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo y su mínimo en puntos del intervalo.

Demostración.

Como $k \subset M$ compacto $\Rightarrow f(k) \in \mathbb{R}$ es compacto (por estar en \mathbb{R} , Heine-Borel) $\Rightarrow f(k)$ es acotado $\Rightarrow \exists \sup f(x)$ e $\inf f(x)$

Además es cerrado $\Rightarrow \sup f(k), \inf f(k) \in f(k) \Leftrightarrow \exists a \in k / f(a) = \inf f(x)$ y $\exists b \in k / f(b) = \sup f(x)$ □

Teorema 15. *Teorema de Bolzano*

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua, entonces si

$$f(a) \text{ y } f(b) \text{ tienen signos distintos} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$$

Demostración.

Supongamos $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$

$A = \{t \in [a, b] / f(t) < 0\}$

$A \neq \emptyset$ (el propio $a \in A$) $b \notin A \Rightarrow b$ es cota superior $\Rightarrow \exists c = \sup(A)$

Así $c < b$, como $c = \sup(A) \exists \{t_n\} \in A / t_n \rightarrow c$. Como f es continua $f(t_n) \rightarrow f(c)$; $f(t_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leq 0 \Rightarrow c \neq b$ (sabemos que b es positivo)

Así $a < c$, como $f(a) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 / \forall t \in (a, a + \delta) f(t) < 0 \Rightarrow (a, a + \delta) \subset A$ y $a < a + \delta \leq a$

Veamos $f(c) = 0$. Si $f(c) > 0 \exists \delta > 0 / \forall t \in (c - \delta, c + \delta) f(t) > 0 \Rightarrow (c - \delta, c] \not\subset A \Rightarrow c$ no es $\sup(A) \Rightarrow$ absurdo

Si $f(c) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 / \forall t \in (c - \delta, c + \delta) f(t) < 0 \Rightarrow [c, c + \delta) \subset A \Rightarrow c$ no es $\sup(A)$

Con lo cual $f(c) = 0$ □

Corolario 8. *Teorema de los valores intermedios (de Darboux)*

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $A = f(a)$ y $B = f(b)$. Entonces si $C \in \mathbb{R}$ es un número entre A y B , existe

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

4.2. Funciones discontinuas

Definición 44. Límites laterales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

- El límite por la izquierda de f en x_0 (representado por $f(x_0^-)$) es:

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{si } x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

- El límite por la derecha de f en x_0 (representado por $f(x_0^+)$) es:

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{si } x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Observación.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \ x_0 < x_n \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \ x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$

El límite lateral de una función en un punto, si existe, es único.

Demostración.

Lo haremos para uno de los límites, ya que es completamente análogo para el otro.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \ x_0 < x_n \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$$

\Rightarrow)

Supongamos que $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ y sea x_n una sucesión tal que $x_n \rightarrow x_0 \ x_0 < x_n$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Rightarrow \exists \delta > 0 / \text{si } x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Además, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \ |x_n - x_0| < \varepsilon$ y $|f(x_n) - l| < \varepsilon$

Entonces, si $n \geq n_0 \ |f(x_n) - l| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$

$(\Leftarrow$

Supongamos $l \neq \lim f(x) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \ \exists x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \ \parallel f(x) \notin B(l, \varepsilon)$.

Es decir, que existe un ε fijo tal que hay un x cuya imagen está fuera de la bola con centro el límite l

Tomamos $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\} \ \parallel f(x) \notin B(l, \varepsilon)$. Entonces $x_n \rightarrow x_0$ pero $f(x_n) \not\rightarrow l$

La conclusión a la que llegamos es absurda.

La demostración de la unicidad de los límites laterales es similar a las anteriores. □

Lema 1. Límites laterales y continuidad[?]

- f tiene límite en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+)$
- f es continua en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

Demostración. //Las demostraciones las he hecho yo, con que no os fiéis mucho de ellas

- f tiene límite en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+)$

\Rightarrow)

$$\exists l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{si } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon) \begin{cases} x' \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x') \in B(l, \varepsilon) \\ x' \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x') \in B(l, \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x'^-) = f(x'^+)$$

$(\Leftarrow$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Al ser f continua, $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

(\Leftarrow)

$f(x_0^+) = f(x_0) \Rightarrow f$ tiene límite en $x_0 = f(x_0) \Rightarrow \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{si } x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Rightarrow f$ es continua en x_0 \square

Definición 45. Límites en un punto. Límites infinitos

1. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 / x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow M < f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 / x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < -M$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 / x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow M < f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 / x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < -M$

Definición 46. Discontinuidades. Clasificación

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Discontinuidades de primera especie: $\exists f(x_0^-), f(x_0^+)$
 - a) $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$: Discontinuidad de salto
 - b) $f(x_0^-) = f(x_0^+)$: Discontinuidad evitable
2. Discontinuidades de segunda especie: $\nexists f(x_0^-)$ o $\nexists f(x_0^+)$

4.3. Funciones monótonas

Definición 47. Funciones monótonas

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- f es monótona creciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b] / x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
 - f es estrictamente monótona creciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b] / x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f es monótona decreciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b] / x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
 - f es estrictamente monótona decreciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b] / x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Teorema 16.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente

Entonces $\forall x \in (a, b)$, $\exists f(x^-), f(x^+)$ tales que $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$ y se tiene:

$$\begin{cases} f(x^-) = \sup \{f(t), a < t < x\} \\ f(x^+) = \inf \{f(t), x < t < b\} \end{cases}$$

Además si $x, y \in (a, b)$, $x < y \Rightarrow f(x^+) \leq f(y^-)$

Demostración.

Sea $x \in (a, b)$ fijo y sean los conjuntos $A_x = \{f(t), a < t < x\}$ y $B_x = \{f(t), x < t < b\}$, con $A_x, B_x \neq \emptyset$, es decir, que los valores están definidos en el intervalo.

Entonces tenemos que $f(x)$ es este superior de A (ya que si $t < x \Rightarrow f(t) < f(x)$) y también es este inferior

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Sea $\delta = x - t_0 > 0$; si $x \in (x - \delta, x) \Rightarrow f(x) \in (\xi - \varepsilon, \xi] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Cumple la definición de límite lateral, con lo cual $\xi = f(x^-)$

Veámoslo ahora para η , el proceso es totalmente análogo:

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_1 / x < t_1 < b$, entonces $\eta \leq f(t_1) < \eta + \varepsilon$ por una de las propiedades del supremo.

Como la función f es monótona \Rightarrow si $x < t < t_1$; $\eta \leq f(t) < \eta + \varepsilon$

Sea $\delta = t_1 - x > 0$; si $x \in (x, x + \delta) \Rightarrow f(x) \in [\eta, \eta + \varepsilon) \subset (\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$. Cumple la definición de límite lateral, con lo cual $\eta = f(x^+)$

Además, si $x, y \in (a, b)$, $x < y \Rightarrow \exists t / x < t < y$ tal que $f(x^+) \leq f(t) \leq f(y^-)$

□

Teorema 17.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona. Entonces, si la función presenta discontinuidades, éstas son numerables

Demostración.

Supongamos que la función f es creciente. Sabemos que una función f es discontinua en un punto $\Leftrightarrow f(x^-) < f(x^+)$

Sea $x \in (a, b) / f$ es discontinua en x y sea $r(x) \in \mathbb{Q} / f(x^-) < r(x) < f(x^+)$.

$$\text{Así, tenemos } g := \begin{matrix} \{x \in (a, b) \mid f \text{ discontinua en } x\} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & r(x) \end{matrix}$$

Como sabemos, comprobar la numerabilidad de un conjunto consiste en ver si esta función g es inyectiva.

Sean x_1, x_2 puntos de (a, b) en los cuales f es discontinua, y $x_1 < x_2$. Sabemos que $f(x_1^+) \leq f(x_2^-) \Rightarrow r(x_1) < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < r(x_2) \Rightarrow r(x_1) \neq r(x_2)$

Entonces, g es inyectiva.

□

4.4. Continuidad uniforme

Definición 48. Continuidad uniforme.

Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos y $f : M \rightarrow N$, f es dice uniformemente continua en $M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \in M d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Observación.

1. Si f es uniformemente continua en $M \Rightarrow f$ es continua en M . El recíproco no siempre se cumple.
2. $M = N = \mathbb{R}; f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.
 Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces:
 $|f(x) - f(x + \delta)| = |x^2 - (x + \delta)^2| = |\delta^2 + 2x\delta| = \delta|\delta + 2x| < \delta(\delta + 2x) < 1 < \varepsilon$. Co-
 basta tomar $\delta + 2x > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x > (\frac{1}{\delta} - \delta)\frac{1}{2}$
 mo veremos después, en un intervalo compacto la función si es uniformemente continua
3. (Problema 107). Si $f : M \rightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$ es tal que $\exists L > 0 / |f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y) \forall x, y \in M \Rightarrow f$ es uniformemente continua. Una función así se dice de tipo *lipschitziana* (o de clase Lipschitz)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Como $K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) \Rightarrow K$ es compacto $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / x_1, \dots, x_m \in K \subset \bigcup_{i=1}^m B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ y sea

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} \mid i = 1, \dots, m \right\} > 0$$

Si $x, y \in K$, veamos que $\exists i \in \{1, \dots, m\} / x, y \in B(x_i, \delta_{x_i})$

Como $x \in K \Rightarrow \exists i / x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \Rightarrow d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$

Entonces: $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ \square

Proposición 59. *Sucesiones de Cauchy en funciones uniformemente continuas*

Si $f : M \rightarrow N$ es uniformemente continua, entonces si en M se escoge una sucesión de Cauchy, sus imágenes son también una sucesión de Cauchy

Demostración. [?]

Sean (M, d) y (N, d')

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists \delta > 0$ / para $u, v \in M$ arbitrarios $d(u, v) < \delta \Rightarrow d'(f(u), f(v)) < \varepsilon$

Como $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy, $\exists n_0 / \forall n, m \geq n_0$ se tiene que $|x_m - x_n| < \delta$, como f es uniformemente continua, entonces $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n)$ es una sucesión de Cauchy. \square



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Capítulo 5

Cálculo diferencial

5.1. Derivada de una función

5.1.1. Derivada en un punto. Reglas de cálculo

Definición 49. Derivada en un punto

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$ se llama *derivada* en f en x_0 a

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Observación 22. Interpretación geométrica

pendiente de la secante entre x_0 y $x_0 + h \equiv \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \equiv tg(\alpha)$

pendiente de la tangente en $x_0 \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Observación 23. Notación alternativa

Si llamamos $h = t - t_0$, la derivada queda expresada como $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ y llamamos a éste cociente *cociente incremental*

Proposición 60. Si existe la derivada en un punto, la función es continua en ese punto

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a, b)$ si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0

Demostración.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot 0 = 0 \text{ es decir, } \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad \square$$

Observación 24.

1. El recíproco no se cumple. La función valor absoluto es continua en todo \mathbb{R} , y es derivable en todos los puntos salvo en 0, ya que los límites de la derivada por derecha e izquierda son distintos (ni siquiera existe el límite de la derivada en 0)
2. Existen funciones continuas en todo \mathbb{R} que no son derivables en ningún punto. Weierstrass fue quien lo demostró (ca. 1872). A este tipo de funciones se les conoce como *funciones de Weierstrass*. Por ejemplo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) .$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración. □

$$1. \frac{(f+g)(t)-(f+g)(t_0)}{t-t_0} = \frac{f(t)+g(t)-(f(t_0)+g(t_0))}{t-t_0} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f'(t_0) + g'(t_0)$$

Por tanto $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$

$$2. \frac{(a \cdot f)(t)-(a \cdot f)(t_0)}{t-t_0} = \frac{a \cdot f(t)-a \cdot f(t_0)}{t-t_0} = a \cdot \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \cdot f'(t_0)$$

Por tanto $(a \cdot f)'(t_0) = a \cdot f'(t_0)$

$$3. \frac{(f \cdot g)(t)-(f \cdot g)(t_0)}{t-t_0} \pm f(t) \cdot \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = \frac{(f(t) \cdot g(t)-(f(t_0) \cdot g(t_0)+f(t) \cdot g(t_0)-f(t) \cdot g(t_0))}{t-t_0} = f(t) \cdot \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} + g(t_0) \cdot \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0}$$

$f(t_0) \cdot g'(t_0) + g(t_0) \cdot f'(t_0)$

Por tanto $(f \cdot g)'(t_0) = f(t_0) \cdot g'(t_0) + g(t_0) \cdot f'(t_0)$

4. Como $g(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel$ si $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ $g(t) \neq 0$

Sea $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t)-\left(\frac{f}{g}\right)(t_0)}{t-t_0} = \frac{\frac{f(t)}{g(t)}-\frac{f(t_0)}{g(t_0)}}{t-t_0} = \frac{f(t) \cdot g(t_0)-g(t) \cdot f(t_0)}{g(t) \cdot g(t_0)(t-t_0)} \pm f(t_0) \cdot \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = \frac{g(t_0) \cdot (f(t)-f(t_0))-f(t_0) \cdot (g(t)-g(t_0))}{g(t) \cdot g(t_0)(t-t_0)} = \frac{g(t_0) \cdot (f(t)-f(t_0))}{g(t) \cdot g(t_0)(t-t_0)} -$$

$$\frac{f(t_0) \cdot (g(t)-g(t_0))}{g(t) \cdot g(t_0)(t-t_0)} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \frac{g(t_0)}{g^2(t_0)} \cdot f'(t_0) - \frac{f(t_0)}{g^2(t_0)} \cdot g'(t_0)$$

Por tanto $\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0) = \frac{f'(t_0) \cdot g(t_0)-f(t_0) \cdot g'(t_0)}{g^2(t_0)}$

Proposición 62. Regla de la cadena

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$ y $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R} \parallel$ f es derivable en t_0 , y g es derivable en $f(t_0)$.
Entonces $\exists \delta > 0 \parallel g \circ f$ está definida en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $g \circ f$ es derivable en t_0 y además:

$$(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0)$$

Demostración.

Como $f(t_0) \in (c, d)$ (que es un abierto) $\Rightarrow \varepsilon > 0 \parallel (f(t_0) - \varepsilon, f(t_0) + \varepsilon) \subset (c, d)$.

Además, como f es continua en x_0 , dado ese $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel f(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (f(t_0) - \varepsilon, f(t_0) + \varepsilon) \subset (c, d) \Rightarrow \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ $(g \circ f)(t)$ está bien definido

Sea ahora una función $G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & y \in (c, d), y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$

que es continua en $f(t_0) = y_0$, ya que $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0) = G(y_0)$

$g(y) - g(y_0) = G(y) \cdot (y - y_0)$ $y \in (c, d)$ tomando $y = f(t)$ $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ dividimos por $t - t_0$:

$$\frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{t-t_0} = G(f(t)) \cdot \frac{y-y_0}{t-t_0}$$

Ahora bien, como $t \rightarrow t_0$ es lo mismo que $f(t) \rightarrow f(t_0) = y \rightarrow y_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{t-t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} G(y) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = (g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0).$$

Por tanto $(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0)$ □

Proposición 63. Derivada de la función inversa

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, estrictamente monótona y continua; y sea $f^{-1} : I \rightarrow (a, b)$ ($I = f(a, b)$ es un intervalo; f^{-1} es continua y estrictamente monótona)

Sea $t_0 \in (a, b) \parallel f$ es derivable en t_0 y $f^{-1}(t_0) \neq 0$; entonces f^{-1} es derivable en $f(t_0)$ y:

$$(f^{-1})'(f(t_0)) = \frac{1}{f'(t_0)}$$

Demostración.

Supongamos demostrado que f^{-1} es derivable en $f(t_0) = y_0$ y llamamos $g = f^{-1} \Rightarrow g(f(t)) = t$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



5.1.2. Función derivada. Máximos y mínimos de una función

Definición 50. Función derivada

Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall t \in (a, b)$, se llama función derivada a:

$$\begin{array}{lcl} f'(a, b) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

Definición 51. Función diferenciable

En concepto de función diferenciable es una generalización de la derivabilidad, pero en un espacio cualquiera, y con varias variables.

Si $f^{-1}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $t_0 \in (a, b)$, se llama *diferencial de f en t₀* a:

$$R(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad t \in (a, b)$$

Lema 2.

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en t_0 . Entonces:

1. Si $f'(t_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $s \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow f(t) < f(t_0) < f(s)$
2. Si $f'(t_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $s \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow f(t) > f(t_0) > f(s)$

Demostración. □

1. Si $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} > 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel \text{si } |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - f'(t_0) \right| < \varepsilon)$

Como $f'(t_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel |h| < \delta \Rightarrow \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} > 0$

Si $0 < h < \delta \Rightarrow f(t_0 + h) > f(t_0)$. Si llamamos a $t_0 + h = s \Rightarrow s \in (t_0, t_0 + \delta)$

Si $-\delta < h < 0 \Rightarrow f(t_0 + h) < f(t_0)$. Si llamamos $t_0 + h = t \Rightarrow t \in (t_0 - \delta, t_0)$

2. Si $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} < 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel \text{si } |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - f'(t_0) \right| < \varepsilon)$

Como $f'(t_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel |h| < \delta \Rightarrow \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} < 0$

Si $0 < h < \delta \Rightarrow f(t_0 + h) < f(t_0)$. Si llamamos a $t_0 + h = s \Rightarrow s \in (t_0, t_0 + \delta)$

Si $-\delta < h < 0 \Rightarrow f(t_0 + h) > f(t_0)$. Si llamamos $t_0 + h = t \Rightarrow t \in (t_0 - \delta, t_0)$

Definición 52. Máximos y mínimos relativos (o locales)

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, b)$

1. Decimos que c es un *máximo relativo* (o local) de f en ese intervalo si y sólo si $\exists \delta > 0 \parallel t \in (c - \delta, c + \delta) \quad f(t) \leq f(c)$
2. Decimos que c es un *mínimo relativo* (o local) de f en ese intervalo si y sólo si $\exists \delta > 0 \parallel t \in (c - \delta, c + \delta) \quad f(c) \leq f(t)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración.

Por el lema anterior si $f'(c) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in (c - \delta, c)$ y $s \in (c, c + \delta) \Rightarrow f(t) < f(c) < f(s)$, que contradice que c es máximo o mínimo relativo de f

Por otra parte, si $f'(c) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in (c - \delta, c)$ y $s \in (c, c + \delta) \Rightarrow f(s) < f(c) < f(t)$, que contradice que c es máximo o mínimo relativo de f

Con lo cual, necesariamente $f'(c) = 0$ □

Teorema 20. *Teorema de Rolle*

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces

$$\exists c \in (a, b) \parallel f'(c) = 0$$

Demostración.

Como $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, por el teorema de Weierstrass, la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a, b]$

Caso 1. Si $\exists t \in (a, b) \parallel f(t) < f(a) = f(b) \Rightarrow$ el mínimo absoluto se alcanza en $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$

Caso 2. Si $\exists t \in (a, b) \parallel f(a) = f(b) < f(t) \Rightarrow$ el máximo absoluto se alcanza en $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$

Caso 3. Si $\forall t \in (a, b)$ se tiene que $f(t) = f(a) = f(b) \Rightarrow f$ es constante en $(a, b) \Rightarrow f'(t) = 0 \forall t \in (a, b)$ □

Teorema 21. *Teorema del valor medio (o de los incrementos finitos)*

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b) . Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración.

Sea $g(x) = f(x) - \lambda x$ λ a elegir para g , que cumple el teorema de Rolle
 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b)

Para que cumpla el teorema de Rolle $g(a) = g(b) \Rightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b; \lambda(b - a) = f(b) - f(a) \Rightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\exists c \in (a, b) \parallel g'(c) = 0 \rightarrow f'(c) - \lambda \Leftrightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
 □

Proposición 64. *Derivabilidad y carácter de una función*

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable

1. Si $f(t) \leq 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow f$ es monótona decreciente
2. Si $f(t) < 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Si $f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(t_2) \geq f(t_1)$
4. Si $f'(c) > 0 \Rightarrow f(t_2) > f(t_1)$

□

Teorema 22. Teorema del valor medio generalizado

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y derivables en $(a, b) \parallel g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración.

Sea $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \parallel H(t) = f(t) - \lambda g(t)$; λ a elegir. Además, H , que cumple el teorema de Rolle, es derivable en (a, b) .

$H(a) = f(a) - \lambda g(a) = H(b) = f(b) - \lambda g(b)$; Entonces, despejando $\lambda : \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Como cumple el teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b) \parallel H'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ □

Teorema 23. Teorema de Darboux (o de los valores intermedios de la derivada)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable (pero con derivada no necesariamente continua) y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f'(a) < f'(b)$. Entonces, si $f'(a) < k < f'(b)$, se tiene que:

$$\exists c \in (a, b) \parallel f'(c) = k$$

Demostración.

Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \parallel g(x) = f(x) - kx$. Como g es continua y está definida en un intervalo cerrado, por el teorema de Weierstrass, g alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a, b]$. Entonces:

$$\begin{aligned} g'(a) &= f'(a) - k < 0 \\ g'(b) &= f'(b) - k > 0 \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que el mínimo no se alcanza ni en a ni en b . El mínimo se alcanzará en un $c \in (a, b) \parallel g'(c) = 0 = f'(c) - k \Rightarrow f'(c) = k$ □

5.2.2. Aplicaciones de la derivada

Definición 53. Concavidad y convexidad

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $t_0 \in (a, b)$, entonces:

1. f es cóncava (mirada desde $+\infty$) en $t_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad (t \neq t_0)$
2. f es convexa (mirada desde $+\infty$) en $t_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad (t \neq t_0)$

Es decir, si la recta tangente en un punto (de ecuación $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$) está por encima (respec. debajo) la función en ese punto es cóncava (respec. convexa)

Definición 54. Derivadas sucesivas

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y sea $\begin{matrix} f'(a, b) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'(t) \end{matrix}$, entonces:

1. Si f' es derivable $\Rightarrow f''(t) = (f')'(t)$ y se llama a ésta *derivada segunda*.
2. Sucesivamente se tiene $f^{(k)}(t) = (f^{(k-1)})'(t) \quad k = 1, \dots$. Por convenio se considera $f^{(0)} \equiv f$
3. Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es de clase $\mathcal{C}^k(a, b) \quad k = 1, 2, 3, \dots$ se f tiene k derivadas en (a, b)

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



$$3. f'(\xi) < f'(t_0) \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in (t_0, b)$$

$$4. f'(\xi) > f'(t_0) \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in (t_0, b)$$

El apartado 1. viene a decir que si la derivada es creciente, la imagen está por encima de la recta tangente, esto es, la gráfica es cóncava. En 2. que es convexa a la izquierda de t_0 . En 3. la función es convexa a la derecha de t_0 . En 4. que es cóncava.

Demostración.

$$\text{Si } t \in (a, t_0) \stackrel{TVM}{\Rightarrow} \exists \eta \in (t, t_0) \parallel \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(\eta) \Leftrightarrow f(t) = f(t_0) + f'(\eta)(t - t_0) <^0 \quad \square$$

1. Teníamos por hipótesis que $f'(\eta) < f'(t_0)$, luego $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} < f'(t_0) \Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ (Como $t - t_0 < 0$, al multiplicar a ambos lados por un número negativo cambia la desigualdad.)

$$2. \Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

$$\text{Ahora si } t \in (t_0, b) \stackrel{TVM}{\Rightarrow} \exists \xi \in (t_0, t) \parallel \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(t) = f(t_0) + f'(\xi)(t - t_0) >^0$$

3. Teníamos por hipótesis que $f'(\xi) < f'(t_0)$, luego $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} < f'(t_0) \Rightarrow f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ (Como $t - t_0 > 0$, al multiplicar a ambos lados por un número positivo la desigualdad se mantiene)

$$4. \Rightarrow f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Corolario 9.

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y $t_0 \in (a, b)$. Entonces:

1. $f'(\eta) < f'(t_0) < f'(\xi) \quad \forall \eta \in (a, t_0), \quad \forall \xi \in (t_0, b)$
 $f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$
 Si $f''(t_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel f'(\eta) < f'(t_0) < f'(\xi) \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow$
 $f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad t \neq t_0$
 Es decir, que la función es cóncava en t_0

2. Si $f'(\eta) > f'(t_0) > f'(\xi) \quad \forall \eta \in (a, t_0), \quad \forall \xi \in (t_0, b)$
 $f(t) > f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$
 Si $f''(t_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel f'(\eta) > f'(t_0) > f'(\xi) \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow$
 $f(t) < f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad t \neq t_0$
 Es decir, que la función es convexa en t_0

Demostración.

1. Es "suma" de los apartados 1. y 3. de la proposición anterior:
 Si $f''(t_0) > 0 \quad f''(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t)-f'(t_0)}{t-t_0} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel f'(\eta) < f'(t_0) < f'(\xi) \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta)$

2. Es "suma" de los apartados 2. y 3. de la proposición anterior:
 Si $f''(t_0) < 0 \quad f''(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t)-f'(t_0)}{t-t_0} < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel f'(\eta) > f'(t_0) > f'(\xi) \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0), \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta)$

Corolario 10.

Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Si $f'(\eta) \leq 0 \quad \forall \eta \in (a, t_0)$ y $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow t_0$ es mínimo absoluto de f en (a, b)
 En particular, si $f''(t_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel f'(\eta) < 0 \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow t_0$ es un mínimo relativo de f en (a, b)
- Si $f'(\eta) \geq 0 \quad \forall \eta \in (a, t_0)$ y $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in (t_0, b) \Rightarrow t_0$ es máximo absoluto de f en (a, b)
 En particular, si $f''(t_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel f'(\eta) > 0 \quad \forall \eta \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $f'(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in (t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow t_0$ es un máximo relativo de f en (a, b)

Demostración.

$$\text{Sea } t \in (a, b) \quad \begin{array}{l} \text{si } t \in (a, t_0) \xrightarrow{TVM} \exists \eta \in (t, t_0) \parallel \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(\eta) \\ \text{si } t \in (t_0, b) \xrightarrow{TVM} \exists \xi \in (t_0, t) \parallel \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(\xi) \end{array}$$

- $f'(\eta) \leq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \geq 0 \Rightarrow f(t_0)$ vale menos que en cualquier punto de $f \Rightarrow t_0$ es mínimo absoluto
 $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \geq 0$
- $f'(\eta) \geq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \leq 0 \Rightarrow f(t_0)$ vale más que en cualquier punto de $f \Rightarrow t_0$ es máximo absoluto
 $f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow f(t) - f(t_0) \leq 0$

Faltan los "en particular"

□

Definición 55. Punto de inflexión

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y $t_0 \in (a, b) \parallel f'(t_0) = 0$

Si $f'(\eta) \geq 0$ y $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \eta, \xi \in (a, b)$ o

Si $f'(\eta) \leq 0$ y $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \eta, \xi \in (a, b)$

Entonces se dice que t_0 es un punto de inflexión

Observación 25. Si $f'(t_0) = 0$ y $f''(t_0) = 0$ no puede asegurarse con certeza lo que ocurre en t_0

5.2.3. Reglas de l'Hôpital

Teorema 24. 1ª regla de l'Hôpital

Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

- Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$. Entonces si

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$
- Supongamos que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$. Entonces si

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Demostración.

1) (2) es análogo

- Supongamos que $a \in \mathbb{R}$
- Supongamos que $A \in \mathbb{R}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Supongamos que $A = \infty$ (para $A = -\infty$ de forma análoga).

Dado $k > 0 \exists x_0 \in (a, b)$ si $x \in (a, x_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > k$

Llamamos $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$; $g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$; Misma razón que antes.

Si $x \in (a, x_0)$, por el teorema del valor medio:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > k$$

\uparrow
 $\exists c \in (a, x) \subset (a, x_0)$

Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \tag{5.2.2}$$

- Supongamos que $a = -\infty$

Podemos suponer que b es negativo ($b < 0$) (y en caso de que no lo fuera cortamos (a, b) por un punto b'

tal que (a, b') sea enteramente negativo) y definimos $\begin{cases} F(t) = f(\frac{1}{t}) \\ G(t) = g(\frac{1}{t}) \end{cases}$ tal que: $\frac{1}{t} \in (-\infty, b) \Leftrightarrow t \in (\frac{1}{b}, 0)$

Entonces:

$$F, G : \left(\frac{1}{b}, 0\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que:} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} G(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \end{cases} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{cases} F'(t) = f'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ G'(t) = g'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right) \end{cases}$$

$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}$. Si llamamos a $1/t = t$, hemos de cambiar el límite: $0^- = a^+$, luego:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A.$$

Por 5.2.1, sabemos que $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)}$ y por 5.2.3, $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t)}{g(t)}$, luego uniendo, tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A$$

La idea reside en transformar $-\infty$ en 0 con el cambio $t \rightsquigarrow 1/t$ y la clave está en que el cociente de derivadas mantiene el cambio. □

Teorema 25. 2ª regla de l'Hôpital

Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

1. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$. Entonces si

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

2. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$. Entonces si

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Demostración.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Con $x \in (a, x_0)$, por el TVM $\exists c \in (x, x_0) \parallel \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0)$.

$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$, sumemos y restemos $\frac{f'(c)}{g'(c)}$, y sustituimos $\frac{f(x)}{g(x)}$ por $\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0)$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| |D(x, x_0) - 1| \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \varepsilon + (|A| + \varepsilon) |D(x, x_0) - 1|$$

Sea $x'_0 \in (a, b) \parallel$ si $x \in (a, x_0)$ $|D(x, x_0) - 1| < \varepsilon$

Sea $x''_0 = \min \{x_0, x'_0\}$ si $x \in (a, x''_0)$ $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \varepsilon + (|A| + \varepsilon) \cdot \varepsilon$

Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (5.2.4)$$

- Supongamos $A = +\infty$ ($A = -\infty$ es análogo)

Dado $k > 0$ $\exists x_0 \in (a, b) \parallel$ si $x \in (a, x_0) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > k$

De la misma forma que antes, si $x \in (a, x_0)$ definimos $D(x, x_0) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot D(x, x_0)$ y así $D(x, x_0) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 1$ (x_0 fijo)

En particular $\exists x'_0 \in (a, x_0) \parallel$ si $x \in (a, x'_0)$ $D(x, x_0) > \frac{1}{2}$

Con $x \in (a, x_0) \xrightarrow{TVM} \exists c \in (x, x_0) \parallel \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0)$

Si $x \in (a, x'_0) \subset (a, x_0)$ se tiene que $\frac{f(x)}{g(x)} \geq k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

- Supongamos $a = -\infty$

Podemos suponer que b es negativo ($b < 0$) (y en caso de que no lo fuera cortamos (a, b) por un punto b' tal que (a, b') sea enteramente negativo) y definimos:

$$\begin{aligned} F(t) &= f\left(\frac{1}{t}\right) & \frac{1}{t} \in (-\infty, b) &\Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{b}, 0\right) \\ G(t) &= g\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} G(t) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \end{aligned}$$

$F(t), G(t)$ derivables en $\left(\frac{1}{b}, 0\right)$

$$F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad (\neq 0 \quad \forall t \in \left(\frac{1}{b}, 0\right)) \text{ y } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = A$$

Luego:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (5.2.5)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Consideremos un polinomio $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ $a_i, t \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Es posible expresar el polinomio en potencias de mi elección?. Más concretamente, en potencias de $(t - t_0)$; de tal forma que $P(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \dots + b_n(t - t_0)^n$ ¿Cuales serían estos b_i ?

Veamos que pasa:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= P(t_0) \\
 \text{¿}b_1\text{?} &: P'(t) = b_1 + 2b_2(t - t_0) + 3b_3(t - t_0)^2 + \dots + nb_n(t - t_0)^{n-1} \\
 b_1 &= P'(t_0) \\
 \text{¿}b_2\text{?} &: P''(t) = 2b_2 + 6b_3(t - t_0) + \dots + n(n-1)b_n(t - t_0)^{n-2} \\
 b_2 &= \frac{P''(t_0)}{2!} \\
 b_3 &= \frac{P'''(t_0)}{3!} \\
 &\vdots \\
 b_j &= \frac{P^{(j)}(t_0)}{j!}
 \end{aligned}$$

Luego nuestro polinomio ha quedado: $P(t) = P(t_0) + \frac{P'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{P''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{P'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$

Observación 27. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con n derivadas en (a, b) y sea $t_0 \in (a, b)$. Entonces el polinomio $P_n(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$

$$\begin{aligned}
 &t \in (a, b) \\
 P_n(t_0) &= f(t_0) \quad P'(t_0) = f'(t_0) \quad \dots P^{(j)}(t_0) = f^{(j)}(t_0) \quad \forall j = 0, \dots, n
 \end{aligned}$$

Observación 28. Si $n = 1$, el polinomio $P_1(t_0)$ que resulta es: $P(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \equiv R(t)$ $R(t_0) = f(t_0)$ $R'(t_0) = f'(t_0)$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - R(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)}{t - t_0} = f'(t) - f'(t) = 0 \Rightarrow f(t) - R(t) < t - t_0$$

El límite del cociente es 0. Por eso, informalmente, podemos decir que $f(t)$ y $R(t)$ se parecen más que t y t_0

Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene $n + 1$ derivadas en (a, b) y $t_0 \in (a, b)$, entonces el polinomio $P_n(t)$

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!} (t - t_0)^j$$

Teorema 26. Teorema de Taylor

Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene $n + 1$ derivadas en (a, b) y $t_0 \in (a, b)$, entonces si $t \in (a, b)$ $\exists c \in (a, b)$ entre t_0 y t ($c \in (t_0, t)$ ó $c \in (t, t_0)$)

$$f(t) = \underbrace{f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n}_{\text{polinomio de Taylor de orden en } t_0 \quad P_n(t)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}}_{\text{resto de Lagrange en } t_0 \quad L_n(t, t_0)}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 - - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F^{n+1}(c)}{G^{n+1}(c)} = \frac{f^{n+1}(c) - P_n^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

Pasando $G(t)$ multiplicando:

$$f(t) - P_n(t) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1}$$

□

Lema 3.

Sean $F, G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $n + 1$ derivadas en (a, b) y además $G^{(k)}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b) \setminus \{t_0\} \quad k = 0, \dots, n + 1$

y supongamos $\lim_{t \rightarrow t_0} F^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} G^{(k)}(t) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n$

Entonces, si $t \in (a, b) \quad \exists c$ entre t y t_0 tal que

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F^{n+1}(c)}{G^{n+1}(c)}$$

Demostración.

Tengamos presente en todo momento que $\lim_{t \rightarrow t_0} F^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} G^{(k)}(t) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n$, lo que hace que $F^{(k)}(t_0) = G^{(k)}(t_0) = 0$

Si $t \in (a, b) \setminus \{t_0\} \stackrel{TVM}{\Rightarrow} \exists c_1$ entre t y t_0 tal que

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F'(c_1) - F'(t_0)}{G'(c_1) - G'(t_0)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$

De la misma forma, por el teorema del valor medio, si $\exists c_2$ entre c_1 y t_0 tal que

$$\frac{F'(c_1) - F'(t_0)}{G'(c_1) - G'(t_0)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

Aplicando sucesivamente el teorema del valor medio, llegamos a que $\exists c_{n+1}$ entre c_n y t_0 tal que

$$\frac{F^{n+1}(c_{n+1})}{G^{n+1}(c_{n+1})} = \dots = \frac{F^{(j)}(c_j)}{G^{(j)}(c_j)} = \dots = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F(t)}{G(t)} \quad (5.3.1)$$

□

Teorema 27. *Criterio del máximo y mínimo local*

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $n + 1$ derivadas y sea $t_0 \in (a, b) \parallel 0 = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0), f^{(n)}(t_0) \neq 0$ y $f^{(n+1)}$ es acotada en un intervalo en torno a t_0 . Entonces si:

1. Si n es par y $f^{(n)}(t_0) > 0 \Rightarrow t_0$ es un mínimo local de f
2. Si n es par y $f^{(n)}(t_0) < 0 \Rightarrow t_0$ es un máximo local de f
3. Si n es impar y $\Rightarrow t_0$ es un punto de inflexión de f

Demostración.

Por el teorema de Taylor

Dado $t \in (a, b) \quad \exists c \in (a, b)$ entre t_0 y $t \parallel f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1}$ y sabemos que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

1. Si n es par y $f^{(n)}(t_0) > 0$

$$\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n + L_n(t, t_0) \geq \frac{1}{2n!} f^{(n)}(t_0) (t - t_0)^n \geq 0; \quad f(t) \geq f(t_0) \quad \forall t \text{ con } |t - t_0| < \delta \Leftrightarrow t_0 \text{ es m\u00ednimo local.}$$

\u00bfPor qu\u00e9? $L_n(t, t_0)$, a\u00fan siendo negativo, al sumarle $\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$ le estar\u00edamos quitando como mucho la mitad (por 5.3.2), con lo cual la derivada n -\u00e9sima seguir\u00eda siendo positiva y en t_0 tendr\u00edamos un m\u00ednimo local.

2. Si n es par y $f^{(n)}(t_0) < 0$

$$f(t) - f(t_0) \leq \frac{1}{2} f^{(n)}(t_0) (t - t_0)^n \leq 0 \Rightarrow f(t) \leq f(t_0) \quad \forall t \text{ con } |t - t_0| < \delta \Leftrightarrow t_0 \text{ es m\u00e1ximo local}$$

\u00bfPor qu\u00e9? $L_n(t, t_0)$, a\u00fan siendo positivo, al sumarle $\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$ le estar\u00edamos sumando como mucho la mitad (por 5.3.2), con lo cual la derivada n -\u00e9sima seguir\u00eda siendo negativa y en t_0 tendr\u00edamos un m\u00e1ximo local.

3. Si n es impar:

$$f^{(n)} > 0 \begin{cases} t \in (t_0, t_0 + \delta) & f(t) \geq f(t_0) \\ t \in (t_0 - \delta, t_0) & f(t) \leq f(t_0) \end{cases}$$

En todos los casos t_0 es un punto de inflexi\u00f3n

$$f^{(n)} < 0 \begin{cases} t \in (t_0, t_0 + \delta) & f(t) \leq f(t_0) \\ t \in (t_0 - \delta, t_0) & f(t) \geq f(t_0) \end{cases}$$

□



**CLASES PARTICULARES, TUTOR\u00cdAS T\u00c9CNICAS ONLINE
LLAMA O ENV\u00cdA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Capítulo 6

Cálculo integral

6.1. La integral de Riemann

6.1.1. Particiones. Sumas de Riemann

Definición 56. Partición de un intervalo

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado, entonces una partición suya p es:

$$p = \{t_i\}_{i=0}^n \quad n \in \mathbb{N} \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

Si p, q son particiones de $[a, b]$, se dice que p es más fina que $q \Leftrightarrow q \subset p$

Definición 57. Sumas de Riemann

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea p una partición de $[a, b]$

1. Se llama suma inferior de Riemann de f asociada a p a: $s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1})$;

siendo $m_j = \inf \{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Por tanto la suma inferior es la suma de las áreas de los rectángulos de la partición por debajo de la función.

2. Se llama suma superior de Riemann de f asociada a p a: $S(f, p) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1})$;

siendo $M_j = \sup \{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Por tanto la suma superior es la suma de las áreas de los rectángulos de la partición por encima de la función.

Proposición 66.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, y sean p, q particiones de $[a, b]$

1. $s(f, p) \leq S(f, p)$
2. Si p es más fina que q , entonces: $s(f, q) \leq s(f, p) \leq S(f, p) \leq S(f, q)$
3. Si p, q son dos particiones cualesquiera: $s(f, p) \leq S(f, q)$

Demostración.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

a) Supongamos que p tiene un punto más que q :

$$q = \{t_j\} \quad a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b \text{ y}$$

$$p = q \cup \{z\} \quad a = t_0 < \dots < t_{k-1} < z < t_k < \dots < t_n = b$$

$$s(f, p) = \sum_{j=1}^{k-1} m_j (t_j - t_{j-1}) + m'_k (z - t_{k-1}) + m''_k (t_k - z) + \sum_{j=k+1}^n m_j (t_j - t_{j-1})$$

siendo, obviamente $m'_k = \inf \{f(t) \mid t \in [t_{k+1}, z]\}$ y $m''_k = \inf \{f(t) \mid t \in [z, t_k]\}$

$$\text{Luego } m_k = \inf \{f(t) \mid t \in [t_{k-1}, t_k]\} \leq \min \{m'_k, m''_k\}$$

$$m'_k (z - t_{k-1}) + m''_k (t_k - z) \geq m_k (z - t_{k-1}) + m_k (t_k - z) = m_k (t_k - t_{k-1})$$

$$s(f, p) \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j (t_j - t_{j-1}) + m_k (t_k - t_{k-1}) + \sum_{j=k+1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) = s(f, q) \quad // \text{no se si la primera es una suma inferior o superior}$$

b) Supongamos que p tiene J puntos más que q :

$$p = q \cup \{z_j\}_{j=1}^J$$

$$1) \text{ Sea } p_1 = q \cup \{z_1\} \Rightarrow s(f, p_1) \geq s(f, q)$$

$$2) \text{ Sea } p_2 = p_1 \cup \{z_2\} \Rightarrow s(f, p_2) \geq s(f, p_1)$$

...inducción

$$p_J = p_{J-1} \cup \{z_J\} \Rightarrow s(f, p) \geq s(f, p_{J-1})$$

$$\text{Todo ello implica que } s(f, p) \geq s(f, q)$$

3. Si p, q particiones de $[a, b]$

Sea la partición $\tilde{p} = p \cup q$; más fina que p y que q

$$s(f, p) \leq s(f, \tilde{p}) \leq S(f, \tilde{p}) \leq S(f, q)$$

1)

6.1.2. La integral de Riemann

6.1.2.1. Integrales superior e inferior

Definición 58. Integral superior e inferior de Riemann

Sea $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$

1. Llamamos integral superior de Riemann de f en $[a, b]$ a:

$$\int_a^b f(t) dt = \inf \{S(f, p) \mid p \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

2. Llamamos integral inferior de Riemann de f en $[a, b]$ a:

$$\int_a^b f(t) dt = \sup \{s(f, p) \mid p \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

3. f es **integrable-Riemann** en $[a, b]$ si y sólo si:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt, \text{ y en ese caso se escribe } \int_a^b f(t) dt$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Ejemplo 16. Integral de una constante

Sea $f(t) = c \quad t \in [a, b]$ es integrable y $\int_a^b c dt = c(b-a)$

Cogemos p una partición cualquiera:

$$s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c (t_j - t_{j-1}) = c \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = c(b-a)$$

$\sum (t_j - t_{j-1})$ puede interpretarse esa suma como una telescópica, o bien directamente como la longitud del intervalo.

$$S(f, p) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c (t_j - t_{j-1}) = c \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = c(b-a)$$

Como ambas sumas son iguales, f es integrable-Riemann, y $\int_a^b c dt = c(b-a)$

Ejemplo 17. Integral de la identidad

Sea $f(t) = t \quad t \in [0, 1]$ es integrable-Riemann y $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$

Sea $n \in \mathbb{N} \quad p_n = \{t_j = \frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ una partición de $[0, 1] \in \mathcal{P}([0, 1])$

$$\begin{aligned} s(f, p_n) &= \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) \underset{m_j=t_{j-1}; f \text{ creciente}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^n j-1 \underset{j=k-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S(f, p_n) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1}) \underset{M_j=t_j; f \text{ creciente}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}$$

Por tanto $\sup_n s(f, p_n) = \frac{1}{2} = \inf_n S(f, p_n)$, para esta partición p_n concreta.

$$\text{Como } \begin{cases} \sup_n s(f, p_n) \leq \int_a^b t dt \\ \inf_n S(f, p_n) \geq \int_a^b t dt \end{cases} \Rightarrow \int_a^b t dt = \int_a^b t dt$$

Ejemplo 18. Integral de la función cuadrado

Sea $f(t) = t^2 \quad t \in [0, 1]$ es integrable y $\int_a^b t^2 dt = \frac{1}{3}$

Sea $n \in \mathbb{N} \quad p_n = \{t_j = \frac{j}{n}\}_{j=0}^n$

$$s(f, p_n) = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (j-1)^2 \underset{k=j-1}{=} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+1)n(2n-1)}{6}$$

Por tanto, $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) < \frac{1}{3}$

$$S(f, p_n) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n j^2 = \frac{1}{n^3} \cdot (n+1)n(2n-1) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) > \frac{1}{3}$$

Por tanto $\sup_n s(f, p_n) = \frac{1}{3} = \inf_n S(f, p_n)$, para esta partición p_n concreta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_n s(f, p_n) \leq \int_a^b t^2 dt \\ \inf_n S(f, p_n) \geq \int_a^b t^2 dt \end{array} \right. \Rightarrow \int_a^b t^2 dt = \int_a^b t^2 dt$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

6.1.2.2. Funciones Riemann-integrables

Teorema 28. Una función es Riemann-integrable si la distancia entre sus sumas es menor que ε
 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es Riemann-integrable si, y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathcal{P}([a, b]) \quad (0 \leq) S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon$$

Observación 31. Denotaremos a partir de ahora por $\mathcal{R}(I)$ al conjunto de funciones Riemann-integrables en el intervalo I .

Demostración.

\Rightarrow |

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\text{Como } \int_a^b f(t) dt = \inf \{S(p, f) \mid p \in \mathcal{P}([a, b])\} \Rightarrow \exists p_1 \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \left(\int_a^b f(t) dt \leq \right) S(f, p_1) \leq \int_a^b f(t) dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Como } \int_a^b f(t) dt = \sup \{s(p, f) \mid p \in \mathcal{P}([a, b])\} \Rightarrow \exists p_2 \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \int_a^b f(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, p_2) \leq \left(\int_a^b f(t) dt \right)$$

Sea $p = p_1 \cup p_2$ (más fina que p_1 y p_2) $\Rightarrow s(f, p_2) \leq s(f, p) \leq S(f, p) \leq S(f, p_1) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, p_2) \leq s(f, p) \leq S(f, p) \leq S(f, p_1) \leq \int_a^b f(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon$$

| \Leftarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \int_a^b f(t) dt \leq S(f, p_\varepsilon) \leq s(f, p_\varepsilon) + \varepsilon \leq \int_a^b f(t) dt + \varepsilon$$

Como es $\forall \varepsilon > 0 \quad \left(\int_a^b f(t) dt \leq \right) \overline{\int_a^b f(t) dt} \leq \int_a^b f(t) dt \Rightarrow \overline{\int_a^b f(t) dt} = \int_a^b f(t) dt \Rightarrow f$ es Riemann-integrable □

Corolario 12.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y supongamos que $\forall N \in \mathbb{N} \quad p_N \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$(0 \leq) S(f, p_N) - s(f, p_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Entonces f es Riemann-integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} S(f, p_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} s(f, p_N)$

Demostración. □

Teorema 29. Las funciones acotadas y continuas son Riemann-integrables

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada

1. Si f es monótona $\Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a, b]$
2. Si f es continua $\Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a, b]$

Demostración.

$$\text{Sea } p \in \mathcal{P}([a, b]) \quad S(f, p) - s(f, p) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) (t_j - t_{j-1}) \quad \square$$

1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que f es monótona creciente.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$S(f, p) - s(f, p) \leq \frac{\varepsilon}{1+f(b)-f(a)} \cdot \underbrace{\sum (f(t_j) - f(t_{j-1}))}_{f(b)-f(a)} \Rightarrow S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon$$

2. Como f es continua en $[a, b] \Rightarrow f$ es uniformemente continua, luego:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, s \in [a, b] \quad ||t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (partido de $b - a$ para que quede bonito)

Dado $\varepsilon > 0$, $p \in \mathcal{P}([a, b])$

$M_j = \sup \{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} = f(t_j^*)$ para un $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$

$m_j = \inf \{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} = f(s_j^*)$ para un $s_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$

Luego $\max \{t_j - t_{j-1} \quad j = 1, \dots, n\} \leq \delta$

$$S(f, p) - s(f, p) = \sum (f(t_j^*) - f(s_j^*)) (t_j - t_{j-1})$$

como $|t_j^* - s_j^*| < \delta \Rightarrow f(t_j^*) - f(s_j^*) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, por ser uniformemente continua.

Luego $S(f, p) - s(f, p) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b - a = \varepsilon$

Teorema 30. Las funciones Riemann-integrables tienen estructura de espacio vectorial
Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado

1. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son Riemann-integrables, entonces:

a) $c \cdot f$ es integrable $\forall c \in \mathbb{R}$ y $f + g$ también lo es, además:

$$\int_a^b c \cdot f(t) dt = c \cdot \int_a^b f(t) dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

b) *Observación:* De hecho $\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal.

2. Si f es Riemann-integrable $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0$

3. Si $f(t) \leq g(t) \quad \forall t \in [a, b]$ y f, g son Riemann-integrables $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

4. Sea $c \in (a, b)$ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable $\Leftrightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, y en ese caso $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

Demostración.

1a. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable, $c \in \mathbb{R}$, $p \in \mathcal{P}([a, b])$

$s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1})$ y $S(f, p) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1})$

Supongamos que $c > 0$

$$\begin{aligned} m_j(c \cdot f) &= c \cdot m_j(f) & s(c \cdot f, p) &= c \cdot s(f, p) \\ M_j(c \cdot f) &= c \cdot M_j(f) & S(c \cdot f, p) &= c \cdot S(f, p) \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\begin{aligned} \sup_{p \in \mathcal{P}([a,b])} s(c \cdot f, p) &= c \cdot \inf_{p \in \mathcal{P}([a,b])} S(f, p) = c \cdot \int_a^b f(t) dt \\ \inf_{p \in \mathcal{P}([a,b])} S(c \cdot f, p) &= c \cdot \sup_{p \in \mathcal{P}([a,b])} s(f, p) = c \cdot \int_a^b f(t) dt \end{aligned} \Rightarrow c \cdot f \text{ es Riemann-integrable y } \int_a^b c \cdot f(t) dt = c \cdot \int_a^b f(t) dt$$

1b. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrables y sea una partición $p \in \mathcal{P}([a, b])$
 $s(f + g, p) = \sum_{j=1}^n m_j(f + g)(t_j - t_{j-1})$ y $S(f + g, p) = \sum_{j=1}^n M_j(f + g)(t_j - t_{j-1})$

$$\begin{aligned} m_j(f + g) &= \inf \{f(t) + g(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} \geq \inf \{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} + \inf \{g(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} \\ M_j(f + g) &= \sup \{f(t) + g(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} \leq \sup \{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} + \sup \{g(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} \end{aligned}$$

Luego:
$$\begin{cases} s(f + g, p) \geq s(f, p) + s(g, p) \\ S(f + g, p) \leq S(f, p) + S(g, p) \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$
$$\begin{aligned} \exists p_\varepsilon^1 \parallel S(f, p_\varepsilon^1) - s(f, p_\varepsilon^1) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (*) \\ \exists p_\varepsilon^2 \parallel S(g, p_\varepsilon^2) - s(g, p_\varepsilon^2) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Sea $p_\varepsilon = p_\varepsilon^1 \cup p_\varepsilon^2$, más fina que p_ε^1 y p_ε^2

$$\begin{aligned} S(f + g, p_\varepsilon) &\leq S(f, p_\varepsilon) + S(g, p_\varepsilon) \leq S(f, p_\varepsilon^1) + S(g, p_\varepsilon^2) \stackrel{(*)}{\leq} (s(f, p_\varepsilon^1) + \frac{\varepsilon}{2}) + (s(g, p_\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon}{2}) = s(f, p_\varepsilon^1) + s(g, p_\varepsilon^2) + \varepsilon \leq \\ &\leq \underbrace{s(f, p_\varepsilon) + s(g, p_\varepsilon) + \varepsilon}_{(**)} \leq \underbrace{s(f + g, p_\varepsilon) + \varepsilon}_{(***)} \Rightarrow S(f + g, p_\varepsilon) - s(f + g, p_\varepsilon) \leq \varepsilon \Rightarrow f + g \text{ es Riemann-integrable} \end{aligned}$$

(*) Aclaración: Vale, se tiene las sumas de $f + g$ entre medias de las de f y g (por separado, pero para particiones distintas). Para concluir algo necesito que la partición sea la misma para ambas.

Además, $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_a^b (f + g)(t) dt \leq S(f + g, p_\varepsilon) \stackrel{(**)}{\leq} \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt + \varepsilon \Rightarrow \int_a^b (f + g)(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

y también

$$\int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \leq S(f, p_\varepsilon) + S(g, p_\varepsilon) \stackrel{(***)}{\leq} s(f + g, p_\varepsilon) + \varepsilon \leq \int_a^b (f + g)(t) dt + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b (f + g)(t) dt$$

Luego

$$\int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt = \int_a^b (f + g)(t) dt$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Notemos que $s(f, \tilde{p}) = s(f, p^1) + s(f, p^2)$ $S(f, \tilde{p}) = S(f, p^1) + S(f, p^2)$. Como $S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon$, eso significa que las sumas de \tilde{p} , que están entre medias, también: $S(f, p^1) - s(f, p^1) + S(f, p^2) - s(f, p^2) \leq \varepsilon$ (*) \Rightarrow
 $\Rightarrow S(f, p^1) - s(f, p^1) \leq \varepsilon \Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, ya que hemos visto que hay una partición asociada a $[a, c]$ y otra a $[c, b]$ que hace que la diferencia de ambas sumas de Riemann son menores que ε , $\forall \varepsilon > 0$

Además:

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \leq S(f, p^1) + S(f, p^2) \stackrel{(*)}{\leq} s(f, p^2) + s(f, p^2) + \varepsilon = s(f, \tilde{p}) + \varepsilon \leq \int_a^b f(t) dt + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \leq \int_a^c f(t) dt$$

y también

$$\int_a^b f(t) dt \leq S(f, \tilde{p}) = S(f, p^1) + S(f, p^2) \stackrel{(*)}{\leq} s(f, p^1) + s(f, p^2) + \varepsilon \leq \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt + \varepsilon$$

| \Leftarrow Si f es Riemann-integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0 \quad \begin{array}{l} \exists p^1 \in \mathcal{P}([a, c]) \\ \exists p^2 \in \mathcal{P}([c, b]) \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} S(f, p^1) - s(f, p^1) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ S(f, p^2) - s(f, p^2) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

Sea $p = p^1 \cup p^2$, partición de $[a, b]$, \Rightarrow $S(f, p) = S(f, p^1) + S(f, p^2)$ $\Rightarrow S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon \Rightarrow f$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

2. Si $f \geq 0$ y $p \in \mathcal{P}([a, b])$

$$\int_a^b f(t) dt \geq s(f, p) = \sum_{j=1}^n \underbrace{m_j (t_j - t_{j-1})}_{\geq 0} \geq 0$$

3. Si $f(t) \leq g(t) \quad \forall t \in [a, b] \Rightarrow g(t) - f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$$\text{Por 2. } \int_a^b (g(t) - f(t)) dt \geq 0 \stackrel{1.}{\Rightarrow} \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt \quad \square$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Demostración.

1. Si $D = \emptyset \Leftrightarrow f$ es continua y todo perfecto.

2. Si $D = \{b\}$ (análogo si $D = \{a\}$)

Sabemos que $\forall c < b$ f es integrable en $[a, c]$, porque ahí es continua, entonces $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathcal{P}([a, b])$ \parallel
 $S(f, p) - s(f, p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Si tomamos $\tilde{p} = p \cup \{b\} \in \mathcal{P}([a, c])$

$$s(f, \tilde{p}) = s(f, p) + \inf \{f(t), t \in [c, b]\} (b - c)$$

$$S(f, \tilde{p}) = S(f, p) + \sup \{f(t), t \in [c, b]\} (b - c)$$

Como f acotada en $[a, b] \exists M > 0 \parallel |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $c < b \parallel 2M(b - c) < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $p \in \mathcal{P}([a, b])$ como antes $\Rightarrow S(f, \tilde{p}) - s(f, \tilde{p}) \leq S(f, p) - s(f, p) + 2M(b - c) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3. Supongamos que $D = \{s_1, \dots, s_M\}$ con $s_1 < \dots < s_M$

Tomando $c_i \in (s_{i-1}, s_i) \quad i = 1, \dots, M + 1$

Por 2. sabemos que f es integrable en $[s_{i-1}, c_i]$ y en $[c_i, s_i]$ (ya que, el único punto de discontinuidad son el izquierdo y el derecho, respectivamente)

Como $\int_{s_{i-1}}^{s_i} f(t) dt = \int_{s_{i-1}}^{c_i} f(t) dt + \int_{c_i}^{s_i} f(t) dt$, ya que f es integrable en $[s_0, s_1]$ y $[s_1, s_2] \Rightarrow$ es integrable también en $[s_0, s_2]$ y en $[s_2, s_3] \Rightarrow f$ es integrable en $[s_0, s_3]$...inducción... f es integrable en $[s_0, s_{M+1}] = [a, b] \quad \square$

6.1.2.3. Teorema de Lebesgue

Sólo sabemos, hasta ahora, que las funciones Riemann-integrables son las continuas, las monótonas y las que tienen un número finito de discontinuidades (o infinito numerable). El siguiente teorema nos ayuda a generalizar qué funciones son Riemann-integrables.

Definición 59. Medida cero

Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene **medida cero Lebesgue** si, y sólo si, $\forall \varepsilon > 0$ existe un recubrimiento

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \text{ siendo } I_j \text{ intervalo tal que } \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \leq \varepsilon$$

Teorema 31. Teorema de Lebesgue

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, entonces f es Riemann-integrable si, y sólo si, el conjunto de discontinuidades tiene **medida cero Lebesgue**

Ejemplo 20. Los conjuntos de \mathbb{R} finitos tienen medida-0 Lebesgue

Si $A \subset \mathbb{R}$ finito \Rightarrow tiene medida-0

$$A = \{x_1, \dots, x_N\}. \text{ Sea } \varepsilon > 0 \quad I_j = (x_j - \frac{\varepsilon}{2N}, x_j + \frac{\varepsilon}{2N}) \quad l(I_j) = \frac{\varepsilon}{N}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo 22. Existen conjuntos de \mathbb{R} , no numerables de medida-0 Lebesgue, como por ejemplo, el conjunto de Cantor.

6.1.2.4. Composición de funciones Riemann-integrables

Teorema 32. *Composición de funciones integrables*

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable y sea $[c, d] \parallel f([a, b]) \subset [c, d]$ y sea $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$g \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

es Riemann-integrable

Demostración.

Sea $k = \sup \{|g(t)|, s \in [c, d]\} < \infty$ y cómo g es continua en $[c, d] \Rightarrow g$ es uniformemente continua, es decir, dado $\tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \delta > 0 \parallel t, s \in [c, d]$
 $|t - s| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(s)| < \tilde{\varepsilon}$

Sea $\varepsilon > 0$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b-a+2k}$ y sea δ el asociado a la continuidad uniforme de g . Siempre se puede suponer que $\delta < \varepsilon$, y en caso contrario, se coge un δ' que lo sea.

Como f es Riemann-integrable, entonces $\exists p \in \mathcal{P}([a, b]) \parallel (0 \leq) S(f, p) - s(f, p) \leq \delta^2$
 Veamos que $(0 \leq) S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) < \varepsilon$, que es lo que nos lleva a probar el teorema.

$$S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) = \sum_{j=1}^n (M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f))(t_j - t_{j-1}). \text{ Sean } A = \{j \parallel M_j(f) - m_j(f) < \delta\},$$

$B = \{j \parallel M_j(f) - m_j(f) \geq \delta\}$, es decir, los conjuntos de índices tales que las imágenes están muy cerquita y algo más lejos, respectivamente.

Sea $j \in A$:

- Si $t, \tau \in [t_{j-1}, t_j] \Rightarrow |f(t) - f(\tau)| \leq M_j(f) - m_j(f) < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(f(t)) - g(f(\tau))| < \tilde{\varepsilon}$. Como es g unif. cont.

para todos dos puntos, entonces $M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f) < \tilde{\varepsilon}$

$\sum_{j \in A} (M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f))(t_j - t_{j-1}) \leq \tilde{\varepsilon} \sum_{j \in A} (t_j - t_{j-1}) \leq \tilde{\varepsilon}(b-a)$ (ya que el sumatorio es de algunos subintervalos de $[a, b]$, luego su suma es menor que $(b-a)$)

- Si $j \in B$

El resto de sumandos: $\sum_{j \in B} (M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f))(t_j - t_{j-1}) \leq 2k \cdot \sum_{j \in B} (t_j - t_{j-1}) \leq$

$$\leq 2k \cdot \sum_{j \in B} \left(\frac{M_j(f) - m_j(f)}{\delta} \right) (t_j - t_{j-1}) = \frac{2k}{\delta} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n (M_j(f) - m_j(f))(t_j - t_{j-1})}_{S(f,p) - s(f,p) \leq \delta^2} \leq \frac{2k}{\delta} \cdot \delta^2 \leq 2k \cdot \delta$$

Por tanto

$$S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) \leq \sum_{j \in A} + \sum_{j \in B} \leq \tilde{\varepsilon}(b-a) + 2k \cdot \delta \underset{\delta < \tilde{\varepsilon}}{<} \tilde{\varepsilon}(b-a) + 2k \cdot \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}((b-a) + 2k) = \varepsilon \quad \square$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Demostración.

1. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, luego $|f(t)| = (g \circ f)(t) \quad t \in [a, b]$. $|f|$ es Riemann-integrable: $-|f| \leq f \leq |f|$, y como la integral mantiene el orden:

$$-\int |f(t)| dt \leq \int f(t) dt \leq \int |f(t)| dt \Leftrightarrow \left| \int f(t) dt \right| \leq \int |f(t)| dt$$

2. Veamos que f^2 es Riemann-integrable. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto s^2$, por lo que $f^2 = (g \circ f)$. Así, $f \cdot g = [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$, todas ellas Riemann-integrables, y por tanto $f \cdot g$ también.
3. Sea $g : [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto 1/s$, $\alpha > 0$, continua. Como $\frac{1}{f} = (g \circ f)$ está bien definida y es composición de funciones Riemann-integrables, $\frac{1}{f}$ también lo es.

□

6.2. Cálculo de integrales. Teoremas destacados.

6.2.1. Cálculo de integrales.

6.2.1.1. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow.

Teorema 33. *La integral es continua.*

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable, entonces:

$$F(t) = \int_a^t f(s) dt, \quad F : \begin{matrix} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto F(t) \end{matrix}$$

es continua en $[a, b]$.

Demostración.

Sea $t_0 \in [a, b]$. Veamos si $\lim_{h \rightarrow 0} F(t_0 + h) = F(t_0)$

Sea $k \parallel |f(t)| \leq k \quad \forall k \in [a, b]$

Veamos los límites por ambos lados de h , para aplicarlo si $t_0 = a$ o $t_0 = b$

- Si $h > 0$

$$|F(t_0 + h) - F(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t_0+h} f(s) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s)| ds \leq k \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} k ds = k \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

- Si $h < 0$

$$|F(t_0 + h) - F(t_0)| = \left| \int_{t_0+h}^{t_0} f(s) ds \right| \leq \int_{t_0+h}^{t_0} |f(s)| ds \leq k \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} k ds = k \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0$$

□

Teorema 34. *Teorema fundamental del cálculo*

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $t_0 \in [a, b]$, entonces $F : \begin{matrix} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto F(t) \end{matrix}$, es derivable en t_0 y además

$F'(t_0) = f(t_0)$. Tak función F es

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\leq \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s) - f(t_0)| ds$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ $\parallel |s - t_0| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon \Rightarrow$ Si $h > \delta$ $\forall s \in [t_0, t_0 + h]$ y se tiene $|s - t_0| < h < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon$

Y por tanto

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s) - f(t_0)| ds \leq \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0}^{t_0+h} \varepsilon = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon$$

$$\text{Luego } \left| \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow F'(t_0) = f(t_0)$$

- Si $h < 0$

$$\left| \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{t_0+h}^{t_0} (f(s) - f(t_0)) ds \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} f(s) ds - \int_{t_0+h}^{t_0} f(t_0) ds \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} (f(s) - f(t_0)) ds \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} |f(s) - f(t_0)| ds$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ $\parallel |s - t_0| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon \Rightarrow$ Si $|h| > \delta$ $\forall s \in [t_0 + h, t_0]$ y se tiene $|s - t_0| < |h| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t_0)| < \varepsilon$

Y por tanto

$$\frac{1}{|h|} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} |f(s) - f(t_0)| ds \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_{t_0+h}^{t_0} \varepsilon = \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon$$

$$\text{Luego } \left| \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} - f(t_0) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow F'(t_0) = f(t_0) \quad \square$$

Corolario 15.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe una función, a la que llamamos **primitiva** de f , es decir, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $F'(t) = f(t)$

Demostración.

$$\text{Basta tomar } F(t) = \int_a^t f(s) ds \quad \square$$

Teorema 35. Regla de Barrow

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable y tiene una primitiva $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Demostración.

Sea $p \in \mathcal{P}([a, b])$ partición de $[a, b]$.

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^n G(t_j) - G(t_{j-1}) \stackrel{TVM}{=} \sum_{j=1}^n G'(s_j) (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(s_j) (t_j - t_{j-1}), \quad s_j \in (t_{j-1}, t_j)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\sum_{j=1}^n m_j(f) (t_j - t_{j-1}) \leq G(b) - G(a) \leq \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1})$$

Siendo los sumatorios el supremo y el ínfimo de las sumas inferiores y superiores de todas las particiones de $[a, b]$, respectivamente (esto es, las integrables superior e inferior).

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

6.2.1.2. Teorema del valor medio integral. Cambio de variable

Teorema 36. Teorema del valor medio integral

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y sean $m = \inf \{f(t), t \in [a, b]\}$ y $M = \sup \{f(t), t \in [a, b]\}$. Entonces

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

Además si f es continua, entonces $\exists t_0 \in [a, b] \parallel \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t) dt = f(t_0)$

Observación 32. El área del rectángulo delimitado por el segmento \overline{ab} y de altura $f(t_0)$ es $\int_a^b f(t_0) dt$ $t_0 \in [a, b]$. Es decir, la integral definida en $[a, b]$ se alcanza en algún punto de $t_0 \in [a, b]$ y es igual al área del rectángulo descrito arriba-

Demostración.

Como $m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b]$

Aplicamos integral y:

$$m(b-a) = \int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a)$$

luego

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

Si además f es continua, entonces toma todos los valores intermedios entre $[m, M]$ □

Teorema 37. Teorema del valor medio integral generalizado

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable y sean $m = \inf \{f(t), t \in [a, b]\}$ y $M = \sup \{f(t), t \in [a, b]\}$.

Además, sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable tal que $g(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ y $\int_a^b g(t) dt > 0$. Entonces:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M$$

Además, si f es continua, existe $t_0 \in [a, b]$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} = f(t_0)$$

Demostración.

Como $m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b]$, entonces $m \cdot g(t) \leq f(t) \cdot g(t) \leq M \cdot g(t)$ y aplicando la integral:

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt, \text{ luego}$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración.

$$\text{Sea } H(x) = \int_{\alpha}^x f(g(t)) \cdot g'(t) dt \text{ y } K(x) = \int_{g(\alpha)}^{g(x)} f(z) dz \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Entonces, se tiene que

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad H'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$\text{Sea } F(s) = \int_{g(\alpha)}^s f(z) dz \quad s \in \mathcal{J} \text{ y } K(x) = F(g(x)), \text{ luego } K'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow H(x) = K(x) + c \quad c \in \mathbb{R}, \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Tomando $x = \alpha$, tenemos

$$0 = H(\alpha) = K(\alpha) + c. \text{ Como } K(\alpha) = 0 \Rightarrow c = 0. \text{ Con lo cual se tiene que } H(x) = K(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \text{ Y en particular } H(\beta) = K(\beta) \quad \square$$

Lema 4. Integración por partes

Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son derivables y sus derivadas son Riemann-integrables en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt = f(t) \cdot g(t) \Big|_{t=b}^{t=a} - \int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt$$

Demostración.

$$\text{Como } (f \cdot g)'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\int_a^b (f \cdot g)'(t) dt = \int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt + \int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt$$

$$f(t) \cdot g(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = \int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt + \int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt$$

□

Observación 33.

$$\int_a^b \underbrace{f(t)}_v \underbrace{g'(t)}_{du} dt = \begin{cases} v = f(t) \\ du = g'(t) dt \end{cases} \quad \begin{cases} dv = f'(t) dt \\ u = g(t) \end{cases} = \underbrace{f(t) \cdot g(t)}_{u \cdot v} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(t) \cdot g(t)}_{u \cdot dv} dt$$

6.3. Integrales impropias

La integral de Riemann se define para funciones acotadas, definidas en intervalos acotados. ¿Qué ocurre si la función no está acotada, o bien está definida en un intervalo no acotado?

Definición 60. Integral impropia

1. Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es integrable en $[a, b] \quad \forall b > a$. Entonces, decimos que su integral impropia:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt \text{ es convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt \left(= \int_a^{\infty} f(t) dt \right)$$

2. Si $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es integrable en $[a, b] \quad \forall b > a$. Entonces, decimos que su integral impropia:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada, tal que es integrable en $[c, b] \quad \forall c < b$. Entonces, decimos que su integral impropia:

$$\int_a^b f(t) dt \text{ es convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{c \rightarrow a^+} \int_a^c f(t) dt \left(= \int_a^b f(t) dt \right)$$

Ejemplo 23. En $[a, \infty)$, con $\alpha > 0$ $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ $\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ es convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Supongamos primero que $\alpha \neq 1$

$$\text{Sea } b > a (> 0) \quad \int_a^b \frac{1}{t^\alpha} dt = \left. \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}]$$

Tenemos que hacer la integral convergente, con lo cual tenemos que lograr hacer $\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ muy pequeño, para eso nos basta que $\alpha > 1$, con lo que los exponentes se harían negativos, y por tanto, haríamos la integral converger.

Ahora, si $\alpha = 1$ $\int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = \ln(b) - \ln(a) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \nexists \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^\infty \frac{1}{t} dt$, ya que su primitiva no converge

Ejemplo 24. En $[0, 1]$ $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ ($t \neq 0$)
Sea $0 < a < 1$ y, $\alpha \neq 1$

$$\int_a^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left. \frac{1}{1-\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \right]_{t=a}^{t=1} = \frac{1}{1-\alpha} (1 - a^{1-\alpha})$$

Como $a \rightarrow 0$, para que la primitiva converja, necesito que $1 - \alpha > 0$, ya que si fuera negativo, $\frac{1}{a^r} \rightarrow \infty$ (para cierto $r = -(1 - \alpha) \in \mathbb{R}$), y eso no es lo que buscamos.

Luego $1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1$

$$\text{Si } \alpha = 1 \quad \int_a^1 \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_{t=a}^{t=1} = 0 - \ln(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} -(-\infty) = \infty \Rightarrow \nexists \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^1 \frac{1}{t} dt, \Rightarrow \nexists \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

La razón del porqué existen integrales impropias para $\alpha > 1$, es porque $\frac{1}{t^\alpha}$ tiende a 0 mucho más rápido que $\frac{1}{t}$. Por ejemplo, si tomamos $\alpha = 2$, tenemos que $\frac{1}{t^2} \ll \frac{1}{t}$, y de esta forma la curva que forma $\frac{1}{t}$ encierra a la $\frac{1}{t^2}$. Algo similar pasa en $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$

Ejemplo 25. En $[a, b]$ ($a < b$) $f(t) = \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ $t \neq a$
Sea $c \parallel a < c < b$ y $\alpha \neq 1$

$$\int_c^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt = \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) (t-a)^{1-\alpha} \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{1-\alpha} [(b-a)^{1-\alpha} - (c-a)^{1-\alpha}] \Rightarrow \exists \lim_{c \rightarrow a^+} \int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt \Leftrightarrow 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

El razonamiento del porqué $\alpha < 1$ es enteramente análogo al del ejemplo anterior, sólo que esta vez es $(c-a) \rightarrow 0$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$F(c) = \int_a^c f(t) dt$$

es creciente en c , y por tanto

$$\exists \int_a^b f(t) dt = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(t) dt \Leftrightarrow \exists M \parallel (0 \leq) \int_a^c f(t) dt \leq M \quad \forall c \in [a, b)$$

6.3.1. Integrales impropias. Convergencia integral absoluta

Definición 61. Integral absolutamente convergente

Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, Riemann integrable en $[a, c]$ $\forall c \ a < c < b$. Decimos que la integral impropia $\int_a^b f(t) dt$ es absolutamente convergente, si y sólo si $\int_a^b |f(t)| dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c |f(t)| dt < \infty$.

Proposición 67. Si la integral impropia es absolutamente convergente, entonces también es convergente.

Si $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$, absolutamente convergente $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ es convergente.

Demostración.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b)$. Veamos que $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$:

Si $x, y \in [a, b)$, supongamos $x < y$ (spdg) $|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt$

Sea $G(x) = \int_a^x |f(t)| dt$ y sea $L = \lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = \int_a^b |f(t)| dt$.

Sea $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \parallel x \in (b - \delta, b) \Rightarrow (0 \leq) L - G(x) \leq \varepsilon$.

Si $x, y \in (b - \delta, b) \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq \int_x^y |f(t)| dt = \int_a^y |f(t)| dt - \int_a^x |f(t)| dt$.

Bien, hagamos la maniobra: $\int_a^y |f(t)| dt - \int_a^x |f(t)| dt + L - L$.

Agrupamos y tenemos que $\int_a^y |f(t)| dt - \int_a^x |f(t)| dt + L - L = (F(y) - L) + (F(x) - L) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Sea $\{x_n\} \subset [a, b) \parallel x_n \rightarrow b^-$. Entonces:

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t) dt$$

es de Cauchy.

Dado (el anterior) $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists n_0 \parallel n, m \geq n_0 \quad x_n, x_m \in (b - \delta, b) \Rightarrow |F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\exists M = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(t) dt$

Bien, tenemos probado que una sucesión construida sobre $[a, b)$ tiene por límite M , para poder decir que existe $\lim_{x \rightarrow b^-} f(t)$, hay que probarlo para todo sucesión $x \rightarrow b^-$. Veámoslo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Si $\exists L = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{f(t)}{g(t)}$, entonces:

a) Si $L \in (0, \infty) \Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ y $\int_a^b g(t) dt$ tienen el mismo carácter.

b) Si $L = 0$ y $\int_a^b g(t) dt < \infty \Rightarrow \int_a^b f(t) dt < \infty$

c) Si $L = \infty$ y $\int_a^b f(t) dt < \infty \Rightarrow \int_a^b g(t) dt < \infty$

3. *Criterio de la serie.*

Si $b = \infty$ y f es **decreciente**, entonces:

$$\int_a^\infty f(t) dt \text{ y } \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

tienen el mismo carácter.

Demostración.

1. Como $f(t) \leq g(t)$, si $c \in [a, b) \Rightarrow \int_a^c f(t) dt \leq \int_a^c g(t) dt \quad \exists M > 0 \parallel \forall c \in [a, b)$

$$\int_a^c f(t) dt \leq \int_a^c g(t) dt \leq M \Rightarrow \int_a^c f(t) dt < \infty$$

2.

a) Si $L \in (0, \infty) \Rightarrow$ dado $\varepsilon = \frac{L}{2} \quad \exists c \in [a, b) \parallel$ si $t \in [a, b)$

$$\frac{L}{2} = L - \varepsilon \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq L + \varepsilon = \frac{3L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} \cdot g(t) \leq f(t) \leq \frac{3L}{2} \cdot g(t)$$

luego ambas tienen el mismo carácter.

b) Si $L = 0$, con $\varepsilon = 1 \quad \exists c_0 \in [a, b) \parallel$ si $t \in [c_0, b) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \leq 1 \Rightarrow f(t) \leq g(t)$, por 1), como $\int_a^b g(t) dt < \infty \Rightarrow$

$$\int_a^b f(t) dt < \infty$$

c) Si $L = \infty$, con $M = 1 \quad \exists c_0 \in [a, b) \parallel$ si $t \in [c_0, b) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \geq 1 \Rightarrow g(t) \leq f(t)$, por 1), como

$$\int_a^b f(t) dt < \infty \Rightarrow \int_a^b g(t) dt < \infty$$

3. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq a$, si $n \in \mathbb{N} \parallel n \geq k_0$

$$\sum_{n=k_0}^{k-1} f(n+1) \leq \int_{k_0}^k f(t) dt \leq \sum_{n=k_0}^{k-1} f(n)$$

siendo los sumatorios sumas inferiores y superiores de Riemann, respectivamente. La construcción de dichas sumas viene dada por:

1. Que la integral está acotada superiormente por la suma superior es trivial. Cogemos una partición de naturales, y entonces esa suma supera a la integral.

2. La acotación por debajo es similar.

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{l_n}^k f(t) dt = \int_{l_n}^\infty f(t) dt \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k_0}^k f(n) = \sum_{n=k_0}^\infty f(n)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Aún más, con que la distancia entre t_k y t_{k+1} fuese una constante C , también resultaría válido el criterio. Entonces la acotación de la integral quedará multiplicada por dicha constante.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized arrow or a splash of paint pointing to the right. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Capítulo 7

Sucesiones y series de funciones

7.1. Sucesiones de funciones

7.1.1. Convergencia. Criterio de Cauchy

Definición 62. Convergencia puntual.

Sea $D \neq \emptyset$ un conjunto y sea, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ó \mathbb{C}) una sucesión de funciones. Entonces decimos que f_n **converge puntualmente** a f ($f : D \rightarrow \mathbb{R}$) si y sólo si

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

es decir $\forall x \in D \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

Ejemplo 26. $f_n(t) = \frac{t}{n} \quad t \in \mathbb{R}$
 $\forall t \in \mathbb{R} \quad f_n(t) = \frac{t}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, luego $f_n \rightarrow f \equiv 0$, es decir, converge puntualmente a la función idénticamente nula.

Ejemplo 27. $f_n(t) = t^n \quad t \in [0, 1]$

$$f_n(t) = t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 28. $f_n(t) = t^n \quad t \in [-1, 1]$

$$\begin{matrix} t \in (-1, 0) & f_n(t) = t^n \rightarrow 0 \\ t = -1 & f_n(-1) = (-1)^n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1)^n \Rightarrow f_n(t) \end{matrix} \quad t \in [-1, 1] \text{ no converge puntualmente}$$

$$\text{Si } t \in \mathbb{R} \begin{cases} t > 1 & f_n(t) = t^n \rightarrow \infty \\ t < -1 & \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} t^n \end{cases}$$

Ejemplo 29. $f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n} \quad x \in \mathbb{R}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definición 63. Convergencia uniforme.

Sea $D \neq \emptyset$ un conjunto y sea, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ó \mathbb{C}) una sucesión de funciones. Decimos que f_n **converge uniformemente** a f ($f_n \rightarrow f : D \rightarrow \mathbb{R}$) si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \text{ se tiene que } \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Observación 36. Nótese la diferencia en la posición de los cuantificadores lógicos respecto de la definición de convergencia puntual. Mientras que en el primero n_0 dependía del punto t escogido y de ε , en el caso de la convergencia uniforme n_0 depende únicamente de ε .

Observación 37. Por supuesto, si f_n converge uniformemente, converge puntualmente, al ser la convergencia uniforme más fuerte que la puntual.

Ejemplo 31. La función del ejemplo 2 converge puntualmente, pero no uniformemente. En cambio si reducimos el intervalo:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^n, & t &\in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 \leq f_n(t) &= t^n \leq (\frac{1}{2})^n \rightarrow 0 & \forall t \end{aligned}$$

Ejemplo 32. $f_n(t) = t^n(1-t)$, $t \in [0, 1]$

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \equiv 0, \text{ que converge puntualmente y también uniformemente.}$$

Definición 64. Conjunto de las funciones acotadas.

Sea $D (\neq \emptyset)$ conjunto, llamamos **conjunto de las funciones acotadas** a:

$$\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K}) = \{f : D \rightarrow \mathbb{K} \mid \text{son acotadas}\}$$

y por tanto $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ se tiene que $\exists M > 0 \mid |f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$.

Definimos también para cada $f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$, la **norma infinito** de f , $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in D\}$

Proposición 69. *Propiedades de $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$. Norma infinito*

- $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{K} .
- La aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una norma:

- $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ se tiene que: $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
- Propiedad triangular: $f, g \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$:

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Como consecuencia: $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ es una métrica en $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$

- Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ y $f_n \rightarrow f$ en $d_\infty \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ converge **uniformemente** en D .

Demostración.

□



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$c) \|f + g\|_\infty = \sup\{|f(x) + g(x)|, x \in D\} \leq \sup\{|f(x)|, x \in D\} + \sup\{|g(x)|, x \in D\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Veamos que es una métrica:

$$1) d_\infty(f, g) \geq 0 \text{ y } d_\infty(g, f), \text{ porque } \|f - g\|_\infty = \|g - f\|_\infty$$

$$2) d_\infty(f, g) = 0 \Leftrightarrow \|f - g\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = g$$

$$3) \forall f, g \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K}), d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty \stackrel{\pm h}{\leq} \|f - h\|_\infty + \|h + g\|_\infty = d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$$

$$3. f_n \xrightarrow{d_\infty} f \Leftrightarrow d_\infty(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ si } n \geq n_0.$$

$$d_\infty(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow f_n \text{ converge uniformemente.}$$

Teorema 39. Criterio de Cauchy

Sea $D (\neq \emptyset)$ y sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Sea también $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ una sucesión de funciones acotada. Entonces

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \text{ converge en } d_\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ si } n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

Demostración.

\Rightarrow) Trivial

(\Leftarrow) Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy para d_∞ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ si } n, m \geq n_0: \quad d_\infty(f_n, f_m) \leq \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in D \text{ fijo, } \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \text{ es de Cauchy en } \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Ahora hemos de probar que si $f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ y que $f_n \rightarrow f$ en d_∞

Se tiene que $\forall n \geq n_0$ (asumiendo que $m = n_0$):

$$|\|f_n\|_\infty - \|f_{n_0}\|_\infty| \leq \|f_n - f_{n_0}\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\infty$$

$$\text{Así, con } \varepsilon = 1, \quad \exists M > 0 \text{ si } \|f_n(x)\| \leq \|f_n(x)\|_\infty \leq M \quad \forall n \geq n_0, \text{ entonces}$$

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D \Rightarrow f \in \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$$

Por último: Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ si $n, m \geq n_0$

$$\forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \text{ tomando como límite con } m \rightarrow \infty$$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ si $n, m \geq n_0$,

$$\forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$$

$$\underbrace{\quad}_{d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon}$$

□

Bien, llegados a aquí, pensemos en la convergencia de funciones. En este momento, uno podría preguntarse que pasará en el límite de una sucesión de funciones. ¿Que propiedades conserva la función límite de las que conforman la sucesión?: ¿continuidad?, ¿derivabilidad?, ¿integrabilidad?

Dediquemos un breve apartado a reflexionar acerca de estas cuestiones.

Supongamos un conjunto D , de \mathbb{R} , por ejemplo. Digamos que $D = [a, b]$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Suposición 2. Sobre la derivabilidad de la función límite.

Si $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \rightarrow f$ y f_n es derivable $\forall n \in \mathbb{N}$. ¿Es f derivable? ¿ $f'_n \rightarrow f'$?

Con convergencia puntual no, con uniforme tampoco.

Por ejemplo: $f_n(t) = \frac{1}{n} \sin(nt) \quad t \in [0, 1]$
 $d_\infty(f_n, 0) = \|f_n\|_\infty = \sup\{f(t), t \in [0, 1]\} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $f_n \rightarrow f \equiv 0$, pero $f'_n = \cos(nt) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Suposición 3. Sobre la integrabilidad de la función límite.

Si $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ son Riemann-integrables para todo n y $f_n \rightarrow f$ ¿ $\int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

Con convergencia puntual, no. Por ejemplo: Sea $f_n : \begin{cases} n & \text{si } t \in (1/2 - 1/2n, 1/2 + 1/2n) \\ 0 & \text{si } t \in [0, 1/2 - 1/2n] \cup [1/2 + 1/2n, 1] \end{cases}$

$$f_n \rightarrow f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pero la función límite no es continua, así que hagamos un apaño. Redefinamos $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$

Bien, ahora podemos calcular la integral: $\int_0^1 f_n(t) dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(t) \rightarrow f(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1]$

Podríamos achacar nuestros infructuosos resultados a que f_n es discontinua. Veamos que nuestras sospechas son infundadas:

$$\text{Sea ahora } f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > \frac{1}{2} \\ 2n & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

$$f_n \rightarrow f \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1] \text{ y además } \int_0^1 f_n(t) dt = 1$$

Supongamos que $f_n \rightarrow f \equiv 0$ converge uniformemente en D :

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(t)|, t \in D\}:$$

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t)| dt \leq \|f_n\|_\infty (b-a) \rightarrow 0$$

En general, si f_n converge uniformemente en D , y f es Riemann-integrable:

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n - f)(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n - f|(t) dt \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \parallel \text{si } n \geq n_0 \Rightarrow \forall t \in M \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$

Sean $t_0, t \in M$, entonces: $|f_n(t) - f(t_0)| \leq \underbrace{|f(t) - f_n(t)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(t) - f_n(t_0)|}_{(*)} + \underbrace{|f_n(t_0) - f(t_0)|}_{\leq \varepsilon/3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

(*): Como f_{n_0} es continua en $t_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \parallel t \in B(t_0, \delta) \Rightarrow f_{n_0}(t) \in B(f_{n_0}(t_0), \varepsilon/3) \Rightarrow f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ \square

Teorema 41. *La función límite es derivable si la sucesión de las derivadas es convergente.*

Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que para cierto $t_0 \in [a, b] \quad f_n(t_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A \in \mathbb{R}$ y $f'_n \rightarrow g$ uniformemente en $[a, b]$. Entonces:

$f_n \rightarrow f$ uniforme en $[a, b]$, donde f es derivable, $f(t_0) = A$ y $f' = g$

Es decir, si la sucesión de derivadas converge uniformemente, la sucesión original también. Además, la integral de la función límite derivada es la función límite original.

Observación 38. $f' = g; \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$

Demostración.

Si $t \in [a, b]$ y $m, n \in \mathbb{N}$, por el teorema del valor medio, para $f_n - f_m \quad \exists \xi \in (a, b) \parallel \frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(t_0) - f_m(t_0))}{t - t_0} = (f'_n(\xi) - f'_m(\xi))$, esto es, $f_n(t) - f_m(t) = f_n(t_0) - f_m(t_0) + (t - t_0)(f'_n(\xi) - f'_m(\xi))$

Tomando el valor absoluto y supremos con $t \in [a, b]$: $\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(t_0) - f_m(t_0)| + |b - a| \|f'_n - f'_m\|_\infty$

Sea $\varepsilon > 0$: $\exists n_0^1 \parallel \text{si } n, m \geq n_0^1 \quad \|f'_n - f'_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$
 $\exists n_0^2 \parallel \text{si } n, m \geq n_0^2 \quad \|f_n(t_0) - f_m(t_0)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Ahora, tomando $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$, si $n, m \geq n_0$: $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Con lo cual, $\{f_n\}$ es de Cauchy en d_∞ , con lo cual converge uniformemente en $[a, b]$ a f .

Sabemos, por el teorema anterior, que f es continua (como todas las f_n son derivables, también son continuas, luego f también). Además, $f_n(t_0) \rightarrow f(t_0) \Rightarrow f(t_0) = A$

Veamos ahora que f es derivable y que $f' = g$

Sea $s \in [a, b]$ un punto fijo y también sea $t \in [a, b] \quad t \neq s$.

Por el teorema del valor medio para $f_n - f_m$, $\exists \xi \in (a, b) \parallel f_n(t) - f_m(t) - [f_n(s) - f_m(s)] = (t - s)(f'_n(\xi) - f'_m(\xi))$, entonces:

$$\frac{f_n(t) - f_n(s)}{t - s} - \frac{f_m(t) - f_m(s)}{t - s} = f'_n(\xi) - f'_m(\xi)$$

Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \parallel n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/3$

$$\left| \frac{f_n(t) - f_n(s)}{t - s} - \frac{f_m(t) - f_m(s)}{t - s} \right| \leq \|f'_n - f'_m\|_\infty < \varepsilon/3$$

(Hemos hecho que $f_n \rightarrow f$, con lo cual: $f_n(t) - f_n(s) \rightarrow f(t) - f(s)$)

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - \frac{f_m(t) - f_m(s)}{t - s} \right|$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - g(s) \right| \leq \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - \frac{f_{n_0}(t) - f_{n_0}(s)}{t - s} \right| + \left| \frac{f_{n_0}(t) - f_{n_0}(s)}{t - s} - f'_{n_0}(s) \right| + |f'_{n_0}(s) - g(s)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Con lo cual, f es derivable en s , y $f'(s) = g(s)$. \square

Teorema 42. La función límite es Riemann-integrable si lo son las de la sucesión. El límite de las integrales es la integral del límite, que es la integral de la función límite.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tales que $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, Riemann-integrables. f_n converge a f uniformemente en $[a, b]$. Entonces f es Riemann-integrable en $[a, b]$ y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Demostración.

Veamos que f es Riemann-integrable.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ si $n \geq n_0$ $\|f - f_n\|_{\infty} < \varepsilon$

Como f_{n_0} es Riemann-integrable, $\exists p \in \mathcal{P}([a, b])$ $S(f_{n_0}, p) - s(f_{n_0}, p) < \varepsilon$.

Si $p = \{t_j\}_{j=1}^n$, entonces

Como f_{n_0} y f se parecen mucho: $\|f_{n_0} - f\|_{\infty} < \varepsilon \Rightarrow \sup\{f(t)\} \leq \sup\{f_{n_0}\} + \varepsilon$

$$1. S(f, p) = \sum_{j=1}^k \underbrace{M_j(f)(t_j - t_{j-1})}_{\sup\{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\}} \leq \sum_{j=1}^k \underbrace{M_j(f_{n_0})(t_j - t_{j-1})}_{\sup\{f_{n_0}(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} + \varepsilon} + \varepsilon(b - a) = S(f_{n_0}, p) + \varepsilon(b - a)$$

$$2. s(f, p) = \sum_{j=1}^k \underbrace{m_j(f)(t_j - t_{j-1})}_{\inf\{f(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\}} \geq \sum_{j=1}^k \underbrace{m_j(f_{n_0})(t_j - t_{j-1})}_{\inf\{f_{n_0}(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\} - \varepsilon} - \varepsilon(b - a) = S(f_{n_0}, p) - \varepsilon(b - a)$$

Luego $(0 \leq) S(f, p) - s(f, p) \leq S(f_{n_0}, p) - s(f_{n_0}, p) + 2\varepsilon(b - a) \leq \varepsilon(1 + 2(b - a)) \Rightarrow f$ es Riemann-integrable.

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n - f)(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \|f_n - f\|_{\infty} (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

\square

Observación 39. Integrabilidad, derivabilidad y el espacio \mathcal{L}^{∞} .

Hemos probado que $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sabiendo que f_n convergía a f uniformemente en d_{∞} , que f también era Riemann-integrable.

¿Cómo traducimos esto a términos métricos?

Muy sencillo: Recordemos que $(\mathcal{L}^{\infty}([a, b], \mathbb{R}), d_{\infty})$ era un espacio métrico completo y que además el conjunto de las funciones Riemann-integrables está contenido aquí $(\mathcal{R}([a, b]) \subset \mathcal{L}^{\infty})$.

Sin darnos cuenta, hemos probado que el subconjunto de funciones Riemann-integrables es cerrado en \mathcal{L}^{∞} , porque para toda sucesión, su punto de acumulación (en nuestro caso, f) está dentro del conjunto $(f \in \mathcal{R}([a, b]) \subset \mathcal{L}^{\infty})$, ya que es Riemann-integrable, es decir, también es acotada).

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

7.1.3. Criterio de Dini

Teorema 44. Criterio de Dini

Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tal que $\forall t \in [a, b] \quad f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (idem si $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$) y f_n converge puntualmente a f en $[a, b]$ y f es continua. Entonces $f_n \rightarrow f$ **uniformemente**.

Demostración.

Sean $g_n(t) = f(t) - f_n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
 $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in \mathcal{C}([a, b])$ y $g_n \rightarrow 0$ puntualmente en $[a, b]$
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_{n+1}(t) \leq g_n(t)$

Veamos que $g_n \rightarrow 0$ uniformemente en $[a, b]$ ($\Leftrightarrow \|g_n\|_\infty = \sup \{g(t), t \in [a, b]\} \rightarrow 0$)

Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{K}_n = \{t \in [a, b] \mid g_n(t) \geq \varepsilon\} \subset [a, b]$

- $\mathcal{K}_{n+1} \subset \mathcal{K}_n$: Si $t \in \mathcal{K}_{n+1} \Leftrightarrow g_n(t) \geq g_{n+1}(t) \geq \varepsilon \Rightarrow t \in \mathcal{K}_n$
- \mathcal{K}_n es cerrado $\forall n$ ($g_n \geq \varepsilon$, el mayor o igual) $\Rightarrow \mathcal{K}_n$ es compacto.

Si vemos cada \mathcal{K}_n como $g_n^{-1}[\varepsilon, \infty)$, (que es cerrado, porque contiene a su frontera), entonces al ser g_n continua, la función inversa transforma cerrados en cerrados, luego \mathcal{K}_n es cerrado (y al ser subconjuntos de \mathbb{R} , son compactos).

Además $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n = \emptyset$. Como $g_n \rightarrow 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid n \geq n_0 \quad g_n(t) \leq \varepsilon$, por lo que dado $t, \nexists n \mid g_n(t) \geq \varepsilon \quad \forall n$.

Si existiera $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \Leftrightarrow g_n \geq \varepsilon \quad \forall n$, lo cual es absurdo.

Veamos que $\exists n_0 \mid \mathcal{K}_{n_0} = \emptyset$ ($\Rightarrow \mathcal{K}_n = \emptyset, \forall n \geq n_0$) (que sería decir que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid n \geq n_0 \quad g_n(t) < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$, esto es, que g converge uniformemente)

Sea $\mathcal{A}_n = [a, b] \setminus \mathcal{K}_n$ el complementario de \mathcal{K}_n para cada n . Es claro que \mathcal{A}_n es abierto y que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \rightarrow \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

Bien, $[a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow [a, b]$ es compacto y está recubierto por una cantidad infinita de \mathcal{A}_n . Entonces existe una cantidad finita de \mathcal{A}_n que recubren $[a, b]$, con lo cual $\exists n_0 \mid [a, b] = \bigcup_{n=1}^{n_0} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n_0} \Leftrightarrow \mathcal{K}_{n_0} = \emptyset$ □

7.2. Series de funciones

7.2.1. Convergencia

Definición 65. Serie de función

Sea $D (\neq \emptyset)$ y $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ (\mathbb{R} o \mathbb{C}) y para cada $M \in \mathbb{N}, x \in D$ decimos que la suma parcial de $f_n(x)$ es:

$$S_M(x) = \sum_{n=1}^M f_n(x)$$

Luego la serie de una sucesión de funciones es $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Decimos que $\sum^{\infty} f_n$ converge uniformemente en D si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_0 \text{ s.t. } M \geq M_0 \quad \left| \sum^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$$

o también que $S_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} S$ uniformemente. Incluso que $\|S_M - S\|_{\infty} \rightarrow 0$

7.2.2. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de series de funciones.

Teorema 45. Caracterización de las series de funciones.

1. Si $D (\neq \emptyset)$, $\sum^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $D \Leftrightarrow \{S_M\}_{M=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}^{\infty}(D, \mathbb{K})$, esto es

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \text{ s.t. } M, N \geq N_0 \quad \|S_M - S_N\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

O también que $\left| \sum^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D$

2. Si $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ son continuas y $\sum^{\infty} f_n$ converge uniformemente en D , entonces $S(x) = \sum^{\infty} f_n(x)$ es continua en $[a, b]$ y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum^{\infty} f_n(x) = \sum^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum^{\infty} f_n(x_0)$$

3. Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $[a, b]$ s.t. $\exists t_0 \in [a, b]$ s.t. $\sum^{\infty} f_n(t_0)$ converge y $\sum^{\infty} f'_n$ converge uniformemente en $[a, b]$, entonces $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ converge uniformemente en $[a, b]$, $S(t)$ es derivable en $[a, b]$ y

$$S'(t) = \left(\sum^{\infty} f_n(t) \right)' = \sum^{\infty} f'_n(t)$$

4. Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrables y $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ converge uniformemente en $[a, b]$, entonces $S(t)$ es Riemann-integrable y

$$\int_a^b S(t) dt = \int_a^b \sum^{\infty} f_n(t) dt = \sum^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

5. Si $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ converge puntualmente en $[a, b]$ y $S(t)$ es Riemann-integrable y $\exists K > 0$ s.t. $\left| \sum^M f_n(t) \right| \leq K \quad \forall t \in [a, b]$, entonces $\forall M \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b \sum^{\infty} f_n(t) dt = \sum^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

6. Si $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \geq 0 \quad \forall n$ son continuas, $S(t) = \sum^{\infty} f_n(t)$ converge puntualmente en $[a, b]$ y es continua en $[a, b]$, entonces

$$S(t) \text{ converge uniformemente en } [a, b]$$

Demostración

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$S_M(t) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} S(t)$ uniformemente, y por lo demostrado para sucesiones de funciones:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b S_M(t) dt = \int_a^b S(t) dt$$

5. $\forall M \in \mathbb{N} \quad S_M = \sum^M f_n(t)$

$S_M(t) \rightarrow S(t)$ puntualmente, y $S(t)$ es Riemann-integrable.

$|S_M(t)| \leq K \quad \forall M, \forall t \in [a, b]$, luego

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b S_M(t) dt = \int_a^b S(t) dt$$

6. $\forall M \in \mathbb{N} \quad S_M(t) = \sum^M f_n(t) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} S(t)$ puntualmente, y $S(t)$ continua.

Como $f_n \geq 0 \quad \forall n \Rightarrow \{S_M(t)\}_M \uparrow$ (monótona creciente), luego por el criterio de Dini, $S(t)$ converge uniformemente.

Idem si $f_n \leq 0 \quad \forall n \Rightarrow \{S_M(t)\}_M \downarrow$ y por el criterio de Dini, convergería uniformemente. \square

7.2.3. Criterio M de Weierstrass

Teorema 46. *Criterio M de Weierstrass.*

Sea $D (\neq \emptyset) \quad f_n : D \rightarrow \mathbb{K} \ni \exists K_n$ (al que llamaremos mayorante) tal que $|f_n(t)| \leq K_n \quad \forall x \in D$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} K_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ converge uniformemente.

Demostración.

Sean $M, N \in \mathbb{N}$ (spdg, $N < M$)

Si $x \in D : \quad |S_M(x) - S_N(x)| = |f_{N+1}(x) + \dots + f_M(x)| \leq |f_{N+1}(x)| + \dots + |f_M(x)| \leq K_{N+1} + \dots + K_M$
 $\forall x \in D \quad \underset{\tilde{S}_M = \sum^M K_n}{=} \tilde{S}_M - \tilde{S}_N$

Como $\sum^M K_n < \infty \Rightarrow \tilde{S}_M - \tilde{S}_N \rightarrow 0 \Rightarrow |S_M(x) - S_N(x)| \leq \tilde{S}_M - \tilde{S}_N \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, luego $S_M(x) - S_N(x)$ es de Cauchy. Además, $\{\tilde{S}_M\}_M$ también es de Cauchy.

Por tanto, $d_{\infty}(S_M, S_N) = \|S_M - S_N\|_{\infty} \leq \tilde{S}_M - \tilde{S}_N \Rightarrow \{S_M\}_M$ es de Cauchy en d_{∞} . Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ni M, N \geq n_0$ (spdg $M > N$) $\tilde{S}_M - \tilde{S}_N \leq \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ en d_{∞} \square

7.2.4. Series de potencias

Definición 67. Serie de potencias

Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$

1. La **serie de potencias** con coeficientes $\{a_n\}$ centrada en z_0 es:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

2. Sea $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$, al que llamamos **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Observación 40. Por convenio se toma que si $R = \frac{1}{\infty} = 0$ y si $R = \frac{1}{0} = \infty$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Demostración.

1. Sea $z \neq z_0$ $\parallel |z - z_0| < R$. Entonces $\exists k < 1 \parallel |z - z_0| < k \cdot R$
 Como $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z - z_0|} \Rightarrow \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z - z_0|}$.

Luego para $n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|^n < k < 1 \xrightarrow{\text{Criterio raíz}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n < \infty$

Si $|z - z_0| > R \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|^n > 1 \Rightarrow$ hay infinitos valores $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|^n > 1 \Rightarrow$ hay infinitos valores $|a_n| |z - z_0|^n > 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Luego $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n = \infty$, esto es, la serie diverge.

2. Sea $r < R$ y $|z - z_0| < r \Rightarrow \exists k < 1 \parallel r = k \cdot R$
 Como $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z - z_0|} \Rightarrow \exists n_0 \parallel \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{k}{|z - z_0|}$.

Luego para $n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|^n < k < 1; |a_n| |z - z_0|^n \leq k^n \quad (\forall z, |z - z_0| < r) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n < \sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty \xrightarrow{\text{Criterio M}} \text{la convergencia es uniforme.}$

□

7.2.4.1. Integrabilidad y derivabilidad de series de potencias

Corolario 16. *Integrabilidad de series de potencias.*

- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, con $R \in (0, \infty]$, entonces $f(z)$ es continua en $z \in B(z_0, R)$, pues existe convergencia uniforme en el disco.
- Si $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $[a, b] \subset (z_0 - R, z_0 + R)$ entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformemente para $z \in [a, b]$, por tanto, $f(z)$ es continua en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \Big|_{z=a}^{z=b}$$

En particular, si $t \in (z_0 - R, z_0 + R)$ $\int_a^t f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left((t - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1} \right)$

Además si $a = z_0$: $\int_{z_0}^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (t - z_0)^{n+1}$, es decir que la primitiva de una serie de potencias es otra serie de potencias.

Observación 41. El radio de convergencia de la primitiva de f es el mismo que el de f .

Sea \tilde{R} el radio de convergencia de la primitiva, y R el de f .

$$\tilde{R} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} = R, \text{ ya que } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Notar que al separar el producto del \limsup , en realidad lo que hacemos es asumir que para toda sucesión que tenga por supremo de sus puntos de acumulación $\sqrt[n]{|a_n|}$, el valor de $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$ es el mismo, luego por eso "lo descartamos". En ningún momento decimos que el limite superior de un producto sea el producto de límites superiores (porque no es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Entonces, por tener $f'(x)$ radio de convergencia positivo, $f'(x)$ es continua. Luego entonces f es de clase C^∞ en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y

$$f^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!} a_n (x-x_0)^{n-j} \xrightarrow{k=n-j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!} a_n (x-x_0)^k$$

Demostración.

Veamos la convergencia uniforme de la serie de las derivadas, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{k=n-1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$, luego su radio de convergencia (denotado por \tilde{R}) es $\tilde{R} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k+1) a_{k+1}}} \stackrel{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1} = 1}{=} \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_{k+1}}} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1})^{1/k}} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1})^{1/k+1/k}} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k+1]{a_{k+1}}} = R$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ converge en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y uniformemente en $[x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon] \forall \varepsilon > 0$

Además, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge en $x = x_0$, f es derivable y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1}$.

La función es de clase C^∞ y sus derivadas pueden obtenerse término a término. \square

Corolario 17.

En la situación anterior teníamos que

$$a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

y en particular si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ y si $\exists L > 0 \parallel \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$
 $\forall x \in (x_0 - L, x_0 + L) \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n$.

Además, el radio de convergencia de las series es mayor o igual que L .

Demostración.

Como $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!} a_{k+j} (x-x_0)^k \Rightarrow f^{(j)}(x_0) = j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_j = j! \cdot a_j$.

Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ y sabemos que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (x_0 - L, x_0 + L)$ y que $R_f \geq L$ y $R_g \geq L$.

Como $f(x) = g(x)$ y ambas son series de potencias, $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (x_0 - L, x_0 + L) \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n$

Recíprocamente, sea $f \in C^\infty(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ y por el teorema de Taylor: $\forall x \in (a, b) \quad \exists c$ "entre" x, x_0 tal que

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

7.2.4.2. Series de Taylor

Teorema 49. Serie de Taylor de una función C^∞

Supongamos que $x \in (a, b)$ y $x \neq 0$,

$$\sup_{\xi \in [x_0, x] \text{ ó } \xi \in [x, x_0]} \left\{ \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Entonces, el resto de Lagrange tiende a 0, y $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$ y $R \geq |x - x_0|$

Demostración.

Como $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c$ "entre" x, x_0 y $f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + L_n(x, x_0)$ y sabemos que $|L_n(x, x_0)| \leq$

$$\sup_{\xi \in [x_0, x] \text{ ó } \xi \in [x, x_0]} \left\{ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ luego } f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

□

Observación 42. $(n+1)!$ en el denominador ayuda a que $L_n \rightarrow 0$ y si $|x - x_0| < 1$, $|x - x_0|^n$ también hace que el resto de Lagrange tienda a 0. Un posible fallo que da al traste con todo esto sería que las derivadas en ξ fueran tan grandes que se sobrepusiera a $(n+1)!$ y $|x - x_0|^n$.

Observación 43. En particular, si $\exists M > 0$ tal que $\sup_{\xi \in [x_0, x] \text{ ó } \xi \in [x, x_0]} \{f^{(n+1)}(\xi)\} \leq M$, entonces la serie de Taylor converge a f .

Ejemplo 33. Transformaciones con series de potencias

Sabemos que $\sum_{n=0}^M x^n = \frac{1-x^{M+1}}{1-x}$.

Si $|x| < 1$, tomando $\lim_{M \rightarrow \infty}$ queda $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $x \in (-1, 1) \Rightarrow R = 1$.

Si ahora cogemos $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ y la integramos, tenemos $\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$. Aunque no lo demostremos, si tomamos $x = 1$ en esta serie, tenemos que $\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, con lo que obtenemos una expresión *tipo Taylor* para el logaritmo neperiano de 2.

Sigamos haciendo modificaciones a esta serie. Tomemos ahora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$. Si la derivamos obtenemos $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot (-1)^n x^{2n-1}$, serie perfectamente *legal*.

Pero resulta mucho más interesante si a esta misma serie la integramos, pues obtenemos la arcotangente: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \xrightarrow{\int} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, con lo que hemos dado con otra expresión *tipo Taylor* para la arcotangente. Si asumimos (aunque sin que lo demostremos) que $x = 1$, $\arctan(1) = \pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Ejemplo 34. Expresión como serie de potencias de $\sin(x)$

Sea $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

Bien, las derivadas de esta función son: $\begin{cases} f'(x) = \cos(x) & f''(x) = -\sin(x) \\ f'''(x) = -\cos(x) & f^{(4)}(x) = \sin(x) \end{cases}$, con que, a partir de la

derivada cuarta, todo vuelve a repetirse.

$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, y además, las derivadas pares se anulan en 0, luego:

$$\dots, \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(0) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$|f^n(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ y sus derivadas son: $\begin{cases} f'(t) = -\operatorname{sen}(t) & f''(t) = -\operatorname{cos}(t) \\ f'''(t) = \operatorname{sen}(t) & f^{iv}(t) = \operatorname{cos}(t) \end{cases}$, con que, a partir

de la derivada cuarta, todo vuelve a repetirse.

Las derivadas impares se anulan en 0, luego:

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n}(0)}{(2n)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

con $R = \infty$

Observación 44. Si derivamos la expresión tipo Taylor del seno (del ejemplo anterior), obtenemos este último desarrollo, del coseno.

Observación 45. Notar que el desarrollo de Taylor del seno tiene potencias impares y la del coseno pares, debido a que las funciones son impares y pares, respectivamente.

Ejemplo 36. La expresión de Taylor del e^z

$f(z) = e^z$, de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$f^n = e^z \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

¿Será un posible desarrollo de Taylor $f(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, con $R = \infty$?

Usemos el teorema 48 para comprobarlo:

Si $|z| \leq R \Rightarrow |f^n(z)| \leq e^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, luego $\sup_{\xi \in [-R, R]} \left\{ \frac{f^n(\xi)}{(n+1)!} \cdot R^{n+1} \right\} \leq \frac{e^R}{(n+1)!} \cdot R^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, por el criterio

del cociente.

Luego si se cumple que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Ejemplo 37. Desarrollo de Taylor de $\operatorname{arc sen}(x)$

Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$

Sus derivadas son: $\begin{cases} f'(x) = 1/2(1-x)^{-3/2} & f''(x) = 3/4(1-x)^{-5/2} \\ f'(x) = 5 \cdot 3/2 \cdot 4(1-x)^{-7/2} & f^{iv}(x) = 15 \cdot 7/8 \cdot 2(1-x)^{-9/2} \end{cases}$, luego $f^n(0) = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2^n} =$

$\frac{(2n+1)!!}{2^n}$

Sigamos construyendo nuestra serie, veamos pues el radio de convergencia:

El radio R de $\frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!} x^n$ es 1. La serie es entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!} x^n$. Si ahora llamamos $g(x) = \operatorname{arc sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces, a partir del desarrollo para f , decimos que el de g es $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n}$, que integrando resulta:

$$\int g(x) = \int \operatorname{arc sen}'(x) = \operatorname{arc sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

7.3. Series de Fourier

El objetivo que perseguimos es transformar una función periódica en una de la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \operatorname{sen}(nt) \quad t \in \mathbb{R}$$

7.3.1. Funciones 2π -periódicas. Propiedades

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Si f es 2π -periódica, entonces $\forall a \in \mathbb{R} \quad f_a(t) = f(t+a)$
4. Si $g_0 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $\exists! g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica tal que $g(t) = g_0(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Demostración. (de 4)

Existencia: Si $t \in \mathbb{R} \quad \exists! n \in \mathbb{Z} \parallel t \in [n \cdot 2\pi, (n+1) \cdot 2\pi) \Rightarrow g(t) = g_0(t - n \cdot 2\pi)$

Unicidad: Si g_1, g_2 son funciones 2π -periódicas y $g_1 = g_0 = g_2$ en $[0, 2\pi) \Rightarrow g_1 - g_2 \equiv 0$ en $[0, 2\pi) \Rightarrow g_1 - g_2 \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow g_1 = g_2 \quad \square$

Proposición 70.

Las funciones 1 , $\cos(nt)$ y $\operatorname{sen}(nt)$ verifican:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = 0 \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) dt = 0 \quad \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Además se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \operatorname{sen}(mt) dt = 0 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

Demostración. Se deduce de las expresiones trigonométricas de la suma y resta de seno y coseno. \square

Proposición 71. Independencia lineal de $\{1\}$, $\{\cos(nt)\}_n$, $\{\operatorname{sen}(nt)\}_n$.

Las funciones $\{1\}$, $\{\cos(nt)\}_n$, $\{\operatorname{sen}(nt)\}_n$ son linealmente independientes.

Demostración. Veamos si podemos encontrar una combinación lineal finita no nula para $A_0 + \sum_{n=1}^M A_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^M B_n \operatorname{sen}(nt) = 0$ (func. nula).

Bien, si integramos esta expresión, tenemos:

$$A_0 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^M A_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt + \sum_{n=1}^M B_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) dt = 0 \Rightarrow A_0 = 0$$

Sea $m \in \{1, \dots, M\}$, y multiplicamos por $\cos(mt)$ e integramos en $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^M A_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt + \sum_{n=1}^M B_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \cos(mt) dt = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

Sea $m \in \{1, \dots, M\}$, y multiplicamos por $\operatorname{sen}(mt)$ e integramos en $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^M B_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt) dt = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Como $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \operatorname{sen}(nt)$, integramos. Como la convergencia es “razonable” podemos intercambiar la serie con la integral:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{a_0}{2} 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{a_0}{2} 2\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

□

- Para los términos a_n . Sea $m \in \mathbb{N}$ y multiplicamos por $\cos(mt)$
 $f(t) \cos(mt) = \frac{a_0}{2} \cos(mt) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \cos(mt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt) \cos(mt)$, e integrando:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(mt) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \cos(mt) dt$$

Luego $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(mt) dt = \pi a_m$, ya que $\int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt$ no se anula en $n = m$.

- Para los términos b_n procederemos de una forma similar. Sea $m \in \mathbb{N}$ y multiplicamos por $\operatorname{sen}(mt)$
 $f(t) \operatorname{sen}(mt) = \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}(mt) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \operatorname{sen}(mt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt)$, e integrando:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen}(mt) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) \operatorname{sen}(mt) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt) dt$$

Luego $\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen}(mt) dt = \pi b_m$, ya que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt) \operatorname{sen}(mt) dt$ sólo es no nulo cuando $n = m$.

Observación 48.

1. Si f es par, entonces $b_n = 0 \quad \forall n$ y $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt$
2. Si f es impar, entonces $a_n = 0 \quad \forall n$ y $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt$

Demostración.

1. $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \operatorname{sen}(nt) dt = 0$, por ser par. $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt$
2. $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = 0$, por ser impar. $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \operatorname{sen}(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \operatorname{sen}(nt) dt$

□

Definición 69. Serie y suma parcial de Fourier.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es 2π -periódica tal que es Riemann-integrable en $[0, 2\pi]$

1. Se llama **serie de Fourier** de f a



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Observación 49. Si

$$S_M(f)(t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \sum_{n=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) \sin(nt) ds + \sum_{n=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ns) \sin(nt) ds \right] = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos(ns) \cos(nt) + \sum_{n=1}^M \sin(ns) \sin(nt) \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos[n(s-t)] ds. \text{ Notar el cambio de variable de integración.}$$

Lema 5.

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos(nz) = \frac{\sin\left(\left(M + \frac{1}{2}\right)z\right)}{2 \sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

Observación 50. Por tanto, podemos escribir la serie de Fourier como sigue:

$$S_M(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\left(M + \frac{1}{2}\right)(s-t)\right)}{2 \sin\left(\frac{s-t}{2}\right)}$$

Se conoce al integrando como **núcleo de Dini** de orden M , que denotamos por $D_M(s-t)$. Luego, sustituyendo:

$$S_M(f)(t) = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(z+t) D_M(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+t) D_M(z) dz$$

por ser la función π -periódica.

$$\text{Observación 51. } S_M(f)(t) - f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+t) D_M(z) dz - f(t) \int_{-\pi}^{\pi} D_M(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} [f(z+t) - f(t)] D_M(z) dz = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} [f(z+t) - f(t)] \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\left(M + \frac{1}{2}\right)z\right)}{2 \sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

7.3.2. Lema de Riemann-Lebesgue y criterio de Dini

Lema 6. Lema de Riemann-Lebesgue

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es Riemann-integrable. Entonces

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt = 0$$

Luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z+t) - f(t)}{2\pi \sin(z/2)} \cdot \sin\left(\left(M + \frac{1}{2}\right)z\right)$$

Como $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z/2)}{z} = 1$, tenemos que $S_M(f)(t) - f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z+t) - f(t)}{z} \cdot \frac{z/2}{\pi \sin(z/2)} \cdot \sin\left(M + \frac{1}{2}\right)z dz$

Si $\frac{f(z+t) - f(t)}{z}$ es integrable en $z = 0$, por el lema de Riemann-Lebesgue, entonces $M \rightarrow \infty$ y la derivada de f tiende a 0. La integrabilidad depende de la derivada de $f(t)$

Proposición 72.

Si f verifica que $\exists \delta > 0 \parallel z \mapsto \frac{f(z+t) - f(t)}{z}$ es integrable en $[-\delta, \delta]$, entonces la serie de Fourier converge a $f(t)$

Demostración. Por el lema de Riemann-Lebesgue. □

Observación 52. Si $\exists f'(t)$, $\exists f'(t^+)$ y $\exists f'(t^-)$ o $|f(z+t) - f(t)| \leq C|z|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1] \quad \forall z \in [-\delta, \delta]$, esto es, f es de clase Lipchitz en $[-\delta, \delta]$, entonces f converge.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nt) = \frac{1 - \cos(nt)}{\pi n} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi n} ((-1)^n - 1)$$

Luego $f(t)$ queda $f(t) = \sum^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (0, \pi) \\ 0 & \text{si } t \in (-\pi, 0) \end{cases}$ ¿Qué ocurre en 0 y π ? Pues que en ambos casos converge, a $1/2$.

Ejemplo 39. Sea $f(t) = t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Es claro que f es impar, con lo cual sabemos que $a_n = 0 \forall n$. Nos limitaremos a calcular los coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \operatorname{sen}(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \operatorname{sen}(nt) dt,$$

que integrando por partes, $\begin{cases} u = t & dv = \operatorname{sen}(nt) dt \\ du = dt & v = \frac{-\cos(nt)}{n} \end{cases}$

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{-t \cdot \cos(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n^2} \operatorname{sen}(nt) \Big|_{t=0}^{t=\pi}$$

Luego $f(t) = \sum^{\infty} \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nt) = t \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$. En $-\pi, \pi$, la serie vale 0.

Vemos que en ambos ejemplos se sigue un patrón: en los puntos de discontinuidad de la función, la serie converge al punto medio, $1/2$ y 0.

Ejemplo 40. Sea ahora $f(t) = |t|$ $t \in [-\pi, \pi]$. Ahora tenemos que f es impar, con lo que descartamos los términos b_n . Calculemos a_n y a_0 .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} t^2 \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt$$

que aplicando integración por partes $\begin{cases} u = t & dv = \cos(nt) dt \\ du = dt & v = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \end{cases}$:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{t \cdot \operatorname{sen}(nt)}{n} \Big|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nt) dt = \frac{2}{\pi n^2} \cdot \cos(nt) \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

Luego $S(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt) = |t| = f(t) \quad t \in [-\pi, \pi]$

Observación 53. Si $t = 0$, $S(f)(0) = f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} + \sum^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \Rightarrow \sum^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{4}$.

Observación 54. Cuando f no es continua en t , tenemos que:

$$S_M(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+t) \cdot D_M(z) dz = \int_{-\pi}^0 f(z+t) \cdot D_M(z) dz + \int_0^{\pi} f(z+t) \cdot D_M dz$$

En la primera integral, hacemos el cambio de variable $z = -s, dz = -ds$:

$$\int_{-\pi}^0 f(t-s) \cdot D_M(s) ds + \int_0^{\pi} f(z+t) \cdot D_M(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} (f(z+t) + f(t-z)) \cdot D_M(z) dz$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Teorema 50. Criterio de Dini

Si f es tal que $\exists A \in \mathbb{R}$ y $\exists \delta > 0$ $\forall z \mapsto \frac{f(z+t)+f(t-z)-2A}{z}$ es Riemann-integrable en $(0, \delta)$, entonces:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M(f)(t) = S(f)(t) = A$$

Demostración. Es el desarrollo del apartado anterior. □

Corolario 18.

1. Si f tiene límites laterales en t , entonces $A = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.
2. Supongamos que f tiene límites laterales y $\exists \delta > 0 \exists c > 0 \forall z \in (0, \delta) \quad \alpha \in (0, 1], |f(t+z) - f(t^+)| \leq c \cdot z^\alpha$ y $|f(t-z) - f(t^-)| \leq c \cdot z^\alpha$, entonces se verifica el criterio de Dini con $A = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.
3. El caso anterior se da con $\alpha = 1$ si $\exists \lim_{z \rightarrow t^+} f'(z)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70