Carga dinámica: Aquella cuya magnitud, posición o dirección cambia en cada instante del tiempo

Las acciones a las que están sometidas las estructuras dependen del tiempo (viento, aceleración sísmica, impacto...) Esto condiciona el análisis

SUSPENSIÓN: Muelles y amortiguadores

- Muelle: Aporta rigidez, controlando el desplazamiento vertical y transversal del vehículo.

$$\text{Ley de Hooke: } F = K \cdot u$$

- Amortiguador: Controla la velocidad del desplazamiento

$$\underbrace{F_a = c}_{cte} \cdot \underbrace{\dot{u}}_{\text{vel desplazamiento}} = c \cdot \frac{du}{dt}$$

Se controlan el desplazamiento y su velocidad. Si uno de los 2 es muy grande, aparece la fuerza de inercia que hace que un sólido esté sometido a aceleraciones si se le aplican fuerzas.

$$\text{Ley de Newton: } F = m \cdot a$$

Las vibraciones implican intercambio de energía elástica y de deformación.
Hay que diferenciar entre movimiento, oscilación y vibración.
La vibración implica oscilación y movimiento, pero no al revés.

<u>Ejemplos:</u>

Una rueda bien equilibrada se mueve, pero ni oscila ni vibra.

Un ascensor vibra al llegar a su parada, al frenar.
Un péndulo en un plano oscila pero no vibra.

Las vibraciones producen sonido debido a la energía de deformación. En la vibración hay un intercambio de energía.
Las vibraciones son movimientos alrededor de un punto de equilibrio cuando la pieza se separa de él, intercambiando energía.

Metodología

1) Establecer las ecuaciones de movimiento del sólido (Ecuaciones diferenciales)
2) Resolver el sistema de ecuaciones
3) Interpretación de resultados

Para establecer las ecuaciones de movimiento, es necesario fabricar un modelo (puede ser muy simple o muy complejo). Cuanto más simple es un modelo, más fácil es de resolver y menos se ajusta a la realidad.

(El modelo más simple es el modelo de 3 grados de libertad)

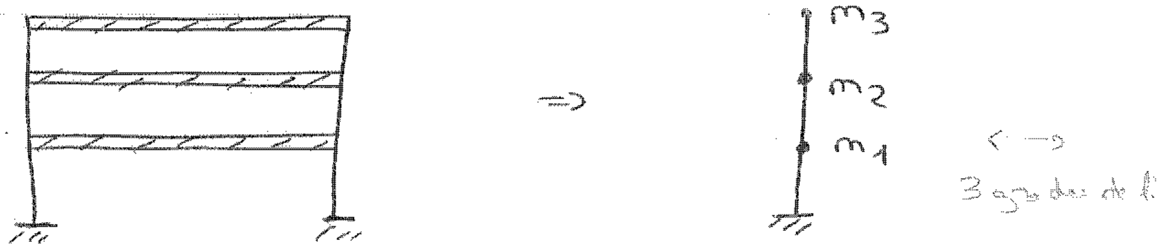
GRADOS DE LIBERTAD

Son todas las coordenadas necesarias para definir el estado de configuración de un sistema.
En el plano hay 3 grados de libertad (2 desplazamientos y 1 giro)
En el espacio hay 6 grados de libertad.

Un edificio en 3D tiene ∞ g.d.l, ya que tiene ∞ puntos.

Nº de g.d.l: Nº de desplazamientos o giros independientes necesarios para definir la posición de todas las masas respecto a su posición de equilibrio

Se modeliza la estructura formada por 3 forjados suponiendo que la masa está localizada en los forjados (los pilares no pesan) y que los pilares son inextensibles (no se pueden mover ni arriba ni abajo, solo en el plano) ⟷

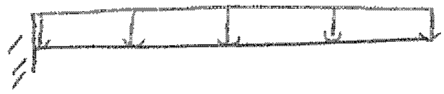


Estructura real — Idealización

Cuanto mayor sea el nº de g.d.l adoptados, mayor será el grado de aproximación a la respuesta real de la estructura, pero también la complejidad del análisis. Conviene elegir aquellos g.d.l en los que se espera que se produzca la respuesta ppal de la estructura

- Cuando un sistema tiene infinitos grados de libertad (g.d.l), se llama continuo.

  Este es el caso de una viga empotrada libre. Se puede simplificar a 1 g.d.l. ↕

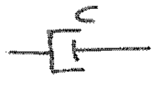


- Cuando un sistema no tiene infinitos g.d.l., se llaman discretos. En ellos actúan fuerzas

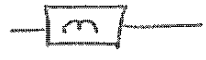
3 fuerzas interiores en la dirección del g.d.l. son:

- FUERZAS ELÁSTICAS: Se representan mediante un muelle con su rigidez (K).

- FUERZAS DISIPATIVAS: Se representan con un amortiguador caracterizado por su amortiguamiento (C)



- FUERZAS DE INERCIA: Se representan con una masa, en la que los cambios en el tiempo producen aceleraciones.



Se estudian sistemas lineales. Se puede aplicar el principio de superposición. Ni la rigidez, ni el amortiguamiento, ni la masa dependen del tiempo, ni tampoco las deformaciones. Aunque los sistemas que estudiamos son lineales, la realidad es no lineal y aparecen grandes deformaciones, amortiguamiento por rozamiento...

Hay 2 tipos de vibraciones:

- Deterministas: las fuerzas son perfectamente conocidas.
- Aleatorias: Se conocen los parámetros estadísticos (media y desviación típica)

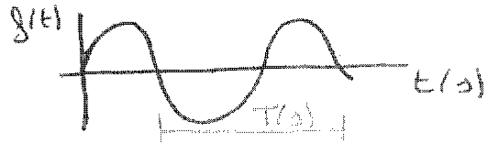
Otra clasificación es:

- Vibraciones libres: las fuerzas aplicadas son nulas.
- Vibraciones forzadas: Hay presencia de fuerzas exteriores.

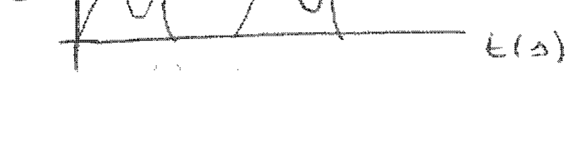
También pueden ser:

- Periódicas: Consisten en sucesivos ciclos que se repiten idénticamente cada determinado intervalo de tiempo, denominado periodo. Pueden ser de 2 tipos:
  - Armónicas: Las que siguen una ley del tipo seno o coseno. Ej: Cargas que genera una M desequilibrada [illegible]

SERIES FOURIER

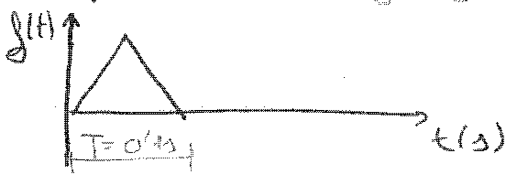


  - Armónicas complejas: No siguen una ley tipo seno o coseno. Ej: Carga generada por [illegible]

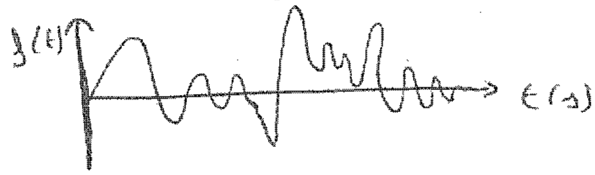


• No periódicas: Aquellas que no se repiten con las mismas características en el tiempo. Hay 2 tipos:

- De corta duración o impulsivas: Cargas con forma arbitraria con un tiempo de duración muy corto comparado con el periodo de vibración de la estructura sobre la que se aplican. Ej: carga generada por una explosión



- De larga duración: Cargas de forma arbitraria pero de duración varias veces superior al periodo fundamental de la estructura sobre la que se aplican. Ej: mov sísmico, terremotos, viento, oleaje



Métodos para plantear las ecuaciones de equilibrio dinámico.

• Ecuación de Newton
• Principio de D'Alembert
• Principio de los trabajos virtuales
• Principio de Lagrange
• Principio de Hamilton

ECUACIÓN DE NEWTON

La variación de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza.

$$P = m \cdot V \;;\; \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot V) \underset{m = cte}{=} m \cdot \frac{dv}{dt} = \boxed{m \cdot a = F(t)}$$

⇒ D'ALEMBERT (Pasa de dinámica a estática)

$F(t) - m \cdot a = 0$

El concepto de que una masa en mov. desarrolla una f. proporcional a una aceleración y en sentido contrario a ella, se conoce como fza de D'Alembert

$F(t)$ $\begin{cases} F = K \cdot U \to \text{Rigidez} \\ F = c \cdot \dot{U} \to \text{Amortiguación} \end{cases}$

$m \cdot a \to$ Fuerzas de inercia

* Para poder aplicar este principio, el sistema tiene que estar en <u>equilibrio</u>.

- Desplazamientos

$$\boxed{m \cdot \ddot{U} + c \cdot \dot{U} + K \cdot U = 0}$$

→ Fuerzas aplicadas: $\underline{F(t) = m \ddot{U} + c \cdot \dot{U} + K \cdot U}$

- Giros (las cc. se modifican y aparece el momento de inercia)

$$\boxed{\underbrace{I}_{\text{inercia al giro}} \cdot \ddot{\theta} + \underbrace{c}_{\text{amortig. al giro}} \cdot \dot{\theta} + \underbrace{K}_{\text{rigidez al giro}} \cdot \theta = 0}$$

⇒ <u>Unidades:</u>

$m \cdot \ddot{U} + c \cdot \dot{U} + K \cdot U = 0$ [N]

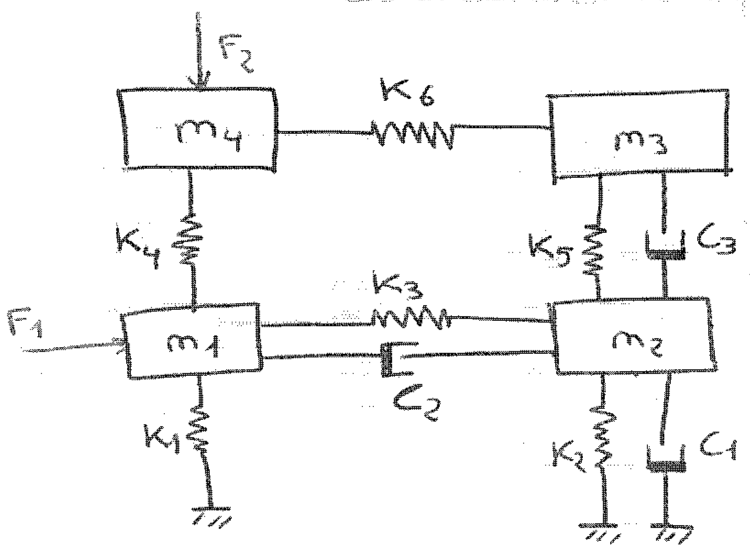
$Kg \cdot \frac{m}{s^2} + \underset{\uparrow}{} \cdot \frac{m}{s} + \underset{\uparrow}{} \cdot m = 0$

$c = \frac{Kg}{s} = \frac{N \cdot s}{m}$ | $K = \frac{Kg}{s^2} = \frac{N}{m}$

$I \cdot \ddot{\theta} + c \cdot \dot{\theta} + K \cdot \theta = 0$ [N.m]

$I = \frac{N \cdot m \cdot s^2}{rad}$ | $c = \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$ | $K = \frac{N \cdot m}{rad}$

$\ddot{\theta} = \frac{rad}{s^2}$ | $\dot{\theta} = \frac{rad}{s}$ | $\theta = rad$



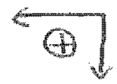
Las masas no tienen inercia al giro (giros despreciables)

Las masas solo se mueven en el plano

Cada una de las cuatro masas tiene dos grados de libertad:

8 ecuaciones diferenciales

Hay que definir un sentido +

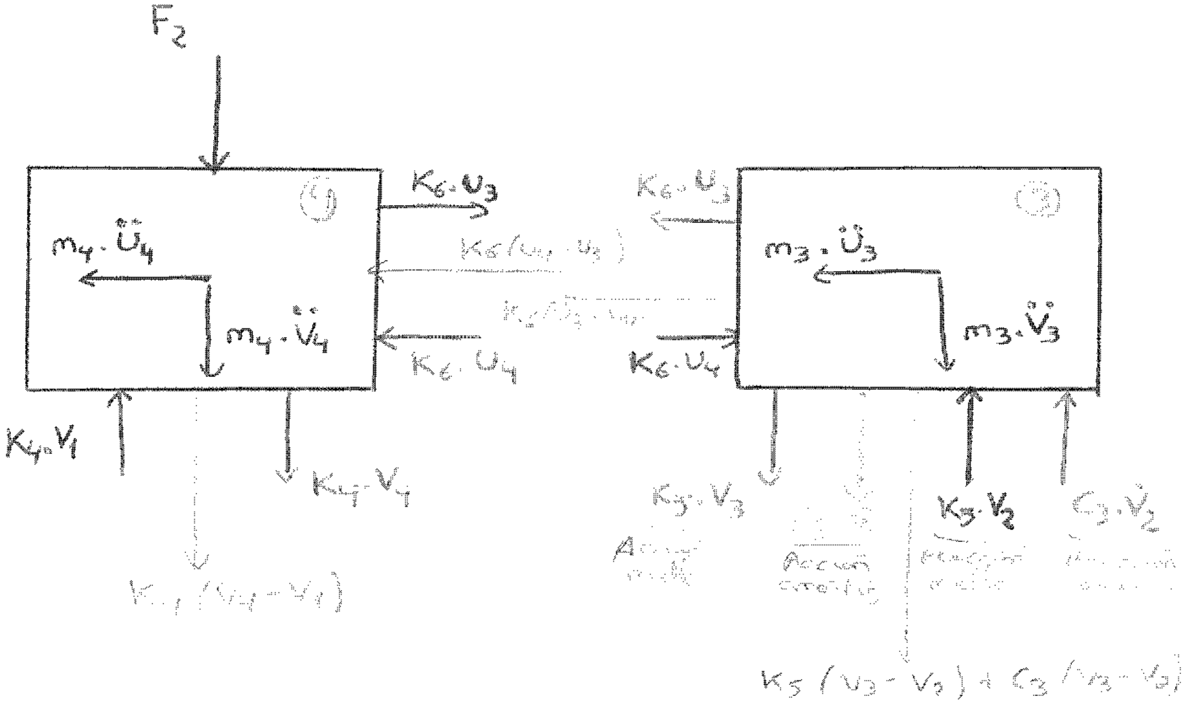


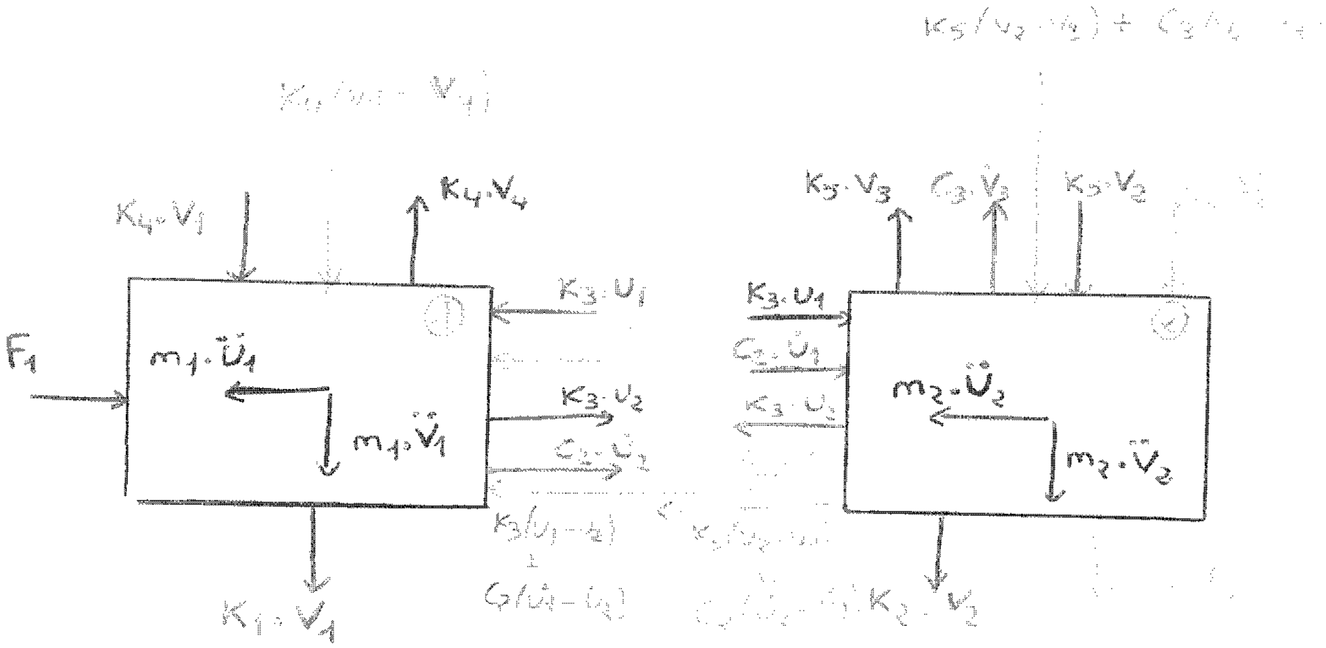
Para realizar el diagrama del cuerpo libre se sustituyen los muelles y amortiguadores por fuerzas en cada una de las masas.

La acción y la reacción nunca pueden estar en el mismo sólido.

D'ALEMBERT: $\boxed{F = m \cdot \ddot{U} + c \cdot \dot{U} + k \cdot U}$

Se plantean las fuerzas en sentido $\ddot{U}$:





Las matrices son simétricas

MATRICES

$$
\begin{pmatrix}
m_1 &&&&&&& \\
& m_1 &&&&&& \\
&& m_2 &&&&& \\
&&& m_2 &&&& \\
&&&& m_3 &&& \\
&&&&& m_3 && \\
&&&&&& m_4 & \\
&&&&&&& m_4
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{V}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{V}_2 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{V}_3 \\ \ddot{U}_4 \\ \ddot{V}_4 \end{pmatrix}
$$

$$+$$

$$
\begin{pmatrix}
C_2 & 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-C_2 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_1+C_3 & 0 & -C_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -C_3 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{V}_4 \end{pmatrix}
$$

$$+$$

$$
\begin{pmatrix}
K_3 & 0 & -K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_1+K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_4 \\
-K_3 & 0 & K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_2+K_5 & 0 & -K_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_6 & 0 & -K_6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_5 & 0 & K_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_6 & 0 & K_6 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_2 \end{pmatrix}
$$

Fuerzas gral. {Fuerzas, Momento}   Desplazamiento gral. {Desp. lin, Giros}

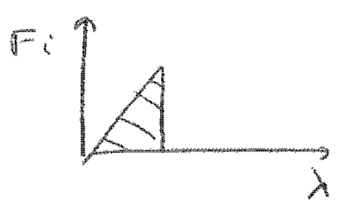
Maxwell - Betti: las matrices son simétricas

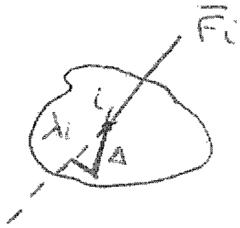
Se aplica en los puntos i un sistema de cargas generalizadas (fuerzas y momentos) $\overline{F_i}$. Como consecuencia de esto, los puntos se desplazan Δ (Desplazamiento pequeño). Se proyecta en la dirección y sentido de la fuerza (λ_i).

⇒ El trabajo al aplicar F_i es:

$$W(F_i) = \frac{1}{2} \sum F_i \cdot \lambda_i$$

→ Las fuerzas se aplican de forma cuasiestática (poco a poco)

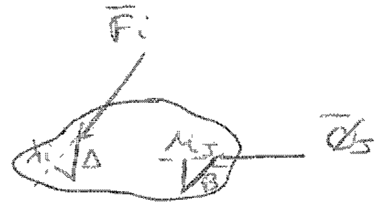




Si se aplica otro sistema de fuerzas $\overline{\phi_J}$ que provoca un desplazamiento B, proyectado en la dirección de la fuerza llamado μ_J.

→ El trabajo es:

$$W(\phi_J) = \frac{1}{2} \sum \overline{\phi_J} \cdot \mu_J$$



$$W(F_i + \phi_J) = \frac{1}{2} \sum \overline{F_i} \cdot \lambda_i + \frac{1}{2} \sum \phi_J \cdot \mu_J + \underbrace{\sum \overline{F_i} \cdot \lambda'_i}_{\text{Trabajo mutuo o indirecto}}$$

No hay $\frac{1}{2}$ pq ya está aplicada.

Cuando se aplica el sistema ϕ, se desplazan los puntos de aplicación y también los de todo el sólido (incluidos los puntos de aplicación de F).

Si se aplica primero ϕ y luego F:

$$W(\phi_J + F_i) = \frac{1}{2} \sum \phi_J \cdot \mu_J + \frac{1}{2} \sum \overline{F_i} \cdot \lambda_i + \underline{\sum \phi_J \cdot \mu'_J}$$

El trabajo [illegible] dependiendo del camino: $\boxed{\sum F_i \cdot \lambda'_i = \sum \phi_J \cdot \mu'_J}$

Maxwell: Los trabajos mutuos o indirecto son iguales.

$\lambda_i' = \delta_{ij} \cdot \phi_J$ $\qquad\qquad$ $\mu_J' = \delta_{ji} \cdot F_i$

δ_{ij}: Desplazamiento del punto i cuando en el punto j se aplica una fuerza unidad.

ϕ_J: Fuerza cuando esta es distinta a la unidad.

δ_{ji}: Desplazamiento del punto j cuando en el punto i se aplica una fuerza unidad

$\Sigma F_i \cdot \lambda_i' = \Sigma \phi_J \cdot \mu_J'$; $\Sigma F_i \cdot \delta_{ij} \cdot \phi_J = \Sigma \phi_J \cdot \delta_{ji} \cdot F_i \Rightarrow \boxed{\delta_{ij} = \delta_{ji}}$

$\Rightarrow$ Los coeficientes de influencia mutuos o recíprocos son iguales. Las matrices son simétricas.

MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO (C_{ij})

Cada uno de los términos de la matriz de amortiguamiento C_{ij} representa la fuerza generalizada (fuerzas y momentos) que aparece en el grado de libertad i cuando se impone una velocidad unidad en el grado de libertad j, manteniendo nulos todas las demás velocidades, así como las aceleraciones y desplazamientos.

MATRIZ DE RIGIDEZ (k_{ij})

Los términos de la matriz de rigidez K_{ij} representan la fuerza generalizada que aparece en el g.d.l. i cuando se impone un desplazamiento unidad en el g.d.l. j mante niendo nulos los demás desplazamientos, así como las aceleraciones y velocidades.

MATRIZ DE MASAS (m_{ij})

Los términos m_{ij} de la matriz de masas representan la fuerza generalizada que aparece en el grado de libertad i cuando se impone una aceleración unidad en el g.d.l. j manteniendo nulos las demás aceleraciones, así como los desplazamientos y velocidades.

PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

La condición necesaria y suficiente para que un sistema esté en equilibrio es que el trabajo realizado por todas las fuerzas generalizadas actuantes en el mismo, sobre un conjunto de desplazamientos cualquiera compatibles con los enlaces (con las condiciones de contorno), es que sea nulo.

$$\Sigma F \cdot \delta = 0 \begin{cases} \delta = 0 \\ \Sigma F = 0 \text{ (equilibrio)} \end{cases}$$

PRINCIPIO DE LAGRANGE

Da lugar a n ecuaciones vectoriales (Ecuaciones del movimiento)

PRINCIPIO DE HAMILTON

La variación a lo largo del tiempo de la suma de las fuerzas conservativas (derivada) y no conservativas de un sistema es cero.

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\delta . L}_{} . dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta . W_{nc} . dt = 0$$

Lagrangiano $\equiv L = T - V$ (Energía cinética − Energía potencial)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta . (T - V) . dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} . dt = 0$$

$$T = \frac{1}{2} . m . \dot{u}^2 \longrightarrow \delta T = m . \dot{u} . \delta \dot{u}$$

$$V = \frac{1}{2} . K . u^2 \longrightarrow \delta V = K . u . \delta u$$

$$F_{nc} \begin{cases} F(t) \\ \underset{\text{amortig.}}{F_a} = c . \dot{u} \end{cases}$$

$$W_{nc} = (F(t) \underset{\text{el amortig. se opone al mov.}}{-} c . \dot{u}) . u \rightarrow \delta W_{nc} = [F(t) - c . \dot{u}] . \delta u$$

* La vel. del amortiguador no varía con el desplazamiento

$$\int_{t_1}^{t_2} (m . \dot{u} . \delta \dot{u} - K . u . \delta u) \, dt + \int_{t_1}^{t_2} [F(t) - c . \dot{u}] \, \delta u . dt = 0$$

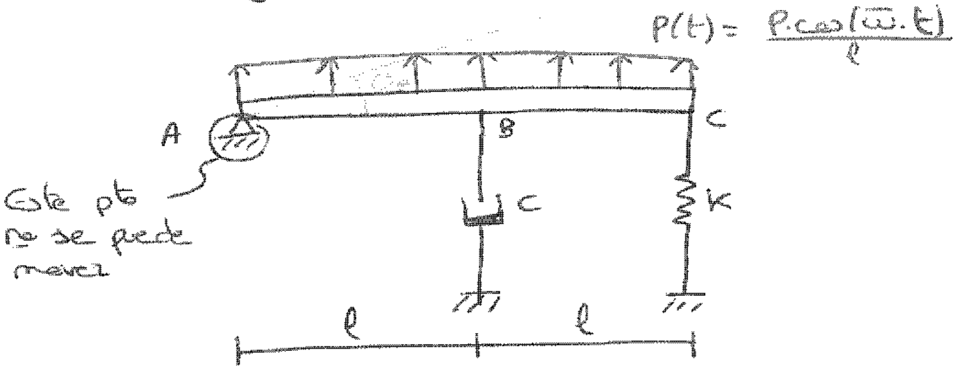
→ Integral por partes: $\begin{cases} U = m . \dot{u} \rightarrow dU = m . \ddot{u} . dt \\ dV = \delta \dot{u} . dt = \delta \left(\frac{du}{dt} \right) . dt = \delta (du) = d(\delta u) \rightarrow V = \delta u \end{cases}$

$$\int_{t_1}^{t_2} m . \dot{u} \, \delta \dot{u} dt = \cancel{m . \dot{u} \, \delta u \Big|_{t_1}^{t_2}}^{\,0} - \int_{t_1}^{t_2} m . \ddot{u} . \delta u . dt$$

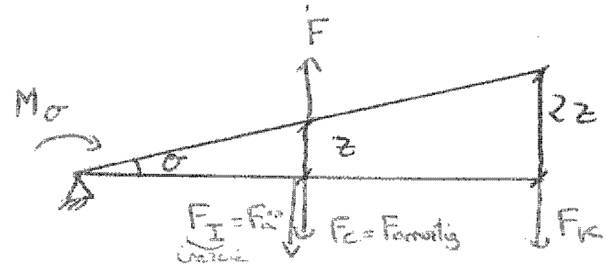
$$\int_{t_1}^{t_2} - m . \ddot{u} . \cancel{\delta u . dt} - K . u . \cancel{\delta u \, dt} + [F(t) - c . \dot{u}] . \cancel{\delta u \, dt} = 0$$

$$- m . \ddot{u} - K . u - c . \dot{u} + F(t) = 0 \Rightarrow \boxed{m . \ddot{u} + c . \dot{u} + K . u = F(t)}$$

Determinar las ecuaciones del movimiento y los paráme-
tros generalizados, valor de la frecuencia de la carga ($\bar{\omega}$)
para que el sistema entre en resonancia.
La barra es infinitamente rígida con una masa total m.



Solo hay un grado de libertad ↕
Hay un giro, hay inercia



PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

- Determinar los desplazamientos (generalizados)

$\Delta_B = z$

$\Delta_C = 2z$

$\operatorname{tg} \sigma_B \simeq \sigma_B = \frac{z}{\ell}$

- Desplazamientos virtuales (generalizados)

$B \rightarrow \delta z$

$C \rightarrow 2\delta z$

$B \rightarrow \frac{\delta z}{\ell}$

• Fuerzas (generalizadas)

$$F_{carga} = \frac{P \cdot \cos(\bar{\omega} t)}{\cancel{\ell}} \cdot 2\cancel{\ell} = 2 \cdot P \cdot \cos(\bar{\omega} t)$$

$$F_K = K \cdot 2z$$

$$F_I = m \cdot \ddot{z}$$

$$F_C = c \cdot \dot{z}$$

$$M = I \cdot \ddot{\theta}_B \quad ; \quad I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot \ell'^2 = \frac{1}{12} m \cdot (2\ell)^2 = \frac{1}{3} m \cdot \ell^2$$

• Trabajos virtuales

$$\ominus \; W_{carga} = 2P \cdot \cos(\bar{\omega} t) \cdot \underbrace{\delta z}_{\text{desplaz. virtual } B}$$

$$W_K = 2 \cdot K \cdot z \cdot \underline{2 \cdot \delta z}$$

$$W_I = m \cdot \ddot{z} \cdot \underline{\delta z}$$

$$W_C = c \cdot \dot{z} \cdot \underline{\delta z}$$

$$W_\theta = I \cdot \ddot{\theta}_B \cdot \frac{\delta z}{\ell} = I \cdot \frac{\ddot{z}}{\ell} \cdot \frac{\delta z}{\ell} = \frac{m \cdot \cancel{\ell^2} \cdot \ddot{z}}{3 \cdot \cancel{\ell^2}} \cdot \delta z$$

• $\Sigma TV = 0$

$$-2P \cdot \cos(\bar{\omega} t) \cdot \cancel{\delta z} + 4K \cdot z \cdot \cancel{\delta z} + c \cdot \dot{z} \cdot \cancel{\delta z} + m \cdot \ddot{z} \cdot \cancel{\delta z} + \frac{I}{\ell^2} \cdot \ddot{z} \cdot \cancel{\delta z} = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{3} m\right) \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + 4K \cdot z = 2P \cdot \cos(\bar{\omega} t)$$

$$\boxed{\frac{4}{3} m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + 4Kz = 2P\cos(\bar{\omega} t)}$$ Ecuación de movimiento del sistema

→ Se denominan parámetros generalizados a los correspondientes a la masa, el amortiguamiento, la rigidez y la fuerza que se obtienen en la ecuación del movimiento.

En este caso:

- La masa generalizada es: $m^* = \frac{4}{3} m$
- El amortiguamiento generalizado es: $c^* = c$
- La rigidez generalizada es: $k^* = 4k$
- La fuerza generalizada es: $F^*(t) = 2 \cdot P \cdot \cos(\bar{\omega} t)$

$$\Rightarrow \boxed{m^* \cdot \ddot{z} + c^* \cdot \dot{z} + k^* \cdot z = F(t)}$$

Se denomina frecuencia natural del sistema a:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

En este caso: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{4k}{\frac{4}{3}m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$

- El sistema entra en resonancia cuando su frecuencia natural coincide con la frecuencia excitadora, es decir, cuando $\omega = \bar{\omega}$

En este caso: $\boxed{\bar{\omega}^2 = \frac{3k}{m}}$

PRINCIPIO DE HAMILTON

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} \cdot dt = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{z}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I \cdot \dot{\theta}^2} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m \cdot (2l)^2 \cdot \left(\frac{\dot{z}}{l}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2} m \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{6} m \cdot \dot{z}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3} m\right) \cdot \dot{z}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} m \cdot \dot{z}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \cdot (2z)^2 = 2k \cdot z^2$$

$$W_{nc} = 2 \cdot P \cdot \cos(\bar{\omega} t) - c \cdot \dot{z}$$

$$\delta T = \frac{4}{3} m \cdot \dot{z} \cdot \delta \dot{z}$$

$$\delta V = 4k \cdot z \cdot \delta z$$

$$\delta W_{nc} = 2P \cos(\bar{\omega} t) \cdot \delta z - c \cdot \dot{z} \cdot \delta z$$

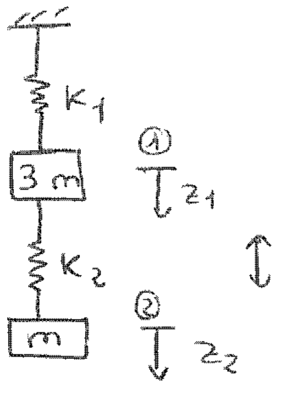
$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{4}{3} m \cdot \dot{z}}_{U} \cdot \underbrace{\delta \dot{z} \cdot dt}_{dV} = \cancel{\left[\frac{4}{3} m \cdot \dot{z} \cdot \delta z\right]_{t_1}^{t_2}}^{\,0} - \int \frac{4}{3} m \cdot \ddot{z} \cdot dt \cdot \delta z$$

Integral por partes $\begin{cases} U = \frac{4}{3} m \cdot \dot{z} \rightarrow dU = \frac{4}{3} m \cdot \ddot{z}\, dt \\ dV = \delta \dot{z} \cdot dt = \delta\left(\frac{dz}{dt}\right) \cdot dt = \delta(dz) = d(\delta z) \rightarrow V = \delta \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-\frac{4}{3} m \cdot \ddot{z}\right) - 4k \cdot z\right] \cancel{\delta z \cdot dt} + \int_{t_1}^{t_2} \left[2 \cdot P \cdot \cos(\bar{\omega} t) - c \cdot \dot{z}\right] \cdot \cancel{\delta z \cdot dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{4}{3} m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + 4k \cdot z = 2P \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t)}$$

Determinar las ecuaciones del movimiento de este sistema:



Aplicar el Principio de Hamilton

No tiene rigidez al giro ni puede oscilar fuera de su plano.

Hay 2 g.d.l.

• Modelo y grados de libertad

2 g.d.l $\begin{cases} 3m \updownarrow \\ m \updownarrow \end{cases}$

• Principio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) \cdot dt + \cancel{\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} \, dt} = 0$$

No hay cargas exteriores ni amortiguación las 2 masas y por lo tanto, sus movimientos están acoplados, el movimiento de una depende del de la otra.

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(3m)\cdot \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m\, z_2^2 \\ V = \frac{1}{2} K_1 \cdot z_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \cdot (z_2 - z_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta T_{z_1} = 3m\, \dot{z}_1 \cdot \delta \dot{z}_1 \\ \delta T_{z_2} = m \cdot \dot{z}_2 \cdot \delta \dot{z}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta V_{z_1} = K_1 \cdot z_1 \cdot \delta z_1 - K_2 (z_2 - z_1) \cdot \delta z_1 \\ \delta V_{z_2} = K_2 \cdot (z_2 - z_1) \cdot \delta z_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ El Hamiltoniano tiene 2 variables $<\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{3m \cdot \dot{z}_1}_{U} \cdot \underbrace{\delta \dot{z}_1 \cdot dt}_{dV} \overset{\text{int. por partes}}{=} \overbrace{3m \cdot \dot{z}_1 \cancel{\delta z_1}\Big]_{t_1}^{t_2}}^{=0} - \int_{t_1}^{t_2} 3m \cdot \ddot{z}_1 \cdot dt\ \delta z_1$$

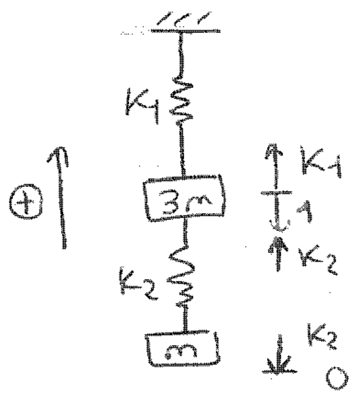
$$\begin{cases} U = 3m \cdot \dot{z}_1 \rightarrow dU = 3m \cdot \ddot{z}_1\, dt \\ dV = \delta \dot{z}_1 \cdot dt = \delta \left(\frac{d z_1}{dt}\right) \cdot dt = \delta (d z_1) = d(\delta z_1)\ ;\ V = \delta z_1 \end{cases}$$

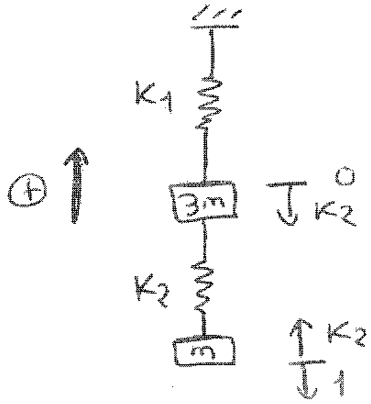
$$\int_{t_1}^{t_2} m \cdot \dot{z}_2 \cdot \delta \dot{z}_2 \overset{\text{integ. por partes}}{=} \ldots - \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \ddot{z}_2 \cdot dt \cdot \delta z_2$$

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \left[-3m \cdot \ddot{z}_1 - K_1 z_1 + K_2 (z_2 - z_1) \right] \cdot \delta z_1 \cdot dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[-m\, \ddot{z}_2 - K_2 (z_2 - z_1) \right] \cdot \delta z_2 \cdot \cancel{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3m \cdot \ddot{z}_1 + K_1 \cdot z_1 - K_2 (z_2 - z_1) = 0 \\ m \cdot \ddot{z}_2 + K_2 (z_2 - z_1) = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{m_{ij}}\begin{pmatrix}\ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2\end{pmatrix}}_{K_{ij}}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

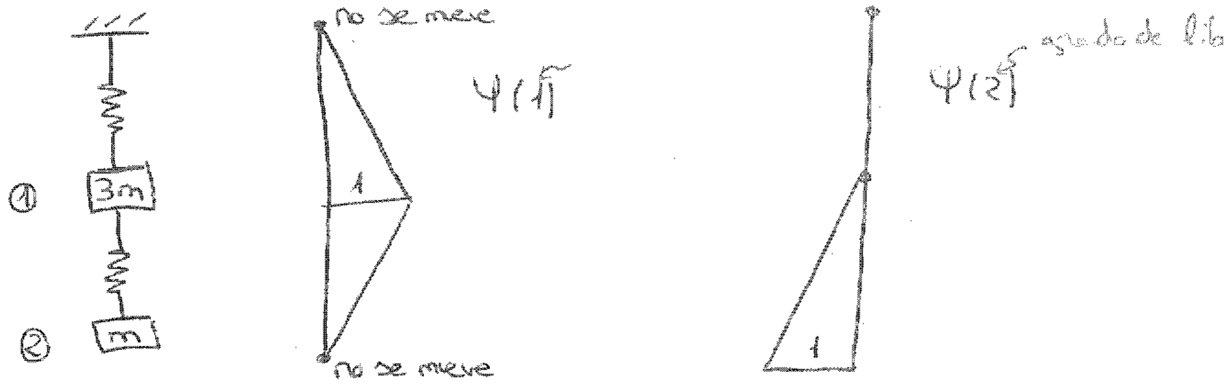




$$\boxed{m_{ij} = \sum_g m(g)\cdot \psi_i(g)\cdot \psi_j(g)}$$

g: grados de libertad del sistema

ψ: funciones de forma



$m_{11} = 3\cdot m\cdot 1\cdot 1 + m\cdot 0\cdot 0 = 3m$

f. de forma del 1 del g.d.l. 1

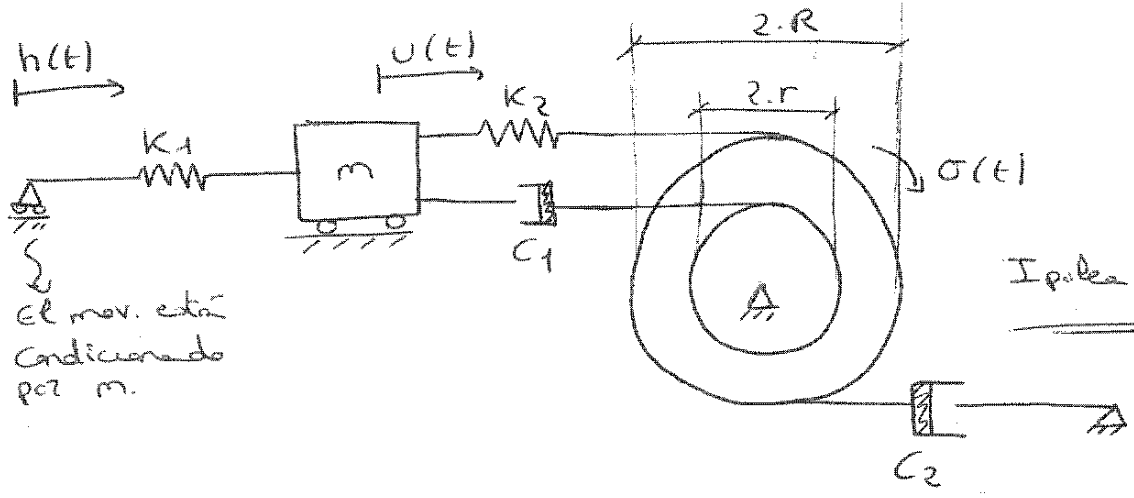
$m_{12} = 3\cdot m\cdot 1\cdot 0 + m\cdot 0\cdot 1 = 0$

$m_{21} = 3m\cdot 0\, 1 + m\cdot 1\cdot 0 = 0$

$m_{22} = 3m\cdot 0\cdot 0 + m\cdot 1\cdot 1 = m$

$$\begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

* Ecuaciones del movimiento



$$I_{polea} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\varnothing}{2}\right)$$

→ Dando un movimiento $u(t)$, hay 1 g.d.l. Otro movimiento es $h(t)$

Siendo $h(t) = f[u(t)]$. Hay un giro en la polea $\sigma(t)$

⇒ Sistema de 2 g.d.l $\begin{cases} u(t) \\ \sigma(t) \end{cases}$

PRINCIPIO DE HAMILTON (Mucho más rápido)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\sigma}^2 \quad \begin{cases} \delta T_u = m \cdot \dot{u} \cdot \delta \dot{u} \\ \delta T_\sigma = I \cdot \dot{\sigma} \cdot \delta \dot{\sigma} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \underbrace{(u - h)}^2 + \frac{1}{2} K_2 (\underbrace{\sigma R - u})^2 \quad \begin{cases} \delta V_u = [K_1 (u-h) - K_2 (\sigma R - u)] \delta u \\ \delta V_\sigma = K_2 \cdot (\sigma R - u) \cdot \underline{R} \cdot \delta \sigma \end{cases}$$

$$W_{nc} = \mp C_1 \cdot (\dot{\sigma} r - \dot{u}) (\underbrace{\sigma r - u}_{distancia}) - C_2 (\dot{\sigma} R) \cdot \underline{\sigma \cdot R}$$

$$\begin{cases} \delta W_{ncu} = C_1 \cdot (\dot{\sigma} r - \dot{u}) \cdot \delta u \\ \delta W_{nc\sigma} = - C_1 (\dot{\sigma} r - \dot{u}) \cdot r \, \delta \sigma - C_2 \cdot \dot{\sigma} \cdot R^2 \cdot \delta \sigma \end{cases}$$

$$\int \delta T_u = - m \cdot \ddot{u} \, \delta u \quad ; \quad \int \delta T_\sigma = - I \cdot \ddot{\sigma} \, \delta \sigma$$

Buscar inercia de una polea. → $I = \frac{1}{2} m R^2$ $\quad \frac{1}{2} \ldots = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$

$$\underline{u(t)} \Rightarrow -m \cdot \ddot{u}\, \delta u\, \cancel{dt} - [K_1 (u-h) - K_2 (\sigma R - u)]\, \delta u\, \cancel{dt} +$$

$$c_1 (\dot{\sigma} r - \dot{u})\, \delta u\, \cancel{dt} = 0$$

$$-m \cdot \ddot{u} - c_1 \cdot \dot{u} - (K_1 + K_2) \cdot u + K_1 \cdot h + K_2 \sigma \cdot R + c_1 \dot{\sigma} \cdot r = 0$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{u} + c_1 \cdot \dot{u} + (K_1 + K_2) \cdot u - K_1 \cdot h - K_2 \cdot \sigma \cdot R - c_1 \cdot \dot{\sigma} r = 0}$$

$$\underline{\sigma(t)} \Rightarrow -I \cdot \ddot{\sigma}\, \delta\sigma\, \cancel{dt} - K_2 (\sigma R - u) \cdot R \cdot \delta\sigma\, \cancel{dt} - [c_2 \dot{\sigma} R^2 - c_1 (\dot{\sigma} r - \dot{u})$$

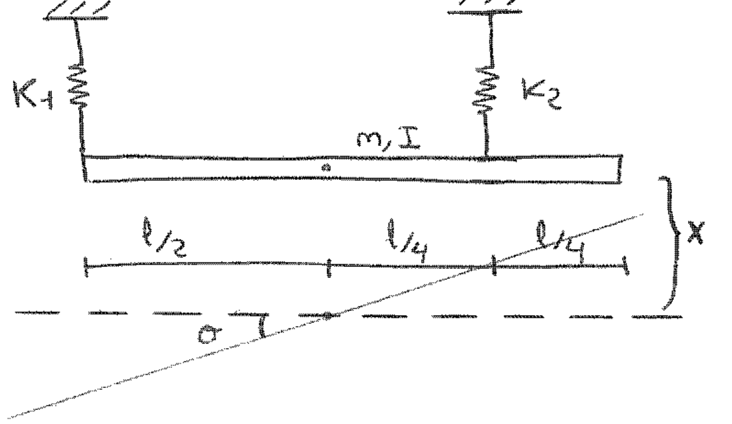
$$\cancel{\delta\sigma\, dt} = 0$$

$$\boxed{I \cdot \ddot{\sigma} + c_2\, \dot{\sigma} R^2 + c_1 (\dot{\sigma} \cdot r - \dot{u}) r + K_2 (\sigma R - u) \cdot R = 0}$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 \cdot r \\ -c_1 \cdot r & c_1 \cdot r^2 + c_2 \cdot R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \cdot R \\ -K_2 \cdot R & K_2 \cdot R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_1 \cdot h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinar las ecuaciones del movimiento. → un avión aterrizando
Cabecea y rebota



2 g.d.l.

$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$

$tg\, \sigma = \sigma$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \dot{\sigma}^2 \\ V = \frac{1}{2} k_1 \left(x + \sigma \cdot \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x - \sigma \cdot \frac{l}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta T_x = m \cdot \dot{x} \cdot \delta \dot{x} \\ \delta T_\sigma = I \cdot \dot{\sigma} \cdot \delta \dot{\sigma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta V_x = k_1 \left(x + \sigma \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \delta x + k_2 \left(x - \sigma \cdot \frac{l}{4}\right) \cdot \delta x \\ \delta V_\sigma = \frac{l}{2} k_1 \cdot \left(x + \sigma \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \delta\sigma - \frac{l}{4} k_2 \left(x - \sigma \cdot \frac{l}{4}\right) \cdot \delta\sigma \end{cases}$$

$W_{nc} = 0$

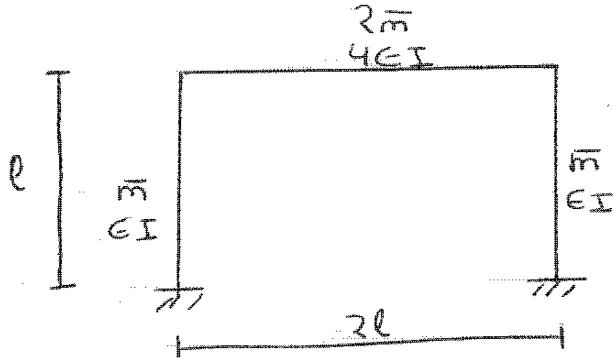
$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \cancelto{0}{\delta W_{nc} \, dt} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_x = - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \cdot \delta x \qquad \int_{t_1}^{t_2} \delta T_\sigma = - \int_{t_1}^{t_2} I \cdot \ddot{\sigma} \cdot \delta \sigma$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[m\ddot{x} - k_1 \left(x + \sigma \frac{l}{2}\right) - k_2 \left(x - \sigma \frac{l}{4}\right)\right] \cancel{\delta x \, dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[-I\ddot{\sigma} - \frac{l}{2} k_1 \left(x + \sigma \frac{l}{2}\right) + \frac{l}{4} k_2 \left(x - \sigma \frac{l}{4}\right)\right] \cancel{\delta \sigma \, dt} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_1 \left(x + \sigma \frac{l}{2}\right) + k_2 \left(x - \sigma \frac{l}{4}\right) = 0 \\ I\ddot{\sigma} + \frac{l}{2} k_1 \left(x + \sigma \frac{l}{2}\right) - \frac{l}{4} k_2 \left(x - \sigma \frac{l}{4}\right) = 0 \end{cases}$$



Determinar las ecuaciones del mov.

$\bar{m} = \frac{m}{long}$

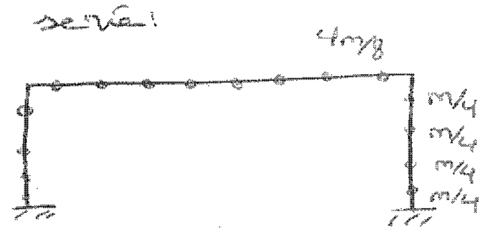
Se trata de un modelo continuo, con masa distribuida a lo largo de toda la longitud. Es muy complicado de resolver.

→ Se discretiza.

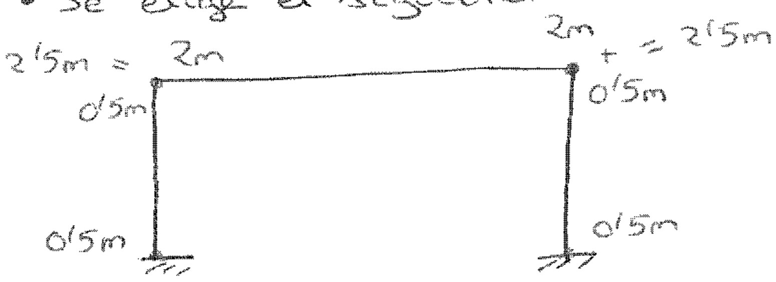
$m_{T\,dintel} = 2\bar{m} \cdot 2l = 4\bar{m} \cdot l = 4m$
$m_{T\,pilar} = \bar{m} \cdot l = m$

} Todo el pórtico tiene una masa de 6m

- MODELO
  - Una posibilidad sería:

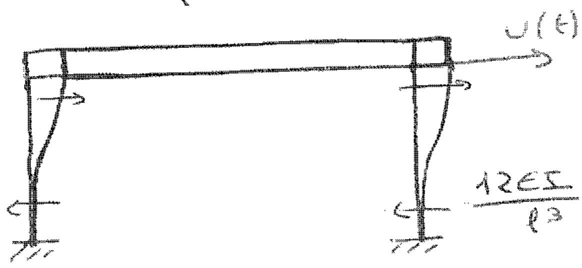


- Se elige el siguiente:



- Pilares inextensibles
- Dintel infinitamente rígido
- Restringido el movimiento en el plano

Movimiento del pórtico



1 g.d.l.

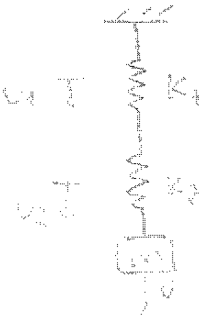
pilares

$$\boxed{5m\ddot{u} + 2\cdot\frac{12EI}{l^3}\cdot u = 0}$$

Rigidez

Calcular la rigidez y el amortiguamiento equivalente en cada caso.

- 2 muelles en serie

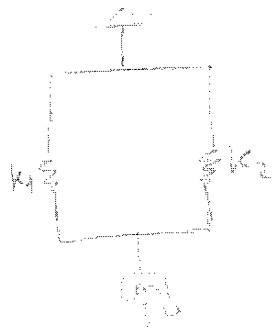


$F = K \cdot u$; $u = \frac{F}{K}$; $u = u_1 + u_2$

$$\frac{m \cdot g}{K_1} + \frac{m \cdot g}{K_2} = \frac{m \cdot g}{K_{eq}}$$

$$\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{K_{eq}} \qquad \boxed{K_{eq} = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}}$$

- 2 muelles en paralelo

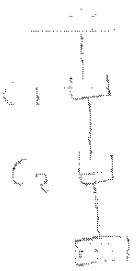


$F = K \cdot u$; $u = \frac{F}{K}$

$u = u_1 = u_2$; $F = F_1 + F_2$

$K_{eq} \cdot u = K_1 \cdot u + K_2 \cdot u$; $\boxed{K_{eq} = K_1 + K_2}$

- 2 amortiguadores en serie



$F = c \cdot \dot{u}$; $\dot{u} = \frac{F}{c}$, $u = u_1 + u_2$

$$\frac{F}{C_1} + \frac{F}{C_2} = \frac{F}{C_{eq}}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}$$

- 2 amortiguadores en paralelo

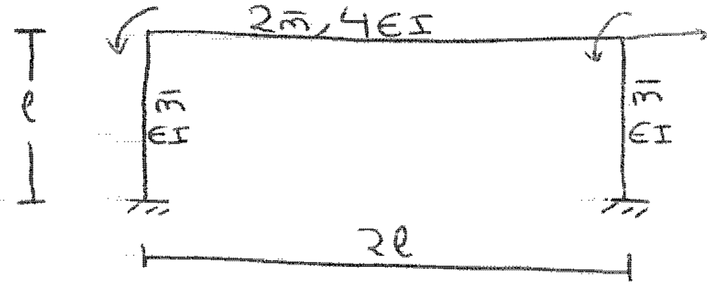
$F = c \cdot \dot{u}$; $\dot{u} = \frac{F}{c}$

$\dot{u} = \dot{u}_1 = \dot{u}_2$; $F = F_1 + F_2$

$C_{eq} \cdot \dot{u} = C_1 \cdot \dot{u} + C_2 \cdot \dot{u}$

$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$

Determinar las ecuaciones del movimiento.



$$\bar{m} = \frac{m}{long.}$$

En general:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{pmatrix}$$

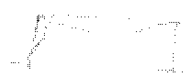
Dintel inextensible: $\frac{EA}{\ell} = 0$
Un grado de libertad menos

$K_{11} = 2 \cdot \frac{12EI}{\ell^3} = \frac{24EI}{\ell^3}$

$K_{12} = \frac{6EI}{\ell^2}$

$K_{13} = \frac{6EI}{\ell^2}$

$K_{21} = \frac{6EI}{\ell^2}$



$K_{22} = 4\frac{(4EI)}{2\ell} + \frac{4EI}{\ell} = \frac{12EI}{\ell}$

$K_{23} = \frac{2EI}{\ell} \Rightarrow \frac{2(4EI)}{2\ell} = \frac{4EI}{\ell}$

$K_{33} = \frac{4EI}{\ell} = \frac{4(4EI)}{2\ell} + \frac{4EI}{\ell} = \frac{12EI}{\ell}$

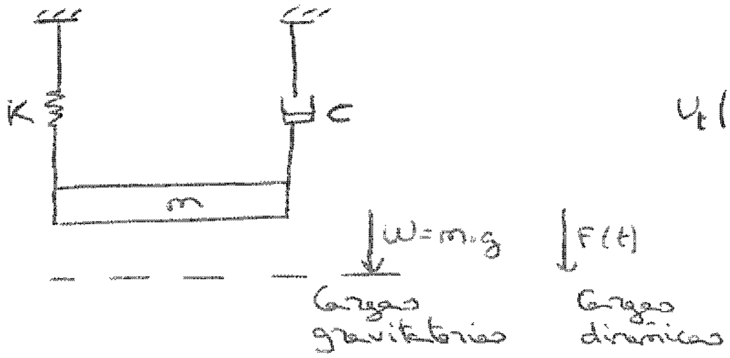
$$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} \frac{24EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \\ 6EI & 4EI & 12EI \end{pmatrix}$$

En la ecuación $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t)$ no se incluyó la fuerza de la gravedad pq su dirección era ⊥ al g.d.l considerado

Influencia de las cargas estáticas

Giramos 90° para que en el sistema intervenga el peso $W = m \cdot g$

El g.d.l. ahora es la traslación vertical



$$u_t(t) = \underbrace{u_{est}}_{\text{cte}} + \underbrace{u(t)}_{\text{dinámico}}$$

(no depende del tiempo)

Derivando

$$\dot{u}_t(t) = \dot{u}(t)$$

$$\ddot{u}_t(t) = \ddot{u}(t)$$

La ecuación del movimiento será:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + K[u_{est} + u(t)] = W + F(t)$$

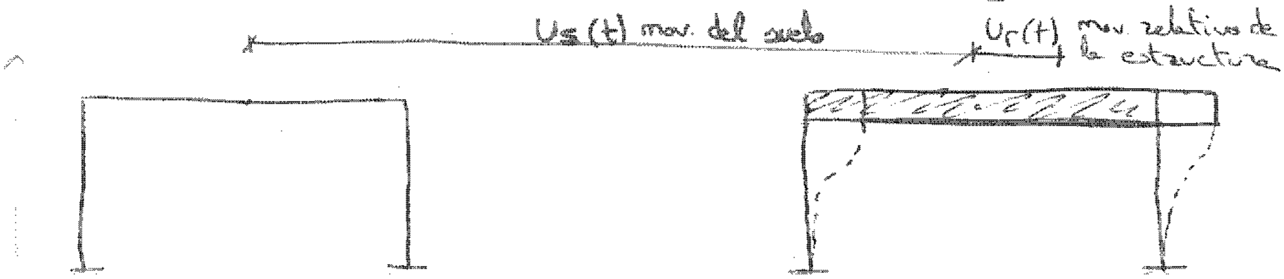
$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + \underbrace{\cancel{K \cdot u_{est}}}_{\text{F. estática}} + K \cdot u(t) = \underbrace{\cancel{W}}_{\text{F. estática}} + F(t)$$

Para la expresión anterior referida a la posición de equilibrio estático

⇒ Las cargas estáticas no tienen influencia porque el equilibrio dinámico se plantea de manera posterior al equilibrio estático. El equilibrio estático existe, se da por hecho.

Influencia de los enlaces o movimiento de la base (terremoto)

Se supone un forjado de masa m unido al suelo por una estructura de rigidez lateral K y cuyo coeficiente de amortiguamiento viscoso vale c. Se supone que solo se puede mover horizontalmente según el eje X (1 g.d.l.)



El pórtico se desplaza primero como un todo rígido y luego, además, como un sólido elástico.

$$u_t(t) = u_s(t) + u_r(t)$$

$$\dot{u}_t(t) = \dot{u}_s(t) + \dot{u}_r(t)$$

$$\ddot{u}_t(t) = \ddot{u}_s(t) + \ddot{u}_r(t)$$

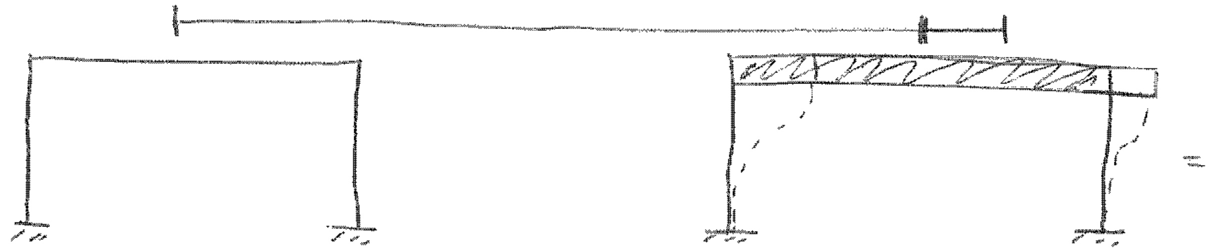
$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F(t)$$

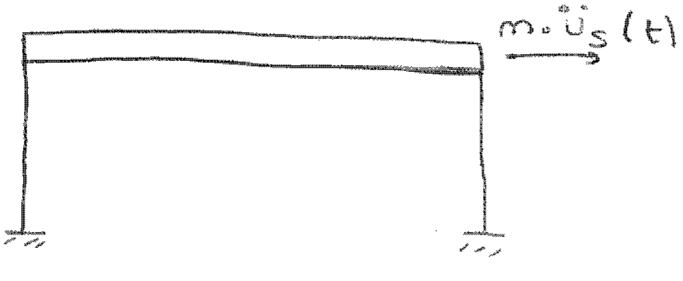
$$m\left[\ddot{u}_s(t) + \ddot{u}_r(t)\right] + \underline{c \cdot \dot{u}_r(t)} + \underline{k \cdot u_r(t)} = F(t) \overset{\overset{\text{No hay fuerzas aplicadas}}{\downarrow}}{=} 0$$

⇒ La rigidez y el amortiguamiento entran en juego solo para movimientos relativos. La masa actúa con todo el movimiento.

$$m \cdot \ddot{u}_r(t) + c \cdot \dot{u}_r(t) + k \cdot u_r(t) = -m \cdot \ddot{u}_s(t)$$

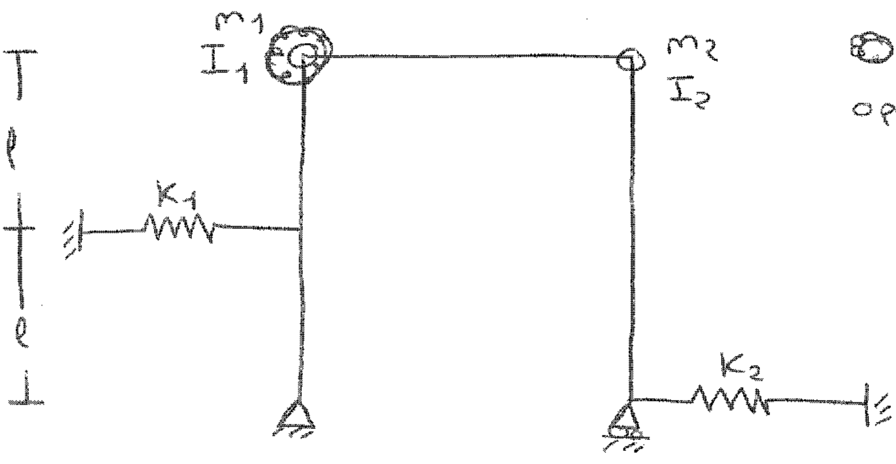
⇒ El movimiento del suelo equivale a una fuerza igual y de sentido contrario aplicada en el grado de libertad.





Fuerza aplicada en cada uno de los forjados

Determinar las ecuaciones del movimiento: PTV y Hamilton



muelle que se opone al giro (espiral)

RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Vibraciones libres: Aquellas para las cuales se verifica que $f(t) = 0$, y por tanto, la ecuación diferencial es:

$$\underbrace{m^* \cdot \ddot{U} + c^* \cdot \dot{U} + K^* \cdot U}_{\text{Parámetros generalizado}} = F(t) = 0$$

$\boxed{m \cdot \ddot{U} + c \cdot \dot{U} + K \cdot U = 0} \rightarrow$ Es una E.D. homogénea de 2° orden cuya solución es:

$$U = \mathcal{U} \cdot e^{\omega t} \qquad \dot{U} = \omega \cdot \mathcal{U} \cdot e^{\omega t} \qquad \ddot{U} = \omega^2 \cdot \mathcal{U} \cdot e^{\omega t}$$

$$m \cdot \omega^2 \cancel{\mathcal{U} e^{\omega t}} + c \cdot \omega \cdot \cancel{\mathcal{U} e^{\omega t}} + K \cdot \cancel{\mathcal{U} e^{\omega t}} = 0$$

$$\boxed{m \cdot \omega^2 + c \cdot \omega + K = 0}$$

$$\omega = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot K}}{2 \cdot m}$$

- Si el amortiguamiento es nulo $(c = 0) \Rightarrow \boxed{\omega = \pm \sqrt{\frac{4 \cancel{m} K}{4 m^{\cancel{2}}}} = \pm \sqrt{\frac{K}{m}}\, i}$

Es la frecuencia natural del sistema (es imaginaria)

$$\boxed{\omega = \pm \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Físicamente las frecuencias negativas <u>no</u> tienen sentido, por ello, para $c = 0$:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

• Si el amortiguamiento no es nulo $(c \neq 0)$: Se discuten las soluciones en función del valor de dentro de la raíz, que puede ser:

$$\sqrt{c^2 - 4mk} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{Sobreamortiguados} \\ = 0 \rightarrow \text{Críticamente amortiguados} \\ < 0 \rightarrow \text{Subamortiguados} \end{cases}$$

→ $\underline{c^2 - 4mk > 0}$ SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS

Los 2 valores de la frecuencia son reales.

$$\omega = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}}_{\hat{\omega}} \begin{cases} -\frac{c}{2m} + \hat{\omega} \\ -\frac{c}{2m} - \hat{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(A \underbrace{sh}_{\text{seno hiperbólico}} \hat{\omega} t + B \underbrace{ch}_{\text{coseno hip.}} \hat{\omega} t) \rightarrow$$ A y B = ctes: Se determinan mediante las condiciones iniciales

$$\begin{cases} sh\, u = \dfrac{e^{-u} - e^{u}}{2} \\ ch\, u = \dfrac{e^{-u} + e^{u}}{2} \end{cases}$$

$$u(t=0) = u_0$$
$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$$

$$\rightarrow u(t=0) = \boxed{u_0 = B}$$
$sh\,u = 0$
$ch\,u = 1$

$\boxed{\frac{dch}{dt}\ sh}$

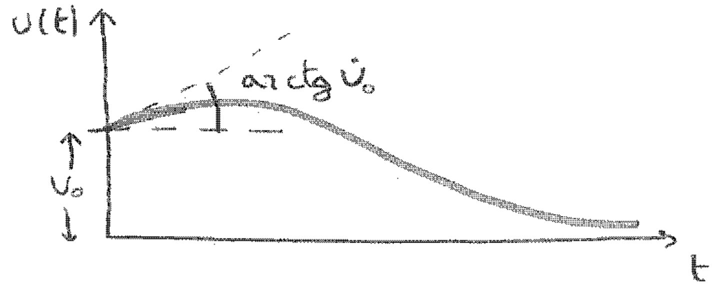
$$\dot{u}(t) = -\frac{c}{2m} \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}(A sh \hat{\omega} t + B ch \hat{\omega} t) + e^{-\frac{c}{2m}t}(A\hat{\omega} ch \hat{\omega} t + B\hat{\omega} sh \hat{\omega} t)$$

$$\rightarrow \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\frac{c}{2m} \cdot \overset{B}{\overset{\shortparallel}{u_0}} + A \cdot \hat{\omega} \ ; \ \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\hat{\omega}} + \frac{c}{2m} \cdot \frac{u_0}{\hat{\omega}}}$$

SOLUCIÓN GRAL DEL MOV. DE SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0}{\hat{\omega}} + \frac{c}{2m}\cdot\frac{u_0}{\hat{\omega}}\right)\cdot sh\,\hat{\omega}t + u_0\, ch\,\hat{\omega}t\right]$$

Se pueden representar mediante:



→ En estructuras no hay sistemas sobreamortiguados, nunca ocurre que $c^2 - 4mk > 0$, porque m y k son mucho mayores que c.

→ $c^2 - 4mk = 0$ SISTEMAS CRÍTICAMENTE AMORTIGUADOS

La solución de la ecuación es una raíz doble y por tanto:

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(C_1 + C_2 t)$$

Las constantes se determinan por las condiciones iniciales que siguen siendo el desplazamiento inicial y la velocidad inicial.

$u(t=0) = u_0$

$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$

$\rightarrow u(t=0) = \boxed{u_0 = C_1}$

$$\dot{u}(t) = -\frac{c}{2m}\cdot e^{-\frac{c}{2m}t}(C_1 + C_2 t) + e^{-\frac{c}{2m}t}\cdot C_2$$

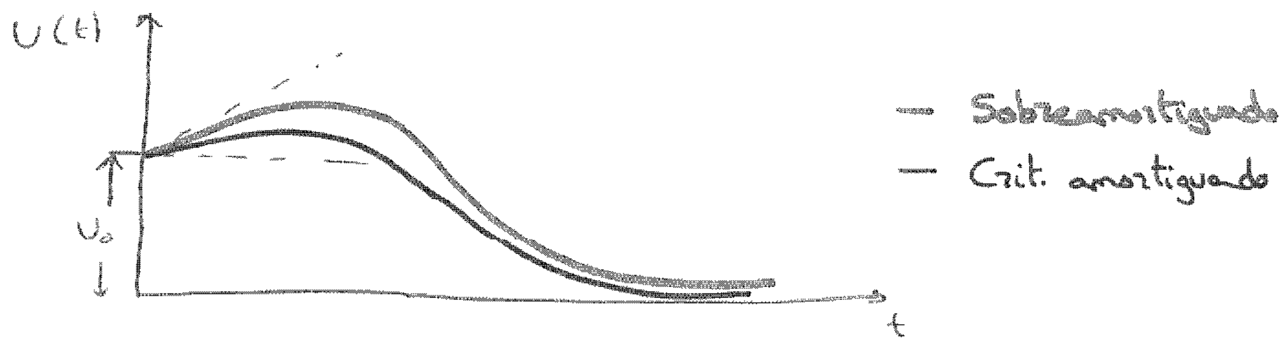
$$\rightarrow \dot{U}(t=0) = \dot{U}_0 = -\frac{c}{2m}\cdot \underset{C_1}{\underbrace{U_0}} + C_2 \; ; \quad \boxed{C_2 = \dot{U}_0 + \frac{c}{2m}\cdot U_0}$$

SOLUCIÓN GRAL DEL MOV. DE SIST. <u>CRITIC. AMORTIGUADOS</u>

$$U(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[U_0 + \left(\dot{U}_0 + \frac{c}{2m}U_0\right)t\right]$$

$\Rightarrow$ Este caso <u>no</u> se da en estructuras

Representación:



$\rightarrow$ <u>$c^2 - 4mk < 0$</u> SISTEMAS <u>SUBAMORTIGUADOS</u>

Aquellos en los que la raíz es imaginaria

$$\omega = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}}_{\text{esto es } -}$$

$$\omega = -\frac{c}{2m} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}_{\tilde{\omega}}\cdot i \longrightarrow 2 \text{ raíces imaginarias}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$U(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(A \operatorname{sen}\tilde{\omega}t + B\cos\tilde{\omega}t) \rightarrow$ A y B se obtienen con las condiciones iniciales

$U(t=0) = U_0$

$\dot{U}(t=0) = \dot{U}_0$

$u(t=0) = \boxed{u_0 = B}$

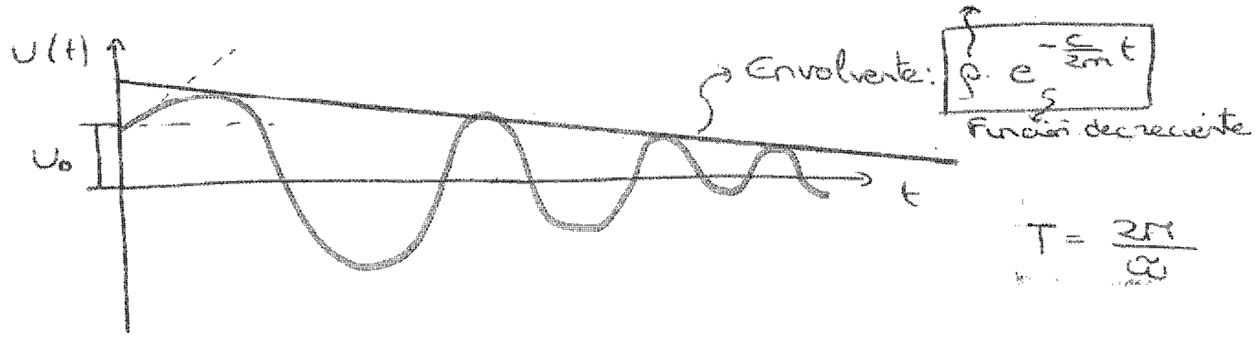
$$\dot{u}(t) = -\frac{c}{2m} \cdot e^{-\frac{c}{2m}t} (A \operatorname{sen} \tilde{\omega} t + B \cos \tilde{\omega} t) + e^{-\frac{c}{2m}t} (A \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t - B \tilde{\omega} \operatorname{sen} \tilde{\omega} t)$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\frac{c}{2m} \cdot u_0 + A \cdot \tilde{\omega}; \quad \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\tilde{\omega}} + \frac{c}{2m} \cdot \frac{u_0}{\tilde{\omega}}}$$

SOLUCIÓN GRAL DEL MOV. DE SISTEMAS <u>SUBAMORTIGUADOS</u>

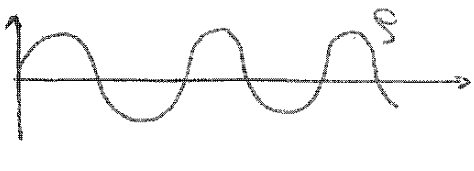
$$* \; u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[\left(\frac{\dot{u}_0}{\tilde{\omega}} + \frac{c}{2m} \cdot \frac{u_0}{\tilde{\omega}} \right) \operatorname{sen} \tilde{\omega} t + u_0 \cdot \cos \tilde{\omega} t \right]$$

Representación:



$T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$

Si <u>$c = 0$</u> ⇒ <u>No</u> hay pérdida de energía y la función es armónica simple.



Frecuencia amortiguada $\equiv \omega_d = \tilde{\omega}$

$$\omega_d = \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{K}{m}\left[1 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \cdot \frac{m}{K}\right]}$$

$c^2 - 4mK = 0 \Rightarrow$ Críticamente amortiguado

$c = \sqrt{4mK}$ (No se necesita $\pm$ porque no hay c relativos)

$C = 2\sqrt{Km} = C_c \rightarrow$ Amortiguamiento crítico

$$\frac{c^2 \cancel{m}}{4m^{\cancel{2}}K} = \frac{c^2}{4mK} = \frac{c^2}{C_c^2}$$

del sistema $\boxed{\frac{c}{C_c} = \xi} \equiv$ Relación de amortiguamiento (%)

$\Rightarrow \boxed{\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}}$

→ El amortiguamiento disminuye la frecuencia y aumenta el periodo. Si:

- $\underline{\xi > 1} \rightarrow$ Sistema sobreamortiguado
- $\underline{\xi = 1} \rightarrow$ Sistema críticamente amortiguado
- $\boxed{\xi < 1} \rightarrow$ Sistema subamortiguado.

En estructuras, la relación de amortiguamiento está entre 4% - 8% (<<1) y, por tanto, casi siempre los movimientos de las estructuras son SUBAMORTIGUADOS.

$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + K \cdot u = 0$

$\ddot{u} + \frac{c}{m} \cdot \dot{u} + \frac{K}{m} \cdot u = 0$

$$\frac{c}{m} = \frac{c \cdot C_c}{C_c \cdot m} = \xi \cdot \frac{2\sqrt{Km}}{m} = \xi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{Km}{m^2}} = 2\xi\sqrt{\frac{K}{m}} = 2\xi\omega$$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\frac{K}{m} = \omega^2$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{u} + 2\xi\omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = 0}}$ Otra expresión de la E.D. en vibraciones libres

$$\begin{cases} \frac{c}{m} = 2\xi w \\ \frac{k}{m} = w^2 \end{cases} \qquad \tilde{w} = w\sqrt{1-\xi^2}$$

$$u(t) = e^{-\frac{\cancel{2}\xi w}{\cancel{2}} \cdot t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0}{w\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\cancel{2}\xi \cancel{w}}{\cancel{2}} \cdot \frac{u_0}{\cancel{w}\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot sen\,(w\sqrt{1-\xi^2})t + \right.$$

$$\left. u_0 \cdot \cos\,(w\sqrt{1-\xi^2})t\right]$$

$$u(t) = e^{-\xi w t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0}{w\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi u_0}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot sen\,(w\sqrt{1-\xi^2})t + u_0 \cdot \cos\,(w\sqrt{1-\xi^2})t\right]$$

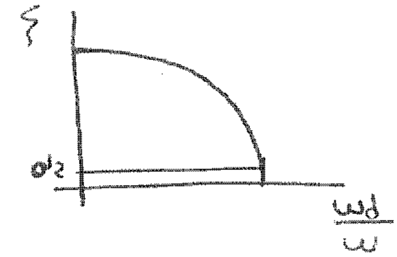
$$\Rightarrow u(t) = e^{-\xi w t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0}{w_d} + \xi w \cdot \frac{u_0}{w_d}\right) sen\,w_d \cdot t + u_0 \cdot \cos w_d \cdot t\right]$$

Representar:

$$w_d = w\sqrt{1-\xi^2} \quad ; \quad w_d^2 = w^2 \cdot (1-\xi^2)$$

$$\boxed{\left(\frac{w_d}{w}\right)^2 + \xi^2 = 1}$$

Circunferencia de centro el origen

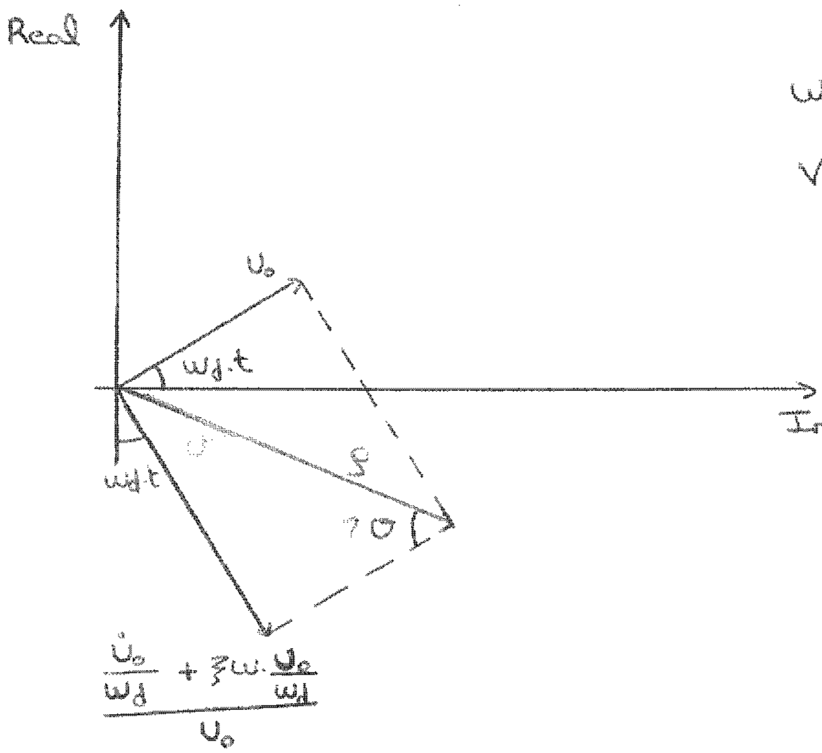


- En máquinas se suele despreciar la relación de amortiguamiento cuando este es menor al 20% (porque $\frac{w_d}{w} \simeq 1$)
- Esto NO se hace en estructuras, ya que la relación de amortiguamiento es siempre menor al 20% ($\xi < 20\%$)

Habitualmente se toma que $w_d = w \rightarrow \frac{w_d}{w} = 1$

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot \rho \cdot \cos(\omega_d \cdot t - \sigma)$$

Modulo →
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\left(\dfrac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \xi \omega \cdot \dfrac{u_0}{\omega_d}\right)^2 + (u_0)^2} \\[2ex] \sigma = \operatorname{arctg} \dfrac{\dfrac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \xi \omega \dfrac{u_0}{\omega_d}}{u_0} \end{cases}$$

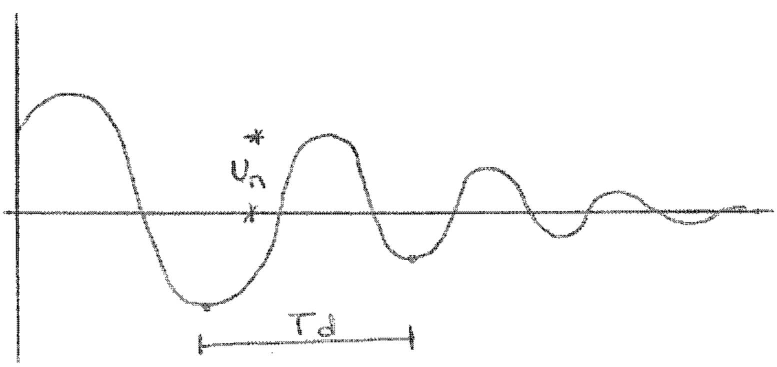


$\omega_d \cdot t$ = frec. amortig. tiempo

Velocidad ⊥ Desplazamiento u_0

Medida del amortiguamiento

Gráfica que representa el movimiento



u_n = Desplazamiento para el tiempo t_n

$t_n \rightarrow u_n(t)$

Después de r ciclos habrá un desplazamiento: $U_{n+r}(t)$

$$t_{n+r} \longrightarrow U_{n+r}(t)$$

Tiempo entre r ciclos:

$$\underbrace{t_{n+r} - t_n} = \frac{2\pi}{\omega_d}\cdot r$$

$$\rightarrow U_n(t) = e^{-\xi\omega t_n}\cdot \rho\cdot\cos(\omega_d\cdot t - \sigma)$$

$$U_{n+r}(t) = e^{-\xi\omega t_{n+r}}\cdot \rho\cdot\cos(\omega_d\cdot t - \sigma)$$

⇒ El desplazamiento es máximo cuando $\cos(\omega_d\cdot t - \sigma)$ y $\cos(\omega_d\cdot t - \sigma)$ sean la unidad.

$$\boxed{\frac{U_n(t)}{U_{n+r}(t)} = \frac{e^{-\xi\omega t_n}}{e^{-\xi\omega t_{n+r}}} = e^{\xi\omega(\underline{t_{n+r}-t_n})} = e^{\xi\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega_d}\cdot r}}$$

$$Ln\left[\frac{U_n(t)}{U_{n+r}(t)}\right] = \xi\cdot\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega_d}\cdot r \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{Ln\left(\frac{U_n(t)}{U_{n+r}(t)}\right)\cdot\omega_d}{2\pi\cdot\omega\, r}}$$

En una primera aproximación, que hay que comprobar, se supone que ξ es <u>pequeña</u>. Por tanto:

$$\omega_d = \omega \Rightarrow \xi = \frac{Ln\left(\frac{U_n(t)}{U_{n+r}(t)}\right)}{2\pi\cdot r}$$

Cuando se trata de determinar el amortiguamiento en una estructura, se le suele dar un desplazamiento sin velocidad inicial, con lo cual las expresiones se simplifican y se obtiene lo que se denomina decremento logarítmico, que es la energía que se pierde en n ciclos.

Para:

$$* \; u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[\left(\frac{\dot{u}_0}{w_d} + \frac{c}{2m} \cdot \frac{u_0}{w_d} \right) \cdot \operatorname{sen} w_d \cdot t + u_0 \cdot \cos w_d \cdot t \right]$$

Se toma la velocidad inicial nula: $\dot{u}_0 = 0$

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[\frac{c \cdot u_0}{2m \cdot w_d} \cdot \operatorname{sen} w_d \cdot t + u_0 \cdot \cos w_d \cdot t \right]$$

Decremento logarítmico $\equiv \delta$

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{U_r(t)}{U_{r+n}(t)}$$

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \varphi \cdot \cos(w_d \cdot t - \sigma)$$

$$u(t)_{m\acute{a}x} = \varphi \cdot e^{-\frac{c}{2m}t} \quad \begin{cases} U_r(t) = \varphi \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t_r} \\ U_{r+n}(t) = \varphi \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t_{r+n}} \end{cases}$$

$$\frac{U_r(t)}{U_{r+n}(t)} = e^{\frac{c}{2m} \cdot (\underbrace{t_{r+n} - t_r}_{\text{tiempo entre n ciclos}})}$$

$$\ln \frac{U_r(t)}{U_{r+n}(t)} = \frac{c}{2m} \cdot (t_{r+n} - t_r) = \frac{c}{2m} \cdot n \cdot \frac{2\pi}{w_d}$$

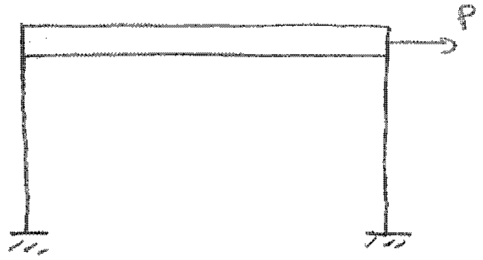
$$\boxed{\delta = \frac{c \cdot \cancel{2}\pi}{\cancel{2}m \cdot w_d} = \frac{\pi \cdot c}{m \cdot w_d}}$$

$$\delta = \frac{\pi \cdot c}{m \cdot w_d} = \frac{\pi \cdot \xi \cdot C_c}{m \cdot w_d} = \frac{\pi \cdot \xi \cdot 2\sqrt{Km}}{m \cdot w_d} = \frac{\pi \cdot \xi \cdot 2\sqrt{\frac{K}{m}}}{w_d} = \frac{\pi \cdot \xi \cdot 2w}{w_d} =$$

$$\frac{\pi \cdot \xi \cdot 2\cancel{w}}{\cancel{w}\sqrt{1-\xi^2}} = \boxed{\frac{2\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Si $\xi \to 0$; $\underline{\delta = 2\pi\xi}$

Un edificio de un solo piso se modela según se muestra en la figura, es decir, como una masa concentrada en el forjado superior que se considera infinitamente rígido y soportado por unos pilares con masa despreciable y con deformación debida a axil nula. Para determinar sus propiedades se somete al pórtico a un experimento de vibraciones libres en el cual se desplaza lateralmente el forjado superior mediante un gato hidráulico, de tal manera que para separarlo 5mm de la posición original es necesario aplicar una fuerza de 10000 KP. Una vez en esa posición, se suelta de modo instantáneo y el desplazamiento máximo registrado en el mismo sentido es de 4mm con un periodo de oscilación de 1'4 segundos. Obtener las propiedades del sistema, masa, amortiguamiento y rigidez.



$$F = K \cdot U \; ; \; K = \frac{F}{U}$$

$$\underline{K} = \frac{10000\,\text{KP} \cdot 9'8\,\frac{N}{\text{KP}}}{5 \cdot 10^{-3}\,m} = \underline{\underline{19600000}}$$

Se supone que el amortiguamiento es pequeño y por tanto:

$$T_d = T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$1'4 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{19600000}{m}}} \rightarrow \underline{\underline{m = 973088'65\,\text{kg}}} = 0'97 \cdot 10^{6}\,\text{kg}$$

Amortiguamiento crítico:

$$C_c = 2\sqrt{K \cdot m} = 2\sqrt{19600000 \cdot 973088'65} = 8734423'29 \ \frac{N \cdot s}{m}$$

$$C = \xi \cdot C_c$$

$$\xi = \frac{Ln\left(\frac{U_n(t)}{U_{n+r}(t)}\right)}{2\pi r} = \frac{Ln\left(\frac{5}{4}\right)}{2\pi \cdot 1} = 0'035 \rightarrow \underline{3'5\%}$$

$\Rightarrow$ La suposición de que el amortiguamiento es pequeño es válida.

$$C = 0'035 \cdot 8734423'29 \ \frac{N \cdot s}{m} = 310197'8 \ \frac{N \cdot s}{m}$$

Frecuencia amortiguada:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 4'49 \quad [=] \quad \sqrt{\frac{\frac{N}{m}}{\frac{N \cdot s^2}{m}}} = s^{-1} \Rightarrow \frac{rad}{s}$$

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 4'49\sqrt{1-0'035^2} = \underline{4'48 \ \frac{rad}{s}}$$

? Frecuencia lineal $\begin{cases} \frac{1}{T} = 0'714 \text{ (natural)} \\ 0'714\sqrt{1-0'035^2} = 0'7138 \text{ (amortiguada)} \end{cases}$

Amplitud al cabo de 6 ciclos:

$$\frac{U_n(t)}{U_{n+r}(t)} = e^{\xi\omega\frac{2\pi}{\omega_d}\cdot r} \quad ; \quad \frac{5}{U_{n+6}(t)} = e^{0'035 \cdot 4'49 \cdot \frac{2\pi}{4'48} \cdot 6}$$

$$\underline{U_{n+6}(t) = 1'33 mm}$$

Ciclos que tienen que pasar para que quede una amplitud de 1mm:

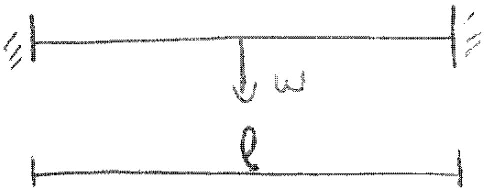
$$\frac{5}{1} = e^{0'035 \cdot 4'49 \cdot \frac{2\pi}{4'48} \cdot r} \quad , \quad r = 7'3 \text{ ciclos} \rightarrow 8 \text{ ciclos}$$

Ecuación del movimiento

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \frac{c}{2m}\cdot\frac{u_0}{\omega_d}\right)\cdot \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + u_0 \cdot \cos \omega_d \cdot t\right]$$

$$u(t) = e^{-\frac{310197'8}{2.973088'65}\cdot t}\left[\left(\frac{0}{4'48} + \frac{310197'8}{2.973088'65}\cdot\frac{5}{4'48}\right)\cdot \operatorname{sen} 4'48t + 5 \cos 4'48t\right]$$

$$\boxed{u(t) = e^{-0'1594t}\left[0'1779 \operatorname{sen} 4'48t + 5 \cos 4'48t\right]}$$



$EI = 10^6 \, kp \cdot cm^2$ (Rigidez a flexión)

$$\delta = \frac{w \cdot l^3}{192 EI}$$

$w = 12'642 \, kp$

$l = 120 \, cm$

$\xi = 10\%$ (Relación de amortiguamiento

$u(0) = 0'5 \, cm$ (Desplaz. inicial)

$\dot{u}(0) = 15 \, \frac{cm}{s}$ (Vel. inicial)

TIPO DE SISTEMA

$\xi = 0'1 < 1 \rightarrow$ Sistema subamortiguado

FRECUENCIA NATURAL Y PERIODO

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$K = \frac{F^{=W}}{U} = \frac{12'642 \cancel{kp} \cdot 9'8 \frac{N}{\cancel{kp}}}{0'1138 \cancel{cm} \cdot \frac{1m}{100 \cancel{cm}}} = 108867'84 \frac{N}{m}$$

$$\delta = U = \frac{12'642 \cancel{kp} \cdot 120^3 cm^3}{192 \cdot 10^6 \cancel{kp \cdot cm^2}} = 0'1138 cm$$

$$\omega = \sqrt{\frac{108867'84 \frac{N}{m}}{12'642 kg}} = \underline{92'799 s^{-1}}$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 92'799 \sqrt{1 - 0'1^2} = 92'333 s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{92'333} = \underline{0'068 s}$$

El amortiguamiento:

$$\begin{cases} \Downarrow \omega_d \\ \Uparrow T_d \end{cases}$$

AMORTIGUAMIENTO

$$C_c = 2\sqrt{K \cdot m} = 2\sqrt{111'1 \cdot 0'0129} = 2'3944$$

$$\xi = \frac{c}{C_c} \; ; \quad c = \xi \cdot C_c = 0'1 \cdot 2'3944 = 0'2394$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

$$u(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \left[\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega \cdot u_0}{\omega_d} \right) \cdot \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + u_0 \cdot \cos \omega_d \cdot t \right]$$

$$u(t) = e^{-0'1 \cdot 92'83 t} \left[\left(\frac{15 + 0'1 \cdot 92'83 \cdot 0'5}{92'33} \right) \cdot \operatorname{sen} 92'33t + 0'5 \cdot \cos 92'33t \right]$$

$$e^{-9'283t} \left[0'21 \operatorname{sen} 92'33t + 0'5 \cos 92'33t \right] = u(t)$$

ÁNGULO DE DESFASE Y MÓDULO

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot \rho \cdot \cos(\omega_d \cdot t - \sigma)$$

$$\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \xi \cdot \omega \cdot \frac{u_0}{\omega_d}}{u_0} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{15}{99'3} + [illegible]}{[illegible]} = 0'356$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \xi \cdot \omega \cdot \frac{u_0}{\omega_d}\right)^2 + u_0^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{99'3} + [illegible]\right)^2 + [illegible]}$$

DECREMENTO LOGARÍTMICO

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{u_r(t)}{u_{r+n}(t)}\right)$$ No hay datos [illegible]

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi \cdot 0'1}{\sqrt{1-0'01}} = 0'631$$

DESPLAZAMIENTOS

$$u\,? \rightarrow t = T_d + \frac{\sigma}{\omega_d} = 0'0631 + \frac{0'356}{99'3} = [illegible]$$

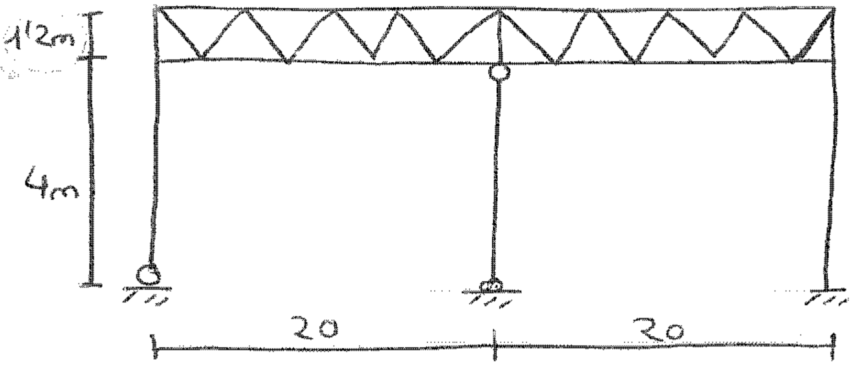
$$u(t) = e^{-9'28 \cdot \left(T_d + \frac{\sigma}{\omega_d}\right)} \left[0'21 \cos 99'3 \left(T_d + \frac{\sigma}{\omega_d}\right) + [illegible]\right]$$

$$u(t) = e^{-9'28 \cdot 0'07} \left[0'21 \cos [illegible] \cdot 0'07 + 0'15 [illegible]\right] = 0'28$$

$$[illegible] + \frac{\sigma}{\omega_d} = 0'0631 + [illegible] = 0'14$$

$$u(t) = e^{[illegible] \cdot 0'14} \left[[illegible] \cdot 0'14 + 0'15 [illegible] \cdot 0'14\right] = [illegible]$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{u_r(t)}{u_{r+n}(t)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ 1\ \text{ciclo}}}{=} \frac{1}{1} \ln\left(\frac{0'28}{[illegible]}\right) \quad 0'[illegible]$$

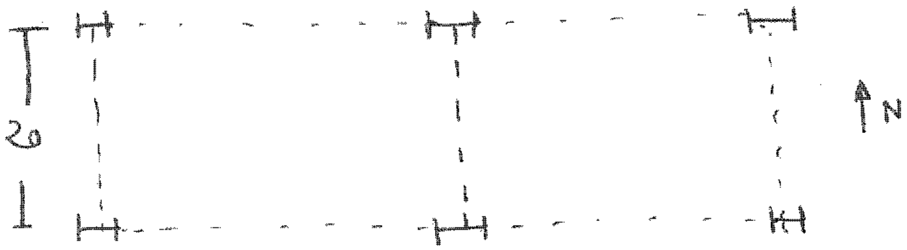


$I = 7075'93\ cm^4$

$120\ kp/m^2$

$I' = \frac{I}{40}$

El amortiguamiento es 0



El momento de inercia en el eje fuerte de los pilares es $I = 7075'93\ cm^4$. La cubierta metálica es infinitamente rígida y su carga total es de $120\ kp/m^2$. Los pilares se consideran indeformables longitudinalmente.

Se pide calcular la frecuencia de la estructura en la dirección este-oeste.

Si colocamos arriostramientos en los 3 pórticos mediante cables de 1 cm de diámetro de acero, determinar el periodo de vibración en la dirección norte-sur si el momento de inercia de los pilares en el eje débil es 40 veces menor al del eje fuerte.

Peso total de la cubierta $= w = 40 \cdot 20 \cdot 120 = 96000\ kp$

$m = \frac{w}{g} = \frac{96000}{9'81} = 9785'93$

Rigidez

· La de los 2 pilares del centro es nula.

K_2 · La de los 2 pilares empotrados es: $2 \times \frac{12EI}{l^3}$

K_3 · La de los 2 pilares articulados es: $2 \times \frac{3EI}{l^3}$ $\div 4$

⇒ Se mueve ⟷ en E-O y por tanto trabajan en el eje fuerte

$E = 2'1 \cdot 10^6\ kp/cm^2$

$K_1 = 0$

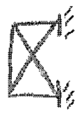
$K_2 = 2 \cdot \frac{12 \cdot 2100000\ kp/cm^2 \cdot 7075'93\ cm^4}{600^3\ cm^3} = 5572'29\ kp/cm$

$K_3 = 2 \cdot \frac{3 \cdot 2100000\ kp/cm^2 \cdot 7075'93}{600^3\ cm^3} = 1393'07\ kp/cm$

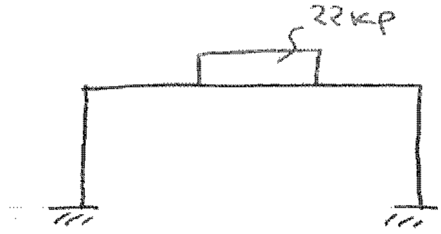
$K_T = K_1 + K_2 + K_3 = 6965'36$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{6965'36}{97\ 85'93 \cdot 10^{-4}}}$ = [illegible] $= 0'74\ s = \frac{2\pi}{\omega}$

Rigidez del arriostramiento (en el eje débil). El cable de acero solo trabaja a tracción. Aunque tenga 2 cables solo trabaja uno cada vez.



$T = 0'5\,s$



$T = 0'75\,s$

Calcular la rigidez del pórtico

$T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega_1 = \frac{2\pi}{0'5} = 12'566$ rad/s ; $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$; $K = \omega_1^2 \cdot m_1$

$\omega_2 = \frac{2\pi}{0'75} = 8'377$ rad/s ; $K = \omega_2^2 \cdot m$

$m_2 = m_1 + \frac{22}{9'81}$

$\omega_1^2 \cdot m_1 = \omega_2^2 \cdot \left(m_1 + \frac{22}{9'81}\right)$; $12'566^2\, m_1 = 8'377^2 \left(m_1 + \frac{22}{9'81}\right)$

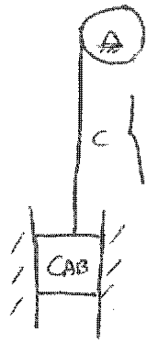
$m_1 = 1'794$ kp·s²/m

$K = 12'566^2 \cdot 1'794 = 283'25$ kp/m

Un aparato elevador tiene una masa en su cabina de 300 Kg. El cable de tracción tiene las siguientes características: una longitud total de 20m, una densidad lineal de 1'2 kg/m, un diámetro de 15mm y un módulo de elasticidad longitudinal de 15 GPa. El tambor es frenado de forma instantánea y se pide la frecuencia de la cabina para las oscilaciones verticales.

- No considerar la masa del cable (Ley de Hooke)
- Incluyendo la masa del cable, introduciendo las hipótesis oportunas

Si tras cinco oscilaciones la amplitud disminuye un 15%, determinar la relación de amortiguamiento.



$m_b = 300\,kg$

$C \begin{cases} \ell_c = 20m \\ \rho_c = 1'2\,kg/m \end{cases}$ $\quad \varnothing_c = 15mm \quad E_c = 15\,GPa$

- No masa cable:

$\left.\begin{array}{l} F = K \cdot u \\ u = \frac{F \cdot l}{E A} \end{array}\right\} \quad \cancel{F} = K \cdot \frac{\cancel{F} \cdot l}{E A}, \quad K = \frac{E A}{l} = \frac{\ldots}{20\,m}$

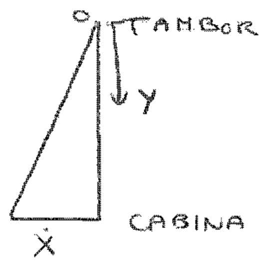
$K = 132535'44\,N/m = 132'53\,N/mm$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{132535'44\,N/m}{300\,kg}} = 21'02\,rad/s \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0'2\ldots$

$f = \frac{1}{T} = \ldots$

- Incluyendo la masa del cable

HIPÓTESIS: Cuando el tambor para la cabina se sigue moviendo. Cuando la velocidad del tambor es 0, la de la cabina no es 0. La variación es lineal



Densidad lineal cable: $\rho = \frac{m}{\ell}$; $\underline{m = \rho \cdot \ell}$

varía en el triángulo

$$\left.\begin{array}{l} \ell_c \Rightarrow \dot{x} \\ y \Rightarrow ? \end{array}\right\} \quad \dot{v} = \frac{\dot{x} \cdot y}{\ell_c}$$

Vel para un $\ell_c - y$

- Energía cinética $\equiv E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{v}^2$

$m = \rho \cdot y$; $dm = \rho \cdot dy$

$$E_c = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\dot{x} \cdot y}{\ell_c} \right)^2 \cdot \rho \, dy$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2 \cdot \rho}{\ell_c^2} \int_0^{\ell_c} y^2 \, dy = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2 \rho}{\ell_c^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\ell_c} = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2 \cdot \rho}{\ell_c^2} \cdot \frac{\ell_c^3}{3} = \frac{1}{2} \frac{\dot{x} \cdot m \cdot \cancel{\ell_c^3}}{\cancel{\ell_c^2} \cancel{\ell_c} \cdot 3}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m}{3} \dot{x}^2$$

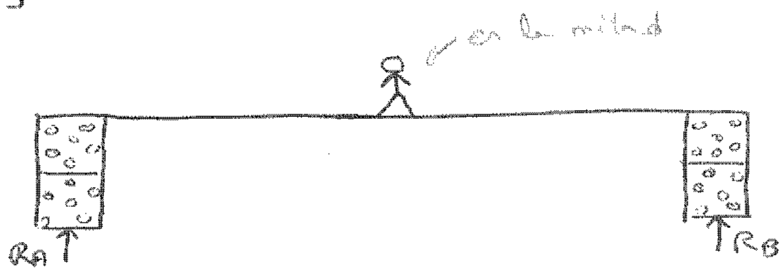
$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

* Si considero la masa del cable, en las vibraciones de todo el ascensor solo puedo considerar 1/3 de su masa total (Se tiene que verificar el primer principio de la termodinámica)

K = 132'52 N/mm

⇒ Salvo que se indique lo contrario, se puede despreciar $\frac{m_{cable}}{3}$.

Un niño de 7kg de masa está situado en el centro de un tablón que flecta 45mm. Determinar la frecuencia en Hz del sistema.
Flexionando rítmicamente, se mantiene un movimiento alternativo con una frecuencia de 0'8Hz y una amplitud de 40mm. Considerando despreciable el amortiguamiento, determinar la fuerza que se transmite a cada uno de los soportes.
Si el niño salta del tablón, al cabo de 5 oscilaciones la amplitud se divide por 4. Determinar el amortiguamiento.
$g = 10\,m/s^2$



$F = m \cdot g = 7kg \cdot 10 m/s^2 = 70N$

$F = K \cdot U$; $K = \frac{F}{U} = \frac{70N}{0'045m} = 1555'[illegible] N/m$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = $ [illegible] $= 14'9$ rad/s

[illegible]

$\Sigma F_V = 0$; $R_A + R_B = F_T = F_{est} + F_{din}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{R_A = R_B}$

$R_A = R_B = \frac{1}{2}\left[F_{est} + F_{din}\right] = \frac{1}{2}\left[m \cdot g + KA \cos \bar{\omega} t\right]$

Se supone que el niño se mueve de forma armónica (senoidal o cosenoidal

La fuerza en los apoyos es máxima cuando $\cos \omega t = 1$

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\left[mg + K \cdot A\right] = \frac{1}{2} mg \left[1 + \frac{A \cdot K}{m \cdot g}\right]$$

$$\frac{A.K}{m \cdot g}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{mg}{K} = U_{est} \\ A = U_{din} \end{array}\right\} \quad \frac{AK}{mg} =$$

$$\underline{R_A = R_B} = \frac{1}{2} 70 \left[1 + \frac{4}{4'5}\right] = \underline{66'15 N}$$

$$\underline{0'89}$$

→ Con esas flexiones las reacciones en los apoyos aumentan casi un 90%. Esto es moderado ya que U_{din} suele ser mucho mayor que U_{est}

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_r}{U_{r+n}} = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{1} = 0'2772}$$

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

(Si la relación de amortiguamiento es muy pequeña: $\delta = 2\pi\xi$)

$$\underline{\xi = 0'04}$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \quad ; \; c = \xi \cdot 2\sqrt{K.m} = 0'04 \cdot 2\sqrt{1555'56 \cdot 7 kg}$$

$$\underline{c = 9'2 \frac{N \cdot s}{m}}$$

Consideraciones energéticas

$$m \cdot \ddot{U} + c \cdot \dot{U} + k \cdot U = 0$$

$$m \cdot \ddot{U} \cdot \dot{U} + c \cdot \dot{U}^2 + k U \cdot \dot{U} = 0$$

$$\underbrace{\int_0^T m \ddot{U} \cdot \dot{U} \cdot dt}_{\substack{\text{Energía cinética} \\ (E_c)}} + \underbrace{\int_0^T c \cdot \dot{U}^2 dt}_{\substack{\text{Energía disipada} \\ (E_d)}} + \underbrace{\int_0^T k \cdot U \cdot \dot{U} \cdot dt}_{\substack{\text{Energía potencial} \\ (E_p)}} = 0$$

$$\boxed{E_c + E_p = -E_d}$$

$$E_d = \int_0^T c \cdot \dot{U}^2 \cdot dt = \int_0^T c \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cos^2 \omega t \, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c \cdot A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \cdot dt$$

→ Se supone un desplazamiento senoidal: $U(t) = A \cdot \operatorname{sen} \omega t$

$$\dot{U}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\underline{\underline{E_d}} = c \cdot A^2 \omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t \cdot dt = \underline{\underline{\pi \cdot c \cdot A^2 \cdot \omega}}$$

CAPACIDAD ESPECÍFICA DE AMORTIGUAMIENTO

Es la relación entre la energía disipada y la energía total

$$\Psi = \frac{E_d}{E_{TOTAL}}$$

$$E_{TOTAL} = E_c + E_p = E_{c\,máx} = E_{p\,máx} = \frac{1}{2} m \cdot \underbrace{\dot{U}^2}_{\substack{\text{vel máx} \\ (\text{cd const}=1)}} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

$$\Psi = \frac{\pi \cdot c \cdot \cancel{A^2} \cdot \omega}{\frac{1}{2} m \cdot \cancel{A^2} \cdot \omega^2} = \frac{2\pi c}{m \cdot \omega} = \frac{2\pi \cdot c_c \cdot c}{m \cdot \omega \cdot c_c} = \frac{2\pi \cdot c_c \cdot \xi}{m \cdot \omega} = \frac{2\pi \cdot 2\sqrt{km} \cdot \xi}{m \omega}$$

$$\boxed{\Psi = 4\pi \xi}$$

$\boxed{\Psi = 2\pi}$ si el amortiguamiento es muy pequeño

Tema 3 Vibraciones forzadas para sistemas de 1 g.d.l

Se denominan vibraciones forzadas a aquellas en las que se cumple que las fuerzas (variables con el tiempo), son distintas de cero.

$$f(t) \neq 0$$

La ecuación diferencial es:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + K \cdot u = f(t)$$

$\ddot{u} + 2\xi w \cdot \dot{u} + w^2 \cdot u = \frac{f(t)}{m}$ ⇝ E.D. de 2º orden no homogénea cuya solución es la suma de la solución gral de la homogénea y una solución particular de la completa

$$u_h(t) = e^{-\xi w t}[A \operatorname{sen} wt + B \cos wt]$$

$u_p(t)$

↳ Depende de la expresión de las fuerzas exteriores aplicadas

Para resolver la particular de la completa, se pueden usar los siguientes métodos.

1) Descomponer la fuerza externa como suma de cargas conocidas. Para ello, se pueden utilizar los siguientes métodos:

I) TRANSFORMADA DE LAPLACE (NO)

II) SERIES DE FOURIER PARA CARGAS PERIÓDICAS

III) ~~LAS INTEGRALES~~ Integrales de Fourier para cargas no periódicas

IV) INTEGRAL DE DUHAMEL PARA CUALQUIER TIPO DE CARGA PUESTA COMO SUMA DE IMPULSOS ELEMENTALES

⇒ A y B ya no valen lo mismo que antes porque dependen de la particular de la completa (ya no es homogénea)

Cargas senoidales (o cosenoidales)

$$f(t) = f_0 \cdot \text{sen}\, \underbrace{\bar{\omega}}_{\substack{\text{frec. de la} \\ \text{fuerza} \\ \text{(no la natural} \\ \text{del sistema)}}} t$$

$\Rightarrow \bar{\omega} \neq \omega$

$U_p(t) = C \cdot \text{sen}\, \bar{\omega} t + D \cdot \cos \bar{\omega} t$ (funciones senoidales o cosenoidales)

$$\ddot{U} + 2 \cdot \xi \omega \cdot \dot{U} + \omega^2 U = \frac{f(t)}{m}$$

Hay que obtener C y D, y luego A y B.

$\dot{U}_p(t) = C\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t - D\bar{\omega}\,\text{sen}\,\bar{\omega}t$

$\ddot{U}_p(t) = -C\bar{\omega}^2\,\text{sen}\,\bar{\omega}t - D\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}t$

$-C\bar{\omega}^2\,\text{sen}\,\bar{\omega}t - D\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}t + 2\xi\omega(C\cdot\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t - D\bar{\omega}\,\text{sen}\,\bar{\omega}t) +$

$\omega^2 \cdot (C\,\text{sen}\,\bar{\omega}t + D\cos\bar{\omega}t) = \frac{f(t)}{m}$

$\text{sen}\,\bar{\omega}t\,(-C\bar{\omega}^2 - 2\xi\omega D\bar{\omega} + \omega^2 C) + \cos\bar{\omega}t\,(-D\bar{\omega}^2 + 2\xi\omega C\bar{\omega}$

$+ \omega^2 D) = \frac{f(t)}{m}$

$-C\bar{\omega}^2 - 2\xi\omega D\bar{\omega} + \omega^2 C = \frac{f_0}{m}$

$-D\bar{\omega}^2 + 2\xi\omega C\bar{\omega} + \omega^2 D = 0$

$D(\bar{\omega}^2 - \omega^2) = 2\xi\omega C\bar{\omega}$; $D = \frac{2\xi\omega C\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega^2}$

$-C\bar{\omega}^2 - 2\xi\omega\bar{\omega} \cdot \frac{2\xi\omega C\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} + \omega^2 C = \frac{f_0}{m}$

$C\left(\omega^2 - \bar{\omega}^2 - \frac{4\xi^2\omega^2\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2 - \omega^2}\right) = \frac{f_0}{m}$

$C\left(\frac{\omega^2\bar{\omega}^2 - \omega^4 - \bar{\omega}^4 + \bar{\omega}^2\omega^2 \ldots}{\bar{\omega}^2 - \omega^2}\right)$ [illegible]

[illegible]

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad ; \; m = \frac{K}{\omega^2}$$

$$D = \frac{\frac{f_0}{m} \cdot 2\xi\omega\bar{\omega}}{[(\omega^2-\bar{\omega}^2)^2+4\xi^2\omega^2\bar{\omega}^2]} = \frac{\frac{f_0}{K} \; 2\xi\omega^3\bar{\omega}}{[(\omega^2-\bar{\omega}^2)^2+4\xi^2\omega^2\bar{\omega}^2]} \longrightarrow \div \; \omega^4 \text{ arrib y abajo}$$

$$D = \frac{-\frac{f_0}{K} \cdot 2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega}}{\left(\frac{\omega^2-\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}}$$

$\rightarrow \beta \equiv$ Relación de frecuencias $= \frac{\bar{\omega}}{\omega}$

$$D = \frac{-\frac{f_0}{K} \cdot 2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

$$C = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \cdot \frac{f_0}{K}$$

$\Rightarrow$ Si la fuerza fuese cosenoidal, los coeficientes se intercambian

$\rightarrow$ Con lo cual, la solución gral de la E.D. es:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t}\left(A \operatorname{sen}\omega_d t + B\cos\omega_d \cdot t\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\left[\frac{(1-\beta^2)\cdot\frac{f_0}{K}}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\operatorname{sen}\bar{\omega}t - \frac{\frac{f_0}{K}\,2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\cdot\cos\bar{\omega}t\right]}_{\text{Permanente}}$$

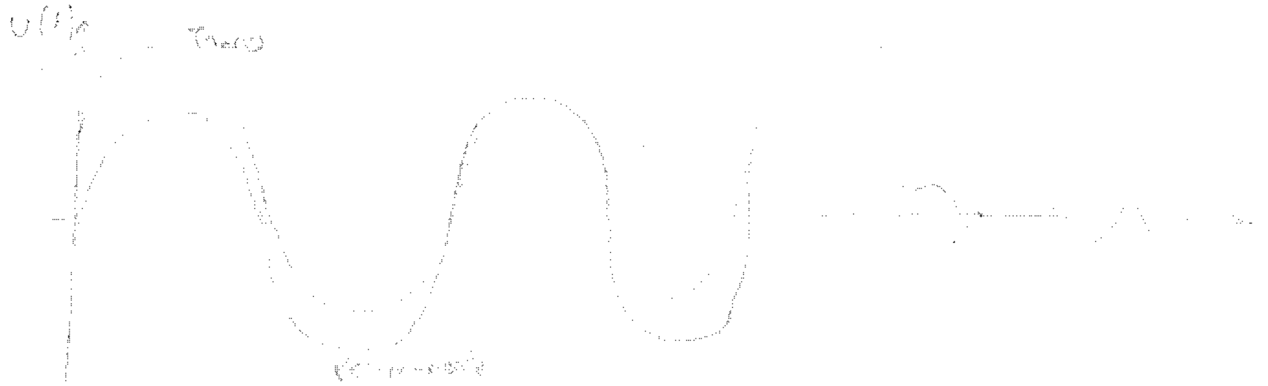
A y B se calculan con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \end{cases}$$

- Cuanto más crece el tiempo, más pequeño se hace el término transitorio.
- El estado permanente simplemente oscila, no disminuye con el tiempo.

El estado transitorio sólo interesa cuando se pide el movimiento para tiempos muy pequeños o en estructuras con un amortiguamiento anormalmente pequeño.
En prácticamente todo el resto de casos, trabajamos con el término permanente.

REPRESENTACIÓN



Estacionario

$u_p(t) = \rho \cos(\bar{\omega} t - \phi)$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right)^2 + \left(\frac{f_0}{K}\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\right)^2}$$

La fuerza aplicada y la respuesta del sistema están casi siempre desfasadas.

$$\rho = \frac{f_0}{K}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$1-\beta^2$

* Se denomina factor de amplificación dinámica (FAD) a la siguiente relación:

$$\boxed{\underline{FAD} = \frac{\rho}{\frac{f_0}{K}} = \frac{u_{din}}{u_{est}}}$$

Por tanto:

* $$\boxed{\underline{FAD \equiv D} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}}$$

$u(t) = u_h(t) + u_p(t) =$

$$e^{-\xi\omega t}(A \operatorname{sen}\omega_d t + B\cos\omega_d t) + \frac{f_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}\left[(1-\beta^2)\operatorname{sen}\bar{\omega}t - (2\xi\beta)\cos\bar{\omega}t\right]$$

$$u(t=0) = u_0 \rightarrow u(t=0) = u_0 = B + \frac{f_0}{K}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}(-2\xi\beta)$$

$$\boxed{B = u_0 + \frac{f_0}{K}\cdot\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \rightarrow \dot{u}(t=0)$$

$$\dot{u} = -\xi\omega\, e^{-\xi\omega t}(A\operatorname{sen}\omega_d t + B\cos\omega_d t) + e^{-\xi\omega t}(A\omega_d\cos\omega_d t - B\omega_d\operatorname{sen}\omega_d t)$$

$$+ \frac{f_0}{K}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}\left[(1-\beta^2)\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t + 2\xi\beta\bar{\omega}\operatorname{sen}\bar{\omega}t\right]$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\xi\omega B + A\omega_d + \frac{f_0}{K}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}\cdot(1-\beta^2)\bar{\omega}$$

$$A = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{u}_0 + \xi\omega B - \frac{f_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}\cdot(1-\beta^2)\bar{\omega}\right]$$

$$A = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{u}_0 + \xi\omega u_0 + \frac{\xi\omega f_0\, 2\xi\beta}{K((1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2)} - \frac{f_0(1-\beta^2)\bar{\omega}}{K((1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2)}\right]$$

$$FAD \rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\rho}{\frac{f_0}{k}} = \frac{u_{din}}{u_{est}}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- β es muy grande: La frecuencia de la fuerza es mucho mayor que la natural del sistema. La rigidez del sistema es pequeña. En este caso el factor de amplificación dinámica tiende a cero. Si esto ocurre, la respuesta del sistema está controlada por la masa. La frecuencia de excitación es tan alta que el sistema no puede seguirla y se queda prácticamente sin movimiento

El ángulo de desfase (σ) se aproxima a los 180°.

- β es muy pequeña: La frecuencia de la fuerza es muy pequeña o la frecuencia natural del sistema es muy grande. La rigidez del sistema es grande.

El ángulo de desfase (σ) es muy pequeño.

La fuerza se utiliza para vencer la rigidez

- β es la unidad: Ambas frecuencias son iguales

$$\boxed{D = \frac{1}{2\xi}}$$

La fuerza se utiliza para vencer el amortiguamiento

El ángulo de desfase es aproximadamente 90°.

$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

Se representa el desplazamiento en función de la relación de frecuencias (β)

- $\beta > 1 \longrightarrow$ Muy grande
- $\beta < 1 \longrightarrow$ Muy pequeño
- $\beta = 1 \longrightarrow$ Desplazamiento <u>máximo</u> con independencia del amortiguamiento

$\rightarrow$ $\xi = 0 \longrightarrow$ Desplazamiento infinito (No ocurre pero sí se aproxima)

$\xi \to 0 \qquad D \Rightarrow \infty$

El amortiguamiento disminuye los desplazamientos, sea cual sea la relación de frecuencias (β)
Tanto el desplazamiento como el ángulo de fase, dependen exclusivamente de la relación de frecuencias y del amortiguamiento.

Determinar la relación de frecuencias en función del amortiguamiento para que el desplazamiento sea máximo.

$\dot{D} = 0$

$$\frac{d\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]}{d\beta} = 2(1-\beta^2)\cdot(-2\beta) + 2(2\xi\beta)\cdot 2\xi = -4\beta + 4\beta^3 + 8\xi^2\beta$$

$-1 + \beta^2 + 2\xi^2 = 0$

$$\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$$

Máximo $\rightarrow$ $$\boxed{D_{max} = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\xi^2)^2 + (2\xi\sqrt{1-2\xi^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^2 - 4\xi^4}} = \frac{1}{\sqrt{2^2\xi^2(1-\xi^2)}} = \boxed{\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$\rightarrow$ No confundir pequeño con cero.

¿Cuánto aumenta el desplazamiento dinámico respecto al estático en un sistema cuya relación de amortiguamiento vale el 2% ?

$\xi = 0'02$

$D = \frac{1}{2 \cdot 0'02 \cdot \sqrt{1 - 0'02^2}}$, [illegible] no aparece en la tabla ($\xi = 0'02$)

$\Rightarrow$ En sismología, $D = Q$ denominado factor de calidad

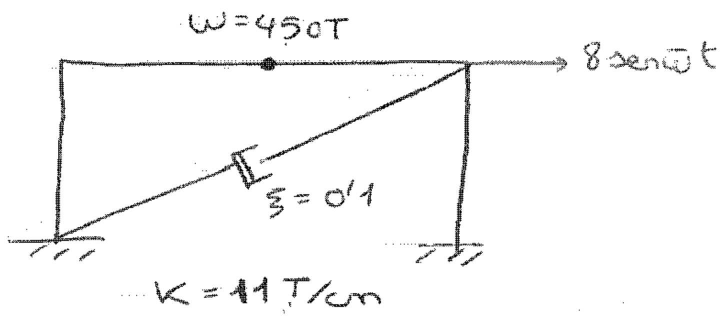
$$D = \frac{1}{2\xi} = Q$$

En función de la capacidad específica de amortiguamiento:

$$\boxed{D = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\frac{\psi}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\psi}}$$

$\psi = 4\pi\xi$

Determinar el desplazamiento del sistema de la figura para un tiempo $t = 1'2$ s, considerando el estado transitorio y el permanente para unas condiciones iniciales nulas.



Frecuencia natural

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{11\ T/cm \cdot 100\ cm/m}{450\ T / 10\ \frac{m}{s^2}}} = 4'94\ rad/s$$

$$f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4'94} = 1'27\ Hz$$

Frecuencia amortiguada

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 4'94\sqrt{1 - 0'1^2} = 4'91$$

$$f = \frac{2\pi}{\omega_d} = 1'28\ Hz$$

Ecuación

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[A\,\mathrm{sen}\,\omega_d \cdot t + B\cos\omega_d \cdot t\right] + \frac{f_0/K}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[C\,\mathrm{sen}\,\bar{\omega}t + D\cos\bar{\omega}t\right]$$

$$A = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{u}_0 + \xi\omega u_0 + \frac{\xi\omega f_0 \cdot 2\xi\beta}{K(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} - \frac{f_0(1-\beta^2)\bar{\omega}}{K(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right]$$

A, B, C y D [illegible]

Cuando la pulsación de la fuerza coincide con la

$\underline{\underline{\omega = \bar{\omega}}} = 4'94 \text{ rad/s} \rightarrow \beta = \dfrac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$

$$C = \frac{f_0/K}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cdot (1-\beta^2) = 0$$

$$D = \frac{f_0/K}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} (-2\xi\beta) = \frac{8/1100}{(2 \cdot 0'1 \cdot 1)^2} \cdot (-2 \cdot 0'1 \cdot 1) = -3'63 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$A = \frac{1}{\omega_d}\left[\cancel{\dot{v}_0}^{0} + \cancel{\xi \omega v_0}^{0} + \frac{\xi \omega f_0\, 2\xi\beta}{K(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} - \frac{f_0\,(1-\beta^2)\,\bar{\omega}}{K(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right]$$

$$A = \frac{1}{4'94}\left[\frac{0'1 \cdot 4'94 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 0'1 \cdot 1}{1100 \cdot (2 \cdot 0'1 \cdot 1)^2} - \frac{8 \cdot (1-1^2) \cdot 4'94}{1100 \cdot (2 \cdot 0'1 \cdot 1)^2}\right]$$

$A = 3'63 \cdot 10^{-3}$ m

$$B = \cancel{v_0}^{0} + \frac{f_0}{K} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{8}{1100} \cdot \frac{2 \cdot 0'1 \cdot 1}{0 + (2 \cdot 0'1 \cdot 1)^2} = 0'036 \text{ m}$$

$v(t) = e^{-0'494t}\left[0'00363 \operatorname{sen} 4'94t + 0'036 \cos 4'94t\right] - 0'036 \cos 4'94t$

¿Cuánto vale el régimen transitorio para $t = 1'2$ s? ¿Cuánto dura el periodo transitorio?

Termina cuando: $e^{-\xi\omega t}\left[A \operatorname{sen} \omega_d t + B \cos \omega_d t\right] = 0$

$e^{-0'494t}\left[0'00363 \operatorname{sen} 4'94t + 0'036 \cos 4'94t\right] = 0$

$0'00363 \operatorname{tg} 4'94t + 0'036 = 0$ [illegible]

[illegible] $t = 0'\ldots$

[illegible]

$t = 1'2 s$

El desplaz. [illegible]

$U_{máx}(1'2s) = -0'036 \cos 4'94 \cdot t \underset{t=1'2s}{\uparrow} -0'034 m$

$U_{est} = \frac{F_0}{K} = \frac{8 T}{11 T/cm} = 0'73 cm$

$\frac{U_{máx}}{U_{est}} = $ [illegible]

Tablas:

$\xi = 0'1 \rightarrow$ [illegible] $= 0'125$, $\beta = 1$ $\Big\}$ F.A $= 4$

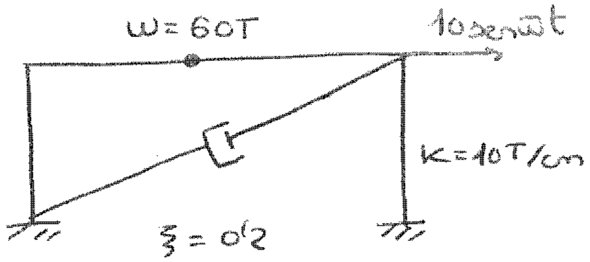
Determinar la relación de frecuencias para que el desplazamiento sea máximo y dicho desplazamiento.

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega} = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} = \sqrt{1 - 2 \cdot 0'1^2} = 0'9899$$

$$\overline{\omega} = \omega \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} = 4'94 \frac{rad}{s} \cdot 0'9899 = 4'89 \frac{rad}{s}$$

$$D_{máx} = \frac{1}{2 \xi \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2 \cdot 0'1 \sqrt{1 - 0'1^2}} = 5'025$$

$$U_{máx} = U_{di} = FAD \cdot U_{est} = 5'025 \cdot \frac{F_0}{K} = 5'025 \cdot \frac{8}{11} = \underline{\underline{3'65 \ cm}}$$



$\bar{\omega} = 0'5\,\omega$

Sabiendo que la fuerza senoidal actúa durante 20s y que su frecuencia es la mitad de la frecuencia natural, determinar el desplazamiento máximo. Condiciones iniciales nulas: $v_0 = 0$ y $\dot{v}_0 = 0$

$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2}$

$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{1}{2} = 0'5$

$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{10\frac{T}{cm} \cdot 100\frac{cm}{m} \cdot 10}{60T}} = 12'9\ \frac{rad}{s}$; $\bar{\omega} = 6'45\ rad/s$

$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 12'9\sqrt{1-0'2^2} = 12'65\ \frac{rad}{s}$

$U(t) = e^{-\xi\omega t}(A\,\mathrm{sen}\,\omega_d t + B\cos\omega_d t) + (C\,\mathrm{sen}\,\bar{\omega}t + D\cos\bar{\omega}t)$

$= e^{-\xi\omega t}(A\,\mathrm{sen}\,\omega_d t + B\cos\omega_d t) + \frac{f_0/k}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\,\mathrm{sen}\,\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]$

senoidal

$A = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{v}_0 + \xi\omega_n v_0 + \frac{f_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left(2\xi^2\beta\omega - (1-\beta^2)\bar{\omega}\right)\right] =$

$= \frac{1}{12'65}\cdot\frac{10\,T}{10\frac{T}{cm}}\cdot\frac{1}{(1-0'5^2)^2+(2\cdot 0'2\cdot 0'5)^2}\left[2\cdot 0'2^2\cdot 0'5\cdot 12'9 - (1-0'5^2)\cdot 6'45\right]$

$= -0'64\,cm$

$B = v_0 + \frac{f_0}{k}\cdot\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} = \frac{10}{10}\cdot\frac{2\cdot 0'2\cdot 0'5}{(1-0'5^2)^2+(2\cdot 0'2\cdot 0'5)^2} = 0'33\,cm$

$C = \frac{f_0/k}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\cdot(1-\beta^2) = \frac{10/10}{(1-0'5^2)^2+(2\cdot 0'2\cdot 0'5)^2}(1-0'5^2) = 1'24\,cm$

$D = \frac{f_0/k}{\ldots}\cdot(-2\xi\beta) = -B = -0'33\,cm$

$U = e^{-0'2 \cdot 12'9 \cdot t}\left[-0'64 \,\text{sen}\, 12'65 t + 0'23 \cos 12'65 t\right] + 1'24 \,\text{sen}\, 6'45 t - 0'33 \cos 6'45 t$

$U_{din} = FAD \cdot U_{est} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \frac{F_0}{K} = \frac{1}{\sqrt{(1-0'51^2)^2 + (2 \cdot 0'02 \cdot 0'51)^2}} \cdot \frac{10}{[illegible]}$

Hay 2 tipos de vibraciones

- Los 20 primeros segundos: Vibración forzada
- A partir de los 20 segundos: Vibración libre (Cuando desaparece la fuerza de 10 sen $\bar{\omega}$ t)

→ El comienzo de la vibración libre coincide con el final de la vibración forzada. Es decir, las condiciones iniciales de la vibración libre son las condiciones finales de la vibración forzada.

$U_0 = U(t = 20s)$

Desplazamiento y velocidad para $t = 20s$.

$U_0 = U(t=20s) = e^{-0'2 \cdot 12'9 \cdot 20}\left[-0'64 \,\text{sen}\, 12'65 \cdot 20 + 0'23 \cos 12'65 \cdot 20\right]$

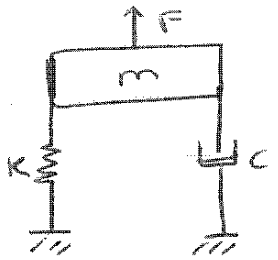
$+ 1'24 \,\text{sen}\, 6'45 \cdot 20 - 0'33 \cos 6'45 \cdot 20 = 0'034 \text{ cm}$

$\dot{U} = -0'35 \cdot e^{-2'6 t}\left[-0'64 \,\text{sen}\, 12'65 t + 0'23 \cos 12'65 t\right] +$

$e^{-2'6 t}\left[-0'64 \cdot 12'65 \cdot \cos 12'65 t - 0'33 \cdot 12'65 \cdot \text{sen}\, 12'65 t\right] +$

$1'24 \cdot 6'45 \cos 6'45 t + 0'33 \cdot 6'45 \cdot \text{sen}\, 6'45 t$

Un muelle y un amortiguador con una masa, están excitados por una fuerza senoidal. En resonancia se mide una amplitud de 0'58cm y al 80% de la frecuencia de la resonancia la amplitud medida es de 0'46cm. Determinar el factor de amortiguamiento.



$$U_{din} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot U_{est}$$

$U_{est} \downarrow \frac{f_0}{K}$

$\xrightarrow{\beta=1} U_{din} = 0'58.1$

$\xrightarrow{\beta=0'8} U_{din} = 0'46.10^-$

$\underline{\beta = 1}$ (Resonancia $\rightarrow \omega = \bar{\omega}$)

$$U_{din} = 0'58.10^{-2} = \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{f_0}{K}$$

$\underline{\beta = 0'8}$

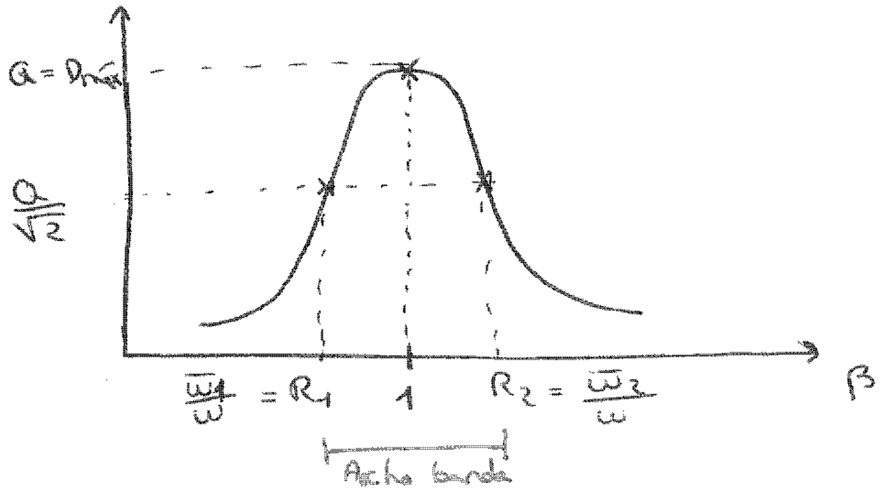
$$U_{din} = 0'46.10^{-2} = \frac{1}{\sqrt{(1-0'8^2)^2 + (2.\xi.0'8)^2}} \cdot \frac{f_0}{K}$$

$$\frac{0'58.\cancel{10^{-2}}}{0'46.\cancel{10^{-2}}} = \frac{\frac{1}{2\xi}}{\frac{1}{\sqrt{(1-0'8^2)^2 + (2.\xi.0'8)^2}}} ; \boxed{\xi = 0'18}$$

$$D_{máx} = \frac{1}{2.\xi} = Q$$

$\frac{Q}{\sqrt{2}}$ = Punto de semipotencia

Ancho de banda = Diferencia de frecuencias asociadas a un mismo desplazamiento



$$\frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}.\xi} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$8\xi^2 = (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 = 1 + \beta^4 - 2\beta^2 + 4\xi^2 \cdot \beta^2$$

$$\beta^4 + \beta^2(-2 + 4\xi^2) + (1 - 8\xi^2) = 0$$

$$\beta^2 = \frac{(2 - 4\xi^2) \pm \sqrt{(-2+4\xi^2)^2 - 4(1 - 8\xi^2)}}{2} =$$

$$\beta^2 = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{\frac{\cancel{4} + 16\xi^4 - 16\xi^2 - \cancel{4} + 32\xi^2}{4}} =$$

$$\underline{\underline{\beta^2}} = (1 - 2\xi^2) \pm \sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2} = \underline{\underline{(1-2\xi^2) \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}}}$$

→ La figura sigue esta expresión

$$\begin{cases} R_1^2 = (1 - 2\xi^2) - 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \\ R_2^2 = (1 - 2\xi^2) + 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \end{cases}$$

$$R_2^2 - R_1^2 = 4\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}_2}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_1}{\omega}\right)^2 = \frac{(\bar{\omega}_2^2 - \bar{\omega}_1^2)}{\omega^2} = 4\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

$$\cancel{4}\xi\sqrt{1+\xi^2} = \frac{(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_1)(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1)}{\left(\frac{\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2}{2}\right)^2} = \cancel{4}\cdot\frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_1}$$

$$\xi\sqrt{1+\xi^2} = \frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_1}$$

$$\xi \downarrow\downarrow \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_1}}$$

Es una forma de determinar el amortiguamiento de una estructura.

$$\underbrace{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}_{\text{Ancho de banda}} = (\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_1)\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

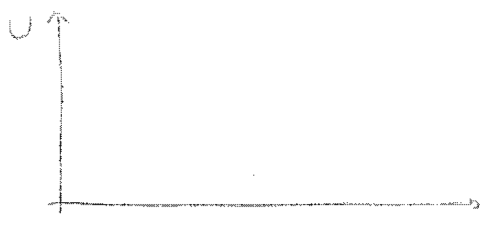
→ Ancho de banda: es donde se concentra la mayor parte de la potencia de la señal

En resonancia ⇒ $\omega = \bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2}{2}$

$$\boxed{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1 = 2\bar{\omega}\,\xi\sqrt{1+\xi^2} = 2\omega\xi\sqrt{1+\xi^2}}$$

Para un sistema de un grado de libertad y sometido a una carga senoidal de amplitud constante y frecuencia variable, se ha medido un desplazamiento máximo de 1'6 cm y las frecuencias correspondientes a una amplitud de 0'85 cm fueron 10'9 y 13 Hz. Determinar la frecuencia natural del sistema y el índice de amortiguamiento. También el desplazamiento estático y la amplificación dinámica.

(u es proporcional a Q)



$\frac{1'6}{0'85} = 1'88 \neq \sqrt{2} \rightarrow$ No corresponde a la semipotencia.

$$\left.\begin{aligned} A &= 1'6 \\ \frac{A}{n} &= 0'85 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} D_{máx} &= \frac{1}{2\xi} = A \\ D &= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \frac{A}{n} = \frac{1}{2\xi n} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$4\xi^2 n^2 = (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 = 1 + \beta^4 - 2\beta^2 + 4\xi^2\beta^2$$

$$\beta^4 + \beta^2(4\xi^2 - 2) + (1 - 4n^2\xi^2) = 0$$

$$\beta^2 = \frac{(-4\xi^2+2) \pm \sqrt{(4\xi^2-2)^2 - 4\cdot(1-4n^2\xi^2)}}{2}$$

$$\beta^2 = (1-2\xi^2) \pm \sqrt{\frac{16\xi^4 + \cancel{4} - 16\xi^2 - \cancel{4} + 16n^2\xi^2}{4}}$$

$$\beta^2 = (1-2\xi^2) \pm \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 4n^2\xi^2}$$

$$\beta^2 = (1-2\xi^2) \pm \sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(n^2-1)}$$

$$\beta^2 = (1-2\xi^2) \pm 2\xi\sqrt{\xi^2 + n^2 - 1}$$

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 &= (1-2\xi^2) - 2\xi\sqrt{\xi^2 + (n^2-1)} \\ R_2^2 &= (1-2\xi^2) + 2\xi\sqrt{\xi^2 + (n^2-1)} \end{aligned}\right\} \quad R_2^2 - R_1^2 = 4\xi\sqrt{\xi^2 + (n^2-1)}$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}_2}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_1}{\omega}\right)^2 = \frac{(\bar{\omega}_2^2 - \bar{\omega}_1^2)}{\omega^2} = 4\xi\sqrt{\xi^2 + (n^2-1)}$$

$$\omega = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2} \quad \omega$$

$$\cancel{2}\,\xi\sqrt{(n^2-1)+\xi^2} = \frac{\cancel{(\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_1)}(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1)}{\left(\frac{\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2}{2}\right)^2} = \frac{4(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1)}{\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2}$$

$$\xi\sqrt{(n^2-1)+\xi^2} = \frac{\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2}$$

$$\xi \downarrow\downarrow \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}}$$

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{U_{max}}{U_{est}} \Rightarrow U_{est} = U_{max}\cdot 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$$

$$n = \frac{U_{max}}{U} = \frac{1'6}{0'85} = 1'88$$

$$\xi = \frac{13-10'9}{13+10'9}\cdot\frac{1}{\sqrt{1'88^2-1}} = 0'055 \rightarrow \xi = 5'5\%$$

$U_{est} = U_{max}\cdot 2\xi\sqrt{1-\xi^2} = 0'17$ [illegible]

$$\underline{F.A.D} = \frac{1'6}{0'17} = \underline{9'4}$$

$$\omega = \overline{\omega} = \frac{\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2}{2} = \frac{13+10'9}{2} = \underline{11'95\ Hz}$$

Deducir la ecuación del movimiento cuando la fuerza aplicada es constante. Las condiciones iniciales son nulas.

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = f_0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 \cdot u = \frac{f_0}{m}$$

$$u_p(t) = \frac{f_0}{k}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(A \operatorname{sen}\omega_d \cdot t + B\cos\omega_d \cdot t) + \frac{f_0}{k}$$

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \end{cases}$$

$$\dot{u}(t) = -\xi\omega \cdot e^{-\xi\omega t}(A \operatorname{sen}\omega_d \cdot t + B\cos\omega_d \cdot t) + e^{-\xi\omega t}(A\omega_d \cdot \cos\omega_d \cdot t$$
$$- B\omega_d \cdot \operatorname{sen}\omega_d \cdot t)$$

$$u_0 = B + \frac{f_0}{k} \ ; \ B = u_0 - \frac{f_0}{k}$$

$$\dot{u}_0 = -\xi\omega B + A\omega_d \ ; \ A = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega \cdot u_0 - \xi\omega \cdot \frac{f_0}{k}}{\omega_d} = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega\left(u_0 - \frac{f_0}{k}\right)}{\omega_d}$$

Sustituyendo:

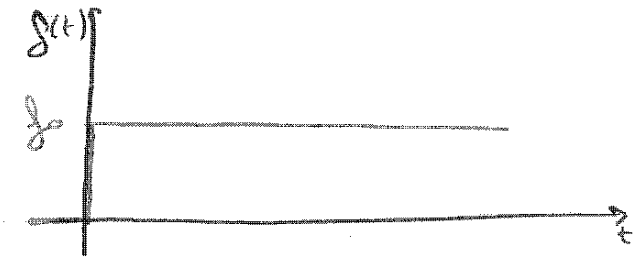
$$\Rightarrow u(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \left[\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega\left(u_0 - \frac{f_0}{k}\right)}{\omega_d}\right) \cdot \operatorname{sen}\omega_d \cdot t + \left(u_0 - \frac{f_0}{k}\right) \cdot \cos\omega_d \cdot t\right] + \frac{f_0}{k}$$

Si el amortiguamiento es nulo $\rightarrow \boxed{\xi = 0}$

$$\underline{\omega_d} = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = \underline{\omega}$$

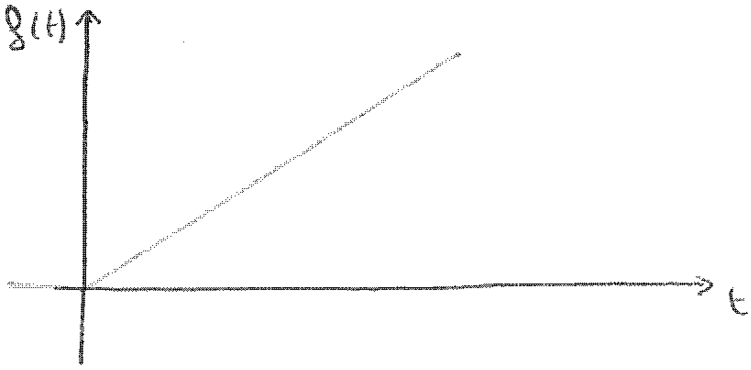
$$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \operatorname{sen}\omega t + \left(u_0 - \frac{f_0}{k}\right)\cos\omega t + \frac{f_0}{k}}$$

FUNCIÓN ESCALÓN



$$f(t) = 0 \; ; \; t < 0$$
$$f(t) = f_0 \; ; \; t \geq 0$$
$$U_p(t) = \frac{f_0}{K}$$

FUNCIÓN RAMPA



$$f(t) = 0 \; ; \; t < 0$$
$$f(t) = D \cdot t \; ; \; t \geq 0$$
$$U_p(t) = \frac{D}{K} \cdot t - \frac{CD}{K}$$

C = Amortiguamiento

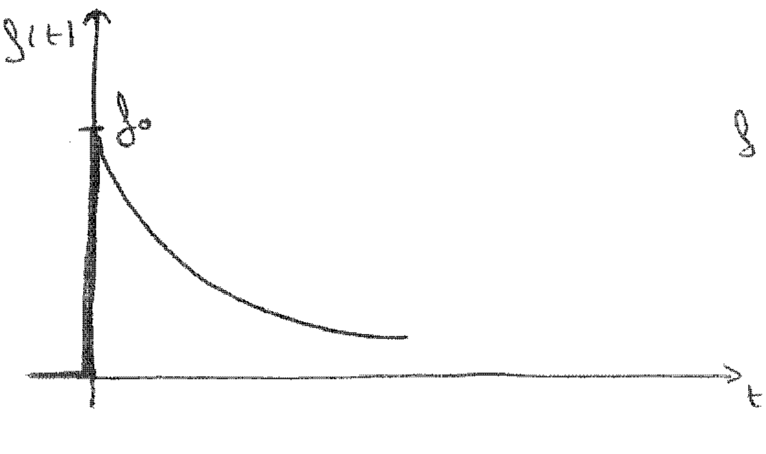
K = Rigidez

D = Pendiente

⇒ La función rampa es la integral de la función escalón.

→ La función escalón es la derivada de la función rampa.

FUNCIÓN EXPONENCIAL DECRECIENTE



$$f(t) \begin{cases} 0 \; ; & t < 0 \\ f_0 \cdot e^{-a t} \; ; & t \geq 0 \end{cases}$$

$$U_p(t) = \frac{f_0}{m \cdot a^2 - C \cdot a + K} \cdot e^{-a \cdot t}$$

m = masa

Es la forma de tratar de modo conjunto tanto funciones senoidales como cosenoidales

Parte real: Cosenoidal
Parte imaginaria: Senoidal

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_0 \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\begin{cases} u_p(t) = U \cdot e^{i\bar{\omega}t} \\ \dot{u}_p(t) = i \cdot \bar{\omega} \cdot U \cdot e^{i\bar{\omega}t} \\ \ddot{u}_p(t) = -1 \cdot \bar{\omega}^2 \cdot U \cdot e^{i\bar{\omega}t} \end{cases}$$

$$-m \cdot \bar{\omega}^2 \cdot U \cdot \cancel{e^{i\bar{\omega}t}} + c \cdot i\bar{\omega} \cdot U \cdot \cancel{e^{i\bar{\omega}t}} + k \cdot U \cdot \cancel{e^{i\bar{\omega}t}} = F_0 \cdot \cancel{e^{i\bar{\omega}t}}$$

$$U(-m\bar{\omega}^2 + c i \cdot \bar{\omega} + k) = F_0$$

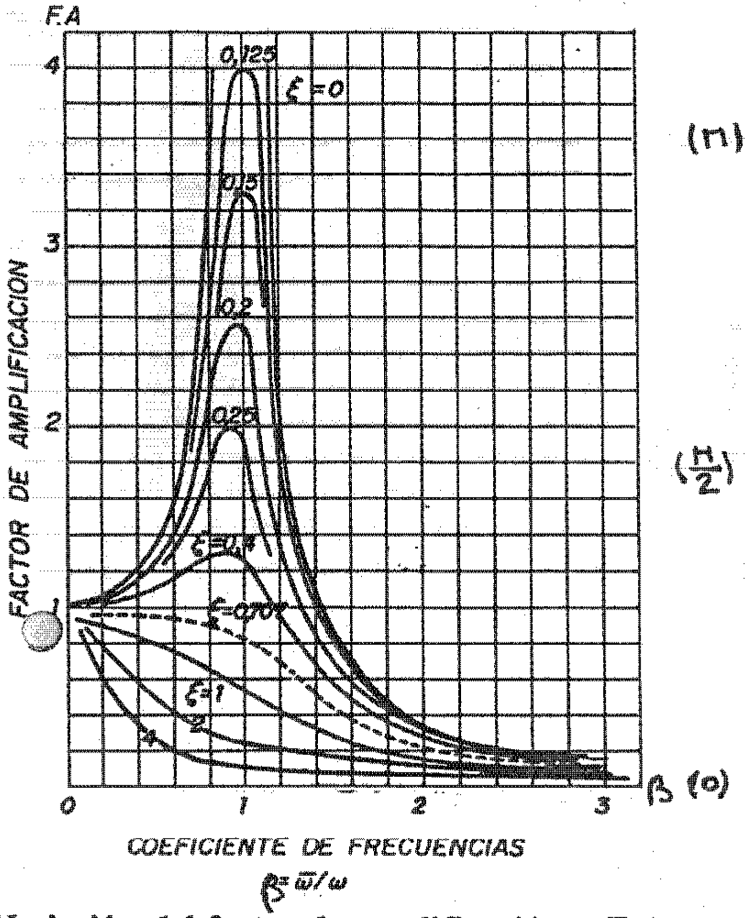
$$U = \frac{F_0}{-m\bar{\omega}^2 + c \cdot i \cdot \bar{\omega} + k} \longrightarrow \text{Amplitud}$$

$$U = \frac{F_0}{\boxed{(-m\bar{\omega}^2 + k) + i \cdot c\bar{\omega}}}$$

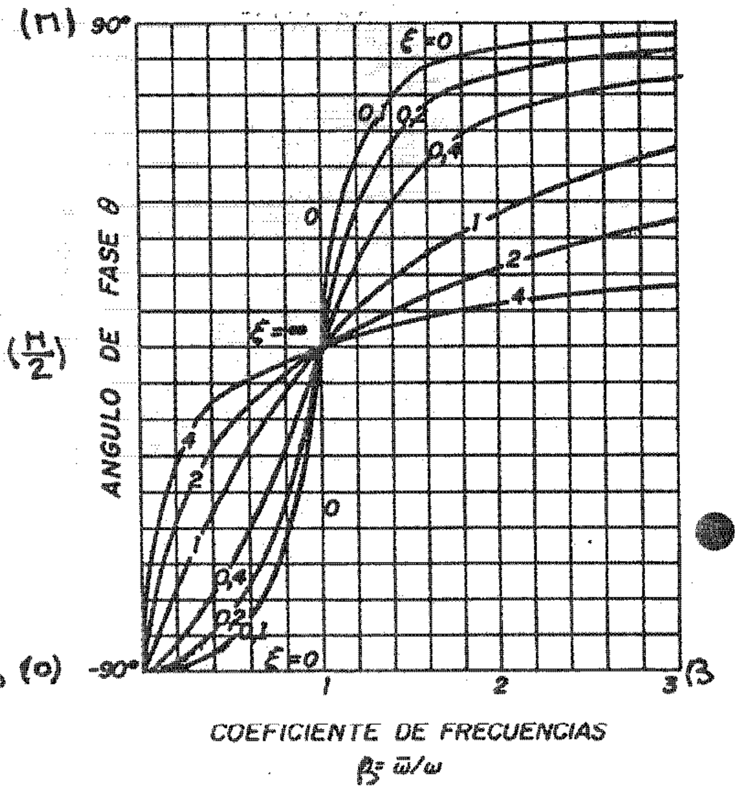
Impedancia mecánica

$$U = \frac{F_0\left[(-m\bar{\omega}^2 + k) - c\bar{\omega}\right]}{(-m\bar{\omega}^2 + k)^2 + (c\bar{\omega})^2} = F_0\left[\frac{k - m\bar{\omega}^2}{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2} - i \cdot \frac{c\bar{\omega}}{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}\right]$$

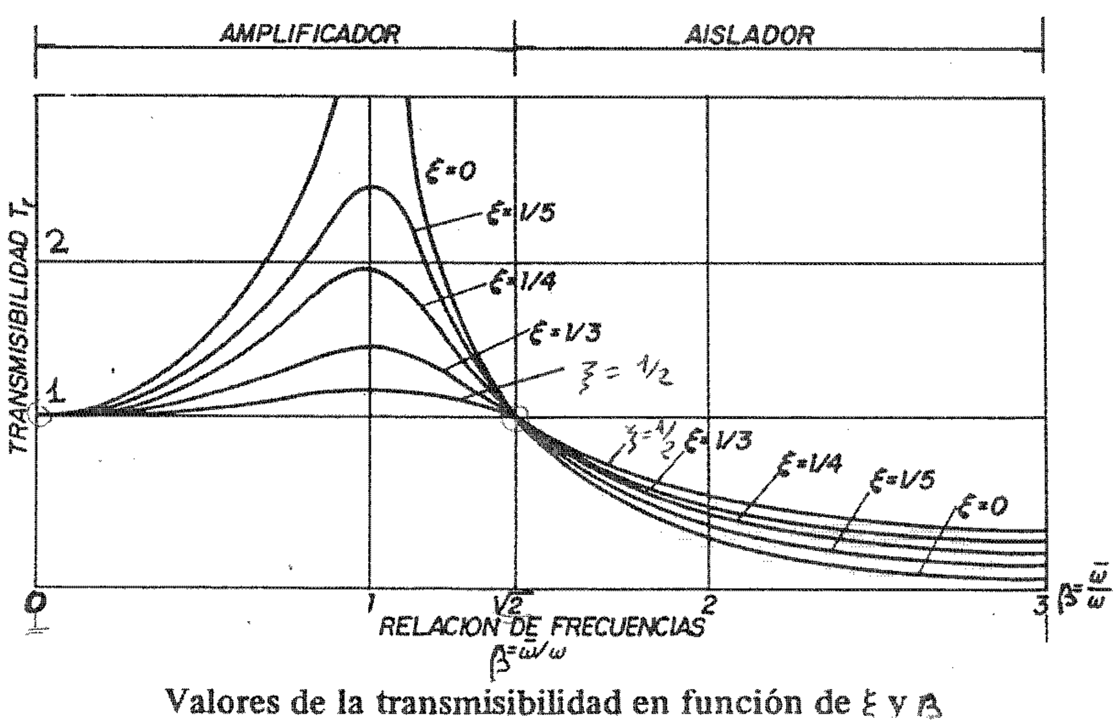
$$\text{Desfase} = \phi = \operatorname{arctg} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)}$$



Variación del factor de amplificación –*F.A*– en función de ξ y β



Variación del ángulo de fase –θ– en función de ξ y β



Valores de la transmisibilidad en función de ξ y β

Módulo: [illegible]

[illegible]

$$\bar{U} = \frac{F_0}{\sqrt{(-m\bar{\omega}^2+k)^2+(c\bar{\omega})^2}} \cdot e^{-i\phi}$$ [illegible]

$$u_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(-m\bar{\omega}^2+k)^2+(c\bar{\omega})^2}} \cdot e^{i(\bar{\omega}t-\phi)}$$

$u_p = \bar{U}\, e^{i\bar{\omega}t}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \xi = \frac{c}{c_c} = \frac{2\sqrt{k}}{c}$

$$\boxed{\bar{U}} = \frac{F_0}{(-m\bar{\omega}^2+k)+ic\bar{\omega}} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \frac{F_0/k}{\left(-\frac{m}{k}\cdot\bar{\omega}^2+1\right)+i\cdot c\frac{\bar{\omega}}{k}} =$$

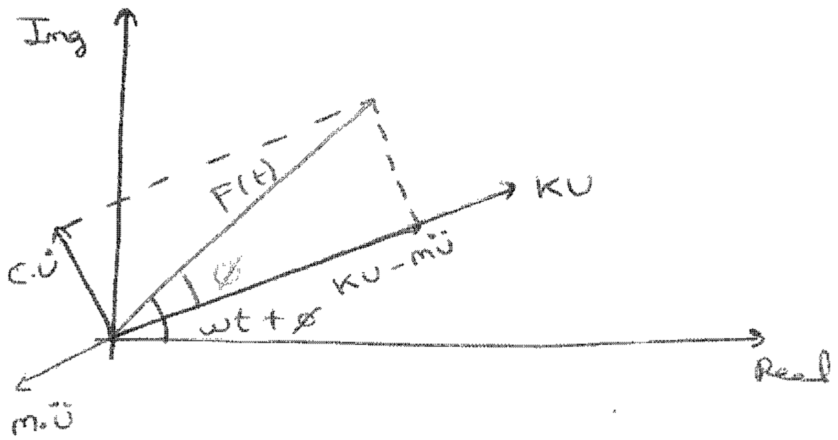
$$\frac{F_0/k}{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right)+i\cdot\xi 2\sqrt{\frac{k\cdot m}{k^2}}\,\bar{\omega}} = \boxed{\frac{F_0/k}{(1-\beta^2)+i.2.\xi\beta}}$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \; ; \; c = 2\xi\sqrt{km}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\frac{1}{(1-\beta^2)+i.2\xi.\beta} = H(i\bar{\omega}) \equiv \text{Función de transferencia}$$

[illegible]



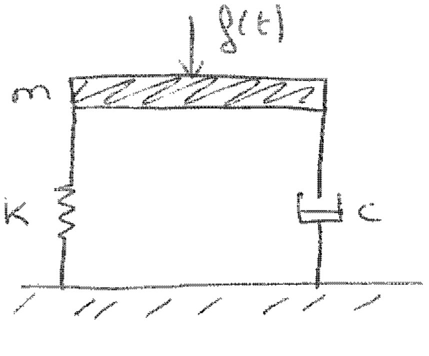
El módulo de la función de transferencia es el factor de amplificación dinámica.

$|H(i\bar{\omega})| = FAD.$

- Esta función de transferencia da toda la información necesaria para determinar la respuesta del sistema. En el caso de que la fuerza sea cosenoidal, nos quedamos con la parte real. Si la fuerza fuese senoidal, con la parte imaginaria.

Aislamiento de vibraciones

1) Fuerzas transmitidas a la base (fuerza armónica)
La base está fija y el objeto en movimiento
Ej: pórtico que soporta una turbina



$$f(t) = f_o \cdot \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = f(t) = f_o \cdot \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

Se estudia el régimen permanente

$$u_p(t) = U \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi) \; ; \; \dot{u}_p = \bar{\omega} \cdot U \cdot \cos(\bar{\omega} t - \varphi)$$

La fuerza transmitida a la base es la suma de la fuerza transmitida por el muelle más la fuerza transmitida por el amortiguador.

$$\bar{F} = \bar{F}_k + \bar{F}_c = k \cdot U \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi) + c \cdot \bar{\omega} \cdot U \cos(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$|\bar{F}| = F_t = \sqrt{(k \cdot U)^2 + (c\,\bar{\omega} \cdot U)^2} = k \cdot U \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{c \cdot \bar{\omega} \cdot \cancel{U}}{k \cdot \cancel{U}}\right)^2}$$

$$c = \xi \cdot c_c = \xi \cdot 2\sqrt{k \cdot m}$$

$$F_t = k \cdot U \cdot \sqrt{1 + \left(2\xi \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \bar{\omega}\right)^2}$$

$$F_t = k \cdot U \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\frac{U}{U_o} = \frac{U}{U_{et}} = D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \; ; \; U = \frac{U_o}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{F_t}{f_o} = \frac{k \cdot U_o \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{f_o \cdot \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{F_t}{f_o} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = TR \equiv \text{Transmisibilidad}$$

TR = Cómo se transmite la fuerza provocada por el objeto móvil a la base (a la cimentación)

• TR = 1

$$1 + \cancel{(2\xi\beta)^2} = (1-\beta^2)^2 + \cancel{(2\xi\beta)^2}$$

$$\pm 1 = 1 - \beta^2 \quad \begin{cases} \underline{\beta = 0} \\ \underline{\beta = \sqrt{2}} \end{cases}$$

Soluciones dobles por ser una ecuación de 4° grado.

3ª gráfica: Representación de TR

<u>TR = 1</u>: La fuerza del mov. se translada de forma directa a la cimentación.

• Cuando β es muy grande ($>\sqrt{2}$), la relación de frecuencias es muy grande.

$$\beta \uparrow\uparrow \Rightarrow \underset{\downarrow\downarrow}{\frac{\bar{\omega}}{\omega}} \uparrow\uparrow \rightarrow \underset{\uparrow\uparrow}{\omega \downarrow\downarrow} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \begin{cases} K \downarrow\downarrow \ \uparrow\uparrow \\ m \uparrow\uparrow \ \downarrow\downarrow \end{cases} \quad \xi \uparrow\uparrow$$

$\bar{\omega}$ <u>no</u> se puede modificar apenas pero se puede hacer que ω disminuya.

→ Interesa un muelle poco rígido y una masa elevada. Además, se aísla mejor <u>sin</u> amortiguamiento.

⇒ Si $\xi \downarrow\downarrow \Rightarrow TR \downarrow\downarrow$: Interesa por lo tanto <u>no</u> colocar amortiguamiento si $\frac{\bar{\omega}}{\omega} \uparrow\uparrow$.

* Siempre interesa trabajar para β grandes. (Gráfica)

A partir de $\beta = \sqrt{2}$, cuando ξ es nula, la gráfica baja mucho más.

Parte rcada de la gráfica (para el caso a bajo)

No siempre es bueno anular las vibraciones

Cuando $\beta = 1$ (Resonancia), todo queda en función de la relación de amortiguamiento (Hay poco que hacer con los K y las m)

Aunque para $\beta \uparrow\uparrow$ conviene no colocar amortiguación, una máquina no alcanza de modo instantáneo su régimen de funcionamiento. (Va poco a poco, siempre se pasa por $\beta = 1$ y hay que poner amortiguamiento)

2) Fuerzas transmitidas desde la base.

La base es móvil y el objeto ~~fijo~~ móvil. Se corresponde con movimiento sísmico. Un poco un tren, o un coche

- Vibraciones libres $\Rightarrow$ E.D. = 0

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + K.u = 0$$

No todos los u son iguales.

$$\underbrace{m.\ddot{u}}_{\text{mov. total}} + \underbrace{c.\dot{u} + K.u}_{\text{mov. relativo}} = 0$$

RELATIVO = TOTAL − BASE

$$m.\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_b) + K(u - u_b) = 0$$

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + K.u = c.\dot{u}_b + K.u_b$$

→ Se supone que el movimiento de la base es senoidal.

$$u_b = u_0 . \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

$$\dot{u}_b = \bar{\omega} . u_0 . \cos \bar{\omega} t$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = \underbrace{c \cdot U_0 \cdot \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + k \cdot U_0 \cdot \operatorname{sen} \bar{\omega} t}_{f_0 \cdot \operatorname{sen} (\bar{\omega} t + \varphi)}$$

$$\begin{cases} \text{Módulo } f_0 = \sqrt{(k \cdot U_0)^2 + (c \cdot U_0 \cdot \bar{\omega})^2} \\ \text{Argumento } \varphi = \operatorname{arctg} = \dfrac{c\bar{\omega}}{k} \end{cases}$$

→ Todo es exactamente igual a lo de antes, salvo que hablamos de movimientos en vez de fuerzas.

Operando de la misma manera se llega a:

$$(TR)_M = \underset{\text{mov.}}{\frac{U}{U_0}} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \underset{\text{aceleraciones}}{\frac{\ddot{U}}{\ddot{U}_0}}$$

- Se puede hacer exactamente igual con aceleraciones.

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= u_r(t) + u_b(t) \\ \dot{u}(t) &= \dot{u}_r(t) + \dot{u}_b(t) \\ \ddot{u}(t) &= \ddot{u}_r(t) + \ddot{u}_b(t) \end{aligned}\right\} \text{ El sistema es lineal}$$

3) ⇒ Fuerzas que se transmiten desde la base hasta el objeto cuando la base se mueve y el objeto también.

Mov. [illegible] igual y de sentido contrario ...

$$m(\ddot{u}_r + \ddot{u}_b) + c \cdot \dot{u}_r + k \cdot u_r = 0$$

$$m \cdot \ddot{u}_r + c \cdot \dot{u}_r + k \cdot u_r = \underline{\underline{-m \cdot \ddot{u}_b}} \rightarrow f(t) \quad \text{E.D. completa}$$

Suponiendo movimiento senoidal: $u_b = U \cdot \operatorname{sen} \bar{\omega} t$

$\dot{u}_b = \bar{\omega} \cdot U \cdot \cos \bar{\omega} t$

Sustituyendo:

$$\boxed{F_t = m \cdot \bar{\omega}^2 \cdot U} \equiv \text{Módulo de la fuerza}$$

$$\frac{F_t}{k \cdot U_0} = \underbrace{\frac{m}{k}}_{\frac{1}{\omega^2}} \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \underbrace{\frac{U}{U_0}}_{TR} = TR \cdot \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = TR \cdot \beta^2$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Siempre es lo mismo excepto en el este caso 3.

- Cuando la TR tiende a 0, el sistema se denomina aislado.
- Cuando la TR tiende a 1, el sistema es no aislado.
- Cuando la TR tiende a ∞, el sistema se denomina amplificado.

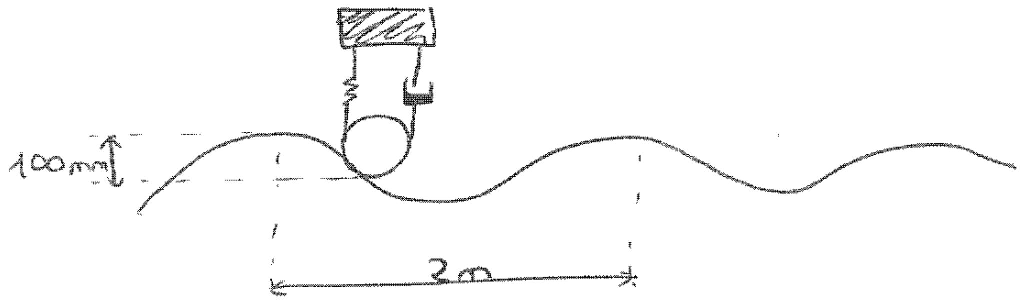
En la figura se representa simplificadamente un automóvil que rueda sobre una carretera ondulada. Las ondulaciones de la carretera pueden representarse mediante una función armónica de amplitud 100m y longitud de onda de 2 m. La masa del vehículo es de 1600 kg, la rigidez del resorte $80 \frac{kN}{m}$. Determinar:

a) La velocidad del vehículo para la que la amplitud del desplazamiento se hace máxima si el amortiguamiento es $\xi = 0'05$. ¿Se produce el despegue del coche?

b) El desplazamiento cuando el amortiguamiento sea 10 veces más ($\xi = 0'5$) $\beta = 1$

c) Si el amortiguamiento es $\xi = 0'4$ y la velocidad es 70 km/h, determinar el desplazamiento máximo.

d) Idem para $\xi = 0$.



Se mueve todo, tanto el objeto como la base $\Rightarrow$ Caso 2

- TR de desplazamiento.

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{80\,\frac{kN}{m}\cdot 1000\frac{N}{kN}}{1600\,kg\cdot \frac{9'8\,N}{1\,kg}}} = 2'26\ rad/s$$

$\omega_d =$

$N = kg\cdot\frac{m}{s^2}$

El desplazamiento será máx. cuando $\beta = 1$ (Resonancia)

$\beta = 1 \Rightarrow \overline{\omega} = \omega = 2'26$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\omega} = \dfrac{2\pi}{T} \\ V = \dfrac{\lambda}{T};\ T = \dfrac{\lambda}{V} \end{array}\right\} \overline{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot V \underset{\lambda = 2m}{\Rightarrow} V = \frac{\overline{\omega}\cdot\lambda}{2\pi} = 0'72\ m/s$$

MAL

TR = Tiene que ser grande, ya que $\beta < \sqrt{2}$

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{1 + (2\cdot 0'05 \cdot 1)^2}}{\sqrt{(1-1^2)^2 + (2\cdot 0'05\cdot 1)^2}} = \underline{10'05}$$

$\beta = 1$

$\xi = 0'05$

$U_0 = 100\ mm \Rightarrow U = U_0 \cdot TR = 100\ mm \cdot 10'05 = \underline{1005\ mm}$

$\Rightarrow$ ~~Si despega el coche~~ (Se mueve 1005 mm)

La aceleración a la que están sometidos es:
Si esto es $> g \Rightarrow$ despega.

$$a = \bar{\omega}^2 \cdot U \underset{\uparrow}{=} \bar{\omega}^2 \cdot U$$

$\beta = 1$

$$\boxed{a = 2'26 \frac{rad^2}{s^2} \cdot 1005\ mm \cdot \frac{1\ m}{1000\ mm} = \boxed{5'13\ \frac{m}{s^2}}} \rightarrow 5g$$

ω ?

??

b)

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2\cdot 0'05 \cdot [illegible])^2}}{\sqrt{(1-[illegible])^2 + (2\cdot 0'05 \cdot [illegible])^2}} = 1'41$$

$U_0 = 100\ mm \Rightarrow U = U_0 \cdot TR = 100\ mm \cdot 1'41 = 141'4\ mm$

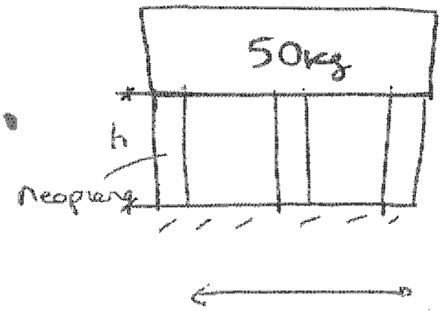
c)

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot V = \frac{2\pi}{2\ m} \cdot 70\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000\ m}{1\ km} \cdot \frac{1\ h}{3600\ s} = 61'09\ rad/s$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{61'09\ rad/s}{[illegible]\ rad/s} = [illegible]$$

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0'05 \cdot [illegible])^2}}{[illegible]} = 0'0[illegible]$$

Determinar:
Aceleración de la máquina. $\ddot{U}$?
El incremento de altura de los apoyos de neopreno para que la aceleración de la máquina sea menor a 0'005g.
Δh? $\ddot{U}_m < 0'005g$



$K = 15\,kp/cm$

$\xi = 10\% = 0'1$

$\ddot{U}_S = 0'1g \cdot sen\bar{\omega}t \rightarrow |\ddot{U}_S| = 0'1g$

$\bar{\omega} = 62'83\ rad/s$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 9'8 \cdot 100}{50}} = 17'15\ rad/s$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{62'83}{17'15} = 3'66$$

$$TR = \frac{\ddot{U}}{\ddot{U}_S} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2 \cdot 0'1 \cdot 3'66)^2}}{\sqrt{(1-3'66^2)^2+(2 \cdot 0'1 \cdot 3'66)^2}} = 0'45$$

$$\ddot{U} = TR \cdot \ddot{U}_S = 0'45 \cdot 0'1g = \underline{0'045g}$$

↑ Menos rígidos para disminuir los efectos en la masa

$$U = 0'005\,g \;\to\; \frac{U}{U_0} = \frac{0'005\,g}{\ldots} = 0'05 = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$\xi = 0'4$

$$0'05^2 = \frac{1+(2\cdot 0'4\cdot\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\cdot 0'4\cdot\beta)^2}$$

$$0'05^2\,(1+\beta^4-2\beta^2)+0'05^2\cdot 0'8^2\beta^2 = 1+0'8^2\beta^2$$

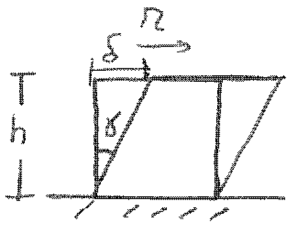
$\beta = 5'55$

$$\omega = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{60'83\ \text{rad/s}}{5'55} = 11'32\ \text{rad/s}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\ ,\quad k = \omega^2 m = 50\,\text{kg}\cdot 11'32^2\,\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} = 6407'12\ \text{N/m}$$

⇒ Como tiene que ser menos rígido, la altura tiene que aumentar.

* <u>Siendo</u>: $\tau = \frac{F}{A}$



$\tau = G\cdot\gamma$

$\gamma = \operatorname{tg}\gamma = \frac{\delta}{h}$ ↑ def. pequeñas

$$\boxed{\tau = \frac{F}{A} = G\cdot\gamma = G\cdot\frac{\delta}{h}}$$

$$\frac{K\cdot\cancel{\delta}}{A} = \frac{G\cdot\cancel{\delta}}{h}\ ;\quad K = G\cdot\frac{A}{h}$$

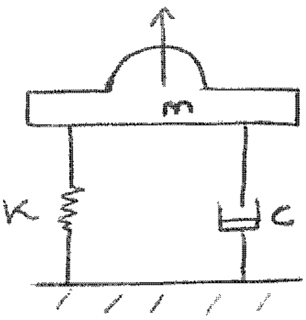
$$K' = \frac{G\cdot A}{h'}$$

$$\boxed{\frac{K}{K'} = \frac{h'}{h}}$$

Rigideces inversament proporcionales a las alturas

$$\boxed{h' = h\,K \quad 14700\,h = 2'3h} \to \Uparrow 230\%$$

$F(t) = 100 \operatorname{sen} \underset{\bar{\omega}}{10} t \; (N)$



$K = 60500 \, N/m$

$m = 500 \, kg$

$\xi = 0'1$

La base no se mueve.

Se pide:

a) Transmisibilidad

b) Sin cambiar la masa del sistema, ¿qué modificaciones se pueden introducir para que la transmisibilidad sea menor a la unidad?

c) ¿Es posible cumplir simultáneamente que la $TR < 1$ y que la amplitud del movimiento sea menor que 1 cm?

a)

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{60500 \, N/m}{500 \, kg}} = 11 \, rad/s \qquad \left. \right\} \; \beta = \frac{10}{11} = 0'91$$

$$\bar{\omega} = 10 \, rad/s$$

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0'1 \cdot 0'91)^2}}{\sqrt{(1 - 0'91^2)^2 + (2 \cdot 0'1 \cdot 0'91)^2}} = 4'07$$

$\Rightarrow 4 \times 100 = 400 N$ se transmiten a la base

b) $$TR = 1 = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0'1 \cdot \beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot 0'1 \cdot \beta)^2}}$$

$$(1 - \beta^2)^2 + \cancel{(2 \cdot 0'1 \cdot \beta)^2} = 1 + \cancel{(2 \cdot 0'1 \cdot \beta)^2}$$

$1 - \beta^2 = \pm 1$; $\beta = 0 \rightarrow$ No tiene [illegible]

$\beta^2 = 2 \Rightarrow \beta = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} > \frac{10}{\omega}$; $\omega < 7'07 \, rad/s$

$K \downarrow$

[illegible]

c) Aquí no se mueve el suelo por mucho que se mueva la máquina. No se transmite movimiento, solo fuerzas.
⇒ No se puede usar la transmisibilidad.

Se trabaja con el F.A.D.

$$F.A.D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_{max} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} =$$

$$\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2}} < 0'01$$

$$\frac{100/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{k}{300}}}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot 0'1\cdot\frac{10}{\sqrt{\frac{k}{300}}}\right)^2}} < 0'01$$

$$\frac{\frac{10000}{k^2}}{\left(1-\frac{100}{\frac{k}{300}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\frac{k}{300}}\right)} = 0'01^2 \quad ; \; k > 48000 \; \frac{N}{m}$$

[illegible]

< 1 [illegible] que el [illegible] sea < 1 m

Las máquinas desequilibradas provocan fuerzas que se rigen por la ley de Newton.

$$F = m \cdot a = \underbrace{m}_{\text{masa excéntrica}} \cdot \underbrace{e}_{\substack{\text{excentricidad} \\ \text{(distancia)}}} \cdot \overline{\omega}^2$$

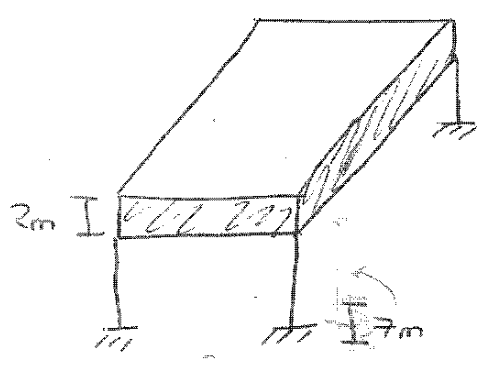
$\overline{\omega}$ → frecuencia angular

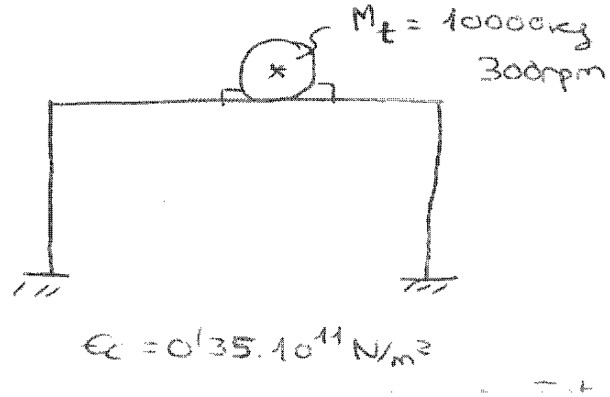
Una máquina rotativa está clavada en un pórtico y la máquina tiene una masa total de 10000kg, de los que 500kg están situados con una excentricidad de 1'5m respecto del eje de giro. Cuando la máquina gira en régimen permanente, lo hace a 300rpm. El pórtico está formado por una losa de hormigón cuadrada de 6m de lado y con un canto de 2m, está situada en 4 pilares de sección cuadrado de 0'6m de lado y 7m de altura. El módulo de elasticidad longitudinal del hormigón es $0'35 \cdot 10^{11}\ N/m^2$. Se pide:

a) Momento flector en la base de los pilares debido a la componente horizontal generada durante el funcionamiento de la máquina rotativa, suponiendo que la masa de los pilares es nula y el amortiguamiento <u>muy</u> pequeño.

b) ¿Sí puede producirse un valor del momento mayor que el anterior en algún caso?

Dada la rigidez de esta losa, los pilares se pueden considerar biempotrados.





$E_c = 0'35 \cdot 10^{11}\ N/m^2$

$\varphi_m =$ [illegible]

Rigidez:

$$K = \frac{12EI}{l^3} \times \underset{\text{pilares}}{\underset{\uparrow}{4}}$$ Por ser pilares biempotrado

Momento de inercia:

$$I = \frac{1}{12} l \cdot l^3$$

$$K = \frac{4 \cdot 12 \cdot 0'35 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \cdot \frac{0'6 m^4}{12}}{7^3 m^3} = 5'19 \cdot 10^5 N/m$$

Masa total:

$$M_T = 2500 \frac{kg}{m^3} \cdot [illegible] + \underbrace{100000 kg}_{M} = 140000 kg$$

$$300 \frac{vueltas}{min} \cdot \frac{2\pi\, rad}{1\, vuelta} \cdot \frac{1\, min}{60\, s} = 31'42\, rad/s = \bar{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M_T}} = \sqrt{\frac{5'19 \cdot 10^5 N/m}{140000 kg}} = 16'59\, rad/s$$

$$F = m \cdot e \cdot \bar{\omega}^2 = m \cdot a = 500 kg \cdot [illegible] m \cdot 31'42^2\, rad/s^2 = 740200 N$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{31'42}{16'68} = 1'9$$

$$TR = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \underset{\xi=0}{\uparrow}= \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$$\underline{TR} = \frac{1}{|1-1'9^2|} = \underline{0'38}$$

Desplazamiento estático $= \delta_{est} = \frac{F}{K}$

$$\delta_{est} = \frac{740220 N}{52'9 \cdot 10^6 N/m} = 0'0140 m$$

Desplazamiento máximo $= \delta_{máx} = \delta_{est} \cdot TR$

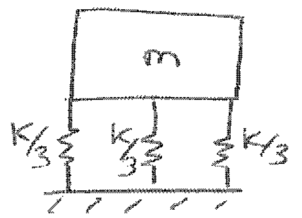
$$\delta_{máx} = 0'0140 \cdot 0'38 = 0'0055 m$$

$$M = \frac{6EI}{l^2}\delta_{máx} = 6 \cdot \frac{0'35 \cdot 10^{11} \cdot \frac{1}{12} 0'6^4}{7^2} \cdot 0'055 \Rightarrow \underline{254'571 \ kN m}$$

$\Rightarrow$ El momento es muy grande, lo cual implica una cimentación enorme.

b) Sí, porque para llegar al régimen de funcionamiento, es decir, a una frecuencia de 31'42 rad/s, se va poco a poco y el β se hace 1 y la TR ∞. (Hay resonancia)
Para ello, hay 2 opciones:
- Colocar amortiguamiento
- Pasar de forma muy rápida.

La frecuencia de vibración de la solera de un edificio está situada en el rango de 15 a 60Hz. Hay que instalar un equipo de precisión que debe ser aislado de las vibraciones inducidas por la solera. Ese equipo se instala sobre una plataforma unida a la solera con 3 muelles idénticos. La masa total de la plataforma y el equipo es de 40 kg y la relación de amortiguamiento de la suspensión es del 20%. Determinar:
→ el valor de la rigidez de los muelles si la amplitud de la vibración transmitida tiene que ser inferior al 10% para el rango de frecuencias dado.



$\xi = 0'2$

$TR < 0'1$

$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ f = \dfrac{1}{T} \end{array}\right\} \omega = 2\pi \cdot f$

$$TR = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} < 0'1$$

$$1 + (2 \cdot 0'2 \cdot \beta)^2 = 0'1^2 \left[(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot 0'2 \cdot \beta)^2\right] \Rightarrow \beta > 4'72 > \sqrt{2}$$

$\left| \begin{array}{l} 15\,Hz \rightarrow 2\pi \cdot 15\,Hz = \boxed{\bar{\omega} = 30\pi \text{ rad/s}} \\ 60\,Hz \rightarrow 2\pi \cdot 60\,Hz = \bar{\omega} = 120\pi \text{ rad/s} \end{array} \right.$ Próxima a la zona de β

⇒ Si $\beta \downarrow = \dfrac{\bar{\omega}}{\omega} \downarrow$. Para β bajos la TR es mayor que 1 ya que hay amortiguamiento. (Izda gráfica)

$\beta > 4'72 = \dfrac{30\pi}{\omega}$; $\omega < \dfrac{30\pi}{4'72} < 19'97$ rad/s

$\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$; $\omega^2 = \dfrac{K}{m}$; $K = m \cdot \omega^2 = 40\,kg \cdot 19'97^2\, rad^2/s^2 =$

$\boxed{K = 15952'036\ N}$

El otro caso:

$$\beta > 4'72 = \frac{120\pi}{\omega} \; ; \; \omega < 79'87 \text{ rad/s}$$

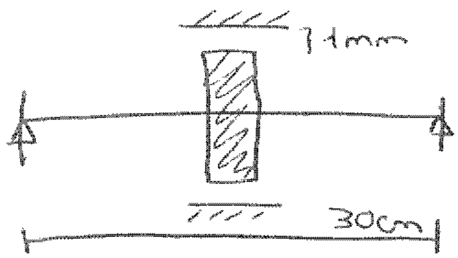
$$K = m \cdot \omega^2 = 40 \cdot 79'87^2 = 255175'06 \text{ N/m}$$

⇒ En este caso es mejor la menor ω que corresponde a una menor rigidez de la [illegible]

Un rotor de 40 kg de masa se coloca en el punto medio de un eje de acero de sección circular y de 30 cm de longitud, apoyado en un par de cojinetes en sus extremos. Si el rotor gira entre 1000 y 2000 rpm y tiene un desequilibrio de $\underbrace{300 \text{ g} \cdot \text{cm}}_{m \cdot e}$ y el juego entre el rotor y el estator es de 1 mm, se pide:

a) Diámetro del eje.

b) Fuerza transmitida a cada cojinete.



No se transmite nada.

Hay infinitas soluciones con unas excepciones.

Amortiguamiento nulo.

$$* \; I_p = I_x + I_y = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{(Está girando)}$$

$$\frac{U_{máx}}{U_{est}} = D \; ; \; U_{máx} = D \cdot U_{est} = D \cdot \frac{F_0}{K} = D \cdot \frac{m \cdot a}{K} = D \cdot \frac{m \cdot e \cdot \bar{\omega}^2}{K}$$

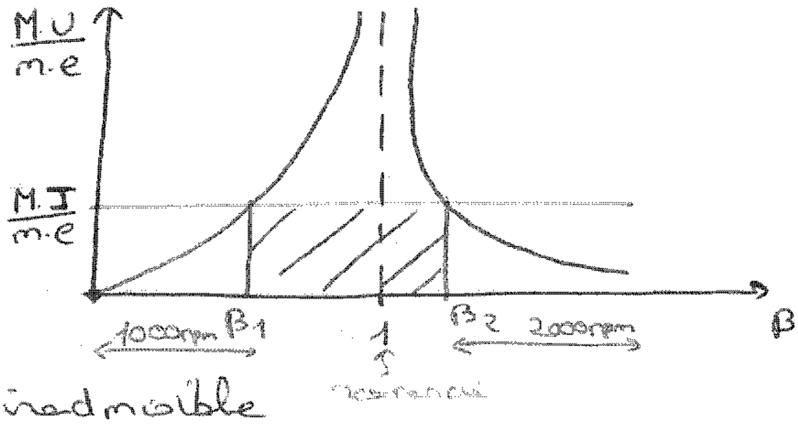
$$U_{máx} = \frac{m \cdot e \cdot \bar{\omega}^2}{\omega^2 \cdot M} \cdot D = \frac{\overbrace{m \cdot e}^{300 \text{ g}\cdot\text{cm} \cdot 10^{-5} \text{ kg m}}}{M} \cdot \beta^2 \cdot D$$

$$U_{máx} = \frac{m \cdot e}{M} \cdot \beta^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Rightarrow U_{máx} = \frac{m \cdot e}{M} \cdot \frac{\beta^2}{|1-\beta^2|}$$

$$\xi = 0$$

$$\frac{M \cdot U_{máx}}{m \cdot e} = \frac{\beta^2}{|1-\beta^2|}$$

En este caso: $\underline{\underline{\delta = 1 mm}}$



// Todo el intervalo es inadmisible

$$\frac{40 kg \cdot 1 mm}{300 g \cdot cm \cdot \frac{10 mm}{1 cm} \cdot \frac{1 kg}{1000 g}} = \frac{\beta^2}{|1-\beta^2|} \begin{cases} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 13'33 \\ \frac{\beta^2}{-1+\beta^2} = 13'33 \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} \beta_1 = 0'96 \\ \beta_2 = 1'04 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \beta < 0'96 \\ \beta > 1'04 \end{matrix}$$

$$\beta < 0'96 \; ; \; \frac{\overline{\omega}}{\omega} < 0'96 \; ; \; \omega > \frac{\overline{\omega}}{0'96} = \frac{1000 rpm \cdot \frac{1 min}{60 s} \cdot \frac{2\pi rad}{1 rev}}{0'96}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 109'08 \rightarrow 109'08^2 = \frac{K}{m} = \frac{K}{40 kg} \; ; \; K = 475964'72$$

$$K = \frac{48 E I}{l^3} > 475964'72 \; N/m$$

$$I = \frac{475964'72 \frac{N}{m} \cdot 0'3^3 m^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^3 \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{10^6 mm^2}{1 m^2}} = 1'27 \cdot 10^{-9} m^4$$

$$I = \frac{\pi d^4}{32} \; , \; d < 0'0106 m \rightarrow \underline{10'6 mm}$$

$$\beta > 1'04 \; , \; \omega > \frac{\overline{\omega}}{1'04} = \frac{2000 rpm \cdot \frac{2\pi}{60}}{1'04} = 201'38 rad/s$$

$$K = 40 \cdot 201'38^2 = 1622156'49 \; N/m$$

$$I = \frac{1622156'49 \frac{N}{m} \cdot 0'3^3 m^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^9 N/m^2} = 4'34 \cdot 10^{-9} m^4$$

[illegible]

$F = K \cdot U/2 \leftarrow$ cojinetes

$F \begin{cases} d = 8mm \rightarrow \\ d = 16mm \rightarrow \end{cases}$

Suponiendo un diámetro de 12mm, calcular el desplazamiento máximo. La frecuencia de giro es 1500rpm.

$$d = 12\ mm \Rightarrow I = \underset{\underset{d = 0'012m}{\uparrow}}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} = 2'04 \cdot 10^{-9}\ m^4$$

$$K = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48 \cdot 210 \cdot 10^9\ N/m \cdot 2'04 \cdot 10^{-9}\ m^4}{0'3^3\ m^3} = 761600\ N/m$$

$$w = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{761600\ N/m}{40\ kg}} = 137'99\ rd/s$$

$$\beta = \frac{1500 \cdot \frac{2\pi}{60}\ rd/s}{137'99\ rd/s} = 1'14$$

$$U_{max} = \frac{m \cdot e}{M} \cdot \beta^2 \cdot D \underset{\underset{\xi = 0}{\uparrow}}{=} \frac{m \cdot e}{M} \cdot \frac{\beta^2}{|1 - \beta^2|} = \frac{300 \cdot 10^{-5}\ kg \cdot m}{40\ kg} \cdot \frac{1'14^2}{|1 - 1'14^2|}$$

$$U_{max} = 3'2 \cdot 10^{-4}\ m \rightarrow 0'32\ mm$$

Un pórtico rígido de 6m de luz y 5m de altura de pilares con una I_p y W_p. Los pilares están empotrados en la base. Están sometidos a un movimiento senoidal en la base con un valor de $u_0 = 0'5cm$ y una frecuencia $\bar{\omega} = 5'3 \, rad/s$. Determinar:

a) La transmisión del movimiento al dintel del pórtico
   Su desplazamiento respecto a la posición inicial.
   Amplitud dinámica correspondiente
b) Esfuerzo cortante máx. en los pilares
c) Momento flector máx. en los pilares y su tensión máx.
d) Desplazamientos en función del tiempo en régimen permanente para condiciones iniciales naturales.
e) Encontrar un nuevo diseño sin cambiar la geometría para que TR sea menor de 1.
f) Si los pilares estuviesen articulados en su extremo inferior, ¿cómo variarían cualitativamente las anteriores cuestiones?

$I_p = 2880 cm^4$ $\quad u_0 = 0'5cm$

$W_p = 288 cm^3$ $\quad \bar{\omega} = 5'3 \, rad/s$

$\xi = 0'5\%$ $\quad E = 2'1 \cdot 10^6 kp/cm^2$ $\quad W = 7000kp$ / $g = 980 cm/s^2$