

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Máster en Ingeniería Industrial

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA CURSO 2017/2018

Asignatura: INSTALACIONES Y MÁQUINAS ELÉCTRICAS

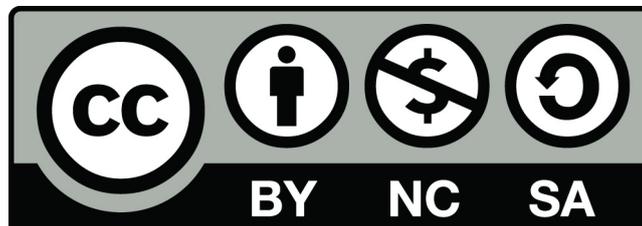
Código: 28806146 - 1<sup>er</sup> curso, 1<sup>er</sup> cuatrimestre

Autores: Equipo docente de la asignatura

Dpto. de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Control, Telemática y  
Química Aplicada a la Ingeniería.

1 de octubre de 2017 - v 3.1

E.T.S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES



Los derechos de esta obra original son de los autores: José Carpio, Juan Vicente Míguez, Jaime Ramis, Gumersindo Quejo, Carlos Sancho y Rafael Guirado.

Todos los autores son profesores del Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Control, Telemática y Química Aplicada a la Ingeniería de la ETS de Ingenieros Industriales de la UNED.

Esta obra se distribuye bajo licencia Creative Commons (by-nc-sa): No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original. En todos los casos debe reconocerse la autoría de la obra original.

# Índice general

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1	El contexto . . . . .	2
1.2	Conocimientos previos . . . . .	2
1.3	Objetivo y contenidos de esta asignatura. . . . .	6
<b>2</b>	<b>CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO</b>	<b>7</b>
2.1	Introducción. . . . .	8
2.2	Circuitos de primer orden. . . . .	11
2.3	Circuitos de segundo orden. . . . .	20
2.4	Ejercicios de autocomprobación. . . . .	38
<b>3</b>	<b>INSTALACIONES ELÉCTRICAS. SISTEMAS TRIFÁSICOS</b>	<b>63</b>
3.1	Repaso a los sistemas eléctricos trifásicos. . . . .	64
3.1.1	Definiciones . . . . .	64
3.1.2	Análisis de sistemas trifásicos equilibrados. . . . .	70
3.1.3	Potencia en sistemas trifásicos. . . . .	73
3.2	Determinación de la secuencia de fases. . . . .	77
3.3	Medida de la potencia en sistemas trifásicos. . . . .	81
3.3.1	El vatímetro. . . . .	82
3.3.2	Medida de la potencia activa. . . . .	83
3.3.3	Medida de la potencia reactiva. . . . .	84
3.3.4	Método de los dos vatímetros. . . . .	86
3.4	Sistemas trifásicos con cargas desequilibradas. . . . .	92
3.4.1	Teoremas de Rosen y de Millman. . . . .	92
3.4.2	Análisis de sistemas trifásicos con cargas desequilibradas. . . . .	94
3.4.3	Medida de potencia en sistemas trifásicos con cargas desequilibradas. . . . .	97
3.5	Ejercicios de autocomprobación. . . . .	100
<b>4</b>	<b>MÁQUINAS ELÉCTRICAS</b>	<b>123</b>
4.1	Principios generales de las máquinas eléctricas. . . . .	125
4.2	El transformador. . . . .	125
4.3	La máquina asíncrona o de inducción. . . . .	126
4.4	El generador síncrono. . . . .	126
4.5	La máquina de corriente continua. . . . .	127
4.6	Ejercicios de autocomprobación. . . . .	127
<b>5</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>161</b>



## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN

## 1.1. EL CONTEXTO

La Ingeniería Eléctrica es el área de conocimiento que estudia todos los aspectos relacionados con la generación, el transporte y la distribución de la energía eléctrica y con los distintos equipos eléctricos, electrónicos y, muy especialmente, las máquinas eléctricas que se conectan a las instalaciones eléctricas. Todos estos aspectos se abordan en el Grado de Ingeniería Eléctrica y, en mucha menor medida, en el Grado de Ingeniería en Electrónica Industrial y Automática; son los denominados “grados especialistas en electricidad”.

En los demás grados del llamado “ámbito de la Ingeniería Industrial”, como son los Grados en Ingeniería Mecánica, en Ingeniería Química y en Ingeniería Textil, el estudio de los contenidos de Ingeniería Eléctrica se reducen al de los principios y herramientas de análisis elementales de la teoría de circuitos que permiten a continuación abordar algunos de los conceptos básicos de las instalaciones eléctricas de baja tensión y de algunos tipos de máquinas eléctricas conectadas a ellas. En la práctica totalidad de las universidades, y la UNED desgraciadamente no es una excepción, todo esto se reduce a unos pocos créditos que, en el caso de la UNED, es de tan solo los 5 ECTS correspondientes a la asignatura obligatoria “Fundamentos de Ingeniería Eléctrica” del Grado en Ingeniería Mecánica.

Por este motivo y con el objetivo de refrescar y completar en lo posible lo que serán unos conocimientos básicos de Ingeniería Eléctrica que usted debe dominar, se plantea esta asignatura “Instalaciones y máquinas eléctricas” en el primer cuatrimestre del primer curso del Master en Ingeniería Industrial. Por un lado, esta asignatura es necesaria para cerrar esa formación básica en electricidad que debe tener y, por otro, le es imprescindible para entender, estudiar y poder superar la asignatura “Tecnología eléctrica” que tendrá a continuación en el segundo cuatrimestre y que es obligatoria para todos los estudiantes de este máster.

## 1.2. CONOCIMIENTOS PREVIOS

Además de los conocimientos matemáticas y de electromagnetismo que ya tiene (que están dentro de formación básica de todos los grados), como se ha indicado esta asignatura completa a la asignatura “Fundamentos de Ingeniería Eléctrica” que se imparte en el Grado de Ingeniería

Mecánica de la UNED<sup>1</sup>. Por este motivo asumimos como punto de partida que usted conoce, comprende y sabe utilizar todos los contenidos que en ella se ven y que se desarrollan de forma completa y suficiente en el siguiente libro, utilizado como bibliografía básica de esa asignatura:

- Gumersindo Queijo, “Fundamentos de tecnología eléctrica”. Colección Unidad Didáctica, Ed. UNED. 2009.

En cualquier caso, la mejor forma de resumir cuáles son esos conocimientos previos que debe tener es hacerlo mediante el índice de esas Unidades Didácticas escritas por el profesor Queijo:

## ■ TEORÍA DE CIRCUITOS

### 1. Introducción y conceptos generales.

- Dipolo eléctrico.
- Corriente de un dipolo.
- Diferencia de potencial entre los terminales de un dipolo.
- Potencia de un dipolo: criterio receptor; criterio generador; medida de la potencia.
- Cortocircuito y circuito abierto.

### 2. Componentes elementales.

- Definición de circuito eléctrico.
- Elementos activos: fuente de tensión; fuente de intensidad o de corriente.
- Elementos pasivos: resistencia; inductancia o bobina; condensador.
- Elementos activos. Modelos más próximos a la realidad.

### 3. Leyes de Kirchhoff.

- Definición de nudo y malla.
- Ley de nudos, de intensidades o 1ª Ley de Kirchhoff.
- Ley de mallas, de tensiones o 2ª Ley de Kirchhoff.
- Asociación de elementos pasivos en serie (divisor de tensión) y en paralelo (divisor de intensidad).
- Asociación de elementos activos en serie y en paralelo.
- Conversión de fuentes de tensión en fuentes de intensidad y viceversa.

### 4. Análisis de circuitos lineales.

- Método general.
- Análisis de circuitos eléctricos utilizando el método de mallas.
- Análisis de circuitos eléctricos utilizando el método de nudos.

### 5. Teoremas fundamentales del análisis de circuitos.

- Principio de superposición.

---

<sup>1</sup>Y si usted no ha cursado el grado en la UNED, es seguro que en el plan de estudios del grado en la universidad donde lo realizó tuvo al menos una asignatura similar.

- Teorema de sustitución.
  - Teoremas de Thévenin y de Norton.
6. Magnitudes sinusoidales.
- Valor eficaz.
  - Notación compleja.
  - Leyes de Kirchhoff.
  - Notación compleja con valores eficaces.
7. Comportamiento de los elementos ideales en corriente alterna.
- Resistencia, bobina y condensador.
  - Impedancia compleja: impedancia inductiva (circuito RL serie); impedancia capacitiva (circuito RC serie). Admitancia.
  - Asociación de impedancias en serie (divisor de tensión) y en paralelo (divisor de intensidad). Circuito RLC serie.
  - Análisis de circuitos en corriente alterna: método general o aplicación de las leyes de Kirchhoff; método de mallas; método de nudos.
  - Teoremas en corriente alterna: principio de superposición; teorema de sustitución; teoremas de Thévenin y de Norton.
8. Potencia en corriente alterna.
- Potencia instantánea y activa consumida.
  - Potencia compleja.
  - Potencia alterna en los elementos pasivos: resistencia, bobina, condensador y, en general, impedancia.
  - Balance de potencias.
  - Factor de potencia.
9. Sistemas trifásicos.
- Circuitos trifásicos equilibrados.
  - Definiciones: valores de fase o simples y valores de línea o compuestos; conexión en estrella; conexión en triángulo.
  - Análisis de circuitos trifásicos equilibrados.
  - Conversión estrella-triángulo.
10. Potencia en sistemas trifásicos equilibrados.
- Potencia instantánea.
  - Potencia trifásica en función de los valores de fase.
  - Potencia trifásica en función de los valores de línea o compuestos.
  - Compensación del factor de potencia: ¿por qué compensar el factor de potencia?; corrección del factor de potencia de un circuito monofásico; corrección del factor de potencia de un circuito trifásico (batería de condensadores).
  - Medida de la potencia en sistemas trifásicos.

## ■ MÁQUINAS ELÉCTRICAS E INSTALACIONES

1. Principios generales de las máquinas eléctricas.
  - Definiciones.
  - Clasificación general de las máquinas eléctricas.
  - Elementos constructivos básicos: núcleo ferromagnético; estator; rotor; arrollamientos; colector de delgas y colector de anillos.
  - Balance energético y rendimiento: pérdidas en el cobre, en el hierro y mecánicas; potencia asignada o nominal; rendimiento.
  - Valores nominales y placa de características.
2. Transformadores.
  - Constitución y formas constructivas.
  - Transformador ideal.
  - Magnitudes referidas.
  - Circuito equivalente del transformador real: análisis de un transformador despreciando su rama en paralelo.
  - Ensayos de vacío y en cortocircuito.
  - Funcionamiento en carga: caída de tensión interna; rendimiento y regulación.
  - Transformadores trifásicos.
  - Índice horario.
  - Condiciones de conexión en paralelo de transformadores.
3. Máquinas asíncronas o de inducción.
  - Constitución física.
  - Campo magnético giratorio. Principio de funcionamiento.
  - Circuito equivalente simplificado.
  - Ensayos en vacío y en cortocircuito.
  - Curvas características.
  - Balance de potencias.
  - Arranque de motores de inducción trifásicos: Arranque directo. Arranque por autotransformador. Arranque estrella-triángulo. Arranque mediante resistencias rotóricas.
  - El motor monofásico.
  - Descripción de otros tipos de máquinas eléctricas.
4. Protecciones eléctricas en las instalaciones de baja tensión.
  - Introducción y generalidades.
  - Elementos con función de mando y maniobra: interruptor; contactor; disyuntor o interruptor de corte automático; seccionador.
  - Elementos de protección: fusible; relé y disparador.
  - Tipos de distribución del neutro: sistema TT; sistema TN; sistema IT.
  - Protección contra contactos directos.
  - Protección contra contactos indirectos.

#### 5. Instalaciones eléctricas.

- Distribución en baja tensión.
- Instalaciones receptoras en baja tensión.
- El conductor.
- Cálculo de las secciones de los conductores eléctricos.
- Esquema general de una instalación.
- Instalaciones individuales.
- Facturación de energía eléctrica en baja tensión: complemento de discriminación horaria; energía reactiva; complemento de estacionalidad; complemento de interrumpibilidad.

### 1.3. OBJETIVO Y CONTENIDOS DE ESTA ASIGNATURA.

El objetivo de esta asignatura es, por tanto, el de completar los conocimientos básicos de Ingeniería Eléctrica que usted ya tiene y que ha visto en su título de Grado en Ingeniería Mecánica, en Ingeniería Química o en Ingeniería Textil, con la siguiente ampliación:

- Análisis de los circuitos eléctricos en régimen transitorio.
- Instalaciones eléctricas trifásicas: medida de potencia y análisis de sistemas trifásicos con cargas desequilibradas.
- Máquinas eléctricas: transformador, máquina asíncrona o de inducción, generador síncrono y máquina de corriente continua.

El contenido de los dos primeros puntos se desarrolla de forma completa y suficiente en este documento, en los capítulos 2 y 3 que hay a continuación.

El contenido del tercer punto se recomienda estudiarlo con el libro “Máquinas eléctricas” de Jesús Fraile (con cualquiera de sus tres últimas ediciones). En el capítulo 4 de este documento se detallan las partes del libro que debe estudiar y aquellas que le recomendamos que, probablemente, deba repasar.

## Capítulo 2

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO

## 2.1. INTRODUCCIÓN.

En los circuitos eléctricos vistos en la asignatura “Fundamentos de Ingeniería Eléctrica” siempre se han analizado circuitos en régimen permanente en los que, para una topología del circuito dada, se obtienen como resultado los valores de las intensidades y de las tensiones en los distintos elementos del circuito, valores que permanecen en el tiempo, bien de forma constante (circuitos en continua) o bien variando de forma periódica conforme a una función senoidal (circuitos en alterna).

Sin embargo, en los circuitos pueden producirse cambios en su topología, por ejemplo por la apertura o cierre de un interruptor, o en el valor de alguno de sus elementos que hacen que la respuesta del circuito pase del estado permanente en el que se encuentra a otro estado permanente nuevo. Ese paso puede producirse de forma instantánea, como ocurre en los circuitos que solo contienen resistencias, o a lo largo de un cierto tiempo, como sucede en los circuitos que contienen bobinas o condensadores. En este último caso, a ese periodo de tiempo que transcurre entre los dos estados permanentes se le denomina **régimen transitorio** del circuito y es el que se estudia en este capítulo.

Sea el circuito de la figura 2.1.a con el interruptor cerrado; aplicando el divisor de tensión se obtiene que la tensión  $U$  en la resistencia de  $10\ \Omega$  es  $8\ \text{V}$ . En un instante determinado, que denominaremos  $t = 0$ , el interruptor se abre, lo que cambia la topología del circuito; como ahora no circular ninguna corriente por esa resistencia, ya que está desconectada de la fuente, la tensión  $U$  es nula. Ese cambio de tensión, de  $8$  a  $0\ \text{V}$ , se produce de forma instantánea, tal y como se representa en la figura 2.1.b: la respuesta del circuito ha pasado de un estado permanente a otro nuevo de forma instantánea.

Sea ahora el circuito de la figura 2.2.a, el mismo circuito que en el caso anterior pero al que se le ha añadido un condensador de  $2\ \text{mF}$  en paralelo con la resistencia de  $10\ \Omega$ . Inicialmente el interruptor se encuentra cerrado; como la fuente de tensión es continua el condensador se comporta como un circuito abierto, por lo que la tensión  $U$  entre sus terminales es igual a  $8\ \text{V}$  y su carga es  $16\ \text{mC}$ . Igual que en el caso anterior, en el instante  $t = 0$  el interruptor se abre; ahora, sin embargo, la tensión  $U$  no se hace nula de forma inmediata, a pesar de que el circuito que resulta (el condensador en paralelo con la resistencia), no está conectado a ninguna fuente, ¿por qué? La respuesta está en esa carga de  $16\ \text{mC}$  que tiene el condensador y que no puede “desaparecer” de

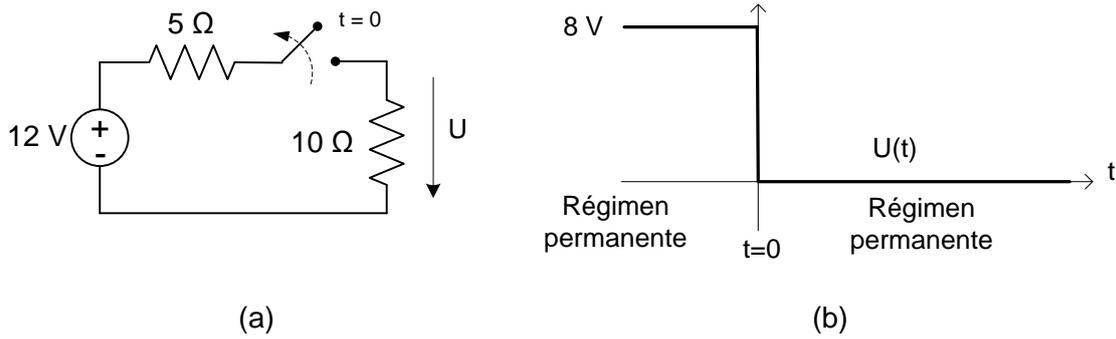


Figura 2.1

forma instantánea, sino que lo hace a través de la resistencia de forma más o menos rápida: se dice que el condensador se descarga a través de la resistencia hasta que, al final, en el nuevo régimen permanente, la tensión  $U$  se hace 0 como era lógico esperar. Esa evolución de la tensión  $U$  desde 8 V (en el régimen permanente que había con el interruptor cerrado) hasta 0 (una vez alcanzado el nuevo régimen permanente con el interruptor abierto) se representa en la figura 2.2.b en la que se ve el régimen transitorio que ocurre entre ambos permanentes y que, como se verá en el siguiente apartado, responde a una función exponencial de  $t$ .

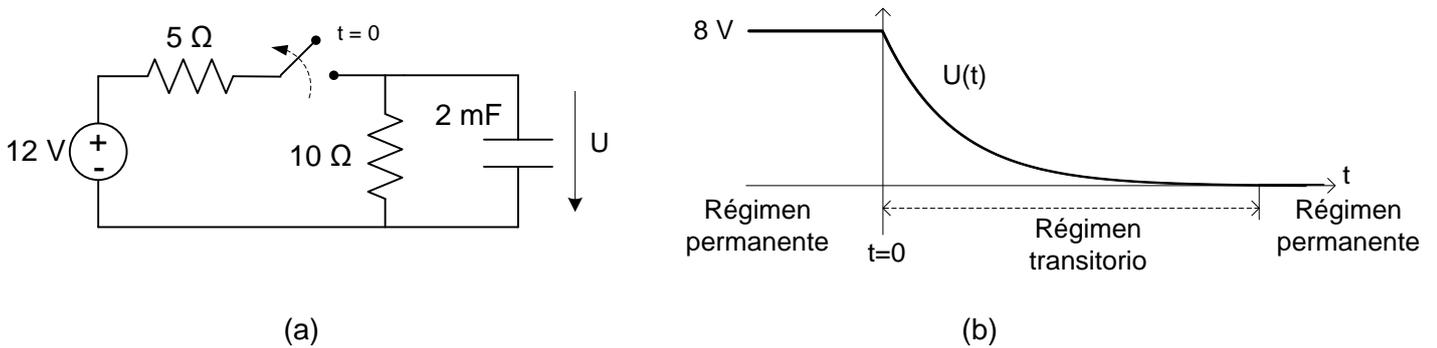


Figura 2.2

Aunque los regímenes transitorios son rápidos, suelen durar muy poco tiempo, pueden dar lugar en los circuitos a valores de las tensiones y de las intensidades muy superiores a los que hay en el régimen permanente, por lo que su estudio y análisis es muy importante para conocer el funcionamiento de los circuitos eléctricos y electrónicos (por ejemplo, en la conmutación de un transistor en un circuito integrado) y de las instalaciones y sistemas eléctricos (por ejemplo, por la conexión de un motor en una instalación o por la actuación de un interruptor en un sistema eléctrico).

### Aplicación a los circuitos eléctricos.

Sea el circuito de la figura 2.3 donde el interruptor está abierto y el condensador descargado. En el instante  $t = 0$  el interruptor se cierra. Aplicando la primera ley de Kirchhoff a la malla que resulta se tiene:

$$Ri + u = e \quad (2.1)$$

y como la corriente  $i$  de la malla es la misma que circula por el condensador, utilizando la ecuación de definición del condensador se llega a:

$$RC \frac{du}{dt} + u = e \quad (2.2)$$

una ecuación diferencial de primer orden, donde  $u$  y  $e$  son funciones de  $t$ .

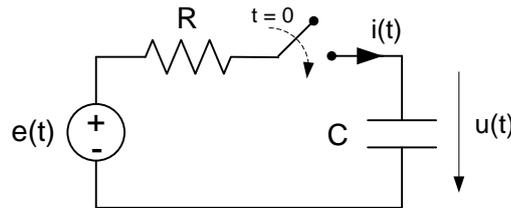


Figura 2.3

Como se ha visto en este sencillo circuito RC serie, la presencia de un elemento que, como es el condensador, almacena energía en forma de campo eléctrico hace que la respuesta del circuito venga dada por una ecuación diferencial de primer orden. A una ecuación similar se habría llegado en un circuito RL paralelo en el que la bobina es el elemento que almacena energía, en ese caso en forma de campo magnético.

De forma general se define el **orden de complejidad** de un circuito eléctrico como el número de bobinas y condensadores que contiene y es igual al orden de la ecuación diferencial que describe su evolución en el tiempo<sup>1</sup>. A esta ecuación también se la denomina **ecuación de estado** del circuito. El orden de complejidad del circuito de la figura 2.3 es 1, lo que está de acuerdo con el hecho de que su ecuación diferencial sea de primer orden (ecuación (2.2)).

Por otro lado, la excitación  $e(t)$  del circuito de la figura 2.3 puede ser continua, alterna senoidal o de cualquier de cualquier otro tipo (con formas de onda cuadrada, triangular, en rampa, en escalón, etc.). La variedad de casos a los que da lugar el orden de complejidad del circuito junto a los posibles tipos de excitación de las fuentes que puede haber en él, hace que el análisis del régimen transitorio de los circuitos eléctricos pueda llegar a ser complejo y que para su resolución se requieran métodos matemáticos específicos (transformada de Laplace, variables de estado, métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, etc.).

En esta asignatura sólo se van a estudiar los casos más sencillos pero que, a su vez, son los habituales en las instalaciones eléctricas: los transitorios de circuitos lineales de primer y de segundo orden, con excitaciones continuas o alternas senoidales. Y para analizarlos, como se va a explicar, vamos a recurrir a los métodos de análisis de circuitos básicos vistos en la asignatura “Fundamentos de Ingeniería Eléctrica” que ya conoce.

<sup>1</sup>Como se ha indicado, esta definición del orden de complejidad de un circuito se hace “de forma general”. Hay circuitos, denominados **circuitos impropios**, en los que esa igualdad no se cumple y el orden de su ecuación diferencial es menor que el número de bobinas y condensadores que contiene. El análisis del régimen transitorio de los circuitos impropios no se trata en esta asignatura.

## 2.2. CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN.

### Solución de una ecuación diferencial de primer orden.

Sea una ecuación diferencial de primer orden como la ecuación (2.3). De forma general, la solución de una ecuación diferencial del tipo:

$$A \frac{df(t)}{dt} + B f(t) = g(t) \quad (2.3)$$

es la suma de la solución de la homogénea más una solución particular. La solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$A \frac{df(t)}{dt} + B f(t) = 0 \quad (2.4)$$

se obtiene a partir de su ecuación característica:

$$A s + B = 0 \quad (2.5)$$

cuya raíz  $s$  es igual a  $-B/A$ . De esta forma, la solución de la homogénea (ecuación(2.4)) es una función exponencial<sup>2</sup> que tiene la forma:

$$f(t) = K e^{st} = K e^{-t/\tau} \quad \text{siendo} \quad \tau = \frac{A}{B} \quad (2.6)$$

La solución particular depende de la función  $g(t)$  y se representa por  $f_{\infty}(t)$ . De esta forma, la solución de la ecuación diferencial completa (2.3) es:

$$f(t) = f_{\infty}(t) + K e^{-t/\tau} \quad (2.7)$$

La constante  $K$  de la solución de la homogénea se puede calcular a partir de la ecuación (2.7) en función de los valores que toman  $f(t)$  y  $f_{\infty}(t)$  en el instante  $t = 0$ :

$$f(0) = f_{\infty}(0) + K \cdot 1 \quad \rightarrow \quad K = f(0) - f_{\infty}(0) \quad (2.8)$$

resultando finalmente:

$$f(t) = f_{\infty}(t) + [f(0) - f_{\infty}(0)] e^{-t/\tau} \quad (2.9)$$

### Solución del régimen transitorio de un circuito primer orden.

Aplicado a los circuitos eléctricos de primer orden con excitación continua o alterna senoidal, se obtiene que cualquier tensión o intensidad en él sigue una evolución en el tiempo de la forma dada por la ecuación (2.9), donde:

---

<sup>2</sup>Para evitar confusiones, en electricidad y en electrónica el número  $e$  (la base de los logaritmos neperianos) se escribe mediante la letra griega  $\epsilon$ , dejando la letra latina  $e$  para las tensiones, generalmente en las fuentes.

- $f(0)$  es el valor de la variable en el instante inicial, nada más producirse la maniobra del interruptor que origina el transitorio. Este valor inicial representa la **condición inicial** o **de continuidad** en el instante  $t = 0$ , que corresponde al hecho físico de que ni la tensión (carga) en un condensador ni la intensidad (flujo) en una bobina pueden variar de forma brusca, no pueden presentar una discontinuidad.
- El sumando  $f_{\infty}(t)$  es la expresión de la variable en el régimen permanente del circuito.
- El sumando  $[f(0) - f_{\infty}(0)] e^{-t/\tau}$  es la **respuesta transitoria** del circuito.
- $\tau$  es la **constante de tiempo** del circuito cuyo valor es  $RC$ , si el elemento que almacena energía es un condensador, o  $L/R$ , si es una bobina, siendo  $R$  el valor de la impedancia Thevenin del circuito que se ve entre los terminales del condensador o de la bobina. Su unidad es el segundo (s).
- La raíz  $s$ , cuyo valor es  $-1/\tau$ , se denomina **frecuencia natural del circuito**. Este nombre se debe únicamente a su dimensión ( $s^{-1}$ ), y no debe dar lugar a ninguna confusión en el sentido de que pudiese existir algún tipo de oscilación periódica o respuesta senoidal, que no lo hay.

El significado físico de la ecuación (2.9) es que la evolución en el tiempo de cualquier variable, tensión o intensidad, del circuito durante el régimen transitorio consta de dos sumandos: el primero, como se ha indicado, es la expresión de la variable en el nuevo régimen permanente que alcanza el circuito, y el segundo es la respuesta transitoria, una expresión exponencial que se hace cero transcurrido un cierto tiempo y que tiene como objetivo garantizar que se cumple la condición inicial o de continuidad del circuito en el instante  $t = 0$ .

La velocidad con la que transcurre el periodo transitorio, esto es, la rapidez con la que desaparece el segundo sumando de la ecuación (2.9), depende de la constante de tiempo  $\tau$ : cuanto menor es  $\tau$  más rápido es el transitorio. En cuanto a su duración, por convenio se establece y en la práctica se acepta que la respuesta transitoria dura un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo ( $5\tau$ ), momento en el cual el circuito alcanza el nuevo régimen permanente.

Como resumen se puede decir que analizar el régimen transitorio de un circuito de primer orden con excitación continua o alterna senoidal se puede hacer de dos maneras: o bien calculando la ecuación diferencial correspondiente a la variable y resolviéndola matemáticamente, o bien utilizando directamente la ecuación (2.9) y resolviendo dos circuitos eléctricos que permiten calcular los valores de  $\tau$ ,  $f_{\infty}(t)$  y  $f(0)$ . En general el segundo método es el más sencillo y es, por tanto, el que se va a utilizar en este capítulo y el que se explica con el siguiente ejemplo.

### ■ EJEMPLO 2.1 ■

Sea el circuito de la figura 2.2.a, en el que el interruptor se encuentra cerrado el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t = 0$  el interruptor se abre. Se pide: (a) Calcular y dibujar la expresión de la tensión en el condensador  $U(t)$  para  $t \geq 0$ . (b) Calcular la energía disipada por la resistencia de  $10 \Omega$  durante el transitorio.

(a) El primer circuito que debemos analizar es el que hay antes de producirse la apertura del interruptor que origina el transitorio (figura 2.4.a). Este circuito es el que permite calcular el valor

de la tensión en el condensador en el instante  $t = 0^-$ , el instante inmediatamente anterior a que se abra el interruptor:

$$U(0^-) = 12 \cdot \frac{10}{10 + 5} = 8 \text{ V}$$

La condición de continuidad en este circuito es que la tensión (carga) en el condensador no puede variar de forma brusca, es decir, en los instantes inmediatamente anterior y posterior a la actuación del interruptor la tensión en el condensador es la misma. Así, el valor inicial de la tensión en el condensador es:

$$U(0) = U(0^-) = 8 \text{ V}$$

El segundo circuito es el que hay con el interruptor abierto (figura 2.4.b) y que es el circuito en el que se produce el transitorio. Él es el que permite calcular la constante de tiempo y la tensión en el condensador una vez alcanzado el nuevo régimen permanente, en el instante  $t = \infty$ . En este caso, por simple inspección del circuito, se tiene que esos dos valores son:

$$U_\infty(t) = 0 \quad \text{y} \quad \tau = RC = 10 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,02 \text{ s}$$

Así, sustituyendo estos valores en la ecuación (2.9), la expresión de la tensión en el condensador para  $t \geq 0$  es:

$$U(t) = U_\infty(t) + [U(0) - U_\infty(0)] \epsilon^{-t/\tau} = 0 + (8 - 0) \cdot \epsilon^{-t/0,02} = 8 \cdot \epsilon^{-50t}$$

En la figura 2.2.b se representa esa variable. Como se ve, el transitorio corresponde a la descarga del condensador.

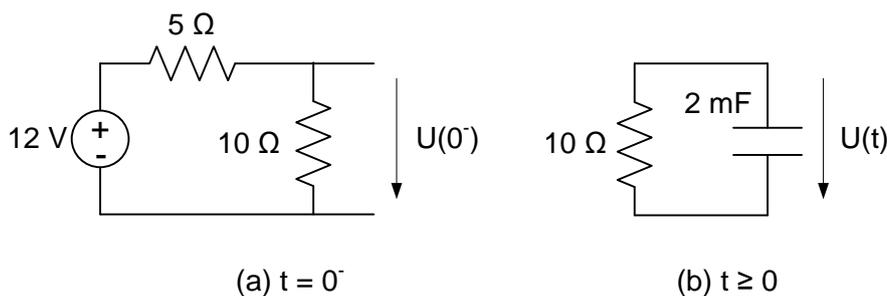


Figura 2.4

(b) La tensión en la resistencia de  $10 \Omega$  es la misma que la tensión en el condensador, por tanto, la energía que disipa esa resistencia durante el periodo transitorio es:

$$W = \int_0^\infty \frac{[U(t)]^2}{R} dt = \frac{64}{10} \cdot \int_0^\infty \epsilon^{-100t} dt = 6,4 \cdot \left[ \frac{-\epsilon^{-100t}}{100} \right]_0^\infty = 0,064 \text{ J}$$

A este mismo resultado se puede llegar a partir de la variación de la energía en el condensador. Como se ha indicado, este transitorio corresponde a la descarga del condensador a través de la resistencia, por tanto, toda la energía que tenía almacenada el condensador en el instante inicial, debida a su carga inicial, se disipa en la resistencia durante el transitorio ya que termina completamente descargado. Esa energía inicial es:

$$W = \frac{C [U(0)]^2}{2} = \frac{0,002 \cdot 8^2}{2} = 0,064 \text{ J}$$

---

Como se ha visto en el ejemplo anterior, el primer circuito que se analiza es el que hay antes de la actuación del interruptor (para  $t < 0$ ). Para facilitar y simplificar el desarrollo del capítulo, nos referiremos a él como “el circuito previo”. El circuito previo solo sirve para calcular el valor de la tensión en el condensador o de la intensidad en la bobina que establece la condición inicial o de continuidad para el instante  $t = 0$  y que, recordemos, es:

$$U_C(0) = U_C(0^-) \quad \text{o} \quad I_L(0) = I_L(0^-) \quad (2.10)$$

Como del circuito previo sólo nos interesa el valor correspondiente del elemento que almacena energía en el instante  $t = 0^-$ , el tipo de fuentes que contenga, continuas o alternas, no es relevante y simplemente hay que tenerlo en cuenta a la hora de su resolución.

El segundo circuito es el que queda una vez se ha producido la actuación del interruptor (para  $t \geq 0$ ) y es el circuito en el que ocurre el transitorio. Para facilitar y simplificar el desarrollo del capítulo, nos referiremos a él simplemente como “el circuito”. En este circuito sí que hay que tener en cuenta el tipo de excitación que hay en él ya que afecta al cálculo de los diferentes términos de la ecuación 2.9. Así se distinguen los tres casos que se ven a continuación.

### 1. Circuitos de primer orden sin fuentes de excitación.

Este es el caso del circuito del ejemplo 2.1. Se denomina **respuesta natural** o **propia** de un circuito de primer orden a la respuesta transitoria del circuito con excitación nula, por lo que  $f_\infty(t)$  y  $f_\infty(0)$  son las dos cero. Se denomina así ya que esa respuesta es independiente de las fuentes que pueda contener el circuito y se debe, por tanto, solo a su valor inicial  $f(0)$  producido por la carga inicial del condensador o por el flujo inicial de la bobina. Esta respuesta es la solución de la ecuación diferencial homogénea (ecuación (2.4)) y es:

$$f(t) = K e^{-t/\tau} = f(0) e^{-t/\tau} \quad (2.11)$$

Una de las características de la respuesta natural es que permite comprender mejor el significado de la constante de tiempo. A partir del valor de la pendiente en el origen de la respuesta natural, se puede despejar la constante de tiempo:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-f(0)}{\tau} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{-f(0)}{\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0}} \quad (2.12)$$

es decir, la pendiente en el origen corta al eje de abscisas (tiempos) en el punto  $t = \tau$ . Esta característica de la respuesta natural es una ayuda a la hora de dibujar la variable (figura 2.5) y está conforme con lo ya indicado de que un menor valor de  $\tau$  (una mayor pendiente en el origen) corresponde a una respuesta transitoria más rápida.

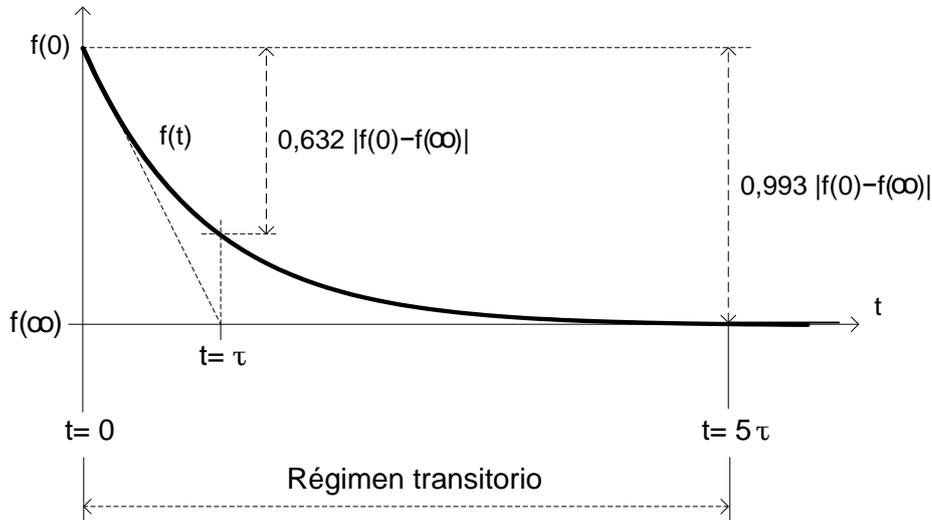


Figura 2.5

## 2. Circuitos de primer orden con fuentes de continua.

Cuando las fuentes de excitación del circuito son continuas, los valores  $f_{\infty}(t)$  y  $f_{\infty}(0)$  de la ecuación 2.9 son el mismo e iguales al valor  $f(\infty)$  que tiene la variable una vez alcanzado el régimen permanente:

$$f_{\infty}(t) = f_{\infty}(0) = f(\infty) \tag{2.13}$$

De esta forma se facilita la escritura de la ecuación (2.9) que queda como:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0) - f(\infty)] e^{-t/\tau} \tag{2.14}$$

### ■ EJEMPLO 2.2 ■

En el circuito de la figura 2.6 el interruptor se encuentra en la posición A el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t = 0$  el interruptor pasa a la posición B. Calcular y dibujar la expresión de la intensidad  $I(t)$  en la bobina para  $t \geq 0$ .

El circuito previo es el circuito en alterna que se representa en la figura 2.7.a, con el valor de la impedancia de la bobina a la pulsación de la fuente. Analizando el circuito se tiene que la intensidad que circula por la bobina es por tanto:

$$\vec{I} = \frac{50/\sqrt{2} \angle 0^\circ}{2 + 6 + j8} = \frac{4,42}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \quad \rightarrow \quad I(t) = 4,42 \cdot \text{sen}(80t - 45^\circ)$$

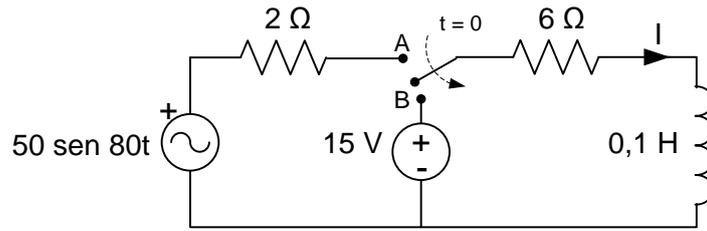


Figura 2.6

En el instante  $t = 0^-$  inmediatamente antes de producirse el cambio en la posición del interruptor, la intensidad en la bobina es:

$$I(0^-) = 4,42 \cdot \text{sen}(-45^\circ) = -3,125 \text{ A} = I(0)$$

que por la condición de continuidad (ecuación (2.10)) corresponde con el valor inicial de  $I$ .

Con el interruptor en la posición B, se tiene el circuito de continua de la figura 2.7.b. Como es de continua, en el régimen permanente la bobina se comporta como un cortocircuito con lo que:

$$I(\infty) = \frac{15}{6} = 2,5 \text{ A} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{0,1}{6} = 16,7 \text{ ms}$$

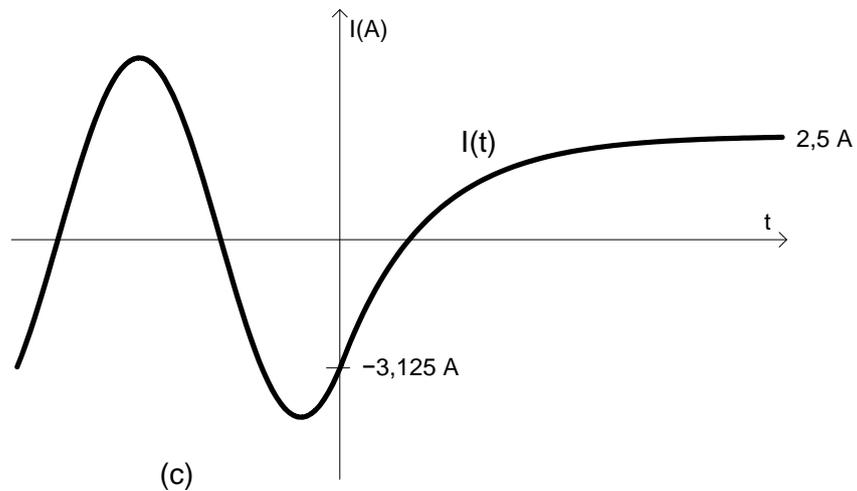
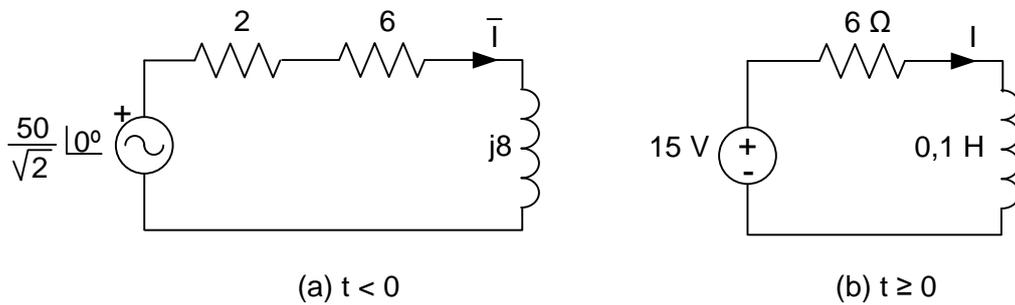


Figura 2.7

Con estos valores la expresión de la intensidad en la bobina durante el régimen transitorio es (ecuación (2.14)):

$$I(t) = I(\infty) + [I(0) - I(\infty)] \epsilon^{-t/\tau} = 2,5 + (-3,125 - 2,5) \cdot \epsilon^{-t/0,0167} = 2,5 - 5,625 \cdot \epsilon^{-60t}$$

que se representa en la figura 2.7.c.

### 3. Circuitos de primer orden con fuentes de alterna.

Cuando la excitación del circuito es alterna la expresión de la respuesta de la variable es la dada por la ecuación (2.9). El análisis del circuito permite obtener  $f_{\infty}(t)$ , que será una expresión senoidal de  $t$ . Particularizada para  $t = 0$  se obtiene el valor  $f_{\infty}(0)$ . Veámoslo en el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 2.3

En el circuito de la figura 2.8 el interruptor se cierra en el instante  $t = 0$ , Sabiendo que la carga que tiene el condensador en ese instante es de  $40 \text{ mC}$ , calcular y dibujar la expresión de la tensión  $U(t)$  en el condensador para  $t \geq 0$ .

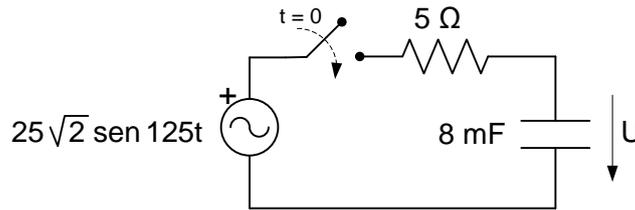


Figura 2.8

En este ejemplo el valor inicial de la tensión en el condensador se obtiene del dato de la carga que tiene en ese instante:

$$U(0) = \frac{q(0)}{C} = \frac{0,04}{8 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ V}$$

El circuito en el que se desarrolla el régimen transitorio, una vez cerrado el interruptor, es el de la figura 2.9.a. Analizando ese circuito, se tiene que la tensión en el condensador es:

$$\vec{U} = \frac{-j}{5-j} \cdot 25 \angle 0^\circ = 4,9 \angle -78,7^\circ \text{ V}$$

con lo que:

$$U_{\infty}(t) = 6,93 \cdot \text{sen}(125t - 78,7^\circ) \quad \text{y} \quad U_{\infty}(0) = 6,93 \cdot \text{sen}(-78,7^\circ) = -6,8 \text{ V}$$

Por otra parte, la constante de tiempo del circuito es:

$$\tau = RC = 5 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ ms}$$

Con estos valores la expresión de la tensión en el condensador durante el régimen transitorio es (ecuación (2.9)):

$$\begin{aligned} U(t) &= U_{\infty}(t) + [U(0) - U_{\infty}(0)] \epsilon^{-t/\tau} = 6,93 \cdot \text{sen}(125t - 78,7^{\circ}) + (5 + 6,8) \cdot \epsilon^{-t/0,04} \\ &= 6,93 \cdot \text{sen}(125t - 78,7^{\circ}) + 11,8 \cdot \epsilon^{-25t} \end{aligned}$$

que se representa en la figura 2.9.b (en negro). En la misma figura pueden verse también los dos sumandos que la componen: la respuesta permanente (en rojo) y la respuesta transitoria (en azul).

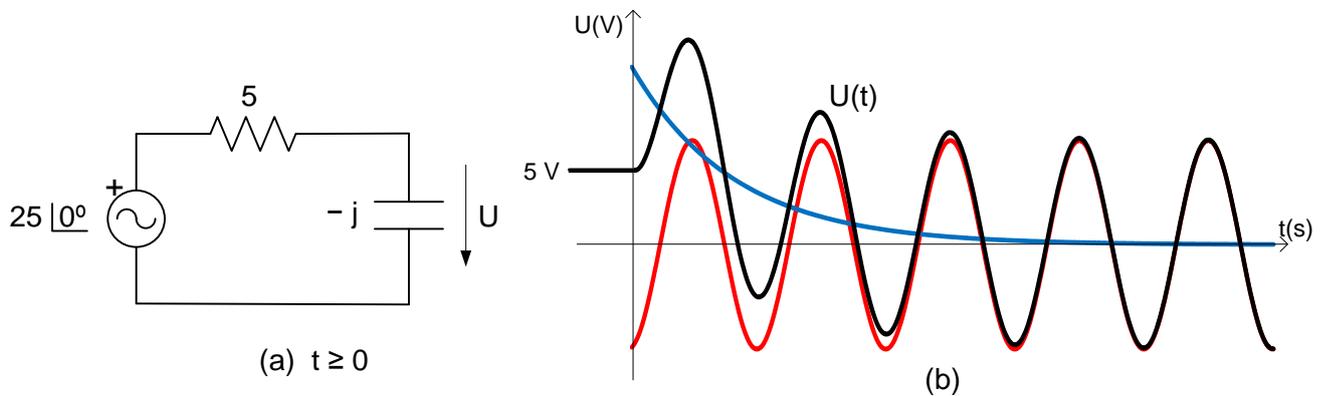


Figura 2.9

## Otras variables en los circuitos de primer orden.

En los circuitos lineales de primer orden se demuestra que el régimen transitorio de todas las variables del circuito, tensiones e intensidades, tiene la forma dada por la ecuación (2.9), y que la respuesta transitoria de todas ellas tiene la misma constante de tiempo  $\tau$ , es decir, el régimen permanente de todas las variables del circuito se alcanza a la vez.

Como se ha visto, del análisis del circuito previo se obtiene el valor de la tensión en el condensador o de la intensidad en la bobina para  $t = 0^-$ , y, por la condición de continuidad, ese valor es igual al valor inicial de esa variable en el circuito en el que tiene lugar el régimen transitorio (ecuación (2.10)). Pero si se quiere aplicar la ecuación (2.9), o la ecuación (2.14), a otra variable del circuito ¿cuál es su valor inicial  $f(0)$ ?

A diferencia de la tensión en un condensador y de la intensidad en una bobina, el resto de variables (intensidad en el condensador, tensión en la bobina, tensiones e intensidades en las resistencias, etc.) sí que pueden variar de forma brusca en el instante  $t = 0$  al producirse la actuación del interruptor, por lo que, en esos casos y para tener en cuenta la condición de continuidad, el valor inicial de cualquier otra variable se obtiene analizando el circuito que resulta de sustituir el condensador por una fuente de tensión de valor  $U_C(0)$  o la bobina por una fuente de corriente de

valor  $I_L(0)$ . Este circuito se le denomina circuito en  $t = 0^+$  y su análisis permite obtener el valor inicial  $f(0)$  de cualquier variable.

**EJEMPLO 2.4**

Sea el circuito de la figura 2.10, en el que el interruptor se encuentra en la posición A el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t = 0$  el interruptor pasa a la posición B. Calcular, para  $t \geq 0$ , las expresiones de la tensión  $U_R(t)$  en la resistencia de  $4 \Omega$ , de la corriente  $I(t)$  que circula por la bobina y de la corriente  $I_G(t)$  que suministra la fuente de tensión.

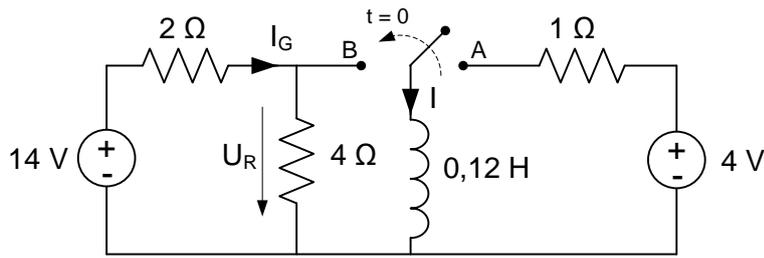


Figura 2.10

El circuito previo permite calcular la condición inicial o de continuidad del circuito. Con el interruptor en la posición A, en régimen permanente, la corriente que circula por la bobina es:

$$I(0^-) = \frac{4}{1} = 4 \text{ A} = I(0)$$

Nada más pasar el interruptor a la posición B, se tiene el circuito  $t = 0^+$  (figura 2.11.a) que permite calcular los valores iniciales de las variables pedidas. En él la bobina se sustituye por una fuente de corriente del valor antes obtenido, lo que permite tener en cuenta la condición de continuidad. Resolviendo ese circuito se tiene:

$$I(0) = 4 \text{ A}; \quad I_G(0) = \frac{14 + 16}{2 + 4} = 5 \text{ A} \quad \text{y} \quad U_R(0) = 14 - 2 \cdot 5 = 4 \text{ V}$$

Los valores de esas mismas variables en régimen permanente se obtienen resolviendo el circuito de la figura 2.11.b:

$$I(\infty) = I_G(\infty) = \frac{14}{2} = 7 \text{ A} \quad \text{y} \quad U_R(\infty) = 0$$

La constante de tiempo es:

$$R_{eq} = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} = 1,333 \Omega \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0,12}{1,333} = 90 \text{ ms}$$

Con los valores calculados, sustituyéndolos en la ecuación (2.14), se obtiene:

$$I(t) = 7 + (4 - 7) \cdot \epsilon^{-t/0,09} = 7 - 3 \cdot \epsilon^{-11,11 t}$$

$$I_G(t) = 7 + (5 - 7) \cdot \epsilon^{-t/0,09} = 7 - 2 \cdot \epsilon^{-11,11 t}$$

$$U_R(t) = 0 + (4 - 0) \cdot \epsilon^{-t/0,09} = 4 \cdot \epsilon^{-11,11 t}$$

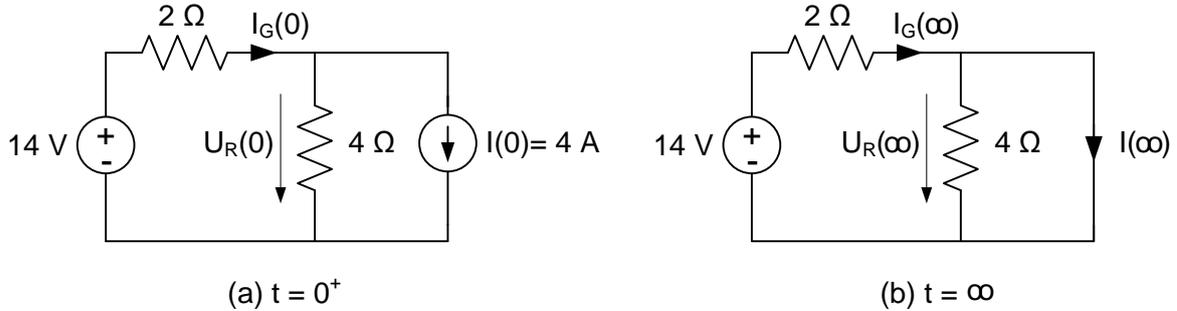


Figura 2.11

Por último, conocida la expresión de la intensidad en la bobina  $I(t)$ , también se pueden obtener la evolución de las demás variables a partir de las ecuaciones de definición de los elementos y de las leyes de Kirchhoff. Así, como la resistencia de  $4 \Omega$  y la bobina están en paralelo, la tensión en ambas es la misma por lo que:

$$U_R(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a la malla de la izquierda:

$$I_G(t) = I(t) + \frac{U_R(t)}{4} = I(t) + \frac{L}{4} \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

O la segunda ley de Kirchhoff a cualquiera de los dos nudos:

$$I_G(t) = \frac{E - U_R(t)}{4} = \frac{E}{4} - \frac{L}{4} \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

Con las expresiones obtenidas antes para  $I(t)$ ,  $I_G(t)$  y  $U_R(t)$ , compruebe que se verifican las tres igualdades anteriores.

### 2.3. CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN.

Cuando un circuito eléctrico lineal contiene dos elementos que almacenan energía (un condensador y una bobina, dos condensadores o dos bobinas) y su orden de complejidad es 2, su comportamiento está definido por una ecuación diferencial de segundo orden.

El estudio general de los circuitos de segundo orden es algo más complicado que el visto para los circuitos de primer orden. Por esta razón y para el objeto de esta asignatura únicamente se van a estudiar con detalle los circuitos RLC, serie y paralelo, sin excitación o que contengan solo fuentes de continua o de alterna. Aunque pueda parecer una particularización excesiva, en realidad no lo es ya que los circuitos RLC están en la base de otros circuitos de segundo orden más complejos y, además, existen muchos sistemas físicos de todo tipo que evolucionan en el tiempo conforme a una ecuación diferencial de segundo orden como la de los circuitos que se van a ver en este apartado.

Sea, por ejemplo, el circuito RLC serie de la figura 2.12, donde:

$$u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = e \tag{2.15}$$

Como la corriente  $i$  de la malla es la misma que circula por los tres elementos, utilizando la ecuación de definición del condensador se llega a:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e \tag{2.16}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden, en la que  $u_C$  y  $e$  son funciones de  $t$ .

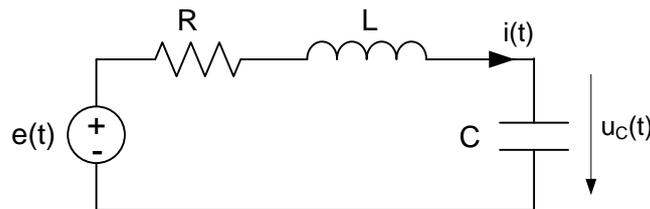


Figura 2.12

Consideremos ahora el circuito RLC paralelo de la figura 2.13. Utilizando el valor  $G$  de la conductancia de la resistencia (recuerde que  $G = 1/R$ ) y aplicando la primera ley de Kirchhoff, se tiene:

$$i_R + i_C + i_L = Gu + C \frac{du}{dt} + i_L = i \tag{2.17}$$

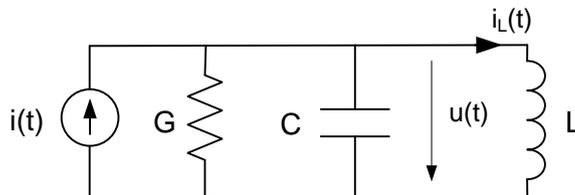


Figura 2.13

Como la tensión  $u$  es la misma en los tres elementos, utilizando la ecuación de definición de la bobina se llega a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, en la que  $i_L$  e  $i$  son funciones

de  $t$ :

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = i \quad (2.18)$$

### Solución de una ecuación diferencial de segundo orden.

Sea una ecuación diferencial de segundo orden como la ecuación (2.19). De forma general, la solución de una ecuación diferencial del tipo:

$$A \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + B \frac{df(t)}{dt} + C f(t) = g(t) \quad (2.19)$$

es la suma de la solución de la homogénea más una solución particular. La solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$A \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + B \frac{df(t)}{dt} + C f(t) = 0 \quad (2.20)$$

se obtiene a partir de su ecuación característica:

$$A s^2 + B s + C f(t) = 0 \quad (2.21)$$

cuyas dos raíces,  $s_1$  y  $s_2$ , son:

$$s_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}} \quad (2.22)$$

Dependiendo de los valores de los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , esas dos raíces pueden ser reales o complejas, lo que hace que el tipo de solución de la ecuación homogénea de segundo orden no sea único y no venga caracterizada por una exponencial decreciente (como en el caso de la ecuación diferencial de primer orden) sino que sea función de los valores que tomen esos coeficientes.

### Aplicación a los circuitos eléctricos.

Sea la ecuación diferencial de segundo orden (2.16) correspondiente al circuito RLC serie de la figura 2.12. Las dos raíces de su ecuación característica son:

$$\text{RLC serie} \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

De la misma forma, para la ecuación diferencial de segundo orden (2.18) correspondiente al circuito RLC paralelo de la figura 2.13, las dos raíces de su ecuación característica son:

$$\text{RLC paralelo} \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -\frac{G}{2C} + \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\frac{G}{2C} - \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Como puede observar las dos ecuaciones anteriores tienen la misma estructura. En las dos la dimensión tanto de  $\alpha$  como de  $\omega_0$  es la de una pulsación (radianes por segundo, rad/s), por lo que a las raíces  $s_1$  y  $s_2$  se las denomina **frecuencias naturales** del circuito, donde  $\alpha$  es el **coeficiente de amortiguación** del circuito y  $\omega_0$  es la **frecuencia de resonancia** del circuito. Este nombre de “frecuencia” no debe confundirle ya que no indica ningún tipo de respuesta periódica sino que, tan solo, se les da por su dimensión.

En los circuitos lineales que se consideran en esta asignatura, formados por los elementos pasivos básicos, los valores que toman  $\alpha$  y  $\omega_0$  siempre son positivos y según cual de los dos sea mayor, el tipo de solución de la ecuación diferencial y, por tanto, el régimen transitorio que se produce es diferente.

Según sean las raíces  $s_1$  y  $s_2$  reales o complejas se distinguen cuatro casos que se estudian a continuación, pero en todos ellos, lo que sí les es común a los cuatro, es que necesitan ahora dos condiciones iniciales (tensión en el condensador e intensidad en la bobina) para garantizar la continuidad en  $t = 0$ , entre los dos instantes inmediatamente antes ( $t = 0^-$ ) e inmediatamente después ( $t = 0^+$ ) de la actuación del interruptor que origina el transitorio. Estos cuatro casos son:

1. Circuito sobreamortiguado (dos raíces reales distintas y negativas).
2. Circuito críticamente amortiguado (una raíz real doble y negativa).
3. Circuito subamortiguado (dos raíces complejas conjugadas con la parte real negativa).
4. Circuito sin pérdidas o con amortiguamiento nulo (dos raíces imaginarias puras).

### 1. Dos raíces reales: circuito sobreamortiguado.

Cuando  $\alpha > \omega_0$  las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  son dos números reales negativos y diferentes. En este caso se dice que el circuito está **sobreamortiguado** y la solución de la ecuación diferencial completa (2.19) es de la forma:

$$f(t) = f(\infty) + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (2.25)$$

Donde los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se calculan a partir de las condiciones iniciales o de continuidad (ecuación (2.10)) y de las fuentes de excitación  $g(t)$  que hay en el circuito. Este tipo de respuesta

se obtiene siempre que los dos elementos que almacenan energía son del mismo tipo (bien dos condensadores o bien dos bobinas).

### EJEMPLO 2.5

En el circuito de la figura 2.14 el interruptor se encuentra en la posición A el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t = 0$  el interruptor pasa a la posición B. Calcular las expresiones de la tensión  $U(t)$  en el condensador y de la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina para  $t \geq 0$ .

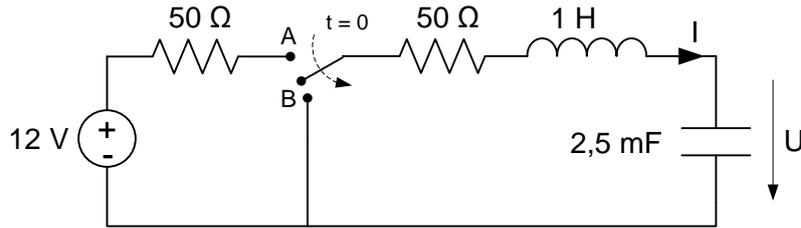


Figura 2.14

El régimen permanente de circuito previo, con el interruptor en la posición A, permite calcular los valores iniciales de la tensión en el condensador y de la intensidad en la bobina. Como la fuente de tensión es continua, estos valores iniciales son:

$$U(0) = 12 \text{ V} \quad \text{e} \quad I(0) = 0$$

En el instante  $t = 0$  el interruptor pasa a la posición B. Como se ve, el transitorio se produce en un circuito RLC serie, sin fuentes de excitación y con condiciones iniciales no nulas. Analizando el circuito se llega a la ecuación diferencial de segundo orden (2.16) en la que el término independiente  $e$  es igual a 0. Sustituyendo valores, se tiene que la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{50}{2 \cdot 1} = 25 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}} = 20 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha > \omega_0$  el circuito está sobreamortiguado, las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  de su ecuación característica son dos números reales negativos y diferentes:

$$s_{1,2} = -25 \pm \sqrt{25^2 - 20^2} \quad \rightarrow \quad s_1 = -10 \quad \text{y} \quad s_2 = -40$$

y la tensión  $U(t)$  en el condensador en el régimen transitorio será de la forma:

$$U(t) = U(\infty) + K_1 e^{-10t} + K_2 e^{-40t}$$

En el régimen permanente los dos elementos quedan descargados, ya que en el circuito no hay fuentes independientes:

$$U(\infty) = 0 \quad \text{e} \quad I(\infty) = 0$$

Para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan las condiciones iniciales. En el circuito RLC serie la intensidad que circula por la bobina es la misma que la que circula por el condensador, por lo que la manera de tener en cuenta el valor inicial de la intensidad en la bobina es:

$$I_C(0) = C \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = I(0)$$

así:

$$\left. \begin{array}{l} U(0) : \quad 12 = K_1 + K_2 \\ I_C(0) : \quad 0 = -10 K_1 - 40 K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = 16 \quad \text{y} \quad K_2 = -4$$

De esta forma, se tiene que la tensión en el condensador es:

$$U(t) = 16 \epsilon^{-10t} - 4 \epsilon^{-40t}$$

De la misma manera, la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$I(t) = I(\infty) + K_1 \epsilon^{-10t} + K_2 \epsilon^{-40t}$$

Ahora, para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ , hay que analizar el circuito  $t = 0^+$  que hay nada más cerrar el interruptor (figura 2.15.a), para obtener el valor de la tensión inicial en la bobina. Sin necesidad de ningún cálculo se ve que ese valor es  $-12$  V. Así:

$$U_L(0) = L \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = -12 \text{ V}$$

así:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = K_1 + K_2 \\ U_L(0) : \quad -12 = 1 \cdot (-10 K_1 - 40 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -0,4 \quad \text{y} \quad K_2 = 0,4$$

De esta forma, se tiene que la intensidad que circula por la bobina es:

$$I(t) = -0,4 \epsilon^{-10t} + 0,4 \epsilon^{-40t}$$

En la figura 2.15.b se representan esas dos variables. Compruebe además que, al estar la bobina y en condensador en serie, con las expresiones obtenidas se verifica que:

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

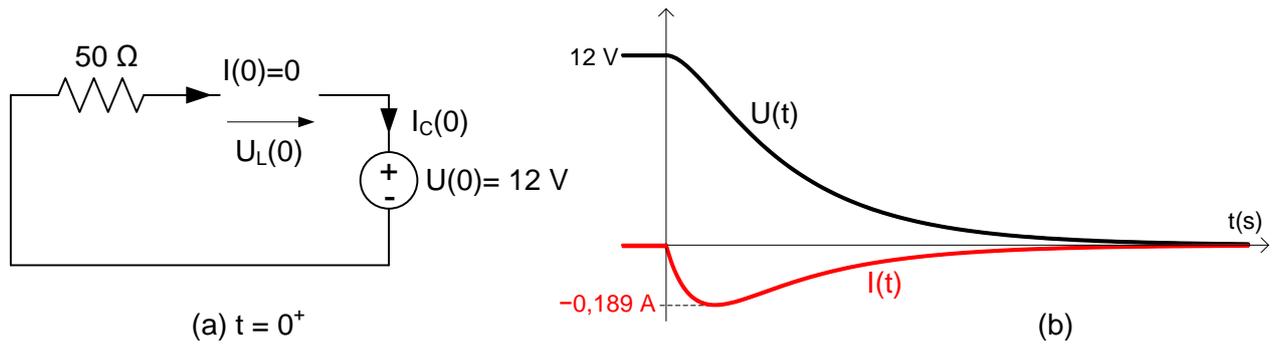


Figura 2.15

## 2. Una raíz real doble: circuito críticamente amortiguado.

Cuando  $\alpha = \omega_0$  la raíz es real doble y negativa,  $s_1 = s_2 = s$ . En este caso se dice que el circuito está **críticamente amortiguado** y la solución de la ecuación diferencial completa (2.19) es de la forma:

$$f(t) = f(\infty) + (K_1 + K_2 t) e^{st} \quad (2.26)$$

Donde los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se calculan, como en el caso anterior, a partir de las condiciones iniciales o de continuidad (ecuación (2.10)) y de las fuentes de excitación  $g(t)$  que hay en el circuito.

### EJEMPLO 2.6

En el circuito de la figura 2.16 en el instante  $t = 0$  el interruptor pasa a la posición B. Si en ese instante inicial la bobina y el condensador están descargados, calcular las expresiones de la tensión  $U(t)$  en el condensador y de la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina para  $t \geq 0$ .

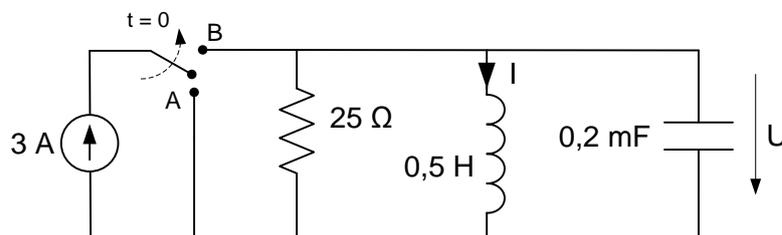


Figura 2.16

En  $t = 0$  el interruptor pasa a la posición B. Como se observa, en este ejemplo el transitorio se produce en un circuito RLC paralelo con una fuente de intensidad continua y con condiciones iniciales nulas. Analizando el circuito, con el interruptor en la posición B, se llega a una ecuación

diferencial como (2.18); a partir de su ecuación característica, de forma totalmente análoga y sustituyendo valores, la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{0,04}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}} = 100 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha = \omega_0$  el circuito está críticamente amortiguado, con una raíz real doble de valor  $-100$  rad/s. Así, en este caso, la intensidad que circula por la bobina  $I(t)$  en el régimen transitorio será de la forma:

$$I(t) = I(\infty) + (K_1 + K_2 t) e^{-100t}$$

En el régimen permanente la intensidad que circula por la bobina  $I(\infty)$  es igual a 3 A, la de la fuente de intensidad, y la tensión en el condensador  $U(\infty)$  es nula.

Para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan las condiciones iniciales que, en la bobina, son nulas. Así:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = 3 + K_1 \\ U_L(0) : \quad 0 = -100 K_1 + K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -3 \quad \text{y} \quad K_2 = -300$$

De esta forma, se tiene que la intensidad en el bobina es:

$$I(t) = 3 - (3 + 300t) e^{-100t}$$

De la misma manera, la tensión en el condensador  $U(t)$  en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$U(t) = U(\infty) + (K_1 + K_2 t) e^{-100t}$$

Para obtener ahora los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ , hay que analizar el circuito  $t = 0^+$  que hay nada más pasar el interruptor a la posición B (figura 2.17.a), para obtener el valor de la intensidad inicial en el condensador. Sin necesidad de ningún cálculo se ve que ese valor es 3 A. Así:

$$I_C(0) = C \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = 3 \text{ A}$$

con lo que:

$$\left. \begin{array}{l} U(0) : \quad 0 = K_1 \\ I_C(0) : \quad 3 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot (-100 K_1 + K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = 0 \quad \text{y} \quad K_2 = 1,5 \cdot 10^4$$

De esta forma, se tiene que la tensión en el condensador es:

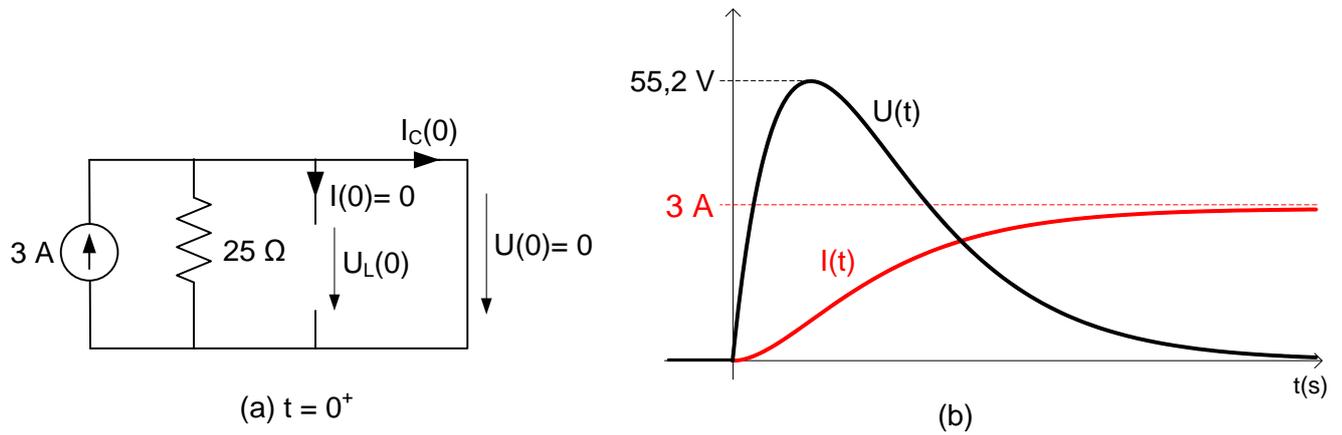


Figura 2.17

$$U(t) = 15000 \cdot t \cdot \epsilon^{-100t}$$

En la figura 2.17.b se representan esas dos variables. Compruebe además que, al estar la bobina y en condensador en paralelo, con las expresiones calculadas se verifica que:

$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

### 3. Dos raíces complejas: circuito subamortiguado.

Cuando  $\alpha < \omega_0$  las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  son dos números complejos conjugados y con la parte real negativa:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_a \quad (2.27)$$

En este caso se dice que el circuito es **subamortiguado** y la solución de la ecuación diferencial completa (2.19) es de la forma:

$$f(t) = f(\infty) + (K_1 \cos \omega_a t + K_2 \sen \omega_a t) \epsilon^{-\alpha t} \quad (2.28)$$

o

$$f(t) = f(\infty) + K \epsilon^{-\alpha t} \sen(\omega_a t + \varphi) \quad (2.29)$$

Los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ , de la ecuación (2.28), o los coeficientes  $K$  y  $\varphi$ , de la ecuación (2.29), se calculan a partir de las condiciones iniciales o de continuidad (ecuación (2.10)) y de las fuentes de excitación  $g(t)$  que hay en el circuito. Como fácilmente puede comprobar, ambas expresiones son en realidad la misma:

$$K \sen(\omega_a t + \varphi) = K \sen \varphi \cos \omega_a t + K \cos \varphi \sen \omega_a t = K_1 \cos \omega_a t + K_2 \sen \omega_a t \quad (2.30)$$

De todas formas, es aconsejable utilizar la primera (ecuación (2.28)) ya que la segunda (ecuación (2.29)) pierde precisión cuando  $\varphi$  está en el entorno de  $0^\circ$  o conforme se aproxima a los extremos  $\pm 90^\circ$ .

La respuesta subamortiguada está caracterizada porque oscila alrededor del valor final, siendo las oscilaciones de pulsación  $\omega_a$  y amplitud decreciente con el tiempo:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (2.31)$$

Esas oscilaciones decrecen más lentamente cuanto menor es el valor de  $\alpha$ , lo que explica que  $\alpha$  se denomine constante de amortiguación. El caso límite es cuando  $\alpha$  se hace 0 y corresponde al cuarto y último caso.

### EJEMPLO 2.7

En el circuito de la figura 2.18 el interruptor, que estaba abierto, se cierra en el instante  $t = 0$ . Sabiendo que en el instante inicial la carga del condensador es  $2,5 \text{ mC}$  y que la bobina está descargada, calcular las expresiones de la tensión  $U(t)$  en el condensador y de la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina para  $t \geq 0$ .

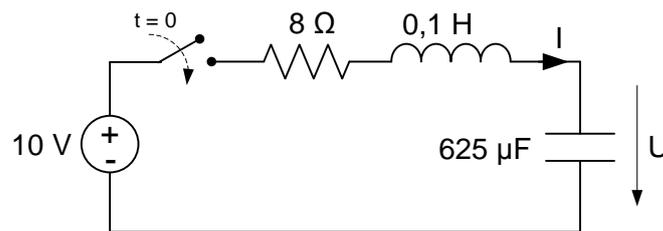


Figura 2.18

Los valores iniciales del circuito son:

$$U(0) = \frac{q(0)}{C} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{625 \cdot 10^{-6}} = 4 \text{ V} \quad \text{e} \quad I(0) = 0$$

En el instante  $t = 0$  el interruptor se cierra. Como se ve el transitorio se produce en un circuito RLC serie, con una fuente de tensión independiente y con condiciones iniciales no nulas. Analizando el circuito se llega a la ecuación diferencial de segundo orden (2.16) con el término independiente  $e$  igual a 10 V. Sustituyendo valores, se tiene que la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{8}{2 \cdot 0,1} = 40 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 625 \cdot 10^{-6}}} = 126,5 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha < \omega_0$  el circuito está subamortiguado, las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  de su ecuación característica son dos números complejos conjugados que tienen la parte real negativa:

$$s_{1,2} = -40 \pm j \sqrt{126,5^2 - 40^2} \quad \rightarrow \quad s_1 = -40 + j120 \quad \text{y} \quad s_2 = -40 - j120$$

La tensión  $U(t)$  en el condensador en el régimen transitorio será de la forma:

$$U(t) = U(\infty) + (K_1 \cos 120 t + K_2 \sen 120 t) \epsilon^{-40 t}$$

En el régimen permanente el condensador se comporta como un circuito abierto, por lo que:

$$U(\infty) = 10 \text{ V} \quad \text{e} \quad I(\infty) = 0$$

Para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan las condiciones iniciales. Analizando el circuito  $t = 0^+$  que hay nada más cerrar el interruptor (figura 2.19.a), sin necesidad de hacer ningún cálculo se ve que la tensión inicial en la bobina,  $U_L(0)$ , es 6 V y la intensidad inicial en el condensador,  $I_C(0)$  es nula. Así, en el instante  $t = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} U(0) : \quad 4 = 10 + K_1 \\ I_C(0) : \quad 0 = -40 K_1 + 120 K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -6 \quad \text{y} \quad K_2 = -2$$

De esta forma, se tiene que la tensión en el condensador es:

$$U(t) = 10 - (6 \cos 120 t + 2 \sen 120 t) \epsilon^{-40 t}$$

De la misma manera, la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$I(t) = I(\infty) + (K_1 \cos 120 t + K_2 \sen 120 t) \epsilon^{-40 t}$$

Habiendo ya calculado los valores iniciales de la intensidad y de la tensión en la bobina, y como:

$$U_L(0) = L \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = 6 \text{ V}$$

Los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  son:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = K_1 \\ U_L(0) : \quad 6 = 0,1 \cdot (-40 K_1 + 120 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = 0 \quad \text{y} \quad K_2 = 0,5$$

De esta forma, se tiene que la intensidad que circula por la bobina es:

$$I(t) = 0,5 \epsilon^{-40 t} \sen 120 t$$

En la figura 2.19.b se representan esas dos variables. Compruebe además que, al estar la bobina y el condensador en serie, con las expresiones calculas se verifica que:

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

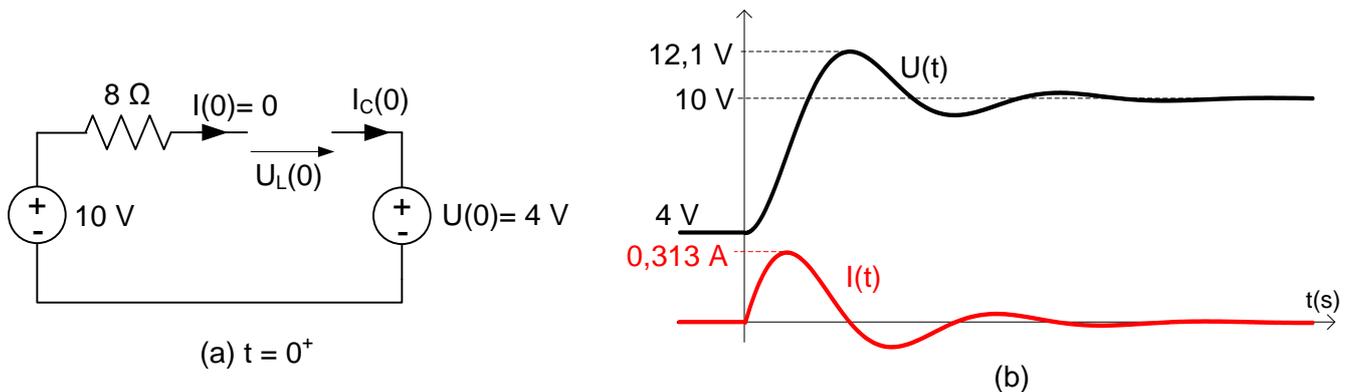


Figura 2.19

El ejercicio de auto comprobación 2.8 es un buen ejemplo de estos tres tipos de respuesta para un mismo circuito. En él se define además el concepto del **lugar geométrico de las raíces en el plano complejo**, que permite entender mejor la influencia que tienen en la respuesta transitoria los valores de la parte real y de la parte imaginaria de las raíces de la ecuación característica de un circuito eléctrico de segundo orden.

#### 4. Dos raíces imaginarias: circuito con amortiguamiento nulo o sin pérdidas.

Cuando  $\alpha = 0$  las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  son dos números conjugados imaginarios puros. Este último caso es el caso límite de un circuito subamortiguado y corresponde al circuito de la figura 2.12 cuando  $R = 0$ . En este caso se dice que el circuito es un circuito **sin pérdidas** o **con amortiguamiento nulo** y se tiene que:

$$\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \quad (2.32)$$

siendo su respuesta de la forma:

$$f(t) = f(\infty) + K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sen \omega_0 t \quad (2.33)$$

o

$$f(t) = f(\infty) + K \sen(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.34)$$

En este caso la respuesta oscila permanentemente, con una pulsación igual a la de resonancia del circuito y una amplitud constante que depende de las condiciones iniciales.

### EJEMPLO 2.8

En el circuito de la figura 2.20 el interruptor, que estaba cerrado un tiempo suficiente, se abre en el instante  $t = 0$ . Calcular las expresiones de la tensión  $U(t)$  en el condensador y de la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina para  $t \geq 0$ .

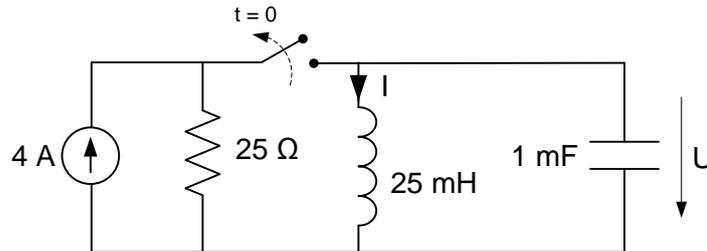


Figura 2.20

Los valores iniciales del circuito son:

$$U(0) = 0 \quad \text{e} \quad I(0) = 4 \text{ A}$$

En el instante  $t = 0$  el interruptor se abre. Como se ve el circuito que queda, en que se produce el transitorio, no tiene ninguna resistencia y se puede entender como el caso límite de circuito RLC serie en el que  $R$  es nula o de un circuito RLC paralelo en el que  $G$  es nula. Sustituyendo valores:

$$\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,025 \cdot 10^{-3}}} = 200 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha = 0$  el circuito es un circuito sin pérdidas o con amortiguamiento nulo y su frecuencia de resonancia es  $-200 \text{ rad/s}$ . La tensión  $U(t)$  en el condensador en el régimen transitorio será de la forma:

$$U(t) = U(\infty) + K \text{ sen}(200t + \varphi)$$

Aunque en este tipo de circuito no se puede hablar propiamente de régimen permanente, como no hay fuentes externas los valores de  $U(\infty)$  e  $I(\infty)$  son ambos nulos.

Para calcular los coeficientes  $K$  y  $\varphi$  se utilizan las condiciones iniciales. Analizando el circuito  $t = 0^+$  que hay nada más abrir el interruptor (figura 2.21.a), sin necesidad de hacer ningún cálculo se ve que la tensión inicial en la bobina,  $U_L(0)$ , es 0 y la intensidad inicial en el condensador,  $I_C(0)$  es  $-4 \text{ A}$ . Así, en el instante  $t = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} U(0) : 0 &= K \operatorname{sen} \varphi \\ I_C(0) : -4 &= 10^{-3} \cdot (200 \cdot K \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \rightarrow K = -20 \text{ y } \varphi = 0^\circ$$

De esta forma, se tiene que la tensión en el condensador es:

$$U(t) = -20 \operatorname{sen} 200 t$$

De la misma manera, la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$I(t) = I(\infty) + K \operatorname{sen}(200 t + \varphi)$$

Ahora los coeficientes  $K$  y  $\varphi$  son:

$$\left. \begin{aligned} I(0) : 4 &= K \operatorname{sen} \varphi \\ U_L(0) : 0 &= 200 \cdot K \cos \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow K = 4 \text{ y } \varphi = 90^\circ$$

Con lo que la intensidad que circula por la bobina es:

$$I(t) = 4 \operatorname{sen}(200 t + 90^\circ) = 4 \cos 200 t$$

En la figura 2.21.b se representan esas dos variables. Compruebe además que, al estar la bobina y en condensador en paralelo, con las expresiones calculadas se verifica que:

$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

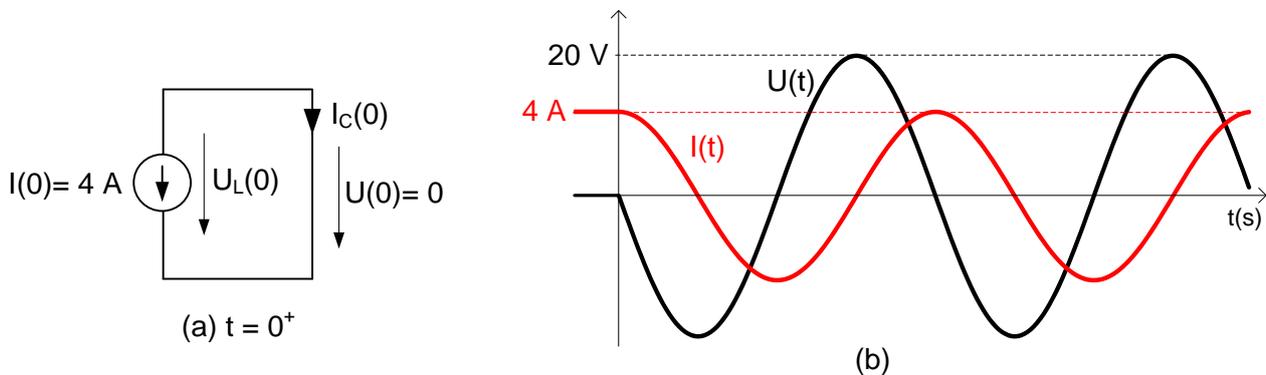


Figura 2.21

Como se ha indicado en el ejemplo anterior, en el caso del circuito sin pérdidas, y a diferencia de lo que ocurría en los tres casos anteriores, no se puede hablar de que se alcance un régimen permanente ya que la respuesta transitoria oscila permanentemente sin atenuarse. Entonces ¿de dónde obtiene el circuito la energía para ello si, como en ese ejemplo, no hay fuentes independientes?

A partir de las expresiones de  $I(t)$  y  $U(t)$  obtenidas, la energía total almacenada en la bobina y en el condensador en cualquier instante  $t$  es:

$$W_L(t) + W_C(t) = \frac{L I^2(t)}{2} + \frac{C U^2(t)}{2} = 0,2 \cos^2 200 t + 0,2 \sin^2 200 t = 0,2 \text{ J}$$

Este resultado indica que la energía total almacenada en los dos elementos permanece constante y es igual a la que había en el instante inicial:

$$W_L(0) + W_C(0) = \frac{L I^2(0)}{2} + \frac{C U^2(0)}{2} = 0,2 + 0 = 0,2 \text{ J}$$

Al no existir una resistencia en donde se disipe energía (de ahí que al circuito se le denomine sin pérdidas), en todo instante la energía que pierde uno de los dos elementos es igual a la que gana el otro que, posteriormente, se la devuelve al primero, y así sucesivamente. Este es el funcionamiento característico de los circuitos resonantes. Y la respuesta a la pregunta anterior es que la energía que mantiene ese funcionamiento permanente del circuito es la que se debe a los valores iniciales de la carga y del flujo que tenían esos dos elementos.

### 5. Dos raíces con parte real positiva: circuito inestable.

Por último existe un quinto caso que corresponde a la situación dada por una  $R$  negativa, en el que al resolver la ecuación característica (2.21) aparece al menos una raíz real positiva o las dos complejas con la parte real positiva. En este caso la amplitud de las oscilaciones es creciente y, por tanto, la respuesta del circuito es inestable.

Aunque esta situación puede darse en el caso de circuitos electrónicos (en los que hay componentes o partes del circuito cuyo equivalente es una resistencia negativa), no se da nunca cuando los elementos del circuito son elementos pasivos  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Por este motivo, este quinto tipo de respuesta transitoria se cita aquí solo para completar todos los casos y para que sea consciente de su existencia, pero en esta asignatura no se contemplarán los circuitos inestables.

## Circuitos de segundo orden con fuentes de alterna.

Hasta este momento las fuentes de excitación que hemos considerado en el circuito han sido de continua por lo que la solución particular de la ecuación diferencial de segundo orden completa era un valor constante  $f(\infty)$  que corresponde al valor de la variable una vez alcanzado el nuevo régimen permanente. Ahora, al igual que se vio en el caso de los circuitos de primer orden, si las fuentes de excitación del circuito son de alterna senoidales, la solución particular de la ecuación diferencial completa será una función también senoidal,  $f_\infty(t)$ , que es la expresión en el régimen permanente de la variable en cuestión y que, por tanto, no nos debe suponer ningún problema calcularla resolviendo el circuito en alterna.

De esta manera, en la forma general que tiene la solución de la ecuación diferencial completa según sean sus raíces (ecuaciones (2.25), (2.26), (2.28), (2.29), (2.33) y (2.34)) en lugar del sumando constante  $f(\infty)$  ahora se debe utilizar la expresión  $f_\infty(t)$ , que será una función senoidal de  $t$ . Y para calcular los valores de los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ , se deben tener también en cuenta el valor inicial de esa expresión  $f_\infty(0)$  y el de su derivada  $df_\infty(0)/dt$ . Veámoslo en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2.9

En el circuito de la figura 2.22 el interruptor, que estaba abierto, se cierra en el instante  $t = 0$ . Sabiendo que en el instante inicial la carga del condensador es  $2,5 \text{ mC}$  y que la bobina está descargada, calcular las expresiones de la tensión  $U(t)$  en el condensador y de la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina para  $t \geq 0$ .

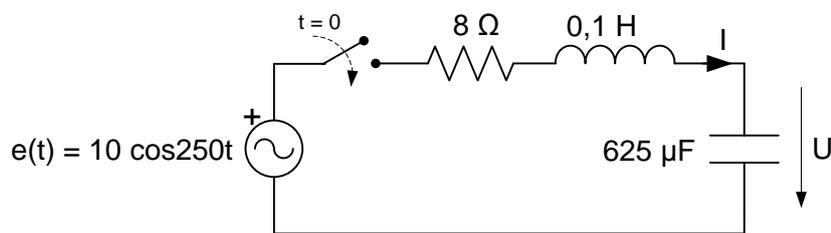


Figura 2.22

Como habrá visto se trata del mismo circuito del ejemplo 2.7, en el que aquí hemos sustituido la fuente de continua de  $10 \text{ V}$  por una fuente alterna senoidal  $e(t)$  de valor de pico  $10 \text{ V}$  y pulsación  $250 \text{ rad/s}$ . Como en aquel caso, los valores iniciales de la tensión en el condensador y de la intensidad en la bobina son los mismos, esto es,  $4 \text{ V}$  y  $0 \text{ A}$  respectivamente. Teniendo en cuenta esos valores iniciales (condiciones de continuidad) y el valor de la fuente de tensión en el instante  $t = 0$ , se obtiene el circuito de la figura 2.23.a que nos permite calcular los valores iniciales de la intensidad en el condensador y de la tensión en la bobina:

$$I_C(0) = I(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_L(0) = e(0) - U(0) = 10 - 4 = 6 \text{ V}$$

Una vez cerrado el interruptor y alcanzado el régimen permanente ( $t = \infty$ ), se tiene el circuito de la figura 2.23.b, en el que se dan los valores de la impedancia de la bobina y del condensador a la pulsación de la fuente. Resolviendo este circuito se tiene que:

$$\vec{I} = \frac{10/\sqrt{2} \angle 0^\circ}{8 + j18,6} = 0,349 \angle -66,7^\circ \text{ A} \quad \rightarrow \quad I_\infty(t) = 0,494 \cos(250t - 66,7^\circ)$$

y

$$\vec{U} = 0,349 \angle -66,7^\circ \cdot (-j6,4) = 2,235 \angle -156,7^\circ \text{ V} \quad \rightarrow \quad U_\infty(t) = 3,161 \cos(250t - 156,7^\circ)$$

La ecuación característica es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 2.7:

$$s^2 + 80s + 16000 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -40 \pm j120$$

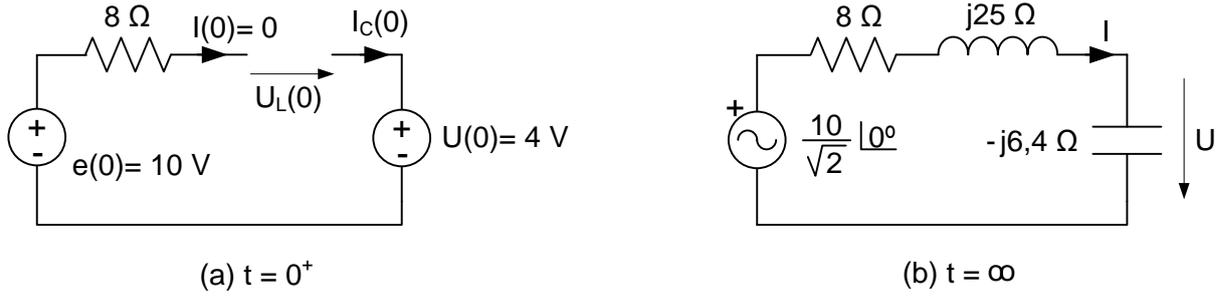


Figura 2.23

Como tiene dos raíces complejas conjugadas, la respuesta transitoria del circuito es, por tanto, subamortiguada.

De esta forma, la expresión de la tensión en el condensador tiene la forma:

$$U(t) = 3,161 \cos(250t - 156,7^\circ) + (K_1 \cos 120t + K_2 \operatorname{sen} 120t) \epsilon^{-40t}$$

Para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan las condiciones iniciales. Así, en el instante  $t = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} U(0) : 4 = 3,161 \cos(-156,7^\circ) + K_1 \\ I_C(0) : 0 = -790,25 \operatorname{sen}(-156,7^\circ) - 40 K_1 + 120 K_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} K_1 = 6,903 \\ K_2 = -0,304 \end{cases}$$

Con lo que la tensión en el condensador es:

$$U(t) = 3,161 \cos(250t - 156,7^\circ) + (6,903 \cos 120t - 0,304 \operatorname{sen} 120t) \epsilon^{-40t}$$

De la misma manera, la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$I(t) = 0,494 \cos(250t - 66,7^\circ) + (K_1 \cos 120t + K_2 \operatorname{sen} 120t) \epsilon^{-40t}$$

Y para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ , en el instante  $t = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : 0 = 0,494 \cos(-66,7^\circ) + K_1 \\ U_L(0) : 6 = 0,1 \cdot (-123,5 \operatorname{sen}(-66,7^\circ) - 40 K_1 + 120 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} K_1 = -0,195 \\ K_2 = -0,51 \end{cases}$$

Con lo que la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = 0,494 \cos(250t - 66,7^\circ) - (0,195 \cos 120t + 0,51 \operatorname{sen} 120t) \epsilon^{-40t}$$

En la figura 2.24 se representan estas dos variables (en línea discontinua se representa en cada una la senoide correspondiente al régimen permanente, esto es, la solución particular de la ecuación diferencial completa).

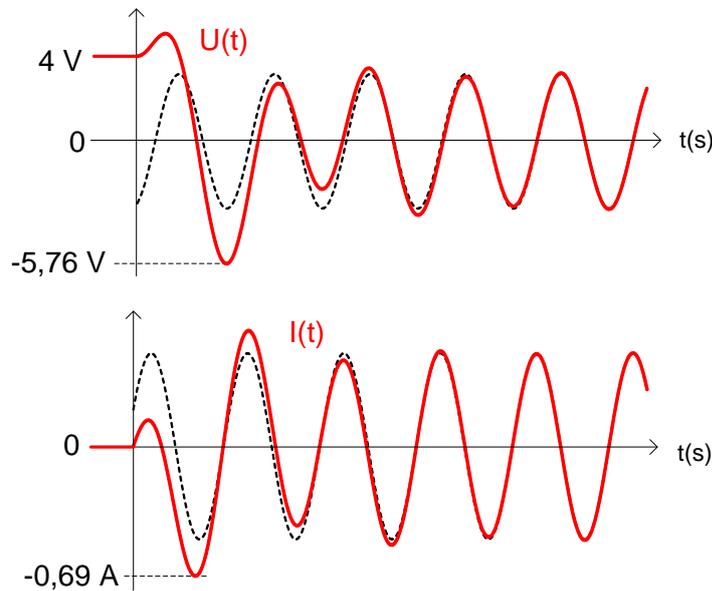


Figura 2.24

Por último, al tratarse de un circuito RLC serie, con esas dos expresiones obtenidas compruebe que se verifica la ecuación de definición del condensador:

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

---

### Otras variables en los circuitos de segundo orden.

A diferencia de lo que ocurre en los circuitos de primer orden, en los circuitos de segundo orden las demás variables del circuito no se pueden obtener de forma sencilla utilizando el procedimiento anterior a partir de la expresión general de la solución de la ecuación diferencial según sean las raíces de su ecuación característica. Por ejemplo, en una resistencia no existe el concepto de “derivada de una variable” que permita calcular los dos coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ . En estos casos, en los circuitos de segundo orden, una vez calculadas la tensión en el condensador y la intensidad en la bobina, lo mejor para obtener el resto de variables del circuito es hacerlo aplicando las dos leyes de Kirchhoff y las ecuaciones de definición de los elementos.

## 2.4. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN.

**Ejercicio 2.1.** En el circuito de la figura 2.25 el interruptor está cerrado el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. Si en el instante  $t=0$  el interruptor se abre, se pide calcular: (a) La expresión de la intensidad  $I(t)$  en la bobina para  $t \geq 0$ . (b) La energía almacenada en la bobina a los 5 ms de la apertura del interruptor. (c) El valor máximo que alcanza la tensión en la bobina durante el periodo transitorio.

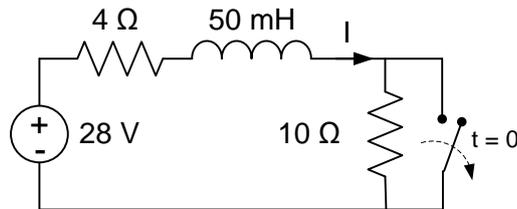


Figura 2.25

**Ejercicio 2.2.** En el circuito de la figura 2.26 el interruptor está cerrado el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t=0$  el interruptor se abre. Explicar el periodo transitorio que tiene lugar y calcular la expresión de la tensión  $U_{AB}(t)$  entre los terminales A y B del interruptor para  $t \geq 0$ .

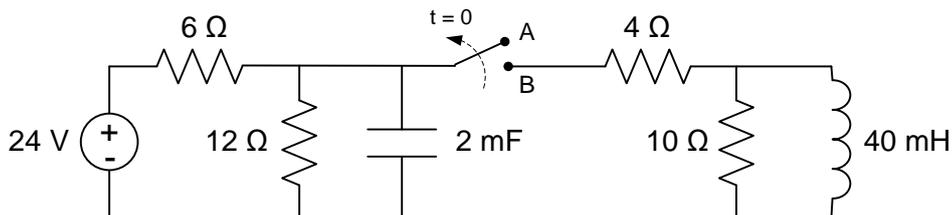


Figura 2.26

**Ejercicio 2.3.** En el circuito de la figura 2.27 se considera que el interruptor se encuentra en la posición 1 el tiempo suficiente para que se alcance el régimen permanente. Si en el instante  $t=0$  el interruptor pasa a la posición 2, calcular la expresión de la tensión en la bobina,  $U_L(t)$ , para  $t \geq 0$  y representar gráficamente dicha variable en cada uno de los tres casos siguientes definidos por el desfase inicial  $\theta$  de la fuente de tensión alterna: (a)  $\theta = -45^\circ$ . (b)  $\theta = 45^\circ$ . (c)  $\theta = 135^\circ$ . Comentar los resultados obtenidos.

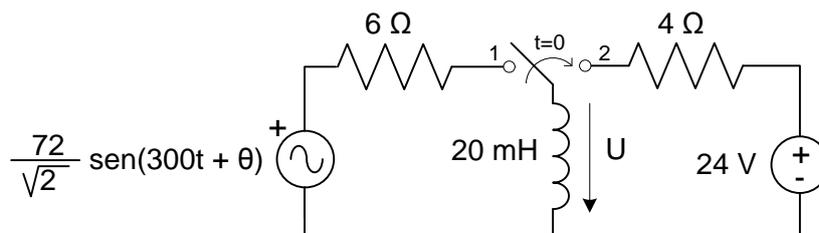


Figura 2.27

**Ejercicio 2.4.** En el circuito de la figura 2.28 el interruptor se encuentra en la posición A un tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t=0$  el interruptor pasa de la posición A a la posición B. Calcular la expresión de la intensidad por la bobina,  $I(t)$ , para  $t \geq 0$  y representar gráficamente esa variable.

Repetir el ejercicio suponiendo ahora que inicialmente el interruptor se encontraba de forma permanente en la posición B, y que en el instante  $t=0$  pasa a la posición A.

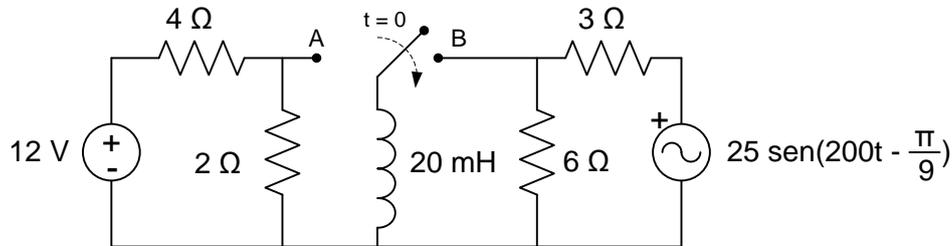


Figura 2.28

**Ejercicio 2.5.** En el circuito de la figura 2.29 en el instante  $t=0$  se cierra el interruptor. Sabiendo que la bobina y el condensador estaban inicialmente descargados, calcular la expresión de la intensidad por la bobina,  $I(t)$ , para  $t \geq 0$ . Representar gráficamente esa variable, calculando el valor de su derivada en el origen, el valor máximo que alcanza y en instante en el que ocurre.

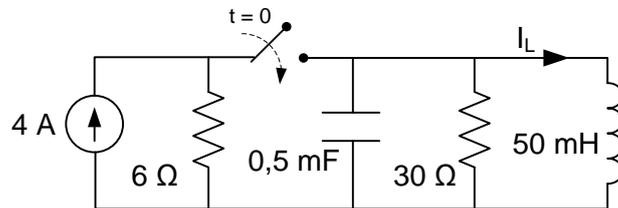


Figura 2.29

**Ejercicio 2.6.** En el circuito de la figura 2.30 el interruptor se encuentra en la posición A el tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t=0$  pasa a la posición B. Calcular y dibujar la tensión en el condensador,  $U(t)$  y la intensidad en la bobina  $I(t)$ , para  $t \geq 0$ .

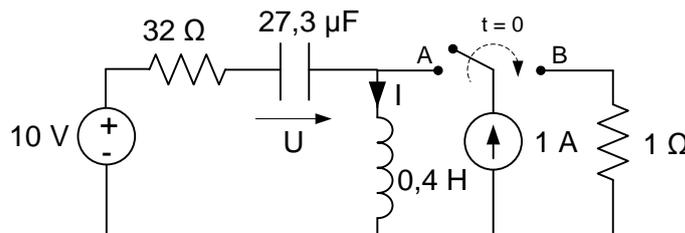


Figura 2.30

**Ejercicio 2.7.** En el circuito de la figura 2.31 el interruptor se encuentra cerrado un tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. Si en el instante  $t=0$  el interruptor se abre, ¿qué tipo de respuesta transitoria se produce? Calcular la expresión de la tensión en el condensador,  $U(t)$  y de la intensidad por la bobina,  $I(t)$ , para  $t \geq 0$  y representar gráficamente esas variables.

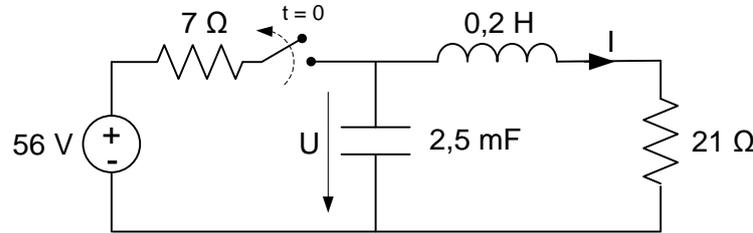


Figura 2.31

**Ejercicio 2.8.** En el circuito de la figura 2.32 el interruptor se encuentra cerrado y la bobina y el condensador descargados. Si en el instante  $t=0$  el interruptor se abre, calcular la expresión de la intensidad en la bobina,  $I(t)$ , para  $t \geq 0$ , para los siguientes cinco valores de R: (a) 80 Ω. (b) 100 Ω. (c) 125 Ω. (d) 200 Ω. (e) 500 Ω. En cada uno de esos cinco casos, representar gráficamente  $I(t)$ , indicando el valor máximo que alcanza y en instante en el que ocurre, y la duración del régimen transitorio (considerar que el régimen permanente se alcanza una vez que el valor de la variable ya queda siempre dentro del margen “valor final  $\pm 0,67\%$ ”). A la vista de los resultados obtenidos, comentar la influencia del valor de R en la respuesta del circuito.

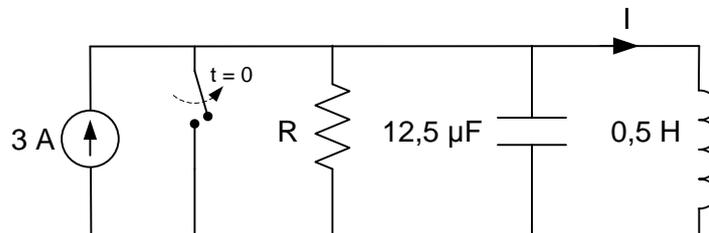


Figura 2.32

**Ejercicio 2.9.** En el circuito de la figura 2.33 el interruptor se encuentra abierto un tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. Si en el instante  $t=0$  el interruptor se cierra, calcular la expresión de la intensidad  $i(t)$  que circula por el interruptor, para  $t \geq 0$ .

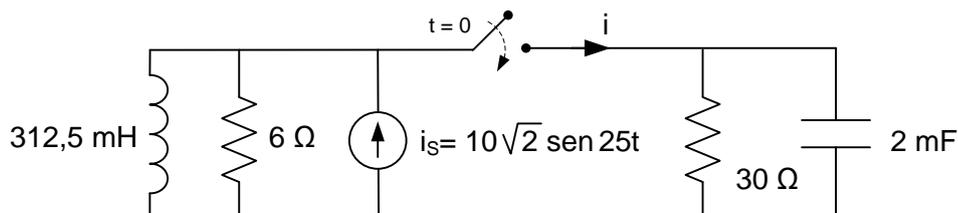


Figura 2.33

**Ejercicio 2.10.** En el circuito de la figura 2.34 el interruptor se encuentra abierto un tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente; si se cierra en el instante  $t=0$ , se pide: (a) Calcular el valor de  $R$  para que la duración del régimen transitorio sea de 50 ms. (b) Para un valor de  $R$  igual a  $2 \Omega$ , calcular y representar gráficamente la expresión de la intensidad en la bobina  $I(t)$  para  $t \geq 0$ .

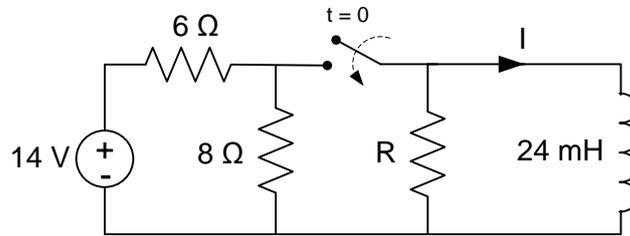


Figura 2.34

**Ejercicio 2.11.** En el circuito de la figura 2.35 el interruptor se encuentra cerrado un tiempo suficiente para garantizar el régimen permanente. En el instante  $t=0$  se abre el interruptor. Se pide: (a) ¿Qué tipo de respuesta transitoria presenta el circuito? (b) Calcular la expresión de la intensidad por la bobina  $I(t)$  para  $t \geq 0$ . (c) Representar gráficamente esa variable, calculando sus valores más significativos.

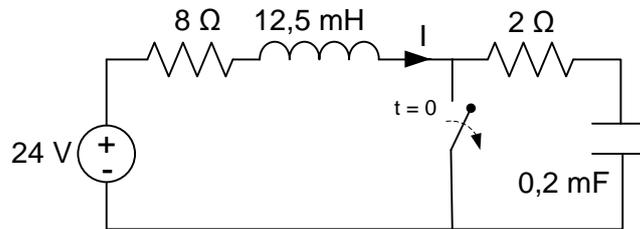


Figura 2.35

## SOLUCIONES

## Ejercicio 2.1.

(a) A la vista del circuito de la figura 2.36.a, el valor  $I(0)$  de la corriente en la bobina nada más abrir el interruptor (que es el mismo que tenía un instante antes, con el interruptor cerrado) y el valor final  $I(\infty)$  una vez alcanzado el nuevo régimen permanente (con el interruptor abierto) son:

$$I(0) = \frac{28}{4} = 7 \text{ A} \quad \text{e} \quad I(\infty) = \frac{28}{10 + 4} = 2 \text{ A}$$

Y como las dos resistencias están en serie, vistas desde la bobina, la constante de tiempo del periodo transitorio es:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0,05}{10 + 4} = 3,57 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Con estos valores, la expresión de la corriente que circula por la bobina para  $t \geq 0$  es:

$$I(t) = I(\infty) + [I(0) - I(\infty)] e^{-t/\tau} = 2 + (7 - 2) \cdot e^{-t/\tau} = 2 + 5 \cdot e^{-280t}$$

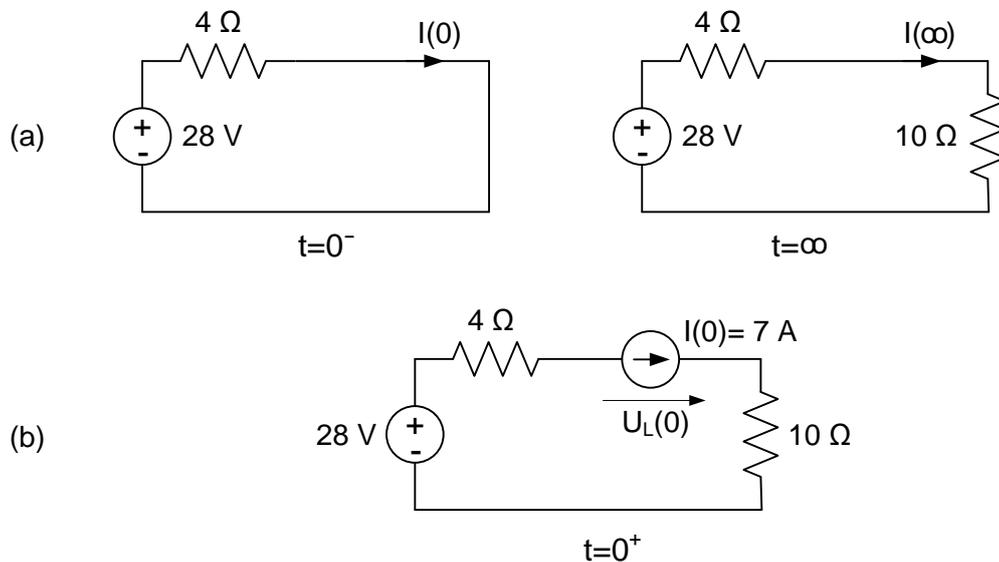


Figura 2.36

(b) En el instante  $t = 5 \text{ ms}$ , la corriente que circula por la bobina y la energía almacenada en ella en forma de campo magnético es:

$$I(0,005) = 2 + 5 \cdot e^{-280 \cdot 0,005} = 3,23 \text{ A} \quad \rightarrow \quad W(0,005) = \frac{L I^2}{2} = \frac{0,05 \cdot 3,23^2}{2} = 0,261 \text{ J}$$

(c) Una vez obtenida la expresión de la intensidad que circula por la bobina para  $t \geq 0$ , la tensión en la bobina es:

$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = 0,05 \cdot \frac{d}{dt}(2 + 5 \cdot e^{-280t}) = -70 \cdot e^{-280t}$$

Al tratarse de una función exponencial, el valor máximo se tiene en el instante inicial,  $t=0$ , y es igual a 70 V. El signo negativo que se obtiene de la expresión de  $U_L(t)$  indica que la tensión es la contraria a la que corresponde a la bobina como elemento pasivo, lo que es lógico en este caso ya que la bobina se comporta como “un tipo fuente de corriente” cediendo al resto del circuito parte de su energía almacenada, en forma de campo magnético, al pasar de 7 A a 2 A.

Al tratarse de un transitorio de primer orden, se sabe que ese valor máximo se obtiene en el instante inicial. Así, otra forma de resolver este ejercicio es resolviendo el circuito que hay en el instante  $t=0^+$  (figura 2.36.b) en el cual la bobina se representa por una fuente de intensidad de valor  $I(0)$  que expresa la condición de continuidad en  $t=0$ , entre los instantes inmediatamente antes,  $t=0^-$ , y después,  $t=0^+$ , de la apertura del interruptor. Analizando ese circuito se tiene:

$$U_L(0) = 28 - I_L(0) \cdot (4 + 10) = -70 \text{ V}$$

Observe que el valor de tensión obtenido es muy superior, aunque de duración muy corta, al de la tensión en cualquier elemento del circuito en régimen permanente y mayor que el valor de la propia fuente de tensión. Estos picos de tensión y de corriente son propios de los regímenes transitorios y, en algunos casos, pueden llegar a dañar o a destruir algún elemento del circuito; por este motivo a la hora de diseñar y analizar el funcionamiento de un circuito eléctrico o electrónico es muy importante tener en cuenta los posibles regímenes transitorios que puedan producirse.

## Ejercicio 2.2.

En este problema, al abrirse el interruptor quedan dos circuitos inconexos que evolucionan en el tiempo de manera independiente uno del otro: el de la izquierda del interruptor corresponde a la carga del condensador y el de la derecha a la descarga de la bobina. A la vista del circuito resultante, figura 2.37.a, la tensión  $U_{AB}(t)$  entre los terminales A y B del interruptor, para  $t \geq 0$ , será:

$$U_{AB}(t) = U_C(t) - U_L(t)$$

Cada uno de estos dos circuitos seguirá su propia evolución transitoria independiente de la del otro, pero ambas serán de primer orden. Los valores iniciales (condición de continuidad de cada transitorio) se obtienen del circuito de la figura 2.37.b que corresponde al régimen permanente antes de abrirse el interruptor:

$$U_C(0) = \frac{24 \cdot 3}{6 + 3} = 8 \text{ V} \quad \text{e} \quad I_L(0) = \frac{8}{4} = 2 \text{ A}$$

Para el circuito de la derecha de la figura 2.37.a (carga del condensador) el valor final de la tensión en el condensador y la constante de tiempo de su régimen transitorio son:

$$U_C(\infty) = \frac{24 \cdot 12}{6 + 12} = 16 \text{ V} \quad \text{y} \quad \tau = RC = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

con lo que la expresión de la tensión en el condensador para  $t \geq 0$  es:

$$U_C(t) = U_C(\infty) + [U_C(0) - U_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 16 + (8 - 16)e^{-t/0,008} = 16 - 8 \cdot e^{-125t}$$

Para el circuito de la derecha de la figura 2.37.a (descarga de la bobina) el valor final de la intensidad en la bobina y la constante de tiempo de su régimen transitorio son:

$$I_L(\infty) = 0 \quad \text{y} \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{0,04}{10} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

con lo que la expresión de la intensidad en la bobina para  $t \geq 0$  es:

$$I_L(t) = I_L(\infty) + [I_L(0) - I_L(\infty)]e^{-t/\tau} = 0 + (2 - 0)e^{-t/0,004} = 2 \cdot e^{-250t}$$

De esta forma, la tensión entre los terminales A y B del interruptor, para  $t \geq 0$ , es:

$$U_{AB}(t) = U_C(t) - U_L(t) = U_C(t) - L \frac{dI_L(t)}{dt} = 16 - 8 \cdot e^{-125t} + 20 \cdot e^{-250t}$$

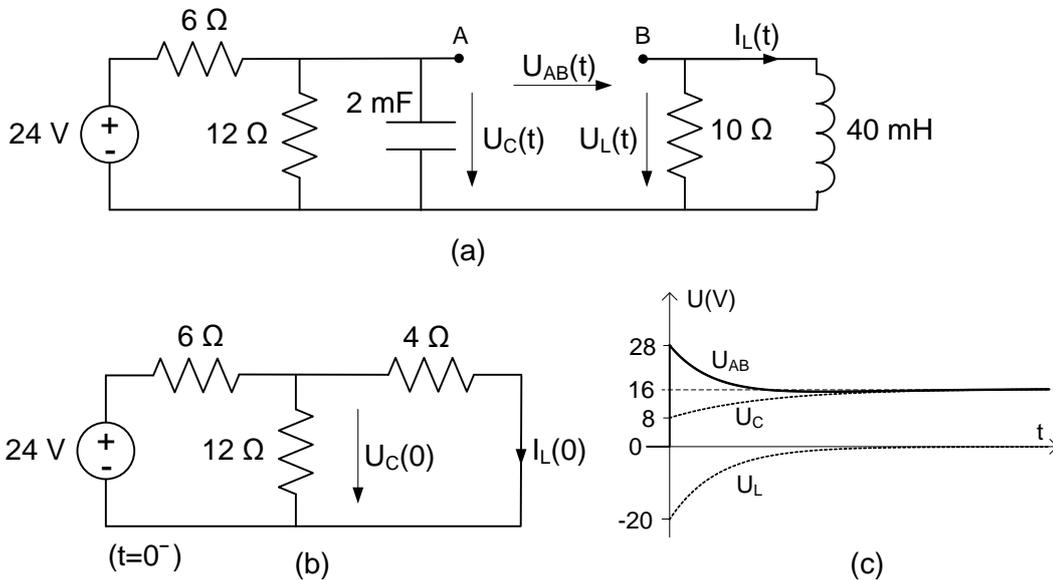


Figura 2.37

Como se observa, el régimen transitorio de la tensión en el interruptor abierto,  $U_{AB}(t)$ , tiene dos términos exponenciales en el que uno (el que corresponde a la descarga de la bobina) es más rápido que el otro (exactamente el doble de rápido). En la figura 2.37.c se representa la evolución en el tiempo de  $U_{AB}(t)$ ,  $U_C(t)$  y  $U_L(t)$ . También es importante observar el valor que alcanza la

tensión entre los terminales de interruptor en el instante  $t=0$ , nada más abrirse, que es de 28 V, casi el doble de los 16 V que habrá una vez alcanzado el régimen permanente.

### Ejercicio 2.3.

Con el interruptor en la posición 1, para  $t < 0$ , el circuito en el que está la bobina es un sencillo circuito de corriente alterna en el que la intensidad que circula por la bobina, es:

$$\vec{I} = \frac{36 \angle \theta}{6 + j6} = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle \theta - 45^\circ \quad \rightarrow \quad I(t) = 6 \operatorname{sen}(300t + \theta - 45^\circ)$$

y, por tanto, la tensión entre sus bornes es:

$$U(t) = 36 \operatorname{sen}(300t + \theta + 45^\circ) \quad \text{para } t < 0$$

Nada más pasar el interruptor a la posición 2, en el instante  $t=0^+$  el valor de la tensión en la bobina se obtiene resolviendo el circuito de la figura 2.38.a, donde la fuente de corriente  $I(0)$  impone al resto del circuito la condición inicial o de continuidad debida al valor inicial de la carga inicial en la bobina:

$$I(0) = 6 \operatorname{sen}(\theta - 45^\circ) \quad \rightarrow \quad U(0^+) = 24 - 4I(0) = 24 - 24 \operatorname{sen}(\theta - 45^\circ)$$

En régimen permanente,  $t=\infty$ , la tensión en la bobina es cero ya que la fuente de tensión es de continua. Por último la constante de tiempo del régimen transitorio del circuito es:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,02}{4} = 5 \text{ ms}$$

Como se trata de un transitorio de primer orden se puede calcular directamente  $U(t)$  aplicando la expresión general dada por la ecuación (2.14). Así, con los valores obtenidos, la expresión de la tensión en la bobina para  $t \geq 0$  es:

$$U(t) = U(\infty) + [U(0) - U(\infty)] e^{-t/\tau} = U(0) \cdot e^{-200t} = [24 - 24 \operatorname{sen}(\theta - 45^\circ)] \cdot e^{-200t}$$

Según sea el valor del desfase inicial  $\theta$  de la fuente de tensión alterna, para los tres valores de  $\theta$  dados se tiene:

- Para  $\theta = -45^\circ$ , el valor de la tensión inicial en la bobina es 48 V con lo que la expresión de su régimen transitorio es:

$$U(t) = 48 \cdot e^{-200t}$$

- Para  $\theta = 45^\circ$ , el valor de la tensión inicial en la bobina es 24 V con lo que la expresión de su régimen transitorio es:

$$U(t) = 24 \cdot e^{-200t}$$

- Para  $\theta = 135^\circ$ , el valor de la tensión inicial en la bobina es 0 con lo que la expresión de su régimen transitorio es:

$$U(t) = 0$$

En las figuras 2.38.b-d se representa la evolución de la tensión en la bobina para esos tres casos. Dese cuenta de que en el tercer caso no hay régimen transitorio ya que el valor de la tensión en el instante inicial, nada más producirse el cambio de la posición del interruptor, es el mismo que el que tendría una vez que alcanzase el nuevo régimen permanente (se puede decir que el nuevo régimen permanente lo alcanza en el mismo instante inicial).

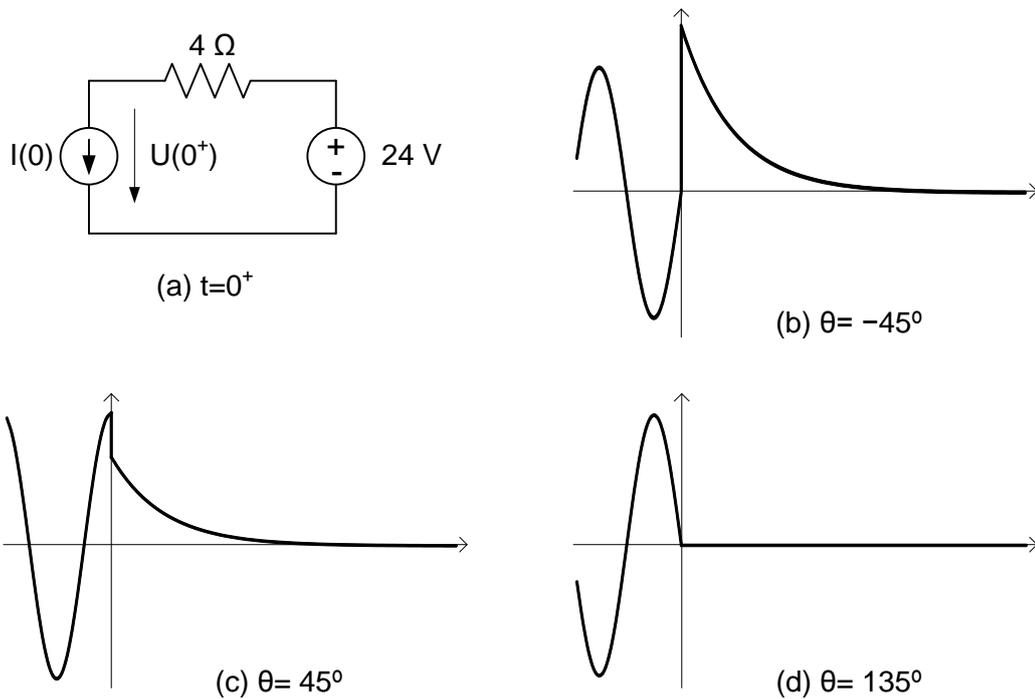


Figura 2.38

### Ejercicio 2.4.

(a) Se trata de un circuito transitorio de primer orden. En el primer caso (cuando el interruptor pasa de A a B en el instante  $t=0$ ) la condición inicial corresponde al circuito de continua de la figura 2.28 con el interruptor en la posición A (figura 2.39.a), donde:

$$I(0) = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

Y la respuesta permanente corresponde al circuito de alterna de la figura 2.28 con el interruptor en la posición B (figura 2.39.b):

$$\vec{I} = \frac{25/\sqrt{2} \angle 20^\circ}{3} \cdot \frac{2}{2 + j4} = 2,635 \angle -83,4^\circ \quad \rightarrow \quad I_\infty(t) = 3,73 \text{ sen}(200t - 83,4^\circ)$$

Por último, la constante de tiempo del circuito de la figura 2.39.b es:

$$R_{eq} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2 \Omega \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0,02}{2} = 0,01 \text{ s}$$

De esta forma, sustituyendo en la ecuación (2.9), la expresión del régimen transitorio de la intensidad en la bobina es:

$$\begin{aligned} I(t) &= 3,73 \text{ sen}(200t - 83,4^\circ) + (3 - 3,73 \text{ sen}(-83,4^\circ)) \cdot \epsilon^{-100t} \\ &= 3,73 \text{ sen}(200t - 83,4^\circ) + 6,7 \cdot \epsilon^{-100t} \end{aligned}$$

que se representa en la figura 2.40.a.

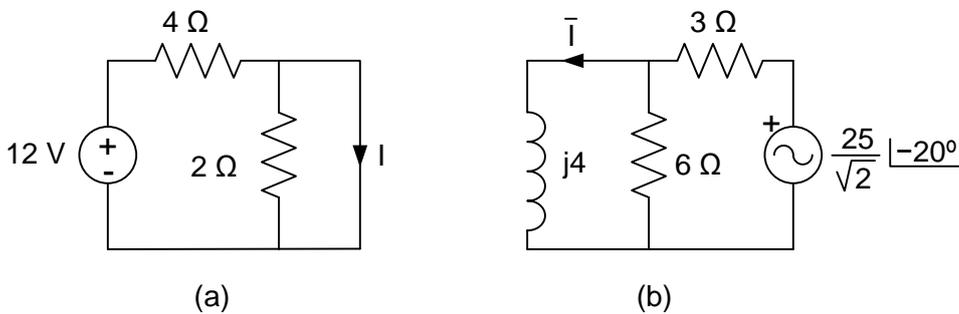


Figura 2.39

(b) En el segundo caso (cuando el interruptor pasa de B a A en el instante  $t=0$ ) la condición inicial corresponde al circuito de alterna de la figura 2.28 con el interruptor en la posición B (figura 2.39.b), por lo que:

$$I(0) = 3,73 \text{ sen}(-83,4^\circ) = -3,7 \text{ A}$$

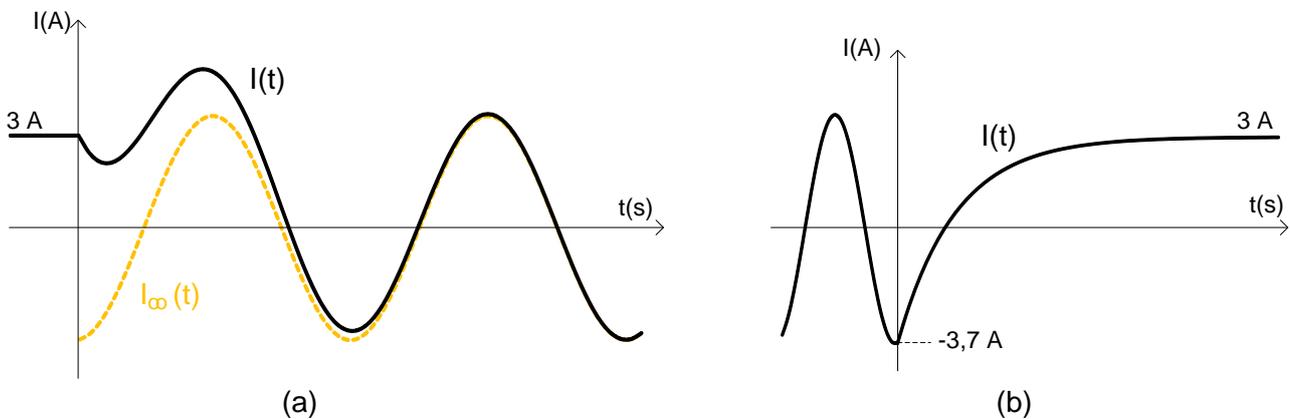


Figura 2.40

Y la respuesta permanente corresponde al circuito de continua de la figura 2.28 con el interruptor en la posición A (figura 2.39.a), esto es  $I(\infty)$  es igual a 3 A. Por último, ahora la constante de tiempo es la del circuito de la figura 2.39.a:

$$R_{eq} = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} = 1,33 \Omega \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0,02}{1,33} = 0,015 \text{ s}$$

De esta forma, sustituyendo en la ecuación (2.14), la expresión del régimen transitorio de la intensidad en la bobina en este segundo caso es:

$$I(t) = 3 + (-3,7 - 3) \cdot \epsilon^{-66,67t} = 3 - 6,7 \cdot \epsilon^{-66,67t}$$

y se representa en la figura 2.40.b.

### Ejercicio 2.5.

Para  $t \geq 0$ , con el interruptor cerrado, se tiene un circuito de segundo orden RLC paralelo inicialmente descargado, que tiene una fuente de corriente continua y en el que el valor de la resistencia es  $5 \Omega$  (el paralelo de las dos resistencias de  $30$  y  $6 \Omega$ ). En este circuito los valores de la constante de amortiguación y de la frecuencia de resonancia son:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{0,2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 200 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,05 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}} = 200 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha = \omega_0$ , el circuito está críticamente amortiguado y tiene una raíz real doble de valor  $-200$  rad/s. Así, la intensidad en la bobina  $I(t)$  en el régimen transitorio tendrá la forma (ecuación (2.26)):

$$I(t) = 4 + (K_1 + K_2 t) \epsilon^{-200t}$$

Con las condiciones iniciales se calculan los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = 4 + K_1 \\ U_L(0) : \quad 0 = -200 K_1 + K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -4 \quad \text{y} \quad K_2 = -800$$

Así, la intensidad en la bobina  $I(t)$  para  $t \geq 0$  es:

$$I(t) = 4 - (4 + 800t) \epsilon^{-200t}$$

En la figura 2.41 se representan esa variable y la tensión en la bobina. El valor de la derivada en el origen de la intensidad en la bobina es:

$$\left. \frac{dI(t)}{dt} \right|_{t=0} = 160000 \cdot t \cdot \epsilon^{-200t} \Big|_{t=0} = 0$$

y su valor máximo lo alcanza en el instante  $t_m$ :

$$\left. \frac{dI(t)}{dt} \right|_{t \neq 0} = 0 \quad \rightarrow \quad t_m = \infty$$

es decir, el valor máximo se alcanza en el régimen permanente (la respuesta transitoria no tiene oscilaciones).

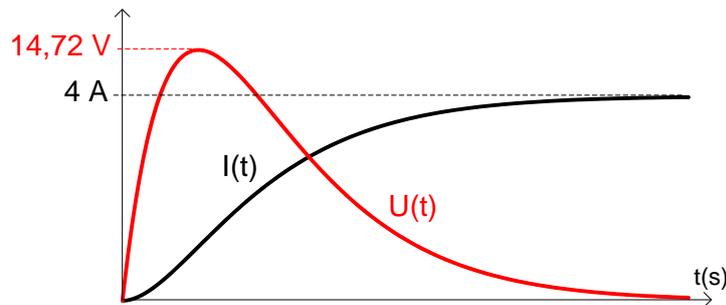


Figura 2.41

### Ejercicio 2.6.

Con el interruptor en la posición A se obtienen los valores iniciales de la tensión en el condensador,  $U(0)$ , y de la corriente en la bobina,  $I(0)$ , que sin necesidad de hacer cálculos, por simple inspección del circuito, se ve que son 10 V y 1 A.

Una vez que el interruptor está en la posición B, el circuito que hay es un circuito RLC serie con una fuente y, como se ha calculado antes, inicialmente cargado. Su régimen transitorio corresponde a un circuito de segundo orden donde la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{32}{2 \cdot 0,4} = 40 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,4 \cdot 27,3 \cdot 10^{-6}}} = 302,6 \text{ rad/s}$$

Como el valor de la constante de amortiguación es menor que la frecuencia de resonancia ( $\alpha < \omega_0$ ) el circuito está subamortiguado y las dos raíces complejas,  $s_1$  y  $s_2$ , de su ecuación característica son:

$$s_{1,2} = -40 \pm j \sqrt{302,6^2 - 40^2} \quad \rightarrow \quad s_1 = -40 + j300 \quad \text{y} \quad s_2 = -40 - j300$$

En el instante  $t=0^+$ , nada más cambiar la posición del interruptor a B, los valores de la tensión en la bobina y de la intensidad por el condensador, debidos a las condiciones iniciales impuestas por esos dos elementos almacenadores de energía se calculan a partir del circuito de la figura 2.42.a:

$$I_C(0^+) = 1 \text{ A} \quad \rightarrow \quad U_L(0^+) = -10 - 32 \cdot 1 + 10 = -32 \text{ V}$$

En el régimen permanente,  $t=\infty$ , como la fuente de 10 V es de corriente continua, el condensador se comporta como un circuito abierto y la bobina como un cortocircuito por lo que se tiene que los valores en el régimen permanente de la tensión en el condensador,  $U(\infty)$ , y de la corriente en la bobina,  $I(\infty)$ , son 10 V y 0 A. Con todos estos datos ya se pueden calcular las expresiones de  $U(t)$  e  $I(t)$  pedidas.

La tensión  $U(t)$  en el condensador en el régimen transitorio será de la forma:

$$U(t) = 10 + (K_1 \cos 300 t + K_2 \operatorname{sen} 300 t) \epsilon^{-40 t}$$

Para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan las condiciones iniciales ya calculadas:

$$\left. \begin{array}{l} U(0) : \quad 10 = 10 + K_1 \\ I_C(0) : \quad 1 = 27,3 \cdot 10^{-6} \cdot (-40 K_1 + 300 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = 0 \quad \text{y} \quad K_2 = 122,1$$

De esta forma, se tiene que la tensión en el condensador es:

$$U(t) = 10 + (122,1 \operatorname{sen} 300 t) \epsilon^{-40 t}$$

De la misma manera, la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$I(t) = 0 + (K_1 \cos 300 t + K_2 \operatorname{sen} 300 t) \epsilon^{-40 t}$$

Y con los valores iniciales en la bobina antes calculados, los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  son:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 1 = K_1 \\ U_L(0) : \quad -32 = 0,4 \cdot (-40 K_1 + 300 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = 1 \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{-4}{30} = 0,133$$

De esta forma, se tiene que la intensidad que circula por la bobina es:

$$I(t) = (\cos 300 t - 0,133 \operatorname{sen} 300 t) \epsilon^{-40 t}$$

En la figura 2.42.b se representan esas dos variables. En este circuito el valor de la tensión en los dos regímenes permanentes (el anterior y el posterior al cambio en la posición del interruptor) es el mismo, 10 V, y sin embargo existe un periodo transitorio ¿por qué? Aunque la energía almacena en el condensador tiene el mismo valor en los instante inicial y final, durante el transitorio ese valor de la energía almacenada en el condensador varía debido la variación de la energía almacena en la bobina, que pasa de 0,2 J (en el instante inicial) a 0 (la bobina termina descargada) ¡recuerde que se trata de un circuito de segundo orden! Dese cuenta también del elevado valor máximo de la sobretensión que aparece entre los terminales del condensador que es prácticamente diez veces superior a la tensión que tiene en régimen permanente.

Por último, compruebe además que, al estar la bobina y el condensador en serie, con las expresiones calculas se verifica que:

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

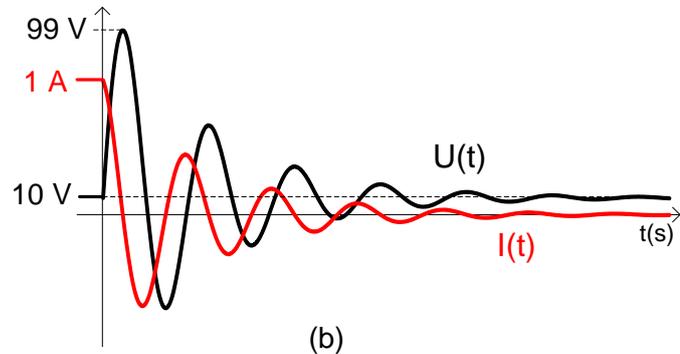
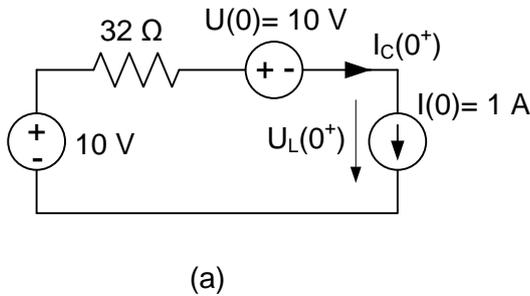


Figura 2.42

### Ejercicio 2.7.

El transitorio que se produce en este ejercicio es de segundo orden ya que hay dos elementos que almacenan energía. Una vez abierto el interruptor se tiene un circuito RLC serie, sin fuentes de excitación y con condiciones iniciales no nulas. Analizando el circuito se llega a la ecuación diferencial de segundo orden (2.16) en la que el término independiente  $e$  es igual a 0. Sustituyendo valores, se tiene que la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{21}{2 \cdot 0,2} = 52,5 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}} = 44,72 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha > \omega_0$  el circuito está sobreamortiguado, con dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  reales, negativas y diferentes:

$$s_{1,2} = -52,5 \pm \sqrt{52,5^2 - 44,72^2} \rightarrow s_1 = -25 \quad \text{y} \quad s_2 = -80$$

La tensión  $U(t)$  en el condensador en el régimen transitorio será de la forma:

$$U(t) = K_1 e^{-25t} + K_2 e^{-80t}$$

ya que en el régimen permanente los dos elementos quedan descargados, al no haber fuentes independientes (por tanto  $U(\infty)$  e  $I(\infty)$  son 0). Para calcular los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan las condiciones iniciales. Con el interruptor cerrado, los valores de la tensión en el condensador y de la corriente en la bobina son:

$$U(0) = 56 \cdot \frac{21}{21+7} = 42 \text{ V} \quad \text{e} \quad I(0) = \frac{56}{21+7} = 2 \text{ A}$$

Con estos dos valores iniciales, que corresponden a las condiciones de continuidad, nada más abrir el interruptor se tiene el circuito de la figura 2.43.a que corresponde al instante  $t=0^+$ . Resolviéndolo se obtienen los valores de la intensidad en el condensador y de la tensión en la bobina:

$$I_C(0^+) = -I(0) = -2 \text{ A} \quad \text{y} \quad U_L(0^+) = 42 - 21 \cdot 2 = 0$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} U(0) : 42 = K_1 + K_2 \\ I_C(0) : -2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot (-25 K_1 - 80 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = \frac{512}{11} \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{-50}{11}$$

De esta forma, se tiene que la tensión en el condensador es:

$$U(t) = \frac{512 \epsilon^{-25t} - 50 \epsilon^{-80t}}{11}$$

De la misma manera, la intensidad  $I(t)$  que circula por la bobina en el régimen transitorio tendrá la forma:

$$I(t) = K_1 \epsilon^{-25t} + K_2 \epsilon^{-80t}$$

Y con los valores calculados en  $t=0^+$ , se obtienen los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : 2 = K_1 + K_2 \\ U_L(0) : 0 = -25 K_1 - 80 K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = \frac{32}{11} \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{-10}{11}$$

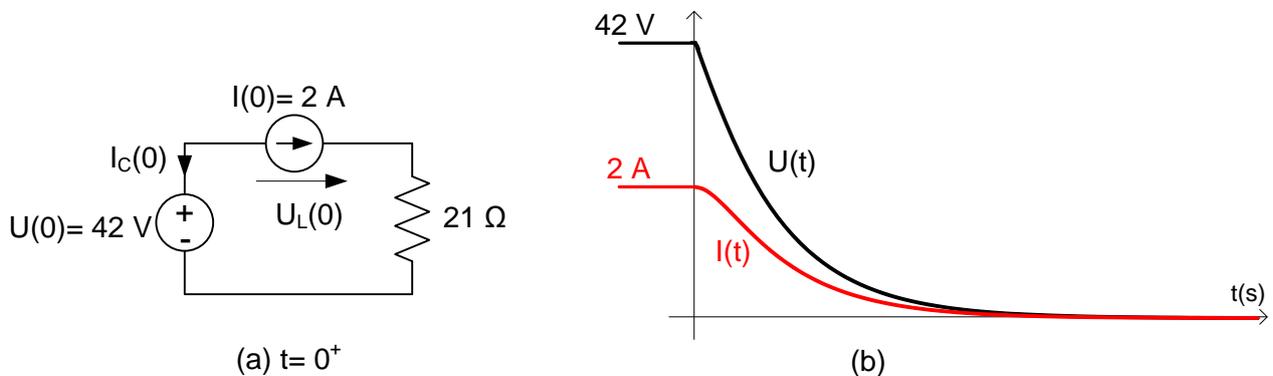


Figura 2.43

De esta forma, se tiene que la intensidad que circula por la bobina es:

$$I(t) = \frac{32 e^{-25t} - 10 e^{-80t}}{11}$$

En la figura 2.43.b se representan esas dos variables. Compruebe además que, para el circuito con el interruptor abierto y con las expresiones obtenidas, se verifica:

$$I(t) = -C \frac{dU(t)}{dt}$$

### Ejercicio 2.8.

El primer paso es calcular en la bobina los valores iniciales (en  $t=0^+$ ) y el valor final (en  $t=\infty$ ). A la vista de la figura 2.44, por simple inspección se obtienen esos valores, que serán los mismos en los cinco casos:

$$I(0) = 0, \quad U_L(0^+) = U_C(0) = 0 \quad \text{e} \quad I(\infty) = 3 \text{ A}$$

En los cinco casos el valor de la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  también es el mismo, ya que no depende del valor de R:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}}} = 400 \text{ rad/s}$$

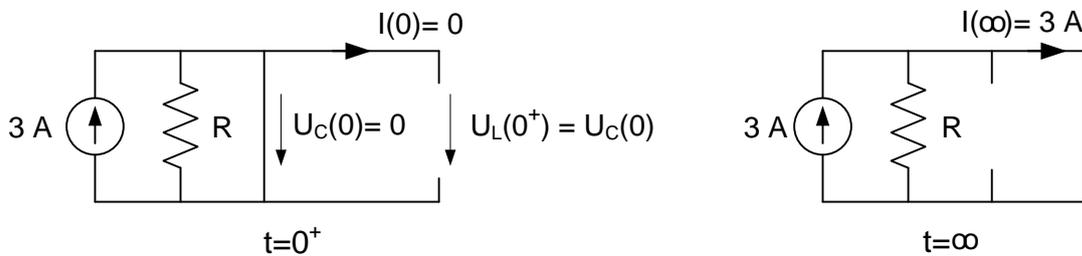


Figura 2.44

(a) Para R igual a  $80 \Omega$  el coeficiente de amortiguación  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2 \cdot 80 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} = 500 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha$  es mayor que la frecuencia de resonancia la respuesta transitoria del circuito es sobre-amortiguada, con dos raíces reales negativas de valores:

$$s_{1,2} = -500 \pm \sqrt{500^2 - 400^2} \rightarrow s_1 = -200 \quad \text{y} \quad s_2 = -800$$

y la respuesta será de la forma:

$$I(t) = I(\infty) + K_1 \epsilon^{-200t} + K_2 \epsilon^{-800t}$$

Los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = 3 + K_1 + K_2 \\ U_L(0) : \quad 0 = -200 K_1 - 800 K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -4 \quad \text{y} \quad K_2 = 1$$

Así, la expresión de la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = 3 - (4 \epsilon^{-200t} - \epsilon^{-800t})$$

La representación de la variable se muestra en la figura 2.45 en color azul. Como se trata de una respuesta sobreamortiguada no existen sobreoscilaciones por lo que el valor máximo de  $I(t)$  corresponde al valor final de 3 A, que se alcanza en el régimen permanente. La duración del régimen transitorio (desde  $t=0$  hasta que el valor de  $I(t)$  queda permanentemente dentro del margen de  $3 \pm 0,02$  A) es de 26,5 ms.

(b) Para R igual a 100  $\Omega$  el coeficiente de amortiguación  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} = 400 \text{ rad/s}$$

Como el valor de  $\alpha$  es igual que el de la frecuencia de resonancia la respuesta transitoria del circuito es críticamente amortiguada, con una raíz real doble y negativa de valor  $-400$  rad/s. De esta forma, la respuesta tendrá la forma:

$$I(t) = I(\infty) + (K_1 + K_2 t) \epsilon^{-400t}$$

Los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = 3 + K_1 \\ U_L(0) : \quad 0 = -400 K_1 + K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -3 \quad \text{y} \quad K_2 = -1200$$

Así, la expresión de la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = 3 - (3 + 1200 t) \epsilon^{-400t}$$

La representación de la variable se muestra en la figura 2.45 en color violeta. Como se trata de una respuesta críticamente amortiguada tampoco existen sobreoscilaciones por lo que el valor máximo de  $I(t)$  corresponde al valor final de 3 A que se alcanza en el régimen permanente, aunque ahora de forma más rápida. La duración del régimen transitorio es de 17,8 ms.

(c) Para R igual a 125  $\Omega$  el coeficiente de amortiguación  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2 \cdot 120 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} = 320 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha$  es ahora menor que la frecuencia de resonancia la respuesta transitoria del circuito es subamortiguada, con dos raíces reales complejas de parte real negativa y de valores:

$$s_{1,2} = -320 \pm \sqrt{320^2 - 400^2} \rightarrow s_1 = -320 + j240 \quad \text{y} \quad s_2 = -320 - j240$$

y la respuesta será de la forma:

$$I(t) = I(\infty) + (K_1 \cos 240 t + K_2 \sen 240 t) \epsilon^{-320 t}$$

Los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 0 = 3 + K_1 \\ U_L(0) : \quad 0 = -320 K_1 + 240 K_2 \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = -3 \quad \text{y} \quad K_2 = -4$$

Así, la expresión de la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = 3 - (3 \cos 240 t + 4 \sen 240 t) \epsilon^{-320 t}$$

La representación de la variable se muestra en la figura 2.45 en color verde. Como se trata de una respuesta subamortiguada existen sobreoscilaciones entorno al valor final, en este caso se trata de una pequeña sobreoscilación que hace que el valor máximo de  $I(t)$  sea de 3,045 A, a los 13,1 ms de iniciarse el transitorio. La duración del régimen transitorio (desde  $t=0$  hasta que el valor de  $I(t)$  queda permanentemente dentro del margen de  $3 \pm 0,02$  A) es de 17,3 ms (Nota: en realidad la duración del régimen transitorio es ligeramente mayor que 17,8 ms -que es la duración del régimen transitorio en el caso anterior de amortiguamiento crítico- aunque en este caso concreto como la sobreoscilación es tan pequeña la respuesta “se queda antes” dentro del margen de intensidad entorno al valor final que hemos definido como régimen permanente. La mayor o menor duración del régimen transitorio depende de las raíces y se discute en el último apartado de este ejercicio).

(d) Para R igual a  $200 \Omega$  el coeficiente de amortiguación  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2 \cdot 200 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ rad/s}$$

Como en el caso del apartado anterior la respuesta transitoria del circuito es subamortiguada, con dos raíces reales complejas de parte real negativa y de valores:

$$s_{1,2} = -200 \pm \sqrt{200^2 - 400^2} \rightarrow s_1 = -200 + j346,41 \quad \text{y} \quad s_2 = -200 - j346,41$$

A partir de las condiciones iniciales y operando como en el apartado anterior, se obtiene finalmente que la expresión de la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = 3 - (3 \cos 346,41 t + 1,732 \sin 346,41 t) e^{-200 t}$$

La representación de la variable se muestra en la figura 2.45 en color rojo. Como se trata de una respuesta subamortiguada existen sobreoscilaciones, en este caso mayores, que hacen que el valor máximo de  $I(t)$  sea de 3,49 A, a los 9,07 ms de iniciarse el transitorio. La respuesta transitoria ahora es más lenta, ya que el coeficiente de amortiguación es menor, siendo la duración del régimen transitorio 22,6 ms.

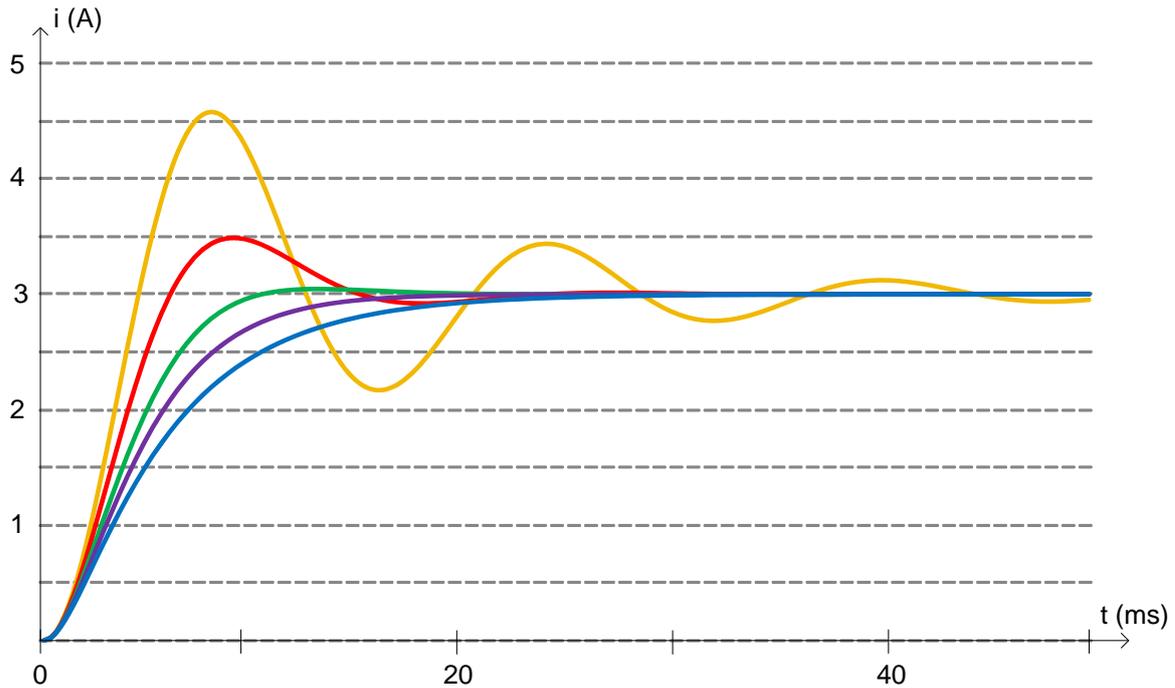


Figura 2.45

(e) Por último, para  $R$  igual a  $200 \Omega$  el coeficiente de amortiguación  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2 \cdot 500 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ rad/s}$$

Como en los casos de los dos apartados anteriores la respuesta transitoria del circuito es subamortiguada, con dos raíces reales complejas de parte real negativa y de valores:

$$s_{1,2} = -80 \pm \sqrt{80^2 - 400^2} \rightarrow s_1 = -80 + j391,92 \quad \text{y} \quad s_2 = -80 - j391,92$$

A partir de las condiciones iniciales, se obtiene ahora que la expresión de la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = 3 - (3 \cos 391,92 t + 0,6124 \sin 391,92 t) e^{-80 t}$$

La representación de la variable se muestra en la figura 2.45 en color naranja. Como se trata de una respuesta subamortiguada existen sobreoscilaciones en torno al valor final, en este caso aun mayores y más rápidas que en los dos casos anteriores, que hacen que el valor máximo de  $I(t)$  sea de 4,58 A y ocurra a los 8 ms de iniciarse el transitorio. Sin embargo, ahora el régimen transitorio es más lento, ya que el coeficiente de amortiguación es menor, y su duración es de 58,7 ms.

(f) En los circuitos de segundo orden las raíces pueden representarse como puntos en el plano complejo (como ya sabe, con parte real en el eje de abcisas y la parte imaginaria en el de ordenadas). Para el circuito del ejercicio, cuando  $R$  varía desde valores muy pequeños hasta  $100 \Omega$  las dos raíces son reales negativas (respuesta sobreamortiguada) que se sitúan en el eje de abcisas y tienden a juntarse en la raíz doble  $-400 \text{ rad/s}$  que corresponde al valor de  $R$  igual a  $100 \Omega$  (respuesta críticamente amortiguada). A partir de este valor y conforme aumenta  $R$ , las raíces son dos números complejos conjugados (respuesta subamortiguada) cuya parte real se va aproximando cada vez más a 0 y la imaginaria a  $\pm j\omega_0$ . El lugar geométrico de las posiciones que ocupan las dos raíces en el plano complejo en función del valor de  $R$  se representa en la figura 2.46, donde las flechas indican el sentido del desplazamiento de las raíces de la ecuación característica del circuito conforme aumenta el valor de  $R$  (en la misma figura se representa también la posición de las raíces de los cinco casos analizados, en cada uno del mismo color que el de su gráfica de la figura 2.45).

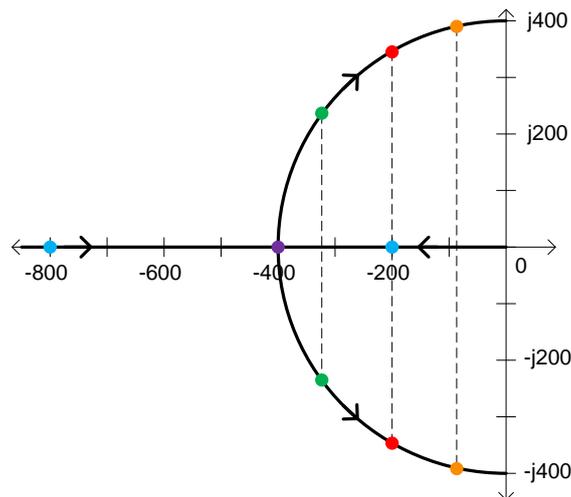


Figura 2.46

La interpretación física de la respuesta del circuito de segundo orden es más sencilla a la vista del lugar geométrico de las raíces y de la posición que ocupan sus dos raíces en él. Así: a) el transitorio es más lento cuanto más próximo a 0 esté el valor de la parte real de sus raíces (en el caso de dos raíces reales, la más próxima al origen se denomina raíz dominante y es la que define en mayor medida el régimen transitorio del circuito); b) mientras las raíces no tengan parte imaginaria la respuesta no presentará oscilaciones en torno al valor final; y c) cuando hay oscilaciones (cuando la respuesta es subamortiguada) éstas serán de mayor amplitud y mayor frecuencia cuanto mayor sea el valor de la parte imaginaria (el caso límite se tiene cuando las dos raíces son imaginarias puras que corresponde a la respuesta sin pérdidas o de amortiguamiento nulo).

Para finalizar, indicar que en este ejemplo el lugar geométrico de las raíces tiene esta forma determinada (una semicircunferencia de radio  $\omega_0$  centrada en el origen más el semieje de abscisas negativo) porque el valor de la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  es el mismo para cualquier valor de  $R$ . Si para este mismo circuito en vez de ser variable el valor de la resistencia lo hubiese sido, por ejemplo, el de la bobina, con  $R$  y  $C$  fijos, el lugar geométrico de las raíces tendría otra forma... trate de hacerlo y deducir cuál es esa forma.

### Ejercicio 2.9.

La variable cuya respuesta transitoria hay que obtener es este ejercicio no es ni la tensión en el condensador ni la intensidad en la bobina del circuito RLC, por lo que lo primero que hay que hacer es expresar la intensidad  $i$  que circula por interruptor en función de esas dos variables. Una vez cerrado el interruptor, aplicando la primera ley de Kirchhoff al nudo al que están conectados el interruptor, el condensador y la resistencia de  $30 \Omega$ , se obtiene:

$$i = i_{R30} + i_C = \frac{u_C}{30} + C \frac{du_C}{dt}$$

por lo que en este ejercicio, con calcular la respuesta transitoria de la tensión en el condensador  $u_C$  es suficiente. Para calcular los valores iniciales en la bobina y en el condensador se analiza el circuito en alterna con el interruptor abierto; aplicando el divisor de intensidad, la intensidad que circula por la bobina es:

$$\vec{I}_L = 10 \angle 0^\circ \cdot \frac{6}{6 + j7,81} = 6,09 \angle -52,5^\circ \text{ A} \quad \rightarrow \quad i_L = 8,61 \text{ sen}(25t - 52,5^\circ)$$

Y como el condensador está descargado se tiene que esos dos valores iniciales son:

$$U_C(0) = 0 \quad \text{e} \quad I_L(0) = 8,61 \text{ sen}(-52,5^\circ) = -6,83 \text{ A}$$

Una vez cerrado el interruptor se tiene un circuito RLC paralelo, en el que el valor de la resistencia es  $5 \Omega$  (el paralelo de las resistencias de  $30 \Omega$  y de  $6 \Omega$ ). Sustituyendo valores, se tiene que la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,3125 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 40 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha > \omega_0$  el circuito está sobreamortiguado, con dos raíces reales negativas:

$$s_{1,2} = -50 \pm \sqrt{50^2 - 40^2} \quad \rightarrow \quad s_1 = -20 \quad \text{y} \quad s_2 = -80$$

Entonces, la tensión  $U_C(t)$  en el condensador en el régimen transitorio será de la forma:

$$U_C(t) = K_1 e^{-20t} + K_2 e^{-80t} + U_{C,\infty}(t)$$

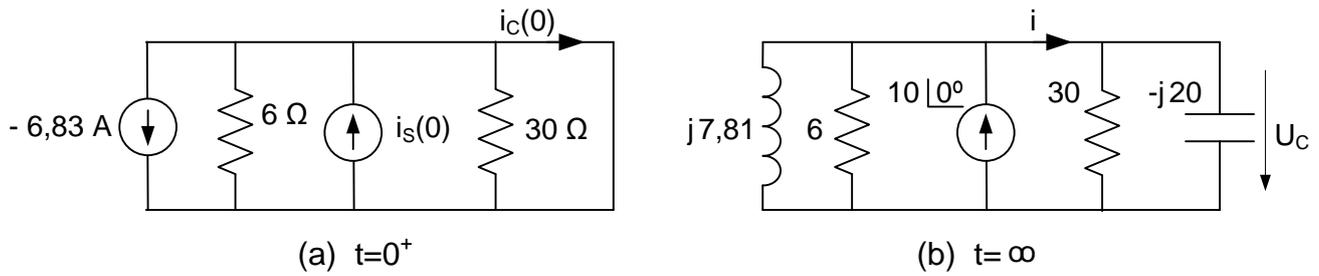


Figura 2.47

Conforme a las condiciones de continuidad en la bobina y en el condensador y con el valor de la intensidad en la fuente para  $t=0$ , se tiene el circuito de la figura 2.47.a que corresponde al instante inicial, nada más cerrar el interruptor, en donde:

$$i_C(0) = i_S(0) - i_L(0) = 0 - (-6,83) = 6,83 \text{ A}$$

Por otro lado, resolviendo el circuito en alterna de la figura 2.47.b, una vez alcanzado el régimen permanente (respuesta particular de la ecuación diferencial completa), se tiene que:

$$\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{j7,81} + \frac{1}{-j20} \right) \vec{U}_C = 10 \angle 0^\circ$$

despejando:

$$\vec{U}_C = \frac{10 \angle 0^\circ}{0,2 - j0,078} = 46,58 \angle 21,3^\circ \text{ V} \quad \rightarrow \quad U_{C,\infty}(t) = 65,88 \text{ sen}(25t + 21,3^\circ)$$

Para obtener los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se utilizan los valores iniciales calculados. Así:

$$\left. \begin{array}{l} U_C(0) : 0 = 65,88 \text{ sen}(21,3^\circ) + K_1 + K_2 \\ I_C(0) : 6,83 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot [1647 \text{ cos}(21,3^\circ) - 20 K_1 - 80 K_2] \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1 = -0,532 \\ K_2 = -23,398 \end{array} \right.$$

De esta forma, la respuesta transitoria de la tensión en el condensador es:

$$U_C(t) = -0,532 \epsilon^{-20t} - 23,398 \epsilon^{-80t} + 65,88 \text{ sen}(25t + 21,3^\circ)$$

Y, finalmente, la intensidad que circula por el interruptor para  $t \geq 0$  es:

$$i(t) = \frac{u_C}{30} + C \frac{du_C}{dt} = 3,6 \cdot 10^{-3} \epsilon^{-20t} + 2,964 \epsilon^{-80t} + 3,96 \text{ sen}(25t + 77,6^\circ)$$

**Ejercicio 2.10.**

(a) Se trata de un circuito de primer orden por lo que la duración del periodo transitorio es igual a cinco veces la constante de tiempo, por lo que:

$$5\tau = 0,05 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0,01 \text{ s} \quad \rightarrow \quad R_{eq} = \frac{0,024}{0,01} = 2,4 \Omega$$

Para el circuito de este ejercicio, con el interruptor cerrado, la resistencia equivalente que ve la bobina es el paralelo de las tres resistencias, con lo que el valor de R pedido es:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{R}} = \frac{24R}{24 + 7R} = 2,4 \Omega \quad \rightarrow \quad R = 8 \Omega$$

(b) En el circuito del enunciado, los valores de la intensidad en la bobina en los instantes inicial (con el interruptor abierto) y final (con el interruptor cerrado) son independientes del valor de la resistencia R y son:

$$I(0) = 0 \quad \text{e} \quad I(\infty) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ A}$$

Para un valor de la resistencia R de  $2 \Omega$ , el valor de la constante de tiempo es 19 ms, con lo que la expresión del régimen transitorio de la intensidad en la bobina es:

$$I(t) = \frac{7}{3} + \left(0 - \frac{7}{3}\right) \epsilon^{-52,6t} = \frac{7}{3} \cdot (1 - \epsilon^{-52,6t})$$

y se representa en la figura 2.48.

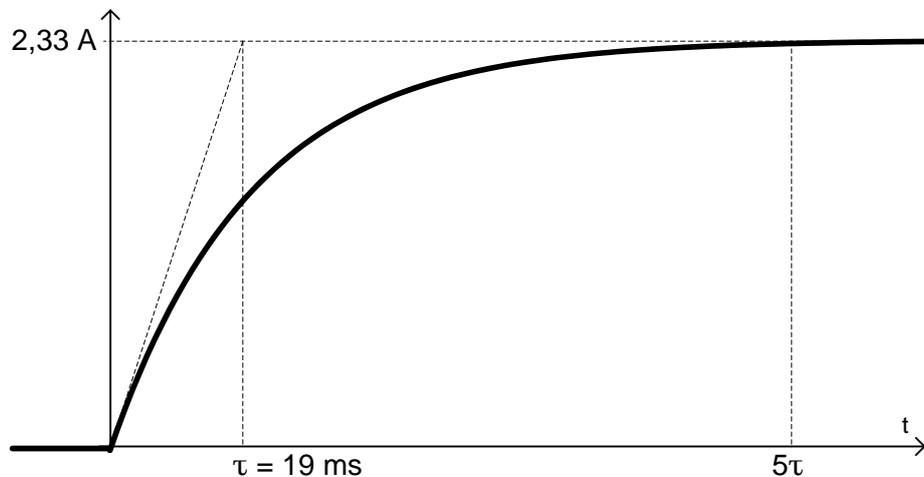


Figura 2.48

**Ejercicio 2.11.**

(a) El transitorio que se produce en este ejercicio es de segundo orden. Una vez abierto el interruptor se tiene un circuito RLC serie en el que la constante de amortiguación y la frecuencia de resonancia del circuito son:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{8 + 2}{2 \cdot 0,0125} = 400 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,0125 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}} = 632,5 \text{ rad/s}$$

Como  $\alpha < \omega_0$  el circuito presenta una respuesta subamortiguada, con dos raíces complejas conjugadas de valores  $-400 \pm j 490$ . Por tanto, la intensidad en la bobina para  $t \geq 0$  es de la forma:

$$I(t) = I(\infty) + (K_1 \cos \omega_a t + K_2 \text{ sen } \omega_a t) e^{-\alpha t}$$

(b) En el instante inicial, la corriente que circula por la bobina es 3 A y la tensión en el condensador es 0 (valores iniciales que corresponden a las condiciones de continuidad). Analizando el circuito de la figura 2.49.a que corresponde al instante  $t=0^+$  se obtiene que la tensión en la bobina es:

$$U_L(0) = 24 - 3 \cdot (8 + 2) = -6 \text{ V}$$

Por último, es fácil ver que la corriente que circula por la bobina en el régimen permanente,  $t=\infty$ , es nula. Con todos estos valores se pueden calcular los valores de los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} I(0) : \quad 3 = K_1 \\ U_L(0) : \quad -6 = 0,0125 \cdot (-400 K_1 + 490 K_2) \end{array} \right\} \rightarrow K_1 = 3 \quad \text{y} \quad K_2 = 1,47$$

De esta forma, se tiene que la intensidad que circula por la bobina es:

$$I(t) = (3 \cos 490 t + 1,47 \text{ sen } 490 t) e^{-400 t}$$

(c) En la figura 2.49.b se representa esa variable.

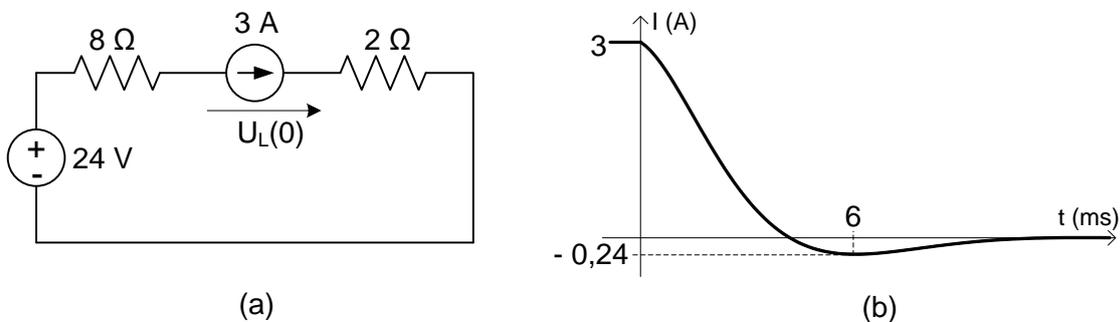


Figura 2.49



## Capítulo 3

# INSTALACIONES ELÉCTRICAS. SISTEMAS TRIFÁSICOS

### 3.1. REPASO A LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS TRIFÁSICOS.

En este apartado se hace un somero repaso de las definiciones básicas de los sistemas trifásicos y del método de análisis para sistemas equilibrados basado en la resolución de un circuito monofásico equivalente. Aunque usted esto ya debe conocerlo, lea este primer apartado con atención ya que muchos de los errores que se cometen se deben a no tener muy claros esos conceptos básicos.

#### 3.1.1. Definiciones

##### Generación de un sistema trifásico de tensiones equilibrado.

En la generación, el transporte y la distribución de energía eléctrica no se utilizan sistemas monofásicos de corriente alterna sino **sistemas trifásicos** ya que estos últimos permiten transportar mayores cantidades de energía con menores pérdidas, necesitan instalaciones más simples (menor número de conductores, integración de elementos, etc.) y, sobre todo, permite la conexión de máquinas eléctricas rotativas (motores eléctricos). Por estos motivos, los sistemas de corriente alterna trifásicos son los habituales en la alimentación de las instalaciones eléctricas de los edificios y de las fábricas y son los utilizados en la práctica totalidad de las actividades industriales.

El principio físico en el que se basa la obtención de una tensión senoidal es el siguiente: sea un campo magnético uniforme que gira con una velocidad angular constante en el interior de una espira rígida fija, entonces sobre esa espira se induce una tensión senoidal producida por la variación senoidal en el tiempo del flujo magnético que la atraviesa. Este principio físico es la ley de Faraday, una de las cuatro leyes fundamentales del electromagnetismo.

La generación de un sistema trifásico de tensiones senoidales equilibradas se consigue mediante una máquina eléctrica rotativa denominada generador síncrono, alternador o, simplemente, generador eléctrico y se basa en el principio físico antes enunciado. De una forma muy simplificada, supóngase un campo magnético uniforme, representado en la figura 3.1.a por un imán permanente, que gira con una velocidad angular constante  $\Omega$  en el interior del generador eléctrico. Si en la cara interna de la parte fija de la máquina se sitúa un conjunto de espiras A1-A2 (denominado devanado), la variación del flujo que las atraviesa al girar el campo magnético induce en ellas una tensión senoidal, tal y como representa la forma de onda de la figura. Supóngase ahora que, tal y

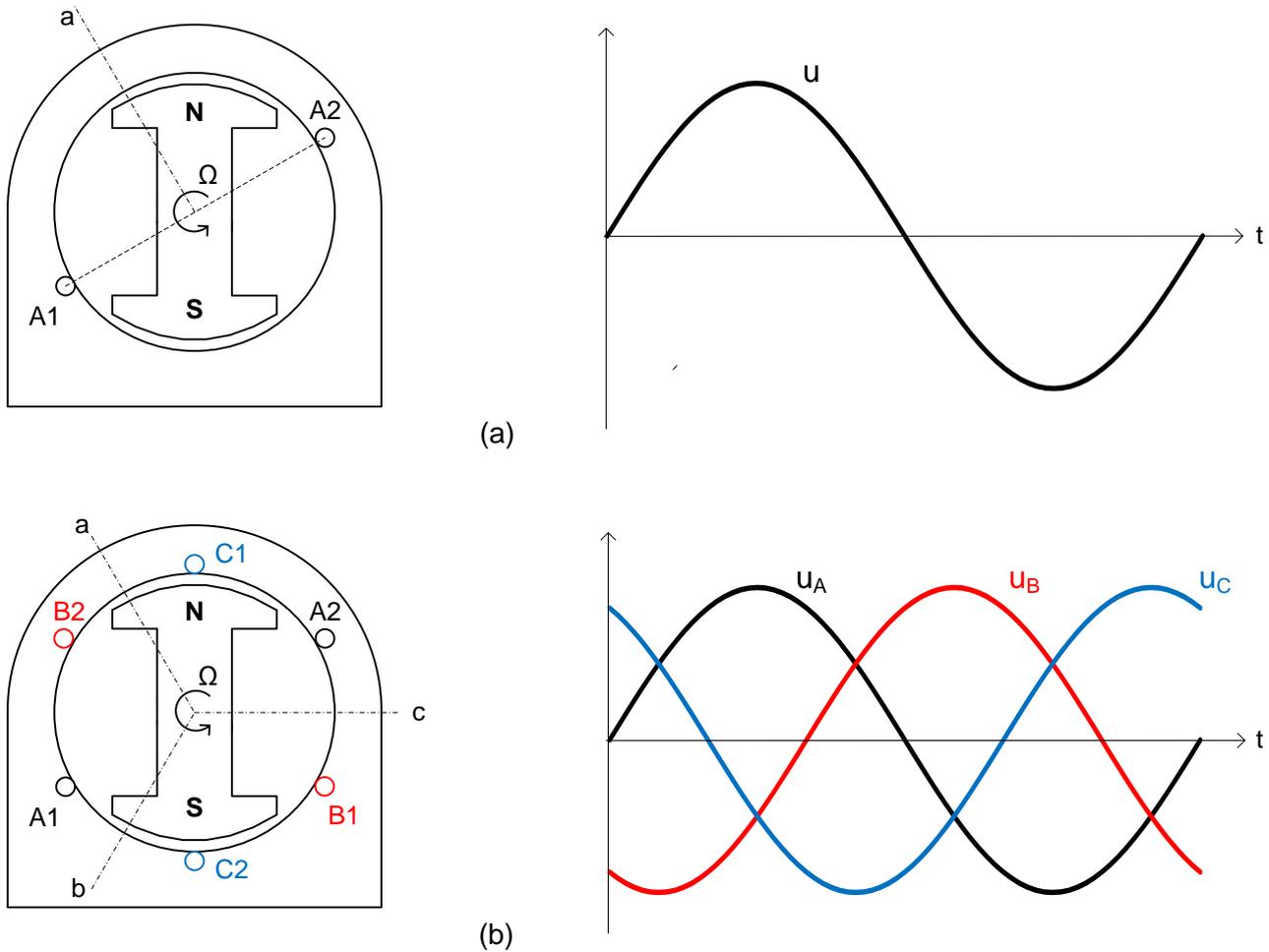


Figura 3.1

como se representa en la figura 3.1.b, en la cara interna de la parte fija de la máquina se disponen tres conjuntos de espiras o devanados iguales, A1-A2, B1-B2 y C1-C2, situados de tal forma que estén separados entre sí un ángulo de  $2\pi/3$  radianes geométricos; entonces la variación del flujo magnético en los devanados al girar el campo magnético da lugar a tres tensiones senoidales, una en cada devanado, iguales y desfasadas entre sí  $2\pi/3$  radianes eléctricos.

La frecuencia  $f$  de las tensiones senoidales generadas es función de la velocidad angular  $\Omega$  de giro del campo magnético. En el caso de las figuras 3.1, la pulsación de la forma de onda senoidal generada coincide con la velocidad de giro del campo: en cada vuelta del campo ( $2\pi$  radianes geométricos) se genera un periodo de la onda de tensión ( $2\pi$  radianes eléctricos). Matemáticamente se expresa como:

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} p \tag{3.1}$$

donde la velocidad angular  $\Omega$  viene dada en rad/s y  $p$  es el número de pares de polos del campo magnético; para el ejemplo de las figuras 3.1 el número de pares de polos es 1. En la técnica es habitual expresar la velocidad angular de las máquina en revoluciones por minuto, rev/min o rpm, en vez de hacerlo en la unidad del Sistema Internacional que es el rad/s. Por este motivo es mucho más habitual encontrar la ecuación anterior escrita como:

$$\frac{60 f}{p} = \Omega \text{ [rev/min]} \quad (3.2)$$

De acuerdo con esta expresión para conseguir una tensión senoidal de 50 Hz, el campo magnético creado por un par de polos debe girar con una velocidad angular de 3000 rev/min.

### Magnitudes eléctricas de fase y de línea.

El esquema eléctrico de la figura 3.2 representa un generador trifásico. Un extremo de cada uno de los devanados está unido en un mismo punto N, común a los tres y llamado **punto neutro** del generador, con el fin de que las tensiones generadas por las tres fases del generador sean fijas unas respecto a las otras. De esta forma, un **sistema trifásico equilibrado de tensiones** se define como un sistema de corriente alterna formado por tres tensiones senoidales (tres fases) de igual módulo y frecuencia pero desfasadas entre sí  $\pm 120^\circ$ , esto es:

$$\begin{cases} \vec{U}_{AN}(t) = \sqrt{2} U_f \text{ sen}(\omega t) & = U_f \underline{0^\circ} \\ \vec{U}_{BN}(t) = \sqrt{2} U_f \text{ sen}(\omega t - 120^\circ) & = U_f \underline{-120^\circ} \\ \vec{U}_{CN}(t) = \sqrt{2} U_f \text{ sen}(\omega t + 120^\circ) & = U_f \underline{120^\circ} \end{cases} \quad (3.3)$$

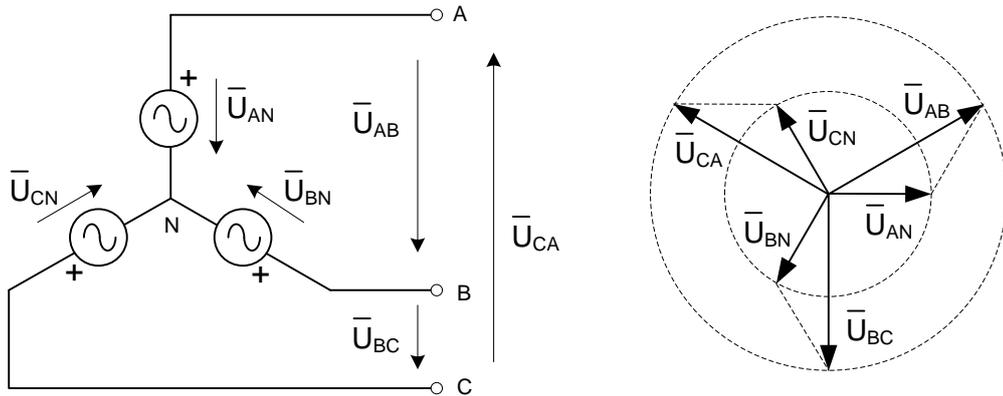


Figura 3.2

La tensión entre la fase y el punto neutro se llama **tensión de fase**,  $U_f$ . La tensión entre dos fases, esto es, entre dos líneas, se llama **tensión de línea**,  $U$ . Para el esquema anterior representado en la figura 3.2, las tensiones de línea son:

$$\begin{cases} \vec{U}_{AB}(t) = \vec{U}_{AN} - \vec{U}_{BN} = \sqrt{2} U \text{ sen}(\omega t + 30^\circ) = U \underline{30^\circ} \\ \vec{U}_{BC}(t) = \vec{U}_{BN} - \vec{U}_{CN} = \sqrt{2} U \text{ sen}(\omega t - 90^\circ) = U \underline{-90^\circ} \\ \vec{U}_{CA}(t) = \vec{U}_{CN} - \vec{U}_{AN} = \sqrt{2} U \text{ sen}(\omega t + 150^\circ) = U \underline{150^\circ} \end{cases} \quad (3.4)$$

En los sistemas trifásicos se cumple que la relación que existe entre los módulos de la tensión de línea,  $U$ , y la tensión de fase,  $U_f$ , es:

$$U_f = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad (3.5)$$

Se define la **intensidad de línea**,  $I$ , como la intensidad de corriente eléctrica que circula por cada una de las tres líneas o fases del sistema. Aunque en el caso de las intensidades no existe un concepto similar al del “punto neutro” utilizado para las tensiones, por analogía con ellas se define la **intensidad de fase**,  $I_f$ , de forma que se cumple que la relación que existe entre los módulos de la intensidad de línea,  $I$ , y de la intensidad de fase,  $I_f$ , es:

$$I_f = \frac{I}{\sqrt{3}} \quad (3.6)$$

Desde el punto de vista de la práctica profesional, cuando se habla de tensión o de intensidad en un sistema trifásico, sin especificar nada más, se debe entender siempre que se trata de tensión de línea o de intensidad de línea respectivamente. Las magnitudes de fase se deben indicar como tales específicamente o utilizando el subíndice  $f$ . Las tres fases del sistema se designan por la serie de letras A, B y C, aunque, en bastantes ocasiones, también se utilizan las letras R, S y T.

### Secuencia de fases.

Cuando se analizan y se trabaja con sistemas e instalaciones eléctricas trifásicas (por ejemplo para la conexión de cargas y de aparatos de medida, la interconexión de sistemas, etc.) es necesario saber en qué orden se suceden las tres fases, es decir, para cada fase hay que saber de las otras dos cuál es la que está retrasada  $120^\circ$  respecto a ella y cuál es la que está adelantada  $120^\circ$ . Así, si las tres fases de un sistema trifásico se identifican con las letras A, B y C, se dice que el sistema es:

- De **secuencia directa** cuando, respecto a la fase identificada como A, la fase B está retrasada  $120^\circ$  y la fase C está adelantada  $120^\circ$ . La figura 3.2 corresponde a un sistema trifásico de secuencia directa y muestra el diagrama de fases o diagrama vectorial de tensiones de fase y de línea.
- De **secuencia inversa** cuando, respecto a la fase identificada como A, la fase C está retrasada  $120^\circ$  y la fase B está adelantada  $120^\circ$ . La figura 3.3 corresponde a un sistema trifásico de secuencia inversa y también muestra el diagrama vectorial de tensiones de fase y de línea.

Por tanto, los sistemas de ecuaciones de las tensiones de fase y de las tensiones de línea dados por (3.3) y (3.4) corresponden a un sistema de secuencia directa. Para el sistema trifásico de secuencia inversa representado en la figura 3.3 estas expresiones fasoriales son, por tanto:

$$\begin{cases} \vec{U}_{AN}(t) = \sqrt{2} U_f \operatorname{sen}(\omega t) & = U_f \underline{|0^\circ} \\ \vec{U}_{BN}(t) = \sqrt{2} U_f \operatorname{sen}(\omega t + 120^\circ) & = U_f \underline{|120^\circ} \\ \vec{U}_{CN}(t) = \sqrt{2} U_f \operatorname{sen}(\omega t - 120^\circ) & = U_f \underline{|-120^\circ} \end{cases} \quad (3.7)$$

y

$$\begin{cases} \vec{U}_{AB}(t) = \vec{U}_{AN} - \vec{U}_{BN} = \sqrt{2}U \operatorname{sen}(\omega t - 30^\circ) = U \underline{-30^\circ} \\ \vec{U}_{BC}(t) = \vec{U}_{BN} - \vec{U}_{CN} = \sqrt{2}U \operatorname{sen}(\omega t + 90^\circ) = U \underline{90^\circ} \\ \vec{U}_{CA}(t) = \vec{U}_{CN} - \vec{U}_{AN} = \sqrt{2}U \operatorname{sen}(\omega t - 150^\circ) = U \underline{-150^\circ} \end{cases} \quad (3.8)$$

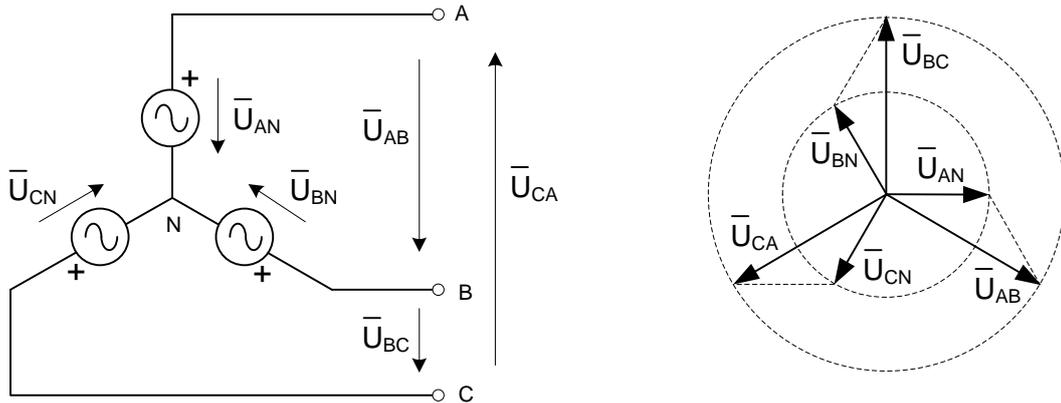


Figura 3.3

Esta distinción en la sucesión de las fases es lo que se denomina **secuencia de fases** del sistema trifásico y es importante tener claro que no es una característica propia o intrínseca del sistema (como sí lo son las magnitudes de línea y de fase eléctricas vistas antes), sino que es un convenio que se utiliza para saber el orden, o la secuencia, en el que están las tres fases una vez que se las ha identificado como A, B y C.

### Las cargas trifásicas.

Una carga trifásica equilibrada o simétrica está formada por tres impedancias iguales. Cada una de ellas se denomina **fase de la carga**. Las tres impedancias pueden conectarse de dos formas distintas: en estrella y en triángulo.

En la **conexión en estrella**, las tres impedancias se conectan de forma que tengan un punto común a las tres denominado **neutro de la carga**. Este punto neutro puede a su vez estar unido o no al neutro del generador por un conductor (en sistemas equilibrados se demuestra que ambos neutros están siempre al mismo potencial aunque no estén físicamente conectados). Los tres extremos que quedan libres de la carga se conectan a las tres fases del sistema, tal y como se representa en la figura 3.4. En este tipo de conexión, la tensión en cada fase de la carga es la tensión de fase, es decir  $U/\sqrt{3}$ , mientras que la intensidad que circula por cada una de ellas es la intensidad de línea,  $I$ , es decir:

$$\vec{Z}_Y : \begin{cases} U_{Z_Y} = U_f = \frac{U}{\sqrt{3}} \\ I_{Z_Y} = I \end{cases} \quad (3.9)$$

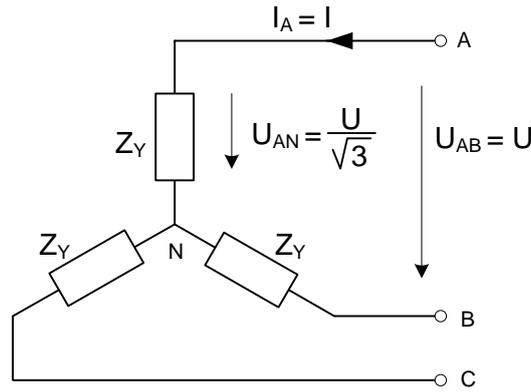


Figura 3.4

En la **conexión en triángulo**, las tres impedancias se conectan una a continuación de otra formando un triángulo y sus vértices se conectan a las tres fases del sistema eléctrico, tal y como se representa en la figura 3.5. En este tipo de conexión no existe físicamente el punto neutro de la carga. En la conexión en triángulo, la tensión en cada fase de la carga es la tensión de línea,  $U$ , mientras que la intensidad que circula por cada una de ellas es la intensidad de fase,  $I/\sqrt{3}$ , es decir:

$$\vec{Z}_{\Delta} : \begin{cases} U_{Z_{\Delta}} = U \\ I_{Z_{\Delta}} = I_f = \frac{I}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (3.10)$$

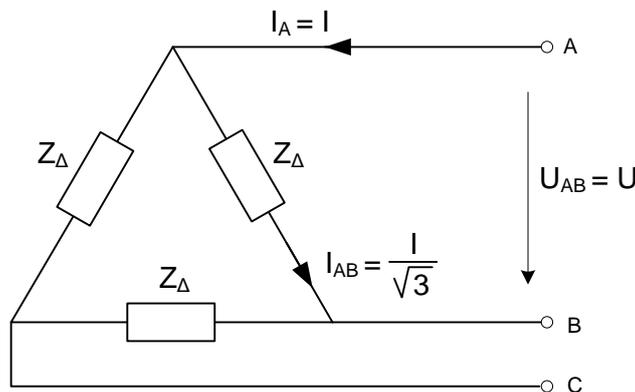


Figura 3.5

Por último, indicar que una carga equilibrada conectada en triángulo (en estrella) siempre puede representarse y sustituirse por su carga equivalente conectada en estrella (en triángulo), siendo la relación entre las impedancias por fase en ambas la siguiente:

$$\vec{Z}_{\Delta} = 3 \vec{Z}_Y \quad (3.11)$$

**MUY IMPORTANTE:** Es frecuente confundir el concepto de “fase eléctrica” (tensión de fase e intensidad de fase) con el concepto de “fase física” de una carga o un generador (tensión e intensidad en la fase de la carga o del generador), lo que da lugar a errores graves. Hay que tener muy claro qué es cada uno:

- Las variables eléctricas de fase, tensión de fase ( $U_f$ ) e intensidad de fase ( $I_f$ ), son propias e intrínsecas al sistema eléctrico trifásico y no dependen para nada de la conexión que tenga la carga o el generador: ¡piense que en un sistema eléctrico puede haber miles de cargas y cientos de generadores conectados tanto en estrella como en triángulo! La relación que hay entre sus módulos y los módulos de la tensión de línea y de la intensidad de línea viene dada por las ecuaciones (3.5) y (3.6) respectivamente. Así, por ejemplo, cuando se dice que un sistema trifásico de tensiones es de 400/230 V, se está indicando que el módulo o valor eficaz de la tensión de línea del sistema es 400 V y el de la tensión de fase es 230 V.
- La tensión y la intensidad que hay en cada fase o elemento físico que forman un generador o una carga trifásica concreta dependerá de cómo esté conectada, en estrella o en triángulo. Por tanto, aquí sí estarán relacionadas con las tensiones e intensidades de línea y de fase del sistema eléctrico según esté conectada: en estrella (ecuación (3.9)) o en triángulo (ecuación (3.10)).
- De esta forma, es habitual encontrar afirmaciones como la que se hace en el apartado 9.3.a, página 211, del libro “Fundamentos de tecnología eléctrica” en la que se dice “en estrella: la intensidad de línea es igual que la intensidad de fase”, expresión coloquial, fruto de la práctica profesional, que ha de entenderse como **“en estrella: la intensidad en la fase de la carga es igual que la intensidad de línea”**.
- De la misma forma, es habitual encontrar afirmaciones como la que se hace en el apartado 9.3.b, página 214, del mismo libro en donde se dice “en triángulo: la tensión de línea es igual que la tensión de fase”, expresión coloquial, fruto de esa misma práctica profesional, que ha de entenderse como **“en triángulo: la tensión en la fase de la carga es igual que la tensión de línea”**.
- Para evitar esa posible confusión entre las variables de fase eléctrica del sistema con las de la fase física de la carga o del generador, hace años se intentó introducir el criterio de designar las variables eléctricas “de fase” y “de línea” como “simple” y “compuesta” respectivamente, dejando el nombre de “fase” únicamente para la fase física que forma la carga o el generador. Este intento no cuajó (la costumbre de la práctica profesional pesa mucho) y, aunque no merece la pena utilizarlos, sí debe conocerlo porque aún se encuentran en algunos libros de texto de ingeniería eléctrica.

### 3.1.2. Análisis de sistemas trifásicos equilibrados.

Las cargas trifásicas se conectan al generador trifásico mediante tres líneas iguales, una por fase, de impedancia  $\vec{Z}_L$  y forman así un sistema trifásico que se puede representar mediante un circuito eléctrico cuyo análisis se aborda en este apartado.

Se ha visto en el apartado anterior que tres cargas iguales pueden conectarse en estrella o en triángulo para formar una carga trifásica, y que cualquiera de estas dos conexiones puede transformarse en la otra equivalente mediante la ecuación (3.11).

De la misma forma, las tres fases del generador trifásico pueden estar conectadas en estrella o en triángulo. Si el generador está conectado en estrella, la tensión de cada fase del generador es la tensión de fase del sistema y si está conectado en triángulo la tensión de cada fase del generador es la tensión de línea del sistema. Y como ocurría en el caso de las cargas, cada una de esas dos posibles conexiones del generador también puede transformarse en la otra equivalente aplicando las ecuaciones (3.3) y (3.4), si es de secuencia directa, o las (3.7) y (3.8), si es de secuencia inversa, y la ecuación (3.11) si existe la impedancia interna por fase del generador.

Esto hace que según sean las conexiones en estrella (Y) o en triángulo ( $\Delta$ ) tanto de las fases del generador como de las de la carga, al analizar el conjunto “generador-carga” se den cuatro posibles combinaciones de conexión: estrella-estrella (Y-Y), estrella-triángulo (Y- $\Delta$ ), triángulo-estrella ( $\Delta$ -Y) y triángulo-triángulo ( $\Delta - \Delta$ ). Gracias a que se puede transformar cualquier conexión en triángulo en su conexión equivalente en estrella y viceversa, esas cuatro posibles combinaciones de conexión pueden reducirse a una. Lo más habitual y sencillo es hacerlo a la conexión estrella-estrella (Y-Y) que es la que se analiza a continuación.

### El circuito monofásico equivalente fase-neutro.

Sea el sistema trifásico representado por el circuito de la figura 3.6, que está formado por un generador conectado en estrella, de tensión de fase  $E_f$  e impedancia interna  $\vec{Z}_g$ , y una carga formada por tres impedancias iguales  $\vec{Z}$ , también en estrella, que están conectados entre sí a través de tres conductores o líneas iguales de impedancia  $\vec{Z}_L$ . Al ser el sistema un sistema trifásico equilibrado (las tres fases del sistema son exactamente iguales y las tres tensiones del generador forman un sistema trifásico de tensiones) al analizar ese circuito se obtiene que los puntos neutros N y N' de las dos estrellas están al mismo potencial o, lo que es lo mismo, que  $\vec{U}_{N'N} = 0$  (esto lo podrá demostrar usted mismo aplicando el Teorema de Millman, que se enuncia más adelante en este mismo capítulo).

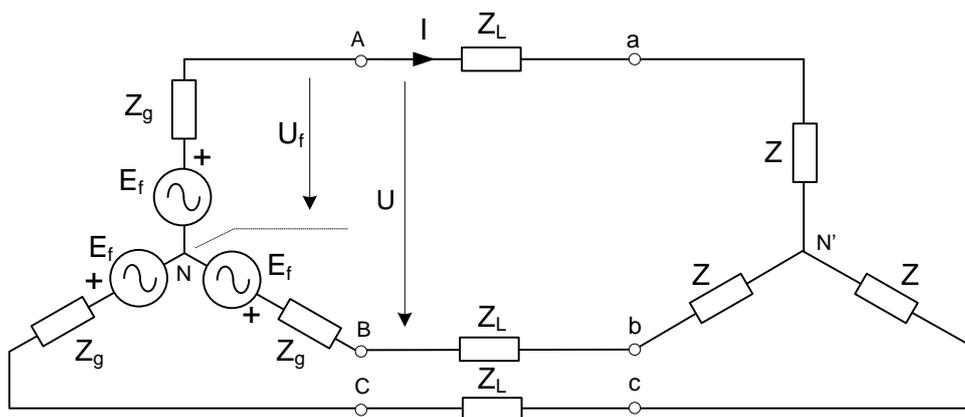


Figura 3.6

Esta conclusión se demuestra que es independiente de que esos dos puntos neutros estén físicamente unidos o no por un conductor. Por ello, cada fase puede analizarse por separado mediante el circuito monofásico de la figura 3.7, denominado **circuito monofásico equivalente fase-neutro**, que está formado por la tensión y la impedancia de una fase del generador conectado en estrella, la impedancia por fase de la línea y la impedancia de una fase de la carga conectada en

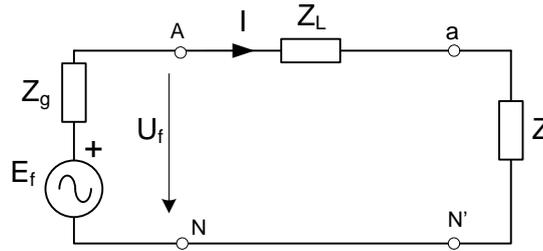


Figura 3.7

estrella. Resolviendo ese circuito se obtienen las tensiones de fase, las intensidades de línea y las potencias por fase, resultados que son iguales para las demás fases del sistema teniendo en cuenta el ángulo de  $\pm 120^\circ$  que hay entre ellas. El ejercicio 3.2 utiliza este sencillo método de análisis.

### El circuito monofásico equivalente fase-fase.

En algunas ocasiones es más conviene transformar los generadores y las cargas a sus equivalentes conectados en triángulo, con lo que resulta un circuito trifásico equilibrado triángulo-triángulo ( $\Delta - \Delta$ ). Sea el sistema trifásico representado por el circuito de la figura 3.8, que está formado por un generador conectado en triángulo, de tensión de fase  $E$  e impedancia interna  $\vec{Z}_g$ , y una carga formada por tres impedancias iguales  $\vec{Z}$ , también en triángulo, que están conectados entre sí a través de tres conductores o líneas iguales de impedancia  $\vec{Z}_L$ .

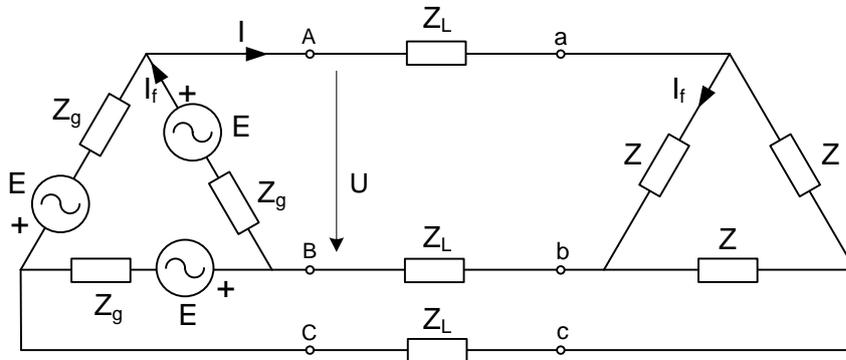


Figura 3.8

Al analizar por mallas el circuito de la figura 3.8, y teniendo en cuenta que el sistema trifásico es equilibrado, se demuestra que el resultado es el mismo que el que se obtendría al analizar cada una de las tres fases por separado (como se representa en el la figura 3.9.a) mediante el circuito monofásico de la figura 3.9.b. Este circuito se denomina **circuito monofásico equivalente fase-fase**, y está formado por la tensión y la impedancia de una fase del generador conectado en triángulo, tres veces la impedancia por fase de la línea y la impedancia de una fase de la carga conectada en triángulo. Resolviendo ese circuito se obtienen las tensiones de línea, las intensidades de fase y las potencias por fase, resultados que son iguales para las demás fases del sistema teniendo en cuenta el ángulo de  $\pm 120^\circ$  que hay entre ellas.

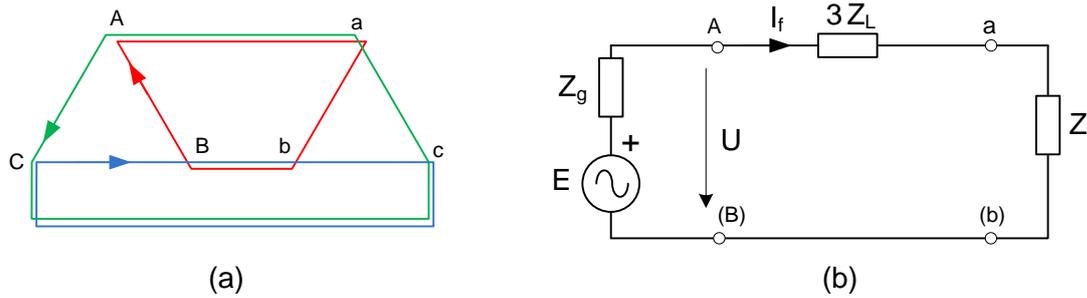


Figura 3.9

### 3.1.3. Potencia en sistemas trifásicos.

La potencia de un sistema trifásico es la suma de la potencia de cada una de sus fases. Si el sistema es equilibrado, por simetría, se obtiene que la potencia total o potencia trifásica,  $P$  y  $Q$ , es igual a tres veces la potencia de una fase cualquiera,  $P_f$  y  $Q_f$ .

Así y a partir de las correspondientes expresiones de potencia definidas para los sistemas monofásicos de corriente alterna, se define la **potencia activa** de un sistema trifásico como:

$$P = 3P_f = 3U_Z I_Z \cos \phi = \sqrt{3}UI \cos \phi \tag{3.12}$$

y la **potencia reactiva** como:

$$Q = 3Q_f = 3U_Z I_Z \sin \phi = \sqrt{3}UI \sin \phi \tag{3.13}$$

La **potencia compleja** de un sistema trifásico equilibrado se obtiene como:

$$\vec{S} = 3\vec{S}_f = 3\vec{U}_Z \vec{I}_Z^* = 3(P_f + jQ_f) = P + jQ \tag{3.14}$$

y su módulo es la **potencia aparente**, que viene dada por la expresión:

$$S = 3S_f = \sqrt{3}UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{3.15}$$

#### EJEMPLO 3.1

*Demostrar que la expresión de la potencia activa consumida por una carga trifásica (ecuación (3.12)) es la misma independientemente del tipo de conexión que ésta tenga.*

Sea la carga trifásica conectada en estrella de la figura 3.10.a. Entonces y conforme a la ecuación (3.12) se tiene:

$$P = 3U_Z I_Z \cos \varphi = 3 \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

Supongamos ahora la situación de la figura 3.10.b en la que la carga trifásica conectada en triángulo es equivalente a la anterior (de acuerdo a la relación entre las impedancias dada por (3.11)). En este caso y conforme a la ecuación (3.12)) se tiene ahora que:

$$P = 3U_Z I_Z \cos \varphi = 3U \frac{I}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

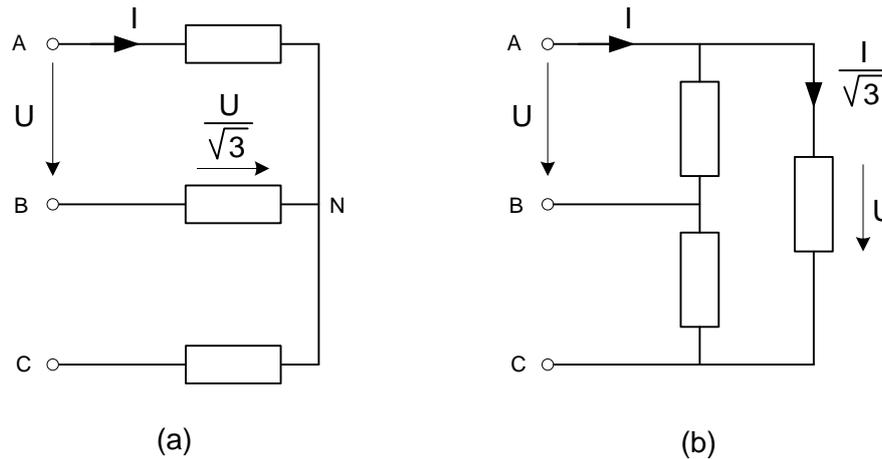


Figura 3.10

En el ejemplo anterior, en ambos casos se llega a la misma expresión de  $P$  dada por (3.12), como es lógico, ya que el valor de la potencia activa consumida depende del sistema y de la carga pero no de cómo ésta esté físicamente conectada. De la misma forma se demuestra que la expresión de la potencia reactiva y de la potencia aparente consumida es independiente del tipo de conexión de la carga.

Otro ejemplo práctico de aplicación de estos conceptos de potencia y tipo de conexión de las cargas, es el de tres impedancias iguales conectadas en triángulo. Se puede hacer el cambio de conexión de triángulo a estrella en los casos siguientes:

- Con el fin de reducir la potencia absorbida por la carga sin cambiar ni la tensión de línea ni las impedancias de fase: en la conexión en estrella se reduce la tensión en la fase de la carga en un factor  $\sqrt{3}$  y como se mantiene el valor de la impedancia por fase, la potencia y las intensidades de línea se reducen en un factor de 3. Esta es una técnica utilizada, por ejemplo, en el arranque de motores asíncronos con sus fases conectadas en triángulo: se arranca con una conexión en estrella, para disminuir las corrientes en el momento inicial, y a continuación se pasa a la conexión en triángulo que corresponde a su funcionamiento nominal.
- Con el fin de adaptar una carga conectada en triángulo a una red de tensión más elevada sin cambiar ni la potencia ni las impedancias de una carga. Como ejemplo, los aparatos trifásicos con sus fases conectadas en triángulo y alimentados por una red de 230 V, pueden ser utilizados en una red de 400 V con la única condición de efectuar la conexión de sus fases en estrella: las tensiones e intensidades en cada una de sus fases permanecen sin cambio, por lo que tampoco cambia la potencia consumida.

### Corrección del factor de potencia.

Al igual que ocurría en los sistemas de corriente alterna monofásicos, en los sistemas trifásicos se define el factor de potencia mediante la expresión:

$$\text{f.d.p.} = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} \tag{3.16}$$

a cuyo valor numérico hay que añadirle si el factor de potencia es de carácter capacitivo o inductivo.

Es importante que el factor de potencia o  $\cos \varphi$  sea lo más próximo a 1, es decir, al comportamiento de una carga resistiva pura. Desde un punto de vista práctico esto es muy importante ya que las compañías de distribución de energía eléctrica penalizan económicamente a los consumidores que presentan factores de potencia pequeños o alejados de 1.

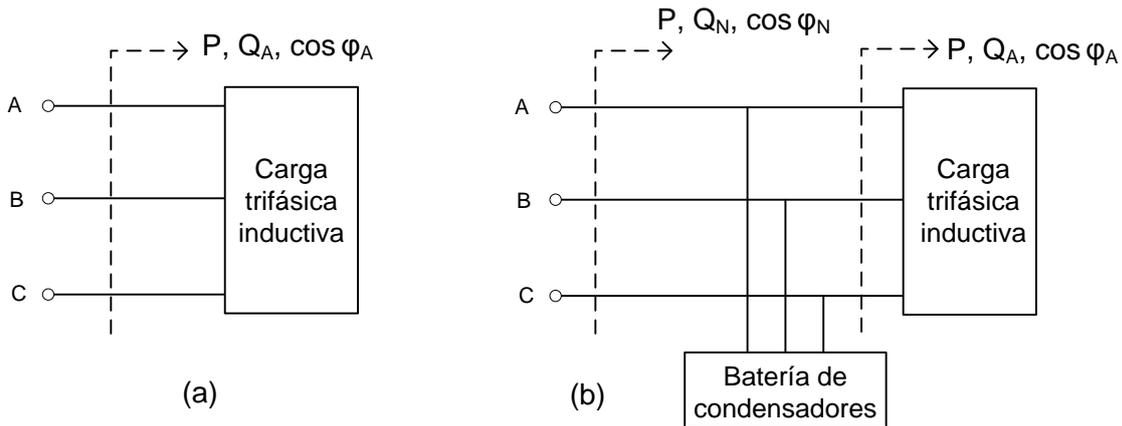


Figura 3.11

En general, la gran mayoría de los consumidores reales se comportan como cargas con carácter inductivo, cargas que consumen potencia reactiva de la red de alimentación. Para mejorar su factor de potencia, es decir, para disminuir la potencia reactiva que toman de la red sin variar la potencia activa que consumen, se instalan baterías de condensadores en paralelo (por ejemplo, a la entrada de la red interior del consumidor) que den parte de esa potencia reactiva que necesita.

Sea una carga que consume una potencia activa  $P$  con un factor de potencia  $\cos \varphi_A$  inductivo (figura 3.11.a). Para aumentar el valor del factor de potencia del conjunto carga-batería (factor de potencia que ve la red) hasta un nuevo valor  $\cos \varphi_N$  inductivo, se conecta en paralelo con la carga una batería de condensadores (figura 3.11.b). Ahora, para el conjunto carga-batería, la potencia activa consumida será la misma,  $P$ , ya que los condensadores no consumen potencia activa, mientras que la potencia reactiva consumida,  $Q_N$ , será la que consume la carga,  $Q_A$  (que es la misma que consumía cuando no estaban los condensadores ya que la tensión es la misma), más la consumida por los condensadores,  $Q_C$ , es decir:

$$Q_N = Q_A + Q_C \tag{3.17}$$

Si se expresan las potencias reactivas de la carga y del conjunto carga-batería en función de la potencia activa  $P$ , la expresión anterior se puede escribir como:

$$P \tan \varphi_N = P \tan \varphi_A + Q_C \tag{3.18}$$

y despejando se obtiene la potencia reactiva consumida por la batería de condensadores:

$$Q_C = P(\tan \varphi_N - \tan \varphi_A) \quad (3.19)$$

Como era de esperar este valor resulta negativo (pues  $\varphi_N < \varphi_A$ ) ya que la batería de condensadores genera potencia reactiva. Por otro lado, la expresión de la potencia reactiva consumida por la batería de condensadores en función de la capacidad por fase y de la tensión en cada condensador es:

$$Q_C = -3U_C^2 \omega C \quad (3.20)$$

Igualando ambas expresiones se despeja el valor de la capacidad por fase de la batería de condensadores necesaria para corregir el factor de potencia:

$$C = \frac{P(\tan \varphi_A - \tan \varphi_N)}{3U_C^2 \omega} \quad (3.21)$$

Si los condensadores están conectados en triángulo, la tensión que soporta cada condensador es la tensión de línea, por lo que la expresión anterior queda finalmente:

$$C_\Delta = \frac{P(\tan \varphi_A - \tan \varphi_N)}{3U^2 \omega} \quad (3.22)$$

Sin embargo, si la conexión es en estrella la tensión en cada condensador es ahora la tensión de fase y, por lo tanto, la capacidad por fase resulta:

$$C_Y = \frac{P(\tan \phi_A - \tan \phi_N)}{U^2 \omega} \quad (3.23)$$

Como se ve, la capacidad de los condensadores en estrella es tres veces mayor que en triángulo pero, sin embargo, deben soportar una tensión  $\sqrt{3}$  veces menor (la tensión de fase). Esta característica de los condensadores en estrella (mayor capacidad y tener que soportar una tensión menor) respecto a sus equivalentes en triángulo debe tenerse en cuenta como criterio económico a la hora de elegir el tipo de conexión de la batería de condensadores.

Es habitual que los fabricantes de condensadores dispongan de conjuntos de tres condensadores para corrección del factor de potencia en circuitos trifásicos que suelen conectar internamente en triángulo y que se presentan como un componente de tres terminales. Además, estos conjuntos incluyen resistencias de descarga (la norma EN-60831-1 establece que dicho conjunto de tres condensadores debe incluir resistencias de descarga para que tres minutos después de haberlas desconectado, su tensión en bornes sea inferior a 75 V).

Para finalizar, señalar que para el cálculo del valor de la capacidad por fase de la batería de condensadores que se ha desarrollado, se ha asumido que la tensión en la carga no varía al conectar dicha batería. Esta suposición en realidad no es totalmente cierta ya que al conectar la batería varía la intensidad de línea y, por lo tanto, también lo hace la caída de tensión en la línea. Sin embargo, la variación que se produce en el valor de la tensión es tan pequeña que tal suposición no introduce errores significativos en el cálculo y, a cambio, lo simplifica notablemente, por lo que se acepta.

### 3.2. DETERMINACIÓN DE LA SECUENCIA DE FASES.

La secuencia de fases, como ya se ha indicado, no es una característica propia o intrínseca del sistema trifásico (como por ejemplo, sí lo son las magnitudes eléctricas de fase y de línea) sino que indica, una vez identificadas las tres fases como A, B y C, cuál está adelantada y cuál está retrasada  $120^\circ$  respecto a cada una de ellas. La importancia de conocer si un sistema trifásico es de secuencia directa o de secuencia inversa está en que es necesario saberlo a la hora de conectar distintos tipos de equipos y aparatos eléctricos (como, por ejemplo, vatímetros, transformadores o motores eléctricos) o de interconectar sistemas.

Los métodos para determinar la secuencia de fases se basan en analizar una carga trifásica fuertemente desequilibrada conectada al sistema trifásico equilibrado de tensiones cuya secuencia se desconoce. En esa carga desequilibrada una fase es reactiva pura (capacitiva o inductiva), otra es resistiva y la tercera se deja a circuito abierto para poder medir su tensión de fase.

A continuación vamos a explicar sobre un ejemplo el procedimiento a seguir para determinar la secuencia de fases de un sistema trifásico utilizando una carga desequilibrada de ese tipo.

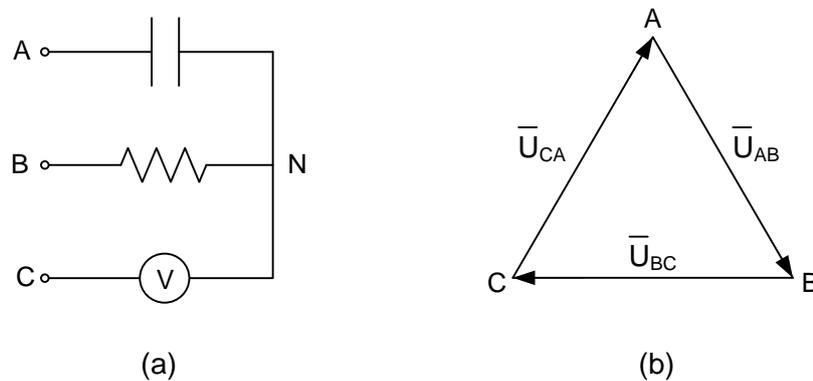


Figura 3.12

Sea la carga de la figura 3.12.a que está conectada a un sistema trifásico equilibrado de tensiones cuya secuencia de fases se quiere determinar. Como dato se sabe que, por ejemplo, la lectura del voltímetro es menor que la tensión de línea del sistema. El procedimiento, paso a paso, es el siguiente:

**Paso 1.** Como suposición de partida consideramos que la secuencia de fases es directa. Con esta suposición se dibuja el triángulo de tensiones de línea en la carga (figura 3.12.b). Piense que aunque la carga sea desequilibrada, las tensiones de línea en ella forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado que viene impuesto por el sistema de alimentación que sí es equilibrado: el desequilibrio de la carga hace que su punto neutro N se desplace (ya no estará al mismo potencial que el del neutro del sistema) y, por tanto, las tensiones de fase en la carga ya no formarán un sistema trifásico equilibrado.

**Paso 2.** Como la fase C está abierta (figura 3.13.a), el circuito que hay es un circuito monofásico RC serie alimentado por la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$ . La intensidad que circula por él está, por tanto, adelantada respecto a la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$ , tal y como se muestra en la figura 3.13.b.

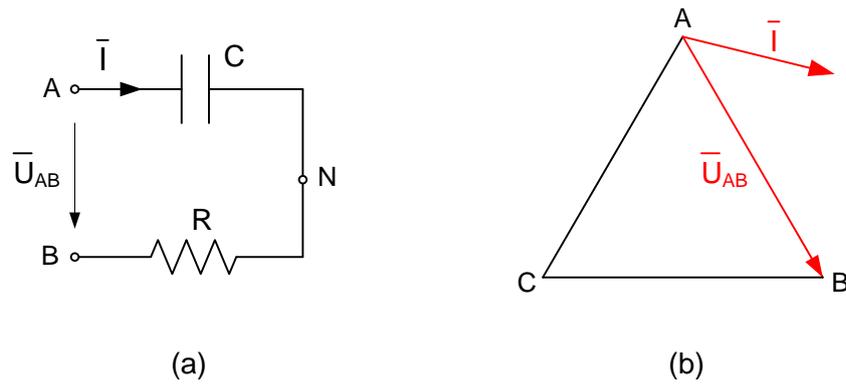


Figura 3.13

**Paso 3.** Como en el circuito solo hay un condensador y una resistencia, las tensiones en esos dos elementos y la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$  formarán un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es  $U_{AB}$ . De esta forma sabemos que el punto N de la carga estará en un punto de la circunferencia dibujada en la figura 3.14.a, cuyo diámetro es la tensión  $U_{AB}$ , dependiendo del desfase que haya entre  $\vec{U}_{AB}$  e  $\vec{I}$ .

**Paso 4.** La tensión entre A y N es la tensión en el condensador por lo que está retrasada  $90^\circ$  respecto a la intensidad  $\vec{I}$  del circuito. De esta forma se deduce que el punto N de la carga estará situado en la semicircunferencia interior (figura 3.14.b).

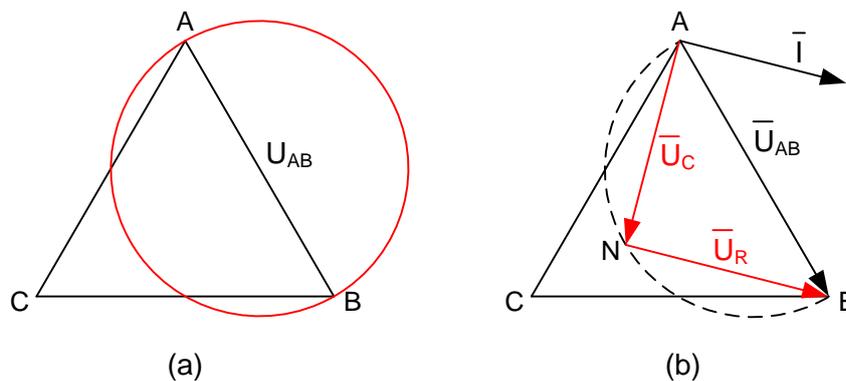


Figura 3.14

**Paso 5.** Para cualquier punto de esa semicircunferencia la tensión de la fase C en la carga,  $\vec{U}_{CN}$ , que es la que mide el voltímetro, es menor que la tensión de línea. Como este resultado está de acuerdo con el dato dado, se concluye que la suposición inicial de que la secuencia de fases del sistema es directa era correcta.

**EJEMPLO 3.2**

La carga del circuito de la figura 3.15 se conecta a un sistema trifásico equilibrado de tensión de línea 400 V. Si la lectura del voltímetro es 315 V, determinar cuál es la secuencia de fases del sistema.

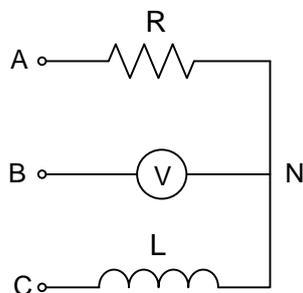


Figura 3.15

Suponemos como punto de partida que la secuencia de fases es directa. En este caso, como la fase B está abierta el circuito que hay es un circuito monofásico RL serie alimentado por la tensión de línea  $\vec{U}_{AC}$  y la intensidad que circula por él está, por tanto, retrasa respecto a  $\vec{U}_{AC}$ . tal y como se muestra en la figura 3.16.a. El punto N estará en algún lugar de la circunferencia indicada en esa figura.

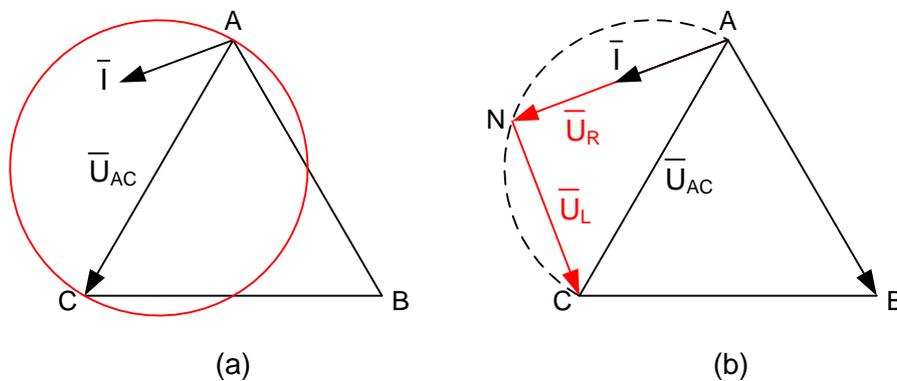


Figura 3.16

La tensión entre A y N es la tensión en la resistencia por tanto está en fase con la intensidad  $\vec{I}$  del circuito, por lo que el punto N de la carga estará situado en la semicircunferencia exterior (figura 3.16.b). Para cualquier punto de esa semicircunferencia la tensión de la fase B en la carga,  $\vec{U}_{BN}$ , que mide el voltímetro, es mayor que la tensión de línea. Como este resultado es contrario al dato dado (la lectura del voltímetro es menor que la tensión de línea) la suposición inicial no era la correcta y, por tanto, la secuencia de fases es la otra, es decir, es inversa.

Para practicar, repita el procedimiento considerando ahora que la suposición inicial de la secuencia de fases es inversa (figura 3.17.a) y comprobará que el resultado al que llega está de acuerdo con el dato de la lectura del voltímetro (figura 3.17.b).

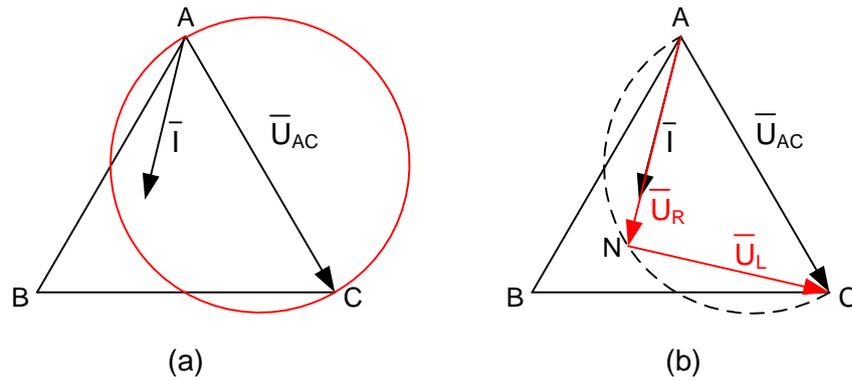


Figura 3.17

Existe un sencillo aparato de medida que indica la secuencia de fases del sistema. Este aparato responde a un circuito muy simple formado por un condensador y dos bombillas (resistencias) iguales, como el que se representa en la figura 3.18: una vez conectado al sistema trifásico de tensiones equilibrado, la fase de la bombilla que más brilla está adelantada respecto a la fase conectada a la otra bombilla. El principio de funcionamiento de este aparato es muy similar al de los circuitos anteriores y, aunque su análisis es algo más complejo, merece la pena hacerlo dado su valor didáctico.

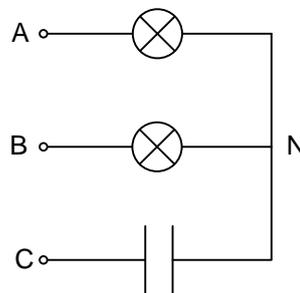


Figura 3.18

Sea el circuito de la figura 3.18 que se conecta a las fases A, B y C del sistema trifásico que es de secuencia de fases directa ¿qué bombilla brillará más?

Ahora el primer paso es calcular el equivalente Thevenin del circuito entre los terminales C y N del condensador. A circuito abierto (figura 3.19.a), como las dos resistencias son iguales, la tensión en cada una de ellas es la mitad de la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$ , por lo que en el diagrama vectorial de las tensiones de línea el punto N' en el punto medio del lado AB del triángulo, lo que permite conocer la tensión a circuito abierto  $\vec{U}_{CN'}$  del equivalente Thevenin (figura 3.19.b). Por otro lado y sin necesidad de hacer ningún cálculo, a la vista del circuito de la figura 3.19.a se ve que la resistencia equivalente Thevenin es  $R/2$ . De esta forma el equivalente Thevenin del circuito entre C y N, que es el que ve el condensador, es el circuito de la figura 3.19.c.

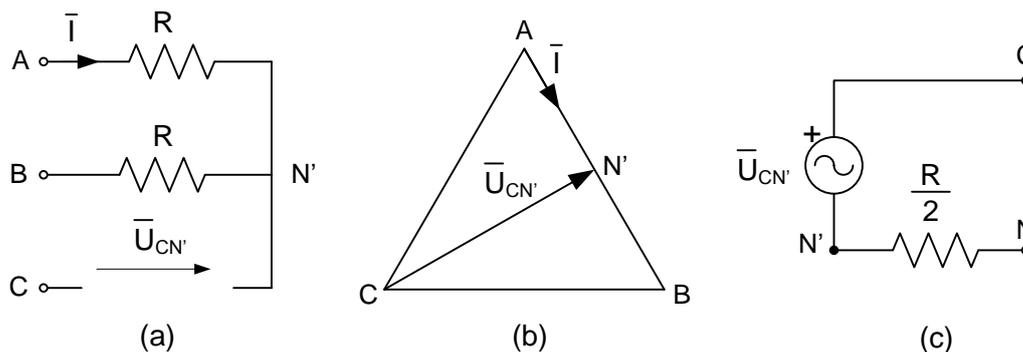


Figura 3.19

El análisis del circuito original con el condensador conectado entre C y N, equivale a analizar el circuito de la figura 3.20.a. Y a partir de aquí en procedimiento es similar al seguido antes: como la carga es capacitiva, la intensidad  $\vec{I}$  está adelantada un ángulo  $\varphi$  respecto a la tensión  $\vec{U}_{CN'}$  y  $90^\circ$  respecto a la tensión en el condensador  $\vec{U}_{AN}$  (figura 3.20.b). De esta forma, el punto N estará sobre la semicircunferencia indicada en la figura. Para cualquier punto de esa semicircunferencia se cumple que la tensión en la bombilla de la fase A ( $U_{AN}$ ) es mayor que la tensión en la bombilla de la fase B ( $U_{BN}$ ) por lo que, como las dos son iguales, la primera brillará más que la segunda, lo que significa que la fase A está adelantada respecto a la fase B, que está de acuerdo con la secuencia de fases directa del sistema.

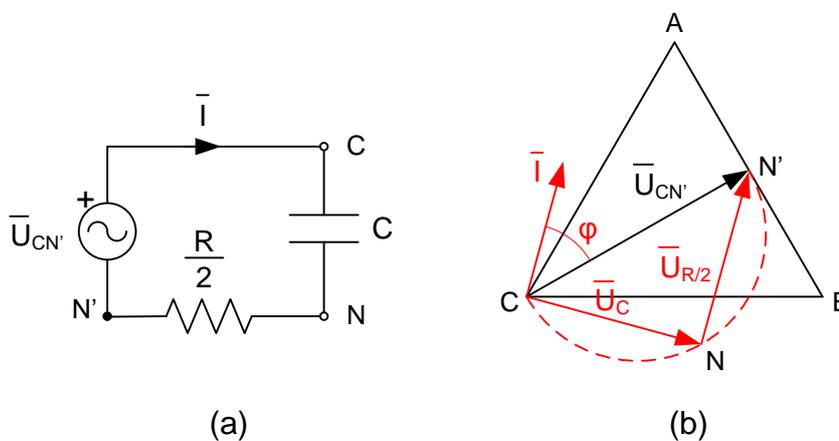


Figura 3.20

### 3.3. MEDIDA DE LA POTENCIA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS.

La medida de la potencia consumida o generada en los sistemas trifásicos es la suma de la potencia, consumida o generada, por cada una de las tres fases. Dado que estamos considerando sistemas trifásicos equilibrados, tanto en generación como en carga, en general con medir la potencia de una fase es suficiente. El aparato de medida que se utiliza para medir potencias es el vatímetro.

### 3.3.1. El vatímetro.

Como ya sabe, para medir la intensidad que circula por la rama de un circuito se utiliza un **amperímetro**. Este aparato de medida se conecta en serie en la rama del circuito y mide el valor eficaz de la intensidad que circula por él. Como está conectado en serie, su impedancia ha de ser cero (es prácticamente despreciable) para no afectar al valor de las variables del circuito, por lo que eléctricamente se considera un cortocircuito.

De la misma forma, para medir la diferencia de potencial o tensión que hay entre dos puntos de un circuito se utiliza un **voltímetro**. Este aparato de medida se conecta en paralelo entre los dos puntos del circuito y mide el valor eficaz de la tensión que hay entre ellos. Como está conectado en paralelo, su impedancia ha de ser infinita (es muy elevada) para no afectar al valor de las variables del circuito, por lo que eléctricamente se considera un circuito abierto.

Para medir potencias se utiliza un **vatímetro**. El vatímetro se puede entender como una combinación de un amperímetro y un voltímetro por lo que, a diferencia de los dos aparatos de medida anteriores, el vatímetro tiene cuatro terminales: dos corresponden a la denominada bobina amperimétrica y se conectan en serie en el circuito; los otros dos corresponden a la denominada bobina voltimétrica y se conectan en paralelo en el circuito. La medida del vatímetro es el producto del valor eficaz de la intensidad que circula por su bobina amperimétrica por el valor eficaz de la tensión que hay entre los terminales de su bobina voltimétrica por el coseno del desfase que existe entre esa tensión y esa intensidad. Para el vatímetro de la figura 3.21, su lectura es:

$$W = \vec{U} \circ \vec{I} = U I \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{I}}) = U I \cos \theta_W \quad (3.24)$$

Dada la característica del vatímetro de combinar las medidas de una intensidad y de una tensión, ya que no solo tiene en cuenta sus valores eficaces sino también el ángulo o desfase  $\theta_W$  que hay entre ellas, sus terminales “tienen polaridad” lo que se representa mediante dos marcas ( $\bullet$ ), una en cada bobina, que indican el terminal positivo de la variable: en la bobina amperimétrica indica el terminal por el que entra la intensidad y en la bobina voltimétrica el terminal que está a mayor potencial. De esta forma en el vatímetro de la figura 3.21 la intensidad  $\vec{I}$  es la que circula entre el terminal 1 y el 2, y la tensión  $\vec{U}$  es la diferencia de potencial entre los terminales 3 y 4, siendo el terminal 3 el de mayor potencial. Por este motivo para poder entender correctamente el significado de su lectura es muy importante tener en cuenta cómo está conectado el vatímetro.

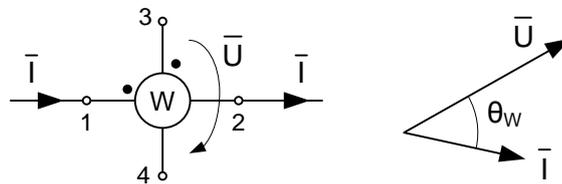


Figura 3.21

Otro hecho que hay que tener muy en cuenta a la hora de conectar un vatímetro es que su lectura teóricamente podría ser tanto positiva como negativa, según sea el valor de  $\theta_W$ . Aunque los actuales vatímetros digitales dan la medida con signo, se sigue aceptando (por tradición y por la existencia de muchos vatímetros analógicos) que los vatímetros sólo pueden dar lecturas positivas

por lo que su conexión debe hacerse de tal forma que  $-90^\circ \leq \theta_W \leq 90^\circ$ . Conectarlo de otra forma daría error de medida (la aguja se desvía hacia la escala negativa del aparato).

Por último, otro hecho derivado de esa característica del funcionamiento del vatímetro es que aunque mide una potencia activa, en vatios, esa medida puede tener que ver o no con la potencia activa que consume algún elemento del circuito, lo que dependerá de cómo esté conectado el vatímetro: ¡no confundir las potencias consumidas o generadas por los elementos del circuito con la lectura del vatímetro!

### 3.3.2. Medida de la potencia activa.

Para medir la potencia activa en un sistema trifásico equilibrado se distinguen dos casos según haya o no conductor de neutro.

#### Sistemas trifásicos con conductor de neutro.

Si el sistema trifásico tiene conductor de neutro o el neutro de la carga o el generador en estrella es accesible, se puede medir independientemente la potencia activa de cada fase. Tal y como está conectado el vatímetro en cada uno de los circuitos de la figura 3.22, la potencia activa que mide es la de una fase, por lo que la potencia activa total es igual a tres veces la lectura del vatímetro:

$$W = U I_f \cos \varphi \quad \rightarrow \quad P = 3 P_f = 3 \cdot W \tag{3.25}$$

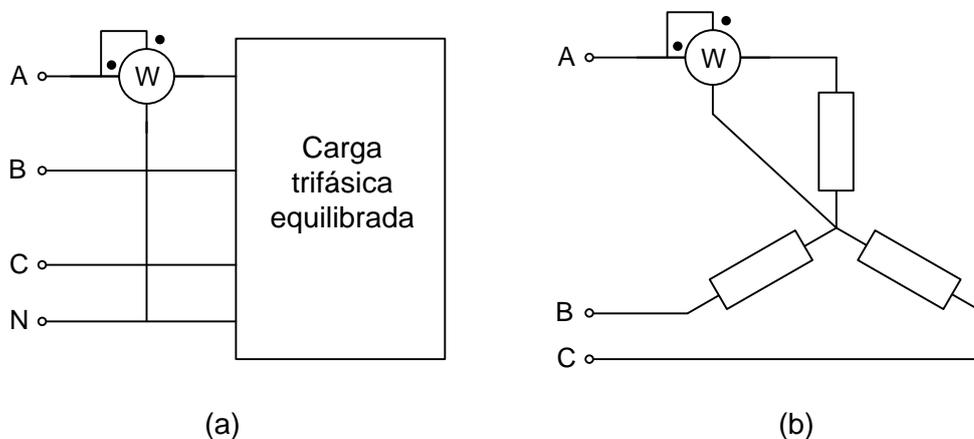


Figura 3.22

#### Sistemas trifásicos sin conductor de neutro.

Si el sistema trifásico no tiene conductor de neutro o un neutro accesible, pero las fases de la carga o del generador sí son accesibles, se puede conectar en una de ellas un vatímetro que mida la potencia activa de la fase, como se representa en la figura 3.23.a, con lo que la potencia activa total es igual a tres veces la lectura del vatímetro (ecuación (3.25)).

Si las fases de las carga o del generador son inaccesibles y por lo tanto no se puede conectar en una de ellas un vatímetro, la alternativa es crear un neutro artificial que esté al mismo potencial

que cualquier otro punto neutro del sistema. Ello se consigue conectando en paralelo con la carga o con el generador una carga trifásica equilibrada de muy alta impedancia, para que la intensidad que circule por ella sea despreciable. Esta carga equilibrada de muy alta impedancia se consigue aprovechando la impedancia de la bobina voltimétrica del vatímetro,  $\vec{Z}_V$ , y dos impedancias del mismo valor que ella que se conectan en las otras dos fases, tal y como se representa en la figura 3.23.b. De esta forma el vatímetro mide la potencia activa de una fase y, como antes, la potencia activa total es igual a tres veces la lectura del vatímetro (ecuación (3.25)).

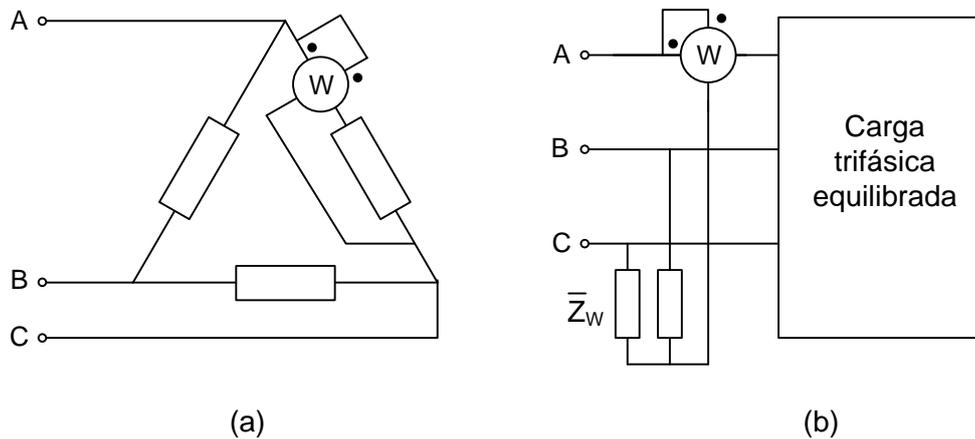


Figura 3.23

### 3.3.3. Medida de la potencia reactiva.

La potencia reactiva se puede medir utilizando para ello un vatímetro conectado tal y como se hace en la figura 3.24: el vatímetro mide la intensidad que circula por una fase y la tensión de línea que hay entre las otras dos. Para la conexión de la figura y a la vista del diagrama vectorial de tensiones e intensidades, la lectura del vatímetro es:

$$W = U_{BC} I_A \cos \theta_W = U I \cos(90^\circ - \varphi) = U I \sin \varphi \quad (3.26)$$

Y a partir de la expresión de la potencia reactiva trifásica, se tiene que:

$$W = U I \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad Q = \sqrt{3} \cdot W \quad (3.27)$$

Dese cuenta que en el desarrollo anterior hemos considerado que el sistema es de secuencia directa y la carga, cuya potencia reactiva se quiere medir, es inductiva. Aunque el desarrollo es general y válido para cualquier secuencia de fases y cualquier tipo de carga, todas las posibilidades distintas que hay sí que se deben tener en cuenta a la hora de conectar el vatímetro, para que su lectura sea positiva y poder relacionarla con la potencia reactiva de la carga. Este razonamiento de cómo se ha de conectar el vatímetro se realiza siempre a partir del diagrama vectorial de tensiones e intensidades, tal y como se hace en el siguiente ejemplo.

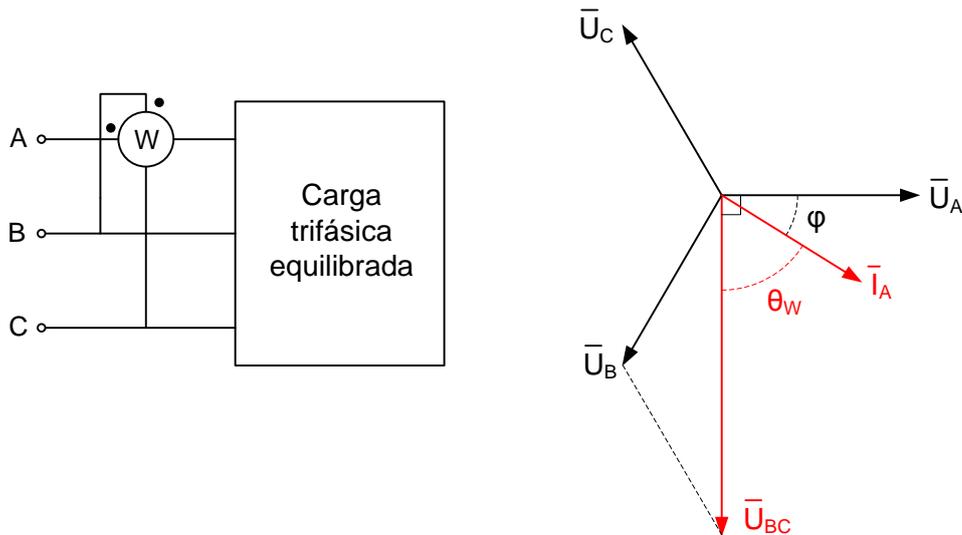


Figura 3.24

**EJEMPLO 3.3**

Sea un sistema trifásico de secuencia de fases inversa al que se conecta una carga trifásica equilibrada de 3 kVA con un factor de potencia 0,6 capacitivo. Dibujar cómo se debería conectar un vatímetro para medir la potencia reactiva que genera la carga, sabiendo que sus terminales de intensidad se conectan a la fase B, y calcular su lectura.

Para emplear el método anterior y sabiendo que la intensidad que se va a utilizar es  $\vec{I}_B$ , hay que determinar cuál es la fase (A o C) que se debe conectar al terminal  $\bullet$  de su bobina voltimétrica. Suponiendo que se conecta a la fase A (figura 3.25.a) y teniendo en cuenta que la secuencia de fases es inversa y que la carga es capacitiva, se dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades incluyendo la intensidad que entra por la fase B,  $\vec{I}_B$ , y la tensión de línea entre las fases A y C,  $\vec{U}_{AC}$ . A partir de él (figura 3.25.b) se tiene que la medida del vatímetro es:

$$W = U_{AC} I_B \cos \theta_W = U I \cos(90^\circ + \varphi)$$

Como  $\theta_W$  es mayor que  $90^\circ$ , la lectura del vatímetro sería negativa lo que, como hemos dicho antes, no es admisible.

Por eso la conexión de los terminales de tensión no es la correcta y hay que hacerlo al revés, es decir, el terminal  $\bullet$  de su bobina voltimétrica se ha de conectar a la fase C (figura 3.26.a). De esta forma la tensión que ve el vatímetro es  $\vec{U}_{CA}$ . Con esta conexión correcta del vatímetro repita el razonamiento sobre el diagrama vectorial de tensiones e intensidades (figura 3.26.b) y verá que ahora  $\theta_W = 90^\circ - \varphi$ .

Por último y conforme a la ecuación (3.27) la lectura del vatímetro es:

$$W = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{S \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{3}} = \frac{3000 \cdot 0,8}{\sqrt{3}} = 1385,6 \text{ W}$$

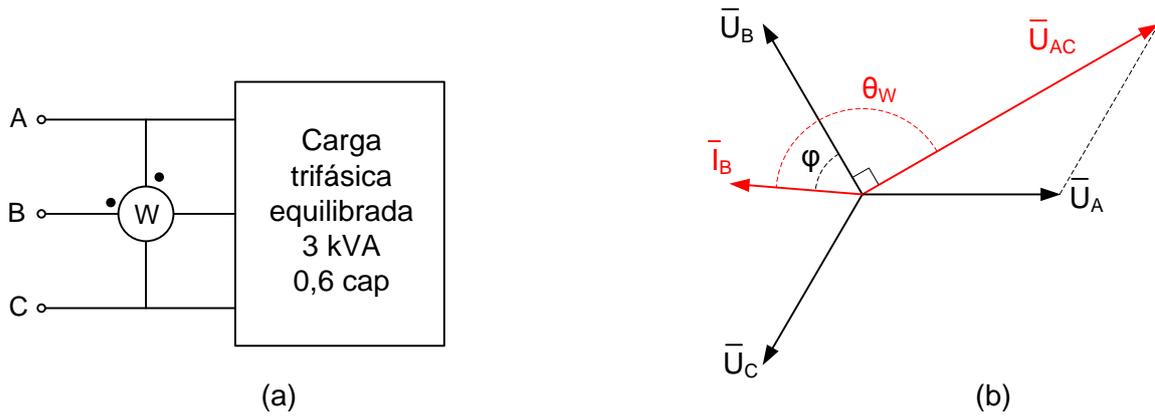


Figura 3.25

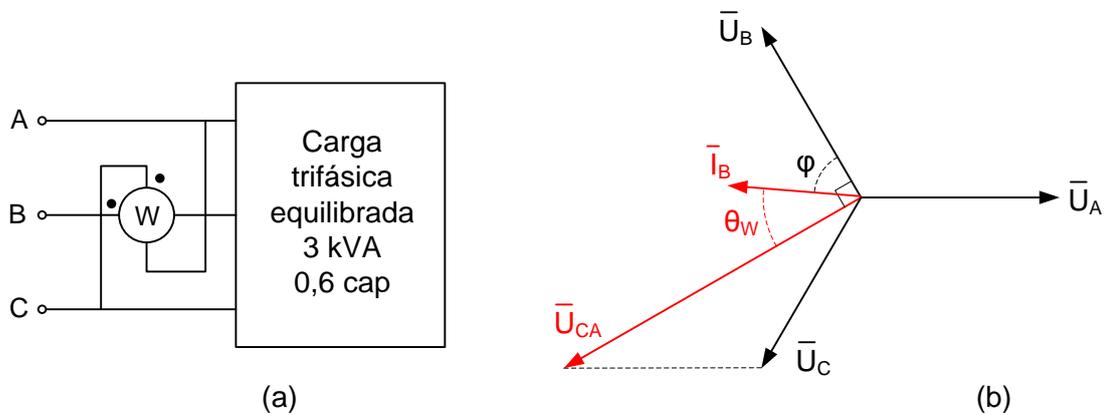


Figura 3.26

### 3.3.4. Método de los dos vatímetros.

El método de los dos vatímetros es el más interesante y el más utilizado ya que con las lecturas de solo dos vatímetros se pueden calcular a la vez la potencia activa y la potencia reactiva de una carga o un generador trifásico equilibrado. La conexión es la que se muestra en la figura 3.27.a: las intensidades se toman de dos fases distintas y la tensión de cada vatímetro es la que hay entre la fase en la que está conectado y la tercera.

Sea un sistema trifásico de secuencia directa, una carga trifásica equilibrada de carácter inductivo y la conexión de los dos vatímetros de la figura 3.27.a. A la vista del diagrama vectorial de tensiones e intensidades (figura 3.27.b), la lectura del vatímetro W1 es:

$$W_1 = U_{AC} I_A \cos \theta_{W1} = U I \cos(30^\circ - \varphi) \quad (3.28)$$

y la lectura del vatímetro W2 es:

$$W_2 = U_{BC} I_B \cos \theta_{W2} = U I \cos(30^\circ + \varphi) \tag{3.29}$$

La suma de las expresiones anteriores es:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= U I [\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)] = 2 U I \cos 30^\circ \cos \varphi \\ &= \sqrt{3} U I \cos \varphi = P \end{aligned} \tag{3.30}$$

y la diferencia es:

$$\begin{aligned} W_1 - W_2 &= U I [\cos(30^\circ - \varphi) - \cos(30^\circ + \varphi)] = 2 U I \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} \varphi \\ &= U I \operatorname{sen} \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

De esta forma, el método de los dos vatímetros permite calcular la potencia activa y la potencia reactiva de la carga a partir de las dos lecturas:

$$\begin{cases} P = W_1 + W_2 \\ Q = \sqrt{3} (W_1 - W_2) \end{cases} \tag{3.32}$$

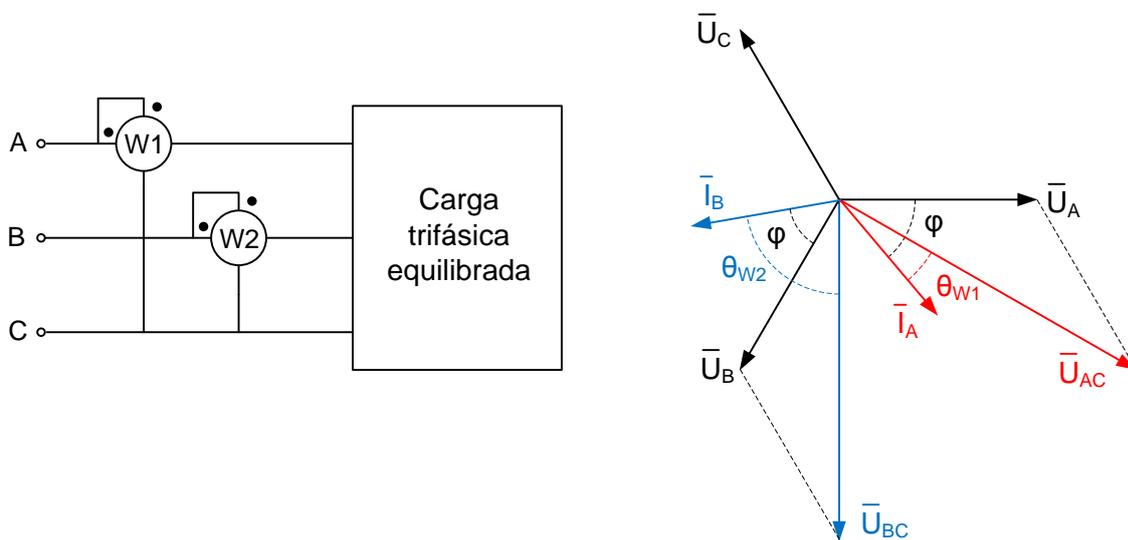


Figura 3.27

Este desarrollo, que se ha hecho para el caso particular de la conexión dada en la figura 3.27 (conectando los vatímetros en las fases A y B, con una carga inductiva y un sistema con secuencia de fases directa) es totalmente válido y general. Por eso es importante entender el razonamiento que se ha seguido utilizando el diagrama vectorial de tensiones e intensidades para aplicarlo a

cualquier situación en la que se utilice este método, para poder deducir cuál de los dos vatímetros corresponde al de la lectura mayor, para cualquier conexión posible de los vatímetros, carácter de la carga y secuencia de fases del sistema. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3.4

Para el circuito de la figura 3.28 las lecturas de los vatímetros WA y WC son 2106 y 894 W respectivamente. Sabiendo que la secuencia de fases del sistema es directa, calcular la potencia aparente que consume la carga y su factor de potencia.

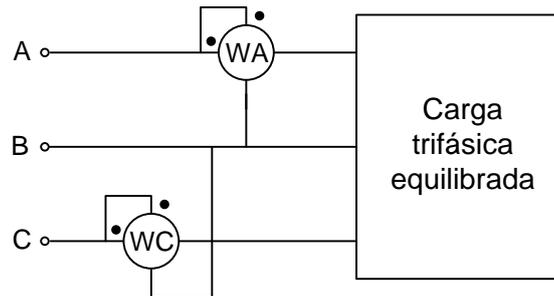


Figura 3.28

Los vatímetros están conectados conforme al método de los dos vatímetros. Como no se dice nada en el enunciado del carácter de la carga, como punto de partida se supone que es, por ejemplo, capacitiva. Así, para un sistema de secuencia directa y una carga capacitiva, se dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades en el que se incluyen las tensiones e intensidades que mide cada vatímetro (figura 3.29). Con ese diagrama se deduce que sus lecturas son:

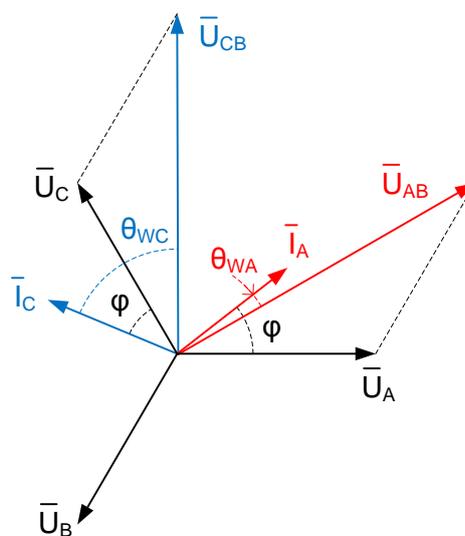


Figura 3.29

$$W_A = U_{AB} I_A \cos \theta_{WA} = U I \cos(30^\circ - \varphi)$$

y

$$W_C = U_{CB} I_C \cos \theta_{WC} = U I \cos(30^\circ + \varphi)$$

Como el ángulo  $\theta_W$  del vatímetro WA es menor, su lectura es mayor,  $W_A > W_C$ , lo que está de acuerdo con el dato del enunciado y, por tanto, la suposición inicial de que la carga era capacitiva es correcta. De esta forma, teniendo en cuenta que la carga es capacitiva, al aplicar el sistema de ecuaciones (3.32) de los dos vatímetros a este caso, se tiene que la potencia activa y la potencia reactiva que consume la carga son:

$$\begin{cases} P = W_C + W_A & = 894 + 2106 = 3000 \text{ W} \\ Q = \sqrt{3}(W_C - W_A) & = \sqrt{3} \cdot (894 - 2106) = -2099 \text{ VAR} \end{cases}$$

y, por tanto, la potencia aparente que consume y su factor de potencia son:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3661 \text{ VA} \quad \text{con} \quad \cos \varphi = \frac{P}{S} = 0,819 \text{ capacitivo}$$

Indicar que, como se ha puesto de manifiesto en el ejemplo anterior, para cada conexión posible de los dos vatímetros conforme a este método se tiene que “las lecturas” (cuál es el vatímetro con la lectura mayor), “el carácter de la carga” (inductivo o capacitivo) y “la secuencia de fases del sistema” (directa o inversa), están estrechamente relacionados por lo que con dar dos cualquiera de ellas es suficiente ya que el tercero se puede deducir utilizando el diagrama vectorial de tensiones e intensidades. Por eso este método permite también deducir la secuencia de fases del sistema conocido el tipo de carga y la conexión y lecturas de los vatímetros.

Sigamos con el circuito de la figura 3.27. Conforme aumenta el ángulo  $\varphi$  de la carga trifásica, los valores de las lecturas de los dos vatímetros van disminuyendo. Cuando  $\varphi$  es igual a  $60^\circ$  la lectura del vatímetro W2 se hace 0, conforme con la ecuación (3.29). ¿Qué ocurre cuando el valor de  $\varphi$  es mayor que  $60^\circ$ ? o, lo que es lo mismo, ¿qué ocurre cuando el factor de potencia de la carga es menor que 0,5?

Cuando esto ocurre el ángulo  $\theta_{W2}$  se hace mayor que  $90^\circ$  y, por tanto, la lectura del vatímetro W2 sería negativa lo que, como se ha indicado, no es posible y aparecería un error de la lectura. Para evitarlo habría que cambiar el signo (cambiar el terminal ●) de la tensión o de la intensidad en el vatímetro. En el caso del método de los dos vatímetros, desde un punto de vista teórico, lo habitual es cambiar el terminal de la bobina amperimétrica para mantener “la imagen” de la conexión de los vatímetros conforme a este método (“las intensidades se toman de dos fases distintas y la tensión de cada vatímetro es la que hay entre la fase en la que está conectado y la tercera”)<sup>1</sup>. De esta forma, de la conexión original del circuito de la figura 3.27 se pasaría a la

<sup>1</sup>Desde un punto de vista práctico, siempre se intercambian los terminales de la bobina voltimétrica ya que esa operación se puede hacer sin tener que desconectar todo el circuito.

conexión del de la figura 3.30. En esta última la lectura del vatímetro W1 sigue siendo la dada por la ecuación (3.28):

$$W_1 = U_{AC} I_A \cos \theta_{W1} = U I \cos(30^\circ - \varphi) = U I \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \right) \quad (3.33)$$

mientras que ahora la lectura del vatímetro W2 es:

$$W_2 = U_{BC} (-I_B) \cos \theta_{W2} = U I \cos(150^\circ - \varphi) = U I \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \right) \quad (3.34)$$

De donde se obtiene que:

$$\begin{cases} P = \sqrt{3} U I \cos \varphi = W_1 - W_2 = W_1 + [-W_2] \\ Q = \sqrt{3} U I \operatorname{sen} \varphi = \sqrt{3} (W_1 + W_2) = \sqrt{3} (W_1 - [-W_2]) \end{cases} \quad (3.35)$$

que es la misma ecuación que (3.32) pero ahora con  $[-W_2]$  en lugar de  $W_2$ . En resumen, cuando el factor de potencia de la carga es menor que 0,5 es necesario intercambiar el terminal  $\bullet$  de la intensidad en el vatímetro que tiene la lectura menor y considerar la lectura de ese vatímetro como negativa al aplicar la fórmula general de P y Q dada por la ecuación (3.32) del método de los dos vatímetros.

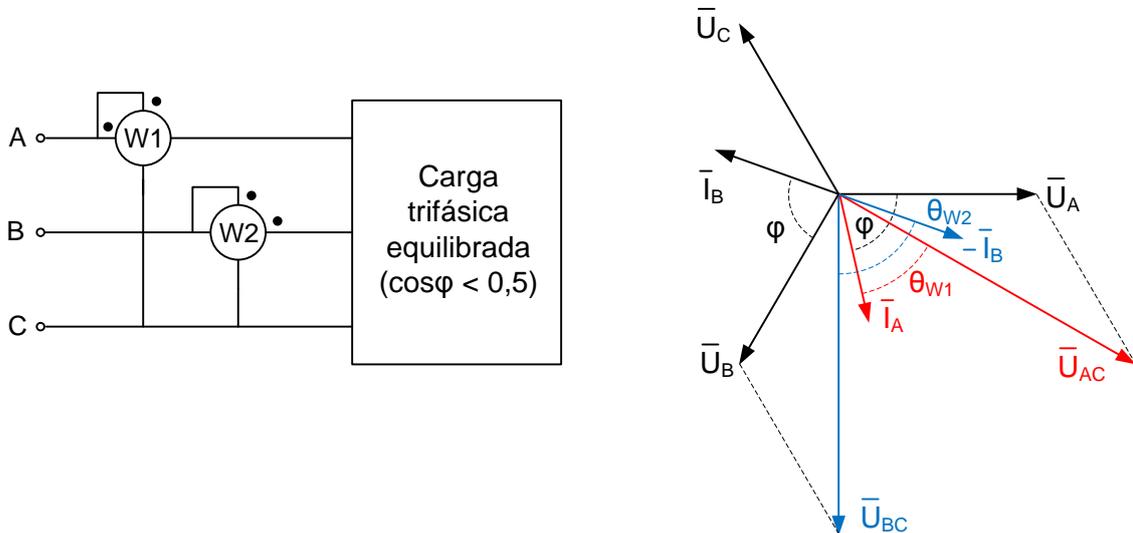


Figura 3.30

### EJEMPLO 3.5

En el circuito de la figura 3.28, la carga es una batería de condensadores formada por tres condensadores de  $25 \mu F$  cada uno conectados en triángulo. Sabiendo que el sistema es de  $400 V$ ,  $50 Hz$  y secuencia de fases directa, calcular las lecturas de los vatímetros WA y WC.

La potencia reactiva que consume la batería de condensadores es:

$$Q = -\sqrt{3}UI = -3U_C^2\omega C = -3 \cdot 400^2 \cdot 100\pi \cdot 25 \cdot 10^{-6} = -3770 \text{ VAR}$$

De manera general, como la carga es capacitiva y la secuencia de fases es directa una forma de conectar los dos vatímetros conforme al método del mismo nombre es la indicada en la figura 3.28. Razonando como en el ejemplo 3.4, se deduciría que la lectura del vatímetro WA es la mayor de los dos,  $W_A > W_C$ , pero en este caso, si se hiciese la conexión tal y como está en esa figura no se obtendría una lectura de WC (indicaría error de lectura) ya que el factor de potencia de la carga es menor que 0,5 ( $\cos\varphi=0$  capacitivo). En este caso habría que intercambiar el terminal ● de la intensidad del WC, con lo que la conexión correcta es la mostrada en la figura 3.31. A partir del diagrama vectorial de tensiones e intensidades, las lecturas de los dos vatímetros son:

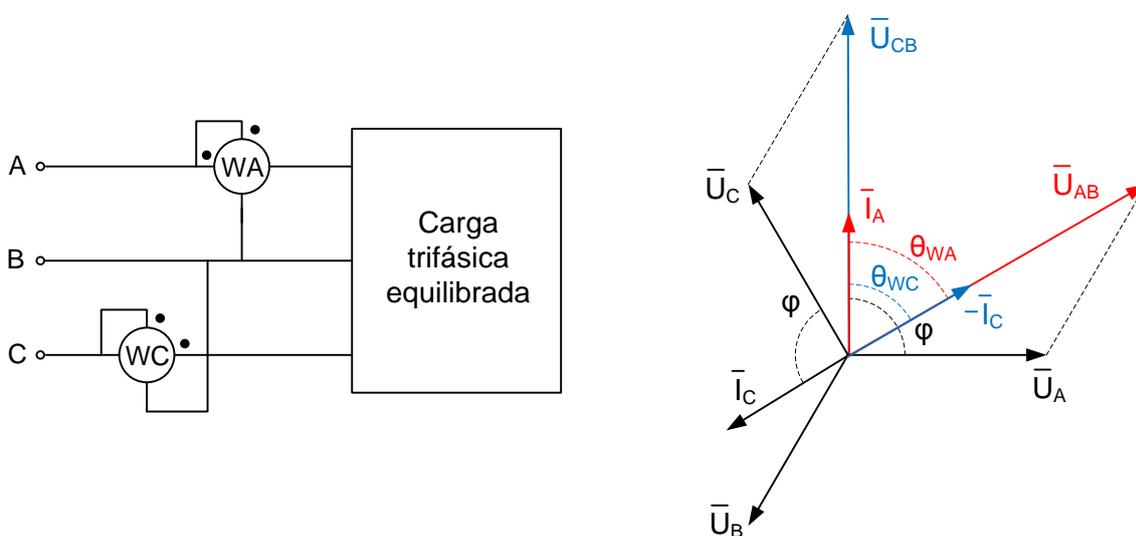


Figura 3.31

$$W_A = U_{AB} I_A \cos \theta_{WA} = UI \cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} UI = 1088 \text{ W}$$

y

$$W_C = U_{CB} (-I_C) \cos \theta_{WC} = UI \cos(150^\circ - 90^\circ) = \frac{1}{2} UI = 1088 \text{ W}$$

Al aplicar la ecuación (3.32) del método de los dos vatímetros, hay que tener en cuenta en este caso que la lectura de WC ha de tomarse como negativa debido al intercambio de posición que se ha tenido que realizar entre sus terminales de intensidad (ya que el factor de potencia de la carga es menor que 0,5). Se comprueba así la potencia consumida por la batería:

$$\begin{cases} P = W_C + W_A = -1088 + 1088 = 0 \\ Q = \sqrt{3}(W_C - W_A) = \sqrt{3} \cdot (-1088 - 1088) = -3770 \text{ VAR} \end{cases}$$

### 3.4. SISTEMAS TRIFÁSICOS CON CARGAS DESEQUILIBRADAS.

Los sistemas de distribución de energía eléctrica que alimentan a las instalaciones eléctricas y a los equipos conectados a ellas se pueden considerar como un sistema trifásico de tensiones equilibrado. Los desequilibrios se producen en las cargas ya que en muchos casos se conectan al sistemas cargas monofásicas y en las cargas trifásicas conectadas a veces es difícil conseguir que las impedancias de las tres fases sean razonablemente iguales. Esto hace que las intensidades de línea y las tensiones en las fases de la carga ya no formen un sistema trifásico equilibrado y que el punto neutro de la carga ya no esté al mismo potencial que el neutro del sistema de distribución.

Por este motivo en esta asignatura al hablar de un sistema trifásico desequilibrado siempre debe entenderse que es desequilibrado en la carga, aunque las tensiones de línea del sistema de alimentación sigan siendo un sistema trifásico equilibrado de tensiones<sup>2</sup>.

#### 3.4.1. Teoremas de Rosen y de Millman.

El **Teorema de Rosen** establece para una carga polifásica la equivalencia que existe entre las dos conexiones que puede tener: en polígono o en estrella. Para el caso que nos interesa de los sistemas trifásicos, el Teorema de Rosen establece la equivalencia que hay entre las conexiones en triángulo y en estrella de una carga (transformación estrella-triángulo). De esta forma, para la carga trifásica conectada en triángulo de la figura 3.32, su equivalente en estrella es:

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 &= \frac{\vec{Z}_{12} \vec{Z}_{13}}{\vec{Z}_{12} + \vec{Z}_{13} + \vec{Z}_{23}} \\ \vec{Z}_2 &= \frac{\vec{Z}_{12} \vec{Z}_{23}}{\vec{Z}_{12} + \vec{Z}_{13} + \vec{Z}_{23}} \\ \vec{Z}_3 &= \frac{\vec{Z}_{13} \vec{Z}_{23}}{\vec{Z}_{12} + \vec{Z}_{13} + \vec{Z}_{23}}\end{aligned}\quad (3.36)$$

Y para la carga trifásica conectada en estrella de la figura 3.32, su equivalente en triángulo es:

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{12} = \frac{\vec{Y}_1 \vec{Y}_2}{\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3} &\rightarrow \vec{Z}_{12} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_2}{\vec{Z}_3} \\ \vec{Y}_{13} = \frac{\vec{Y}_1 \vec{Y}_3}{\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3} &\rightarrow \vec{Z}_{13} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_3 + \frac{\vec{Z}_1 \vec{Z}_3}{\vec{Z}_2} \\ \vec{Y}_{23} = \frac{\vec{Y}_2 \vec{Y}_3}{\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3} &\rightarrow \vec{Z}_{23} = \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 + \frac{\vec{Z}_2 \vec{Z}_3}{\vec{Z}_1}\end{aligned}\quad (3.37)$$

<sup>2</sup>En realidad, como las intensidades de línea son un sistema trifásico desequilibrado debido al desequilibrio de la carga, las caídas de tensión en las tres fases de la línea son distintas lo que hace que, aunque en la generación las tensiones de línea sí sean un sistema trifásico equilibrado, en la carga ya no lo sean. Sin embargo como esa caída de tensión en cada fase de la línea es muy pequeña se puede asumir en muchos casos, sin incurrir prácticamente en error, que las tensiones de línea en la carga sí son un sistema trifásico de tensiones equilibrado.

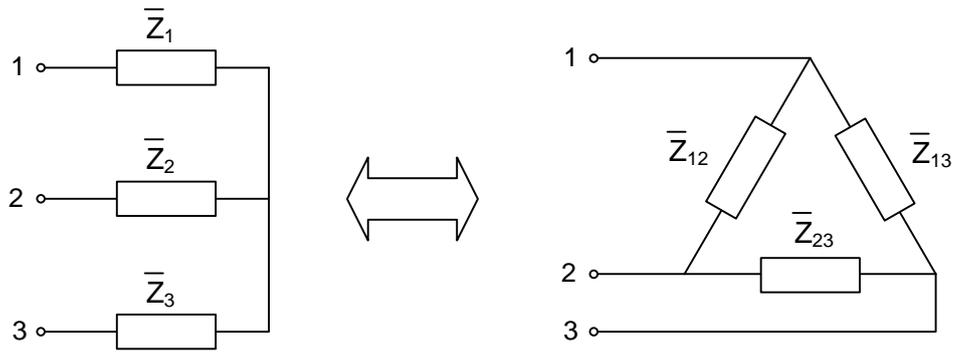


Figura 3.32

Compruebe que cuando la carga es equilibrada y, por tanto, las tres impedancias son iguales se llega a la conocida relación (ecuación (3.11)):

$$\vec{Z}_Y = \frac{\vec{Z}_\Delta}{3}$$

El **Teorema de Millman** dice que si en un circuito como el de la figura 3.33, para todas las ramas que hay entre los puntos A y B se conocen todas la admitancias  $\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n$  y todas las tensiones  $\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_n$ , entonces la tensión  $\vec{U}_{AB}$  entre los nudos A y B es:

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\vec{Y}_1 \vec{U}_1 + \vec{Y}_2 \vec{U}_2 + \dots + \vec{Y}_n \vec{U}_n}{\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \dots + \vec{Y}_n} \tag{3.38}$$

Dese cuenta que la ecuación anterior se obtiene de forma inmediata mediante la resolución del circuito de la figura 3.33 por el método de nudos.

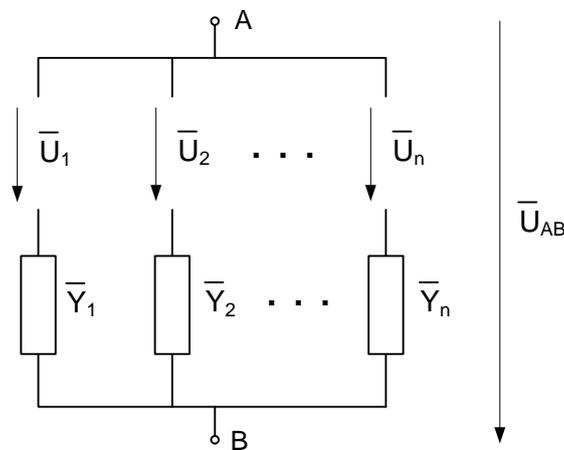


Figura 3.33

### 3.4.2. Análisis de sistemas trifásicos con cargas desequilibradas.

Para analizar circuitos trifásicos desequilibrados, el primer paso es transformar tanto el generador como las cargas que haya en triángulo a sus equivalentes en estrella; de esta forma se obtendrá un circuito Y-Y. Para analizar el caso más general suponemos que el circuito Y-Y tiene un conductor de neutro de impedancia  $\bar{Z}_N$  como el de la figura 3.34. A continuación y aplicando el Teorema de Millman, se calcula la tensión  $\vec{U}_{N'N}$  entre el punto neutro N' de la carga y el neutro N del sistema, que será (ecuación (3.39)):

$$\left( \frac{1}{\bar{Z}_{fA}} + \frac{1}{\bar{Z}_{fB}} + \frac{1}{\bar{Z}_{fC}} + \frac{1}{\bar{Z}_N} \right) \vec{U}_{N'N} = \frac{\vec{E}_A}{\bar{Z}_{fA}} + \frac{\vec{E}_B}{\bar{Z}_{fB}} + \frac{\vec{E}_C}{\bar{Z}_{fC}} \quad (3.39)$$

Conocida la tensión  $\vec{U}_{N'N}$ , ya es inmediato calcular las intensidades de línea:

$$\begin{aligned} \vec{I}_A &= \frac{\vec{E}_A - \vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_{fA}} = \frac{\vec{E}_A - \vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_G + \bar{Z}_L + \bar{Z}_A} \\ \vec{I}_B &= \frac{\vec{E}_B - \vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_{fB}} = \frac{\vec{E}_B - \vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_G + \bar{Z}_L + \bar{Z}_B} \\ \vec{I}_C &= \frac{\vec{E}_C - \vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_{fC}} = \frac{\vec{E}_C - \vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_G + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C} \end{aligned} \quad (3.40)$$

y la intensidad que circula por el conductor de neutro es:

$$\vec{I}_N = \frac{\vec{U}_{N'N}}{\bar{Z}_N} \quad (3.41)$$

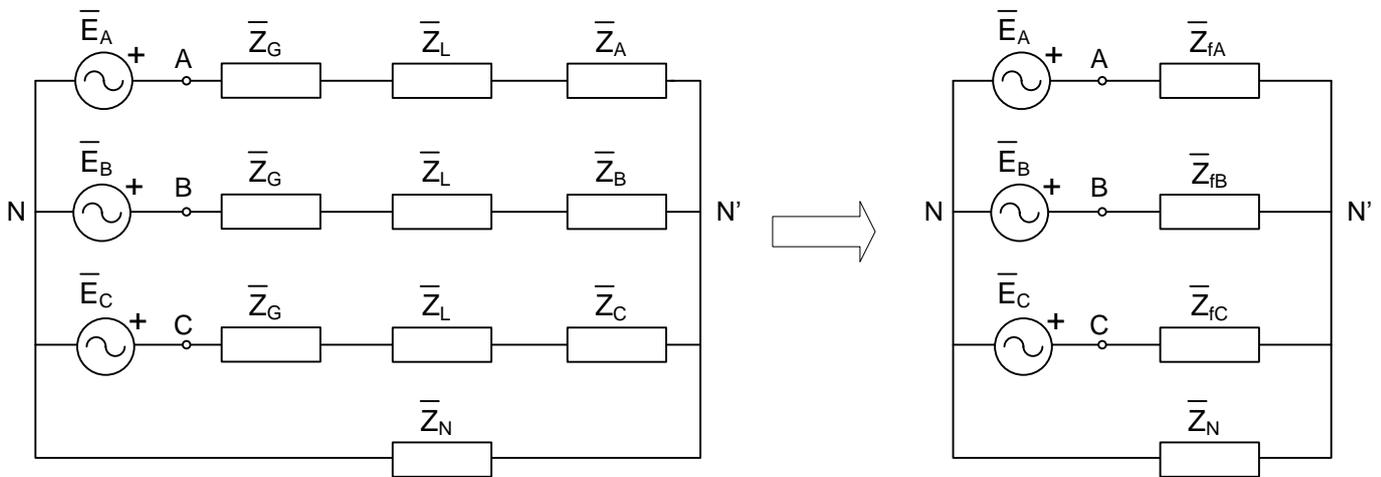


Figura 3.34

Expresiones que cumplen, lógicamente, la primera ley de Kirchhoff:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C \tag{3.42}$$

Por último comentar dos casos particulares, referidos al conductor de neutro, que pueden darse:

- $\vec{Z}_N = 0$ . Si la impedancia del conductor de neutro es nula, entonces N y N' están al mismo potencial y la tensión  $\vec{U}_{N'N}$  es nula. Las intensidades de línea se calculan mediante las ecuaciones (3.40) y la intensidad que circula por el conductor de neutro mediante la ecuación (3.42).
- $\vec{Z}_N = \infty$ . Si la distribución es a tres hilos, el procedimiento es el mismo, siendo ahora el valor de la impedancia del neutro  $\vec{Z}_N$  igual a infinito en la ecuación (3.39) para el cálculo de la tensión  $\vec{U}_{N'N}$ . Y al no existir conductor de neutro, la ecuación (3.42) queda:

$$\vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C = 0 \tag{3.43}$$

**EJEMPLO 3.6**

En el circuito trifásico desequilibrado en carga de la figura 3.35, sabiendo que el sistema es de secuencia directa y con los demás datos dados en la propia figura, calcular las tensiones de fase y de línea, en módulo y argumento, en bornes de la carga.

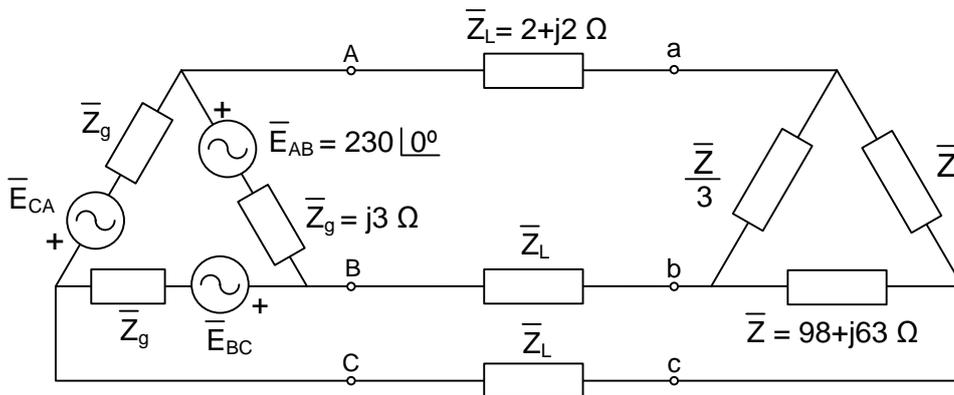


Figura 3.35

Lo primero que hay que hacer es transformar la carga, que está en triángulo, en su carga equivalente en estrella. Aplicando en Teorema de Rosen (ecuación (3.36)), se tiene:

$$\vec{Z}_A = \frac{\vec{Z} \vec{Z}/3}{\vec{Z} + \vec{Z} + \vec{Z}/3} = \frac{\vec{Z}}{7} = \vec{Z}_Y = 14 + j9 \Omega$$

$$\vec{Z}_B = \frac{\vec{Z} \vec{Z}/3}{\vec{Z} + \vec{Z} + \vec{Z}/3} = \frac{\vec{Z}}{7} = \vec{Z}_Y = 14 + j9 \Omega$$

$$\vec{Z}_C = \frac{\vec{Z} \vec{Z}}{\vec{Z} + \vec{Z} + \vec{Z}/3} = \frac{3\vec{Z}}{7} = 3\vec{Z}_Y = 42 + j27 \Omega$$

También el generador conectado en triángulo se sustituye por su equivalente conectado en estrella; como es de secuencia directa las tensiones de línea en el generador están adelantadas  $30^\circ$  respecto a las de fase, como se ve en la figura 3.2. Así se obtiene el circuito trifásico equivalente Y-Y de la figura 3.36, que es el que se resuelve a continuación.

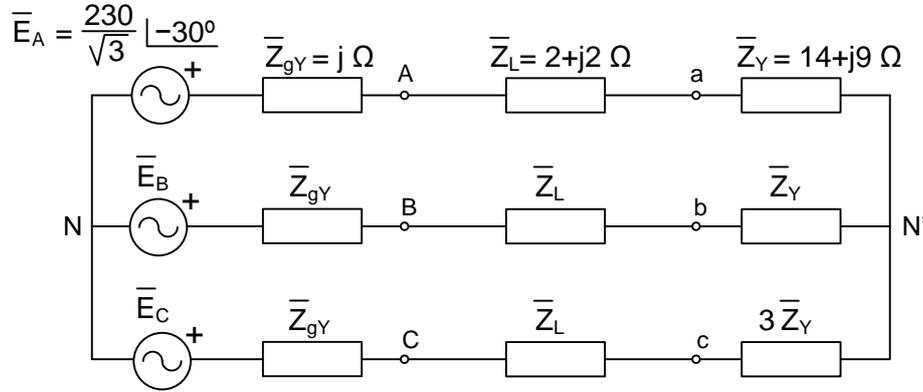


Figura 3.36

En este caso, al ser un sistema trifásico desequilibrado no se puede utilizar un circuito monofásico equivalente (jesea es la gran ventaja que se tiene al resolver circuitos trifásicos equilibrados!). La forma de resolver este tipo de circuitos es calcular primero la tensión  $\vec{U}_{N'N}$  que hay entre los puntos neutros que, en principio, ya no tiene porque ser nula. Para ello, se utiliza la impedancia total de cada fase del circuito; así para las fases A y B ésta es:

$$\vec{Z}_{FA} = \vec{Z}_{FB} = \vec{Z}_{gY} + \vec{Z}_L + \vec{Z}_Y = 16 + j12 = 20 \angle 36,9^\circ \Omega$$

y para la fase C es:

$$\vec{Z}_{FC} = \vec{Z}_{gY} + \vec{Z}_L + 3\vec{Z}_Y = 44 + j30 = 53,25 \angle 34,3^\circ \Omega$$

De esta forma, aplicando el Teorema de Millman se tiene (ecuación 3.39):

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{\vec{Z}_{FA}} + \frac{1}{\vec{Z}_{FC}} \right) \cdot \vec{U}_{N'N} &= \frac{\vec{U}_A}{\vec{Z}_{FA}} + \frac{\vec{U}_B}{\vec{Z}_{FA}} + \frac{\vec{U}_C}{\vec{Z}_{FC}} \\ &= \frac{-\vec{U}_C}{\vec{Z}_{FA}} + \frac{\vec{U}_C}{\vec{Z}_{FC}} = \vec{U}_C \cdot \left( \frac{1}{\vec{Z}_{FC}} - \frac{1}{\vec{Z}_{FA}} \right) \end{aligned}$$

Despejando  $\vec{U}_{N'N}$  y sustituyendo valores, se obtiene:

$$\vec{U}_{N'N} = 132,8 \angle 90^\circ \cdot 0,263 \angle 178^\circ = 34,95 \angle -92^\circ \text{ V}$$

Conocida  $\vec{U}_{N'N}$  (el desplazamiento del neutro de la carga), ya se pueden calcular las tres intensidades de línea:

$$\vec{I}_A = \frac{\vec{U}_A - \vec{U}_{N'N}}{\vec{Z}_{FA}} = \frac{132,8 \angle -30^\circ - 34,95 \angle -92^\circ}{20 \angle 36,9^\circ} = 6,02 \angle -52,1^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_B = \frac{\vec{U}_B - \vec{U}_{N'N}}{\vec{Z}_{FA}} = \frac{132,8 \angle -150^\circ - 34,95 \angle -92^\circ}{20 \angle 36,9^\circ} = 5,9 \angle 158,6^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_C = \frac{\vec{U}_C - \vec{U}_{N'N}}{\vec{Z}_{FC}} = \frac{132,8 \angle 90^\circ - 34,95 \angle -92^\circ}{53,25 \angle 34,3^\circ} = 3,15 \angle 55,3^\circ \text{ A}$$

Con ellas, el cálculo de la tensión en cada fase de la carga es inmediato:

$$\begin{aligned}\vec{U}_a &= \vec{Z}_Y \vec{I}_A = 100,2 \angle -19,4^\circ \text{ V} \\ \vec{U}_b &= \vec{Z}_Y \vec{I}_B = 98,2 \angle -168,7^\circ \text{ V} \\ \vec{U}_c &= 3 \vec{Z}_Y \vec{I}_C = 157,3 \angle 88^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Y las tensiones de línea en la carga:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{ab} &= \vec{U}_a - \vec{U}_b = 191,3 \angle -4,1^\circ \text{ V} \\ \vec{U}_{bc} &= \vec{U}_b - \vec{U}_c = 203,7 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \vec{U}_{ca} &= \vec{U}_c - \vec{U}_a = 212 \angle 114,8^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Para finalizar el apartado indicar que si el desequilibrio es muy grande (como por ejemplo cuando se abre una fase) suele ser mejor resolverlo de forma gráfica, utilizando el diagrama vectorial de tensiones e intensidades, y con él ver “dónde está ahora” el punto neutro de la carga. Y piense que, en cualquier caso, siempre nos queda recurrir al método poco elegante de “fuerza bruta” que consiste en resolver el circuito trifásico como un circuito general que tiene tres fuentes de tensión alternas, utilizando para ello alguno de los dos métodos de análisis conocidos y generales, el de mallas o el de nudos.

### 3.4.3. Medida de potencia en sistemas trifásicos con cargas desequilibradas.

En el apartado anterior se vieron distintos métodos para medir la potencia activa y la potencia reactiva en sistemas trifásicos equilibrados utilizando uno o dos vatímetros. A continuación se van a ver los métodos que hay cuando el sistema es desequilibrado en carga.

#### Medida de la potencia activa.

Si el sistema trifásico tiene conductor de neutro o el neutro de la carga en estrella es accesible, se mide la potencia activa que consume cada fase y la potencia activa total es la suma de las tres (figura 3.37.a). De la misma forma, si la carga está en triángulo pero sus fases son accesibles, se

conectan los vatímetros de tal forma que cada uno mida la potencia activa de una fase y luego se suman (figura 3.37.b). En ambos casos:

$$P = W_1 + W_2 + W_3 \tag{3.44}$$

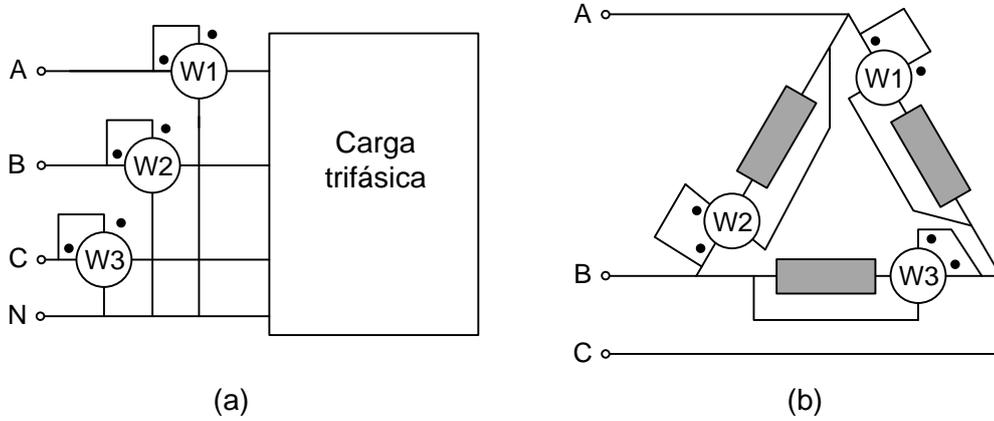


Figura 3.37

Si no existe conductor de neutro y las fases de la carga no son accesibles, y por tanto no se puede conectar en cada una de ellas un vatímetro, la alternativa es utilizar tres vatímetros conectados como se indica en la figura 3.38. La potencia total es, como en los anteriores, la suma de las tres lecturas (ecuación (3.44)). En este caso no es estrictamente necesario que los tres vatímetros sean exactamente iguales (que sus bobinas voltimétricas tengan la misma impedancia), ya que se demuestra que la única condición necesaria es que la suma de las tres intensidades de línea sea 0, lo que siempre ocurrirá ya que no existe hilo de neutro.

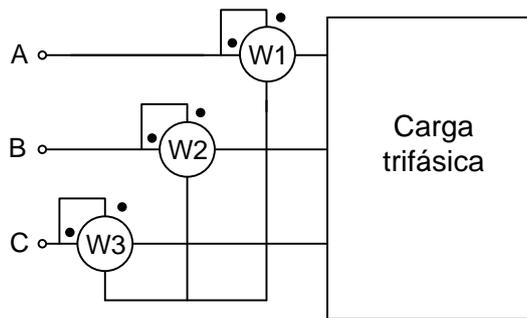


Figura 3.38

El punto común de los tres vatímetros de la figura 3.38 puede estar a un potencial distinto del del neutro del sistema, por lo que nada nos impediría que ese punto estuviese en una de las líneas, por ejemplo, coincidiendo con el punto C de la carga. En ese caso la lectura del vatímetro W3 es igual a 0, ya que la tensión en su bobina voltimétrica es nula, con lo que el circuito podría simplificarse y ser como el de la figura 3.39, siendo ahora:

$$P = W_1 + W_2 \tag{3.45}$$

Tenga en cuenta que aunque en este caso la conexión es similar a la del método de los dos vatímetros, ahora no se trata de ese método ya que la relación entre la potencia reactiva  $Q$  y las lecturas de esos dos vatímetros no se cumple al ser la carga desequilibrada. Tenga muy presente que el método de los dos vatímetros solo es válido en sistemas trifásicos equilibrados.

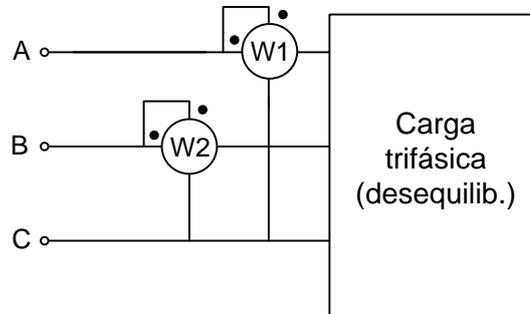


Figura 3.39

### Medida de la potencia reactiva.

Solo si el sistema trifásico no tiene conductor de neutro se puede medir la potencia reactiva que consume la carga mediante la conexión de tres vatímetros tal y como muestra la figura 3.40. Como las tensiones de línea forman un sistema trifásico equilibrado de tensiones (recuerde que solo estamos considerando el desequilibrio en la carga), se demuestra que la potencia reactiva total consumida por la carga es:

$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}} \tag{3.46}$$

Y de la misma forma que en el apartado anterior, hay que tener presente que, como la potencia reactiva consumida por la carga puede ser positiva o negativa, la conexión de los vatímetros ha de hacerse de tal forma que esas tres lecturas sean positivas.

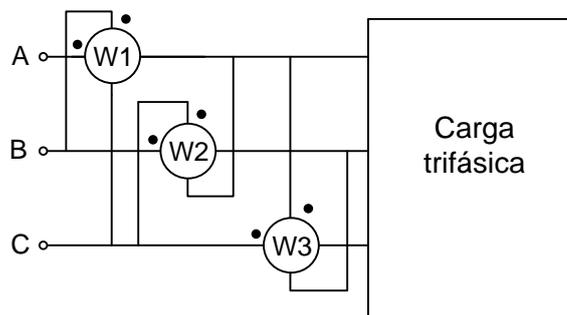


Figura 3.40

3.5. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN.

**Ejercicio 3.1.** La figura 3.41 representa un sistema trifásico de tensiones equilibrado que alimenta una carga trifásica equilibrada de carácter inductivo que consume 1200 VA. Se sabe que los vatímetros están conectados de tal forma que todas las lecturas son no negativas; también se sabe que la lectura del vatímetro W4 es el doble que la del vatímetro W5. Se pide: (a) Deducir la secuencia de fases del sistema, razonando la respuesta. (b) Calcular el factor de potencia de la carga. (c) Calcular las lecturas de los cinco vatímetros. (d) Indicar si alguna de las conexiones de los vatímetros corresponde a algún método para medir P y Q de la carga y, en esos casos, comprobar el valor de la medida.

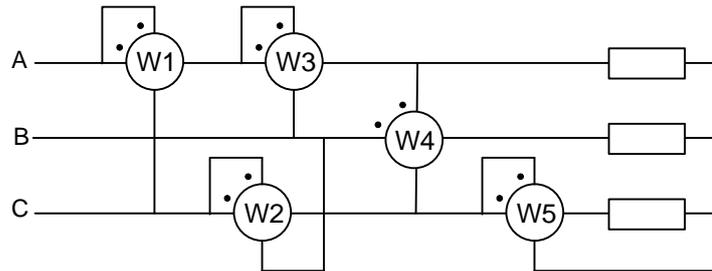


Figura 3.41

**Ejercicio 3.2.** Para el circuito trifásico de la figura 3.42, se pide calcular: (a) La expresión de las tres intensidades de línea, en módulo y argumento. (b) La potencia activa y la potencia reactiva que consume la carga. (c) Dibujar cómo se conectarían dos vatímetros para medir las potencias del apartado anterior, conforme al método de los dos vatímetros, y calcular sus lecturas.

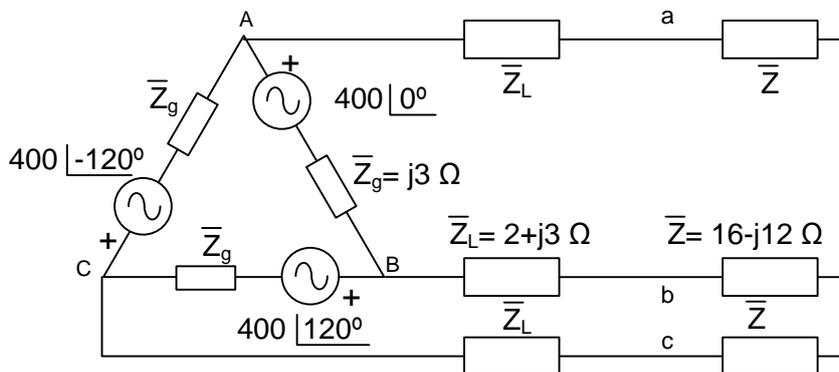


Figura 3.42

**Ejercicio 3.3.** La figura 3.43 representa un sistema trifásico equilibrado de frecuencia 50 Hz, al que se conecta una carga formada por tres impedancias iguales conectadas en estrella. Se sabe que la lectura del amperímetro es 8,5 A y que las lecturas de los vatímetros W1 y W2 son 610 W y 1875 W, respectivamente. Se pide calcular: (a) ¿Cuál es la secuencia de fases del sistema? (b) El valor de la tensión de línea del sistema. (c) El valor de la impedancia, en módulo y argumento, de cada fase de la carga. (d) El valor por fase de la batería de condensadores, conectados en triángulo,

que en paralelo con la carga hacen que el conjunto presente un factor de potencia 0,9 inductivo.  
 (e) Las lecturas de los aparatos de medida una vez conectada la batería de condensadores del apartado anterior.

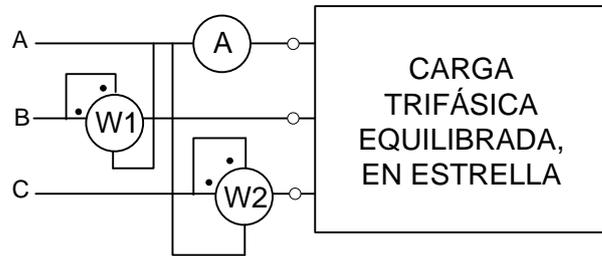


Figura 3.43

**Ejercicio 3.4.** Deducir cuál es la secuencia de fases del sistema trifásico, sabiendo que en el circuito de la figura 3.44 la lectura del voltímetro V1 es mayor que la del voltímetro V2.

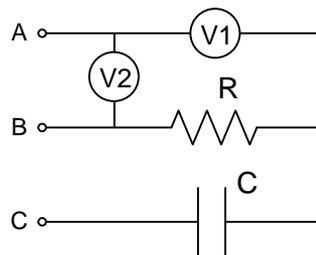


Figura 3.44

**Ejercicio 3.5.** El sistema trifásico de tensiones equilibrado de la figura 3.45, de secuencia de fases directa, alimenta una carga inductiva formada por tres impedancias iguales conectadas en estrella. Se sabe que la tensión de línea del sistema es 200 V y que cuando el interruptor S está cerrado las lecturas de los vatímetros W1 y W2 son iguales y de valor 2 kW. Se pide calcular: (a) Valor por fase de la impedancia y su factor de potencia. (b) Si se abre el interruptor S, las lecturas del voltímetro y de los dos vatímetros.

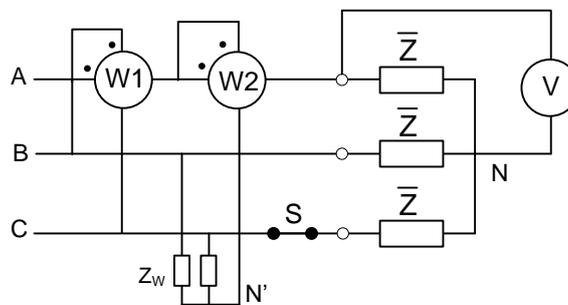


Figura 3.45

**Ejercicio 3.6.** La figura 3.46 representa un generador de tensión trifásico equilibrado al que se conecta una carga trifásica desequilibrada. Con los datos y referencia de fases dados en la figura, se pide calcular: (a) Intensidad, en módulo y argumento, que circula por cada línea. (b) Potencia activa, potencia reactiva y potencia aparente que consume la carga. (c) Suponiendo que las tres fases de la carga son inaccesibles, explique cómo se puede medir esas potencias (indique los aparatos de medida que utiliza, cómo se conectan y calcule las lecturas de cada uno).

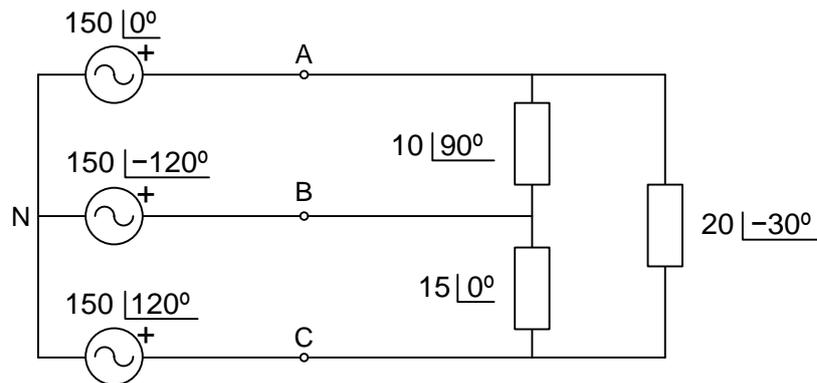


Figura 3.46

**Ejercicio 3.7.** A un sistema trifásico equilibrado en tensiones, de tensión de línea 220 V y frecuencia 50 Hz, se conecta el circuito de la figura 3.47. Sabiendo que al variar el valor de la resistencia R la lectura del voltímetro V1 es siempre menor que la del voltímetro V2, se pide: (a) Deducir la secuencia de fases del sistema. (b) Si el valor máximo de V2 se obtiene para un valor de R igual  $50 \Omega$ , calcular el valor de C y las lecturas de los tres aparatos de medida.

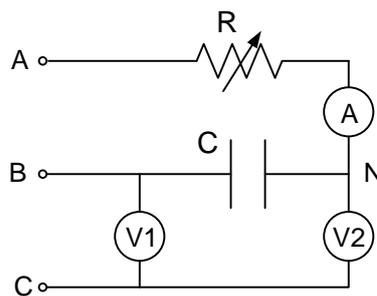


Figura 3.47

**Ejercicio 3.8.** Utilizando el circuito monofásico equivalente fase-fase del sistema trifásico equilibrado de la figura 3.42, se pide calcular, en módulo y argumento, la expresión de: (a) Las tres intensidades de línea. (b) Las tres tensiones de línea en la carga. Comprobar los resultados anteriores con los obtenidos en el ejercicio 3.2.

**Ejercicio 3.9** (a) Para saber la secuencia de fases de la alimentación de una instalación trifásica se conecta el circuito de la figura 3.48. Si la lectura del voltímetro es mayor que la tensión de línea de la instalación, deducir cuál es la secuencia de fases, justificando su respuesta.

(b) Independientemente de la respuesta a la que haya llegado en el apartado anterior a), suponga ahora que la secuencia de fases del sistema es directa. A ese sistema se conecta una carga trifásica, formada por tres impedancias iguales conectadas en estrella, que consume 7,5 kW con un factor de potencia 0,7 capacitivo. Si la tensión de línea de la instalación es 380 V, indicar cómo se debe conectar un vatímetro para medir la potencia reactiva que consume la carga y calcular su lectura.

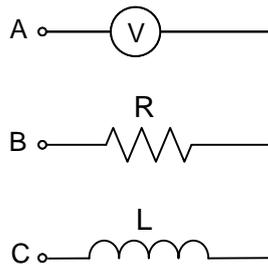


Figura 3.48

**Ejercicio 3.10.** El circuito de la figura 3.49 representa un sistema trifásico de tensiones de secuencia de fases inversa, que alimenta una carga trifásica formada por tres impedancias iguales conectadas en triángulo. Sabiendo que la lectura del amperímetro es 12 A y las de los vatímetros WA y WB son 4646 W y 1511 W, respectivamente, se pide calcular: (a) El valor eficaz de las tensiones de fase y de línea del sistema. (b) El valor de cada impedancia de la carga (como resistencia y reactancia en serie).

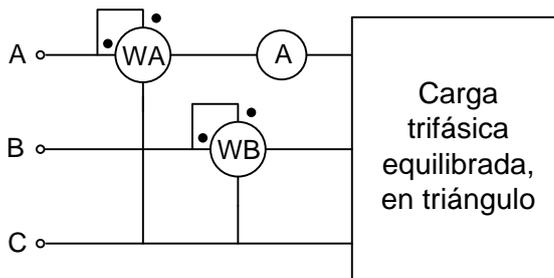


Figura 3.49

**Ejercicio 3.11.** A un sistema trifásico de tensiones equilibrado, de tensión de línea 400 V, frecuencia 50 Hz y secuencia de fases inversa, se conecta una carga trifásica formada por tres impedancias iguales conectadas en estrella. Cada una de las tres fases está formada por una resistencia de 27 Ω en serie con una bobina de 0,22 H. Se pide: (a) Indicar claramente cómo deberían conectarse dos vatímetros conforme al método de los dos vatímetros y calcular sus lecturas. (b) Calcular la intensidad de línea que suministra el sistema. (c) Calcular la batería de condensadores, conectados en triángulo, que hay que conectar para que el conjunto carga-batería tenga un factor

de potencia 0,86 inductivo; en esta situación, calcular las lecturas de esos aparatos de medida sin modificar las conexión que ha indicado en el primer apartado.

**Ejercicio 3.12.** La figura 3.50 representa una carga trifásica equilibrada que está alimentada por un sistema trifásico equilibrado de tensiones de frecuencia 50 Hz y secuencia directa de fases. Sabiendo que las lecturas de los aparatos de medida son  $A = 4,5$  A,  $W1 = 1680$  W y  $W2 = 520$  W, se pide calcular: (a) La tensión de línea del sistema. (b) La impedancia por fase de la carga, en módulo y argumento, sabiendo que están conectadas en estrella. (c) Las tres intensidades de línea, en módulo y argumento, tomando como origen de fases la tensión de línea entre las fases a y b. (d) Por un accidente la fase c se abre en el punto P (lo que se puede analizar suponiendo que el interruptor de la figura está abierto); en estas condiciones calcular las lecturas de los aparatos de medida.

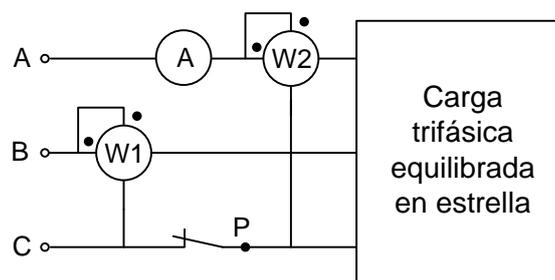


Figura 3.50

## SOLUCIONES

### Ejercicio 3.1.

(a) Supongamos que la secuencia de fases es directa. Como la carga es inductiva, a la vista del diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la figura 3.51.a, el desfase  $\theta_{W4}$  que hay entre  $\vec{I}_B$  y  $\vec{U}_{AC}$  es mayor que  $90^\circ$ , por lo que el vatímetro no da ninguna lectura (la lectura sería negativa). Esto indica que la suposición inicial de que el sistema es de secuencia directa es errónea y, por tanto, la secuencia de fases del sistema es inversa.

(b) A la vista del diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la figura 3.51.b, las lecturas de los vatímetros W4 y W5 son:

$$W4 = U I \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad W5 = \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi$$

Como nos dicen que la lectura de W4 es el doble que la de W5 se tiene que:

$$U I \operatorname{sen} \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} U I \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \varphi = 49,1^\circ$$

con lo que el factor de potencia de la carga ( $\cos \varphi$ ) es 0,655 inductivo.

(c) A partir de los diagramas vectoriales de tensiones e intensidades de las figuras 3.51.b-c, se tiene que las lecturas de los vatímetros son:

$$W1 = U_{AC} I_A \cos \theta_{W1} = U I \cos(\varphi + 30^\circ) = \frac{1200}{\sqrt{3}} \cos 79,1^\circ = 131 \text{ W}$$

$$W2 = U_{CB} I_C \cos \theta_{W2} = U I \cos(\varphi + 30^\circ) = \frac{1200}{\sqrt{3}} \cos 79,1^\circ = 131 \text{ W}$$

$$W3 = U_{AB} I_A \cos \theta_{W3} = U I \cos(\varphi - 30^\circ) = \frac{1200}{\sqrt{3}} \cos 19,1^\circ = 654,7 \text{ W}$$

$$W4 = U_{AC} I_B \cos \theta_{W4} = U I \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{1200}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 49,1^\circ = 523,7 \text{ W}$$

$$W5 = U_{CN} I_C \cos \theta_{W5} = \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi = \frac{1200}{3} \cos 49,1^\circ = 261,9 \text{ W}$$

(d) Conocida la potencia aparente que consume la carga y su factor de potencia, es inmediato calcular la potencia activa y la potencia reactiva que consume la carga, que son:

$$P = 1200 \cdot \cos 49,1^\circ = 785,7 \text{ W} \quad \text{y} \quad Q = 1200 \cdot \operatorname{sen} 49,1^\circ = 907 \text{ VAR}$$

Ahora comprobamos estos valores calculados utilizando los métodos de medida de potencia explicados en este capítulo. Tal y como están conectados los aparatos de medida, el vatímetro W5 mide la potencia activa que consume una fase, así (ecuación (3.25)):

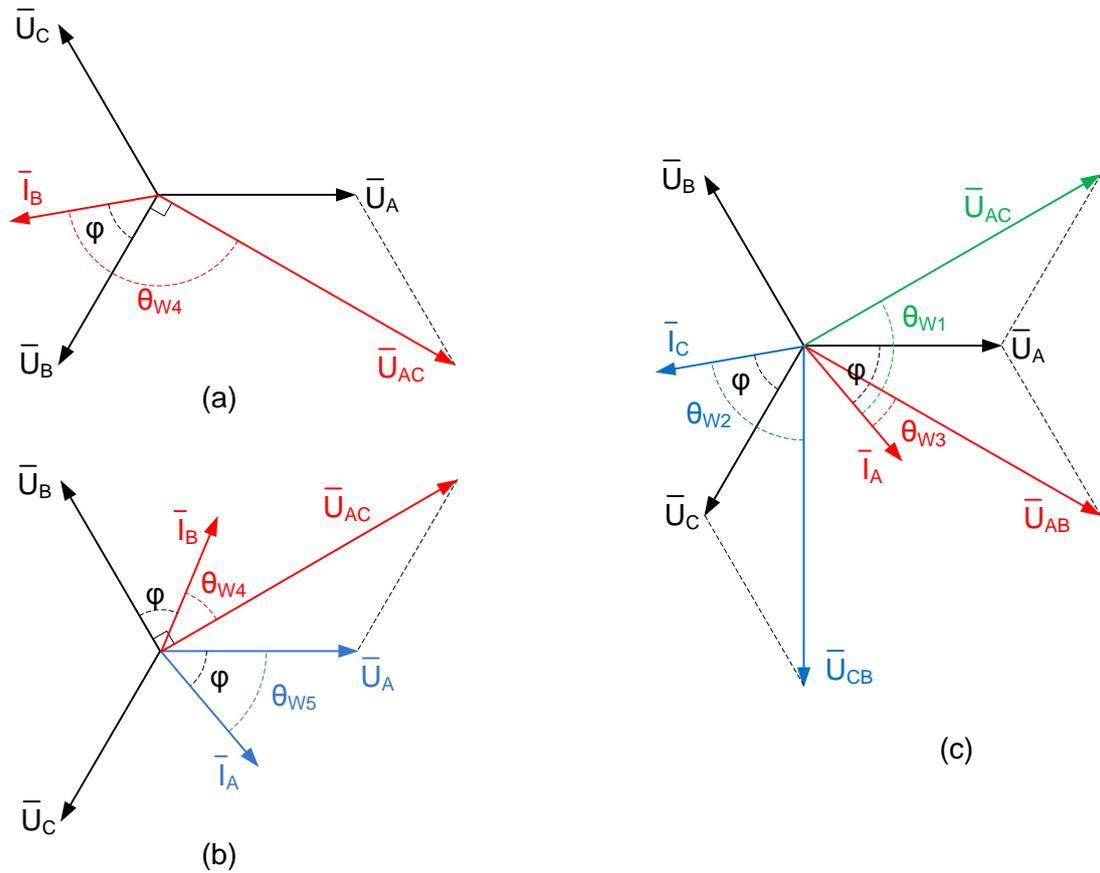


Figura 3.51

$$P = 3 \cdot W5 = 3 \cdot 261,9 = 785,7 \text{ W}$$

El vatímetro W4 está conectado conforme al método para medir la potencia reactiva que consume la carga, así (ecuación (3.27)):

$$Q = \sqrt{3} \cdot W4 = \sqrt{3} \cdot 523,7 = 907 \text{ VAR}$$

Los vatímetros W2 y W3 están conectados conforme al método de los dos vatímetros, así (ecuación (3.32)):

$$\begin{cases} P = W_3 + W_2 = 654,7 + 131 = 785,7 \text{ W} \\ Q = \sqrt{3} (W_3 - W_2) = \sqrt{3} \cdot (654,7 - 131) = 907 \text{ VAR} \end{cases}$$

Y el vatímetro W1 no está conectado conforme a alguno de los métodos estudiados por lo que su lectura no se puede relacionar directamente (mediante una expresión sencilla) con la potencia activa o la potencia reactiva que consume la carga.

### Ejercicio 3.2.

(a) El generador en triángulo del circuito genera un sistema trifásico de tensiones equilibrado de secuencia inversa, por lo que la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$  del generador está retrasada  $30^\circ$  respecto a la tensión de fase  $\vec{U}_{AN}$  del generador en estrella equivalente (como se deduce del diagrama vectorial de tensiones de la figura 3.3). Por otro lado, la carga ya está conectada en estrella.

Así, el circuito trifásico del enunciado puede analizarse mediante su circuito trifásico equivalente Y-Y, que es el que se muestra en la figura 3.52.a. Por último, como ese circuito trifásico estrella-estrella es equilibrado, su análisis se realiza mediante el análisis de su circuito monofásico equivalente fase-neutro, que es el que se muestra en la figura 3.52.b. De esta forma, la intensidad por la línea A es:

$$\vec{I}_A = \frac{400/\sqrt{3} \angle 30^\circ}{j + 2 + j3 + 16 - j12} = \frac{230,94 \angle 30^\circ}{18 - j8} = 11,72 \angle 54^\circ \text{ A}$$

y como la secuencia de fases es inversa, las otras dos intensidades de línea son:

$$\vec{I}_B = 11,72 \angle 174^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \vec{I}_C = 11,72 \angle -66^\circ \text{ A}$$

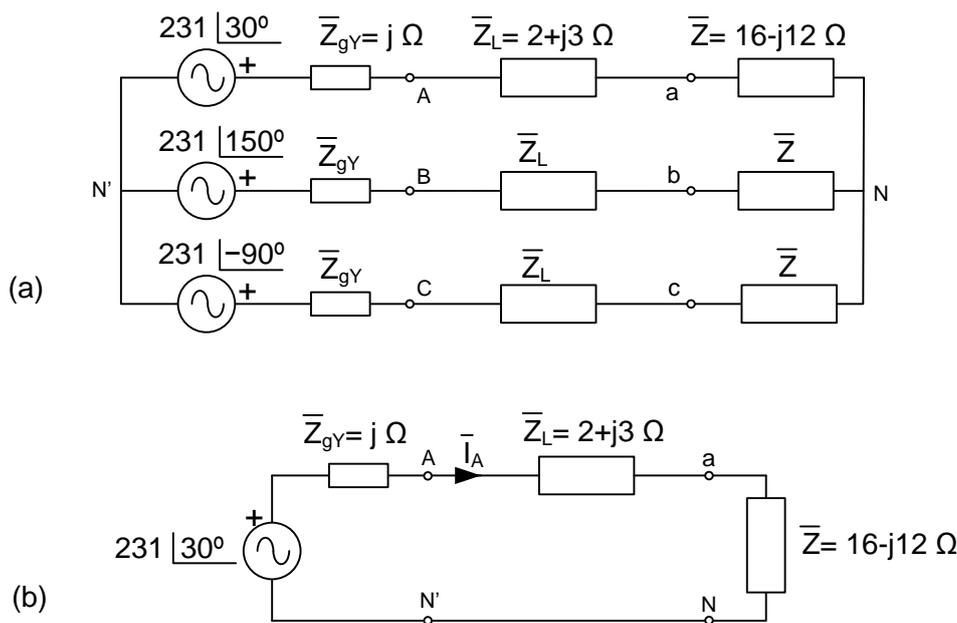


Figura 3.52

(b) La potencia activa y la potencia reactiva que consume la carga son:

$$P = 3 P_f = 3 \cdot 11,72^2 \cdot 16 = 6593 \text{ W} \quad \text{y} \quad Q = 3 Q_f = 3 \cdot 11,72^2 \cdot (-12) = -4945 \text{ VAR}$$

(c) Una posible conexión de los dos vatímetros conforme al método de ese nombre es la indicada en la figura 3.53.a. Hay que comprobar que las lecturas de esos dos vatímetros son no negativas y

cuál es el que tiene la lectura mayor. Para esa conexión de los vatímetros esto se hace mediante el diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la figura 3.53.b, en el que se ve que la lectura de W1 es mayor que la lectura de W2 ya que el ángulo  $\theta_{W1}$  es menor que  $\theta_{W2}$ . Así, aplicando la relación entre las lecturas y las potencias del método de los dos vatímetros (ecuación (3.32)), se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} P &= 6593 = W_2 + W_1 \\ Q &= -4945 = \sqrt{3}(W_2 - W_1) \end{aligned} \right\} \rightarrow W_1 = 4724 \text{ W} \quad \text{y} \quad W_2 = 1869 \text{ W}$$

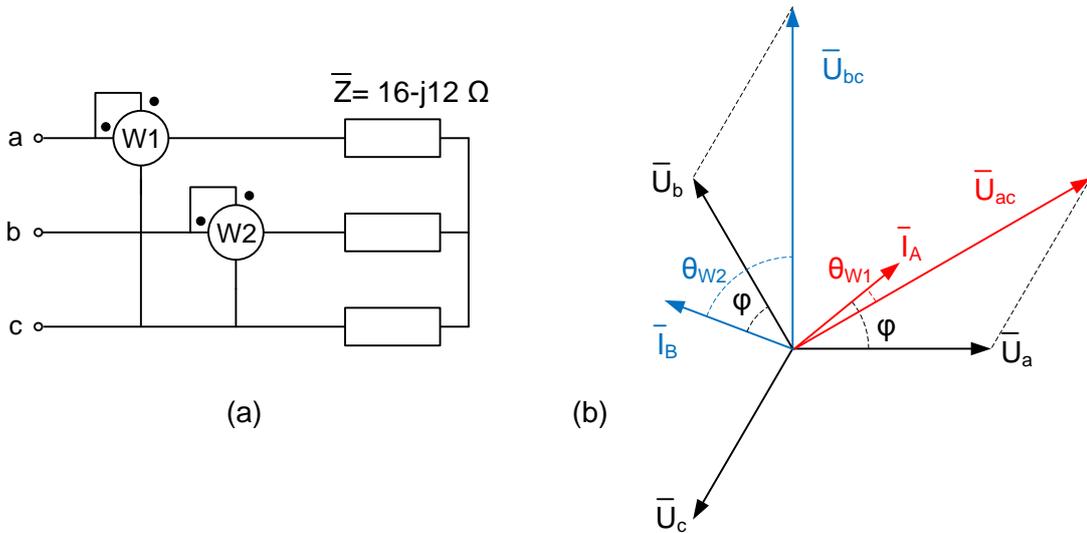


Figura 3.53

### Ejercicio 3.3.

(a) Supongamos, como punto de partida, que la secuencia de fases es inversa. Como la carga es inductiva (aunque no se dice expresamente en el enunciado, es inmediato deducirlo ya que si la carga no fuese inductiva no tendrían sentido los dos últimos apartados del ejercicio), a la vista del diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la figura 3.54, se tiene que el desfase  $\theta_{W1}$ , que hay entre  $\bar{I}_B$  y  $\bar{U}_{BA}$ , es mayor que el desfase  $\theta_{W2}$ , entre  $\bar{I}_C$  y  $\bar{U}_{CA}$ , lo que indica que la lectura del vatímetro W1 es menor que la de W2. Como esta conclusión está de acuerdo con las lecturas dadas como dato del ejercicio, la suposición inicial de que el sistema es de secuencia inversa es correcta.

(b) Los dos vatímetros están conectados de acuerdo al método del mismo nombre. Como la carga es inductiva y W1 es menor que W2 se tiene:

$$\left. \begin{aligned} P &= W_2 + W_1 = 2485 \text{ W} \\ Q &= \sqrt{3}(W_2 - W_1) = 2191 \text{ VAR} \end{aligned} \right\} \rightarrow S = \sqrt{2485^2 + 2191^2} = 3313 \text{ VA}$$

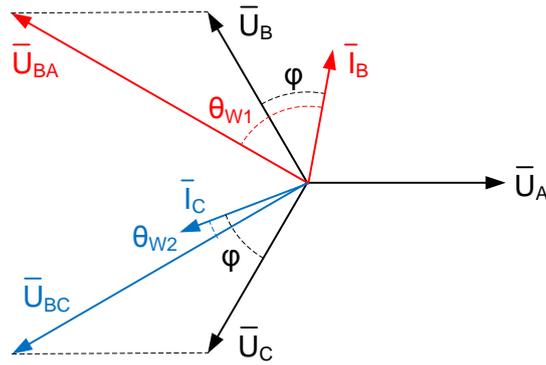


Figura 3.54

y, por tanto, la tensión de línea del sistema es:

$$U = \frac{S}{\sqrt{3}I} = \frac{3313}{\sqrt{3} \cdot 8,5} = 225 \text{ V}$$

(c) Como la carga está conectada en estrella, su impedancia por fase es:

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{U_f}{I} = \frac{225/\sqrt{3}}{8,5} = 15,28 \Omega \\ \cos \varphi &= \frac{P}{S} = \frac{2485}{3313} = 0,75 \text{ ind.} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{Z} = 15,28 \angle 41,4^\circ \Omega$$

(d) Si el conjunto carga-batería tiene un factor de potencia igual a 0,9 inductivo, la potencia reactiva que consume es:

$$Q_N = P \tan \varphi = 2485 \cdot \tan 25,8^\circ = 1203 \text{ VAR}$$

con lo que la potencia reactiva que consume la batería de condensadores es:

$$Q_N = Q + Q_C \rightarrow Q_C = Q_N - Q = 1203 - 2191 = -988 \text{ VAR}$$

El valor por fase de la batería de condensadores, conectados en triángulo, que consumen esa potencia reactiva  $Q_C$  es:

$$Q_C = -3U_C^2 \omega C \rightarrow C_\Delta = \frac{-988}{-3 \cdot 225^2 \cdot 100\pi} = 2,07 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

(e) Como la potencia activa que consume el conjunto carga-batería es la misma que consume la carga, la lectura del amperímetro es:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U \cos \varphi_N} = \frac{2485}{\sqrt{3} \cdot 225 \cdot 0,9} = 7,09 \text{ A}$$

Y las lecturas de los dos vatímetros son ahora:

$$\left. \begin{array}{l} P = 2485 = W_2 + W_1 \\ Q = 1203 = \sqrt{3}(W_2 - W_1) \end{array} \right\} \rightarrow W_1 = 895 \text{ W} \quad \text{y} \quad W_2 = 1590 \text{ W}$$

### Ejercicio 3.4.

Suponemos como punto de partida que la secuencia de fases es directa. En este caso, la fase A está abierta por lo que el circuito que hay es un circuito monofásico RC serie alimentado por la tensión de línea  $\vec{U}_{BC}$  y la intensidad  $\vec{I}$  que circula por él está, por tanto, adelantada respecto a esa tensión, tal y como se muestra en la figura 3.55.a. El punto N estará en algún lugar de la circunferencia indicada en esa figura.

La tensión entre B y N es la tensión en la resistencia por tanto está en fase con la intensidad  $\vec{I}$  del circuito, por lo que el punto N de la carga estará situado en la semicircunferencia exterior (figura 3.55.b). Para cualquier punto de esa semicircunferencia la tensión de la fase A en la carga,  $\vec{U}_{AN}$ , que mide el voltímetro V1, es mayor que la tensión de línea, que mide el voltímetro V2. Como este resultado está de acuerdo con el dato dado ( $V_1 > V_2$ ) la suposición inicial era la correcta y, por tanto, la secuencia de fases es directa.

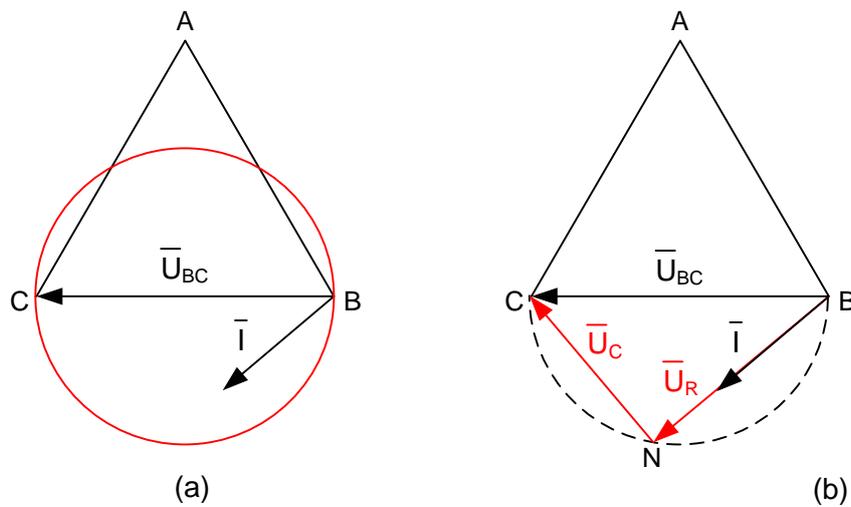


Figura 3.55

**Ejercicio 3.5.**

(a) El vatímetro W1 está conectado conforme al método que permite medir la potencia reactiva que consume la carga, mientras que el vatímetro W2 mide la potencia activa que consume una fase de la carga. De esta forma:

$$\left. \begin{aligned} P &= 3 \cdot W2 = 3 \cdot 2000 = 6000 \text{ W} \\ Q &= \sqrt{3} \cdot W1 = \sqrt{3} \cdot 2000 = 3464 \text{ VAr} \end{aligned} \right\} \rightarrow S = \sqrt{6000^2 + 3464^2} = 6928 \text{ VA}$$

Y como la carga está conectada en estrella, su impedancia por fase es:

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{U_f}{I} = \frac{U}{\sqrt{3}I} = \frac{U^2}{S} = \frac{200^2}{6928} = 5,77 \Omega \\ \cos \varphi &= \frac{P}{S} = \frac{6000}{6928} = 0,866 \text{ ind.} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{Z} = 5,77 \underline{|30^\circ} \Omega$$

(b) Al abrir el interruptor las tensiones de fase de la carga se desequilibran (se desplaza el punto neutro N de la carga respecto del punto neutro N' del sistema), aunque las tensiones de línea se mantienen equilibradas (las asegura el generador del sistema). Con la fase C abierta, como las dos impedancias de las fases A y B son iguales, el punto N estará en el punto medio de la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$ , como se representa en el diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la figura 3.56.

De esta forma la lectura del voltímetro es 100 V. Por otro lado, la intensidad que circula por el circuito que hay con el interruptor abierto es:

$$\vec{I}_A = -\vec{I}_B = \frac{\vec{U}_{AB}}{2\vec{Z}} = \frac{200 \underline{|30^\circ}}{2 \cdot 5,77 \underline{|30^\circ}} = 17,32 \underline{|0^\circ} \text{ A}$$

con lo que las lecturas de los vatímetros son:

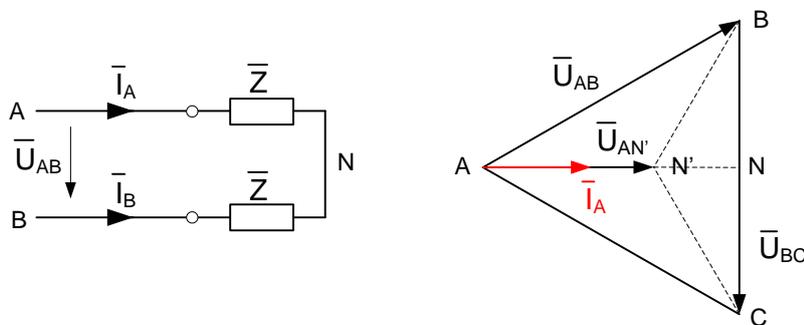


Figura 3.56

$$W1 = I_A U_{BC} \cos 90^\circ = 0$$

y

$$W2 = I_A U_{AN'} \cos 0^\circ = 17,32 \cdot \frac{200}{\sqrt{3}} \cdot 1 = 2000 \text{ W}$$

### Ejercicio 3.6.

(a) Sustituyendo la carga en triángulo por su estrella equivalente mediante las ecuaciones 3.36, se obtiene el circuito trifásico equivalente estrella-estrella de la figura 3.57.a. Aplicando el teorema de Millman, se calcula la tensión entre los dos puntos neutro (ecuación 3.39):

$$\vec{U}_{N'N} = \frac{24,24 \angle 60^\circ + 32,32 \angle 150^\circ + 16,16 \angle 150^\circ}{0,3482 \angle -60^\circ} = 86,277 \angle -126,2^\circ \text{ V}$$

Y con ella, las intensidades de línea (ecuación 3.40):

$$\vec{I}_A = \frac{\vec{E}_A - \vec{U}_{N'N}}{\vec{Z}_A} = \frac{150 \angle 0^\circ - 86,277 \angle -126,2^\circ}{6,188 \angle 60^\circ} = 34,37 \angle -40,9^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_B = \frac{\vec{E}_B - \vec{U}_{N'N}}{\vec{Z}_B} = \frac{150 \angle -120^\circ - 86,277 \angle -126,2^\circ}{4,641 \angle 90^\circ} = 13,98 \angle 158,3^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_C = \frac{\vec{E}_C - \vec{U}_{N'N}}{\vec{Z}_C} = \frac{150 \angle 120^\circ - 86,277 \angle -126,2^\circ}{9,282 \angle -30^\circ} = 21,65 \angle 126,9^\circ \text{ A}$$

Como la distribución es a tres hilos, compruebe que se cumple la igualdad (3.43). (Nota: en este ejercicio, al no haber impedancia de línea, habría sido más sencillo llegar a este mismo resultado a partir del circuito trifásico equivalente triángulo-triángulo; sin embargo se ha optado por hacerlo conforme al método explicado en el desarrollo teórico de este capítulo).

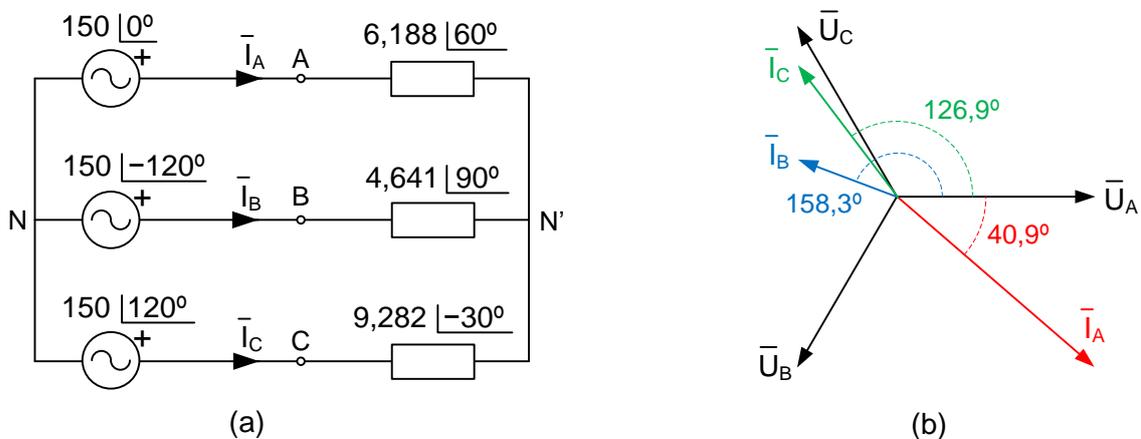


Figura 3.57

(b) La potencia que consume la carga es la suma de la potencia que consume cada fase. Así:

$$\vec{S} = I_A^2 \vec{Z}_A + I_B^2 \vec{Z}_B + I_C^2 \vec{Z}_C = 7310 \underline{|60^\circ} + 907 \underline{|90^\circ} + 4351 \underline{|-30^\circ} = 8985 \underline{|34,3^\circ} \text{ VA}$$

y, por tanto, la potencia aparente, la potencia activa y la potencia reactiva que consume la carga trifásica son:

$$S = 8985 \text{ VA}; \quad P = 7423 \text{ W}; \quad Q = 5062 \text{ VAR}$$

(c) Para facilitar los cálculos que hay que realizar en este apartado es conveniente dibujar el diagrama vectorial de tensiones e intensidades del sistema, que es el que se muestra en la figura 3.57.b.

Como la carga es desequilibrada, la potencia activa se puede medir utilizando dos vatímetros conectados como se indica en la figura 3.27. Sus lecturas son:

$$W_1 = I_A U_{AC} \cos(40,9^\circ - 30^\circ) = 34,37 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(10,9) = 8768 \text{ W}$$

$$W_2 = I_B U_{BC} \cos(158,3^\circ - 270^\circ) = 13,98 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(111,7) < 0$$

Como la lectura de  $W_2$  da error (sería negativa), se cambia el terminal  $\bullet$  de, por ejemplo, la intensidad (figura 3.58.a), con lo que su lectura ahora es:

$$W_2 = I_B U_{BC} \cos(-21,7^\circ + 90^\circ) = 13,98 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(68,3^\circ) = 1343 \text{ W}$$

aunque debe considerarse como negativa por el cambio realizado. Así, la conexión correcta de los dos vatímetros es la indicada en la figura 3.58.a, y la potencia activa que consume la carga es:

$$P = W_1 + W_2 = 8768 - 1343 = 7425 \text{ W}$$

Para medir la potencia reactiva consumida hay que utilizar tres vatímetros conectados como se indica en la figura 3.40. Sus lecturas son:

$$W_1 = I_A U_{BC} \cos(90^\circ - 40,9^\circ) = 34,37 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(49,1^\circ) = 5847 \text{ W}$$

$$W_2 = I_B U_{CA} \cos(180^\circ - 158,3^\circ) = 13,98 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(21,7^\circ) = 3594 \text{ W}$$

$$W_3 = I_C U_{AB} \cos(126,9^\circ - 30^\circ) = 21,65 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(96,9^\circ) < 0$$

Como la lectura de  $W_3$  da error (sería negativa), hay que cambiar el terminal  $\bullet$  de la intensidad, con lo que la conexión correcta de los tres vatímetros es la mostrada en la figura 3.58.b. Ahora su lectura es:

$$W_3 = I_C U_{AB} \cos(53,1^\circ + 30^\circ) = 21,65 \cdot 150 \sqrt{3} \cdot \cos(83,1^\circ) = 676 \text{ W}$$

De esta forma, la potencia reactiva consumida por la carga es:

$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}} = \frac{5847 + 3594 - 676}{\sqrt{3}} = 5061 \text{ VAR}$$

Valores de P y Q que, salvo una pequeña discrepancia por los redondeos acumulados en los cálculos, coinciden con los obtenidos en el apartado anterior.

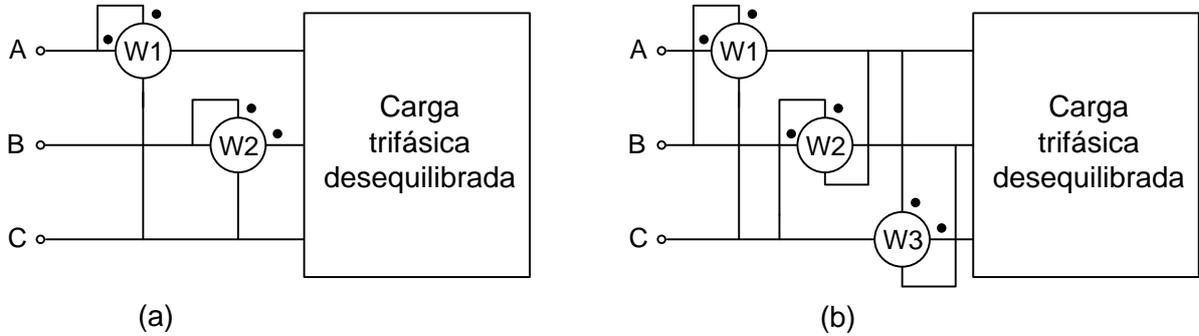


Figura 3.58

**Ejercicio 3.7.**

(a) Como punto de partida, supongamos que la secuencia de fases del sistema es directa. El circuito de la figura 3.47 es un circuito RC serie alimentado por la tensión de línea  $\vec{U}_{AB}$ , por lo que la intensidad  $\vec{I}$  que circula por él estará adelantada respecto a esa tensión. Como la tensión  $\vec{U}_{AN}$  es la que cae en la resistencia, el punto N estará en algún lugar de la semicircunferencia de la figura 3.59.a: de esta forma, se ve que la tensión  $U_{CN}$  que mide el voltímetro V2 es siempre mayor que la tensión de línea. Como esta conclusión está de acuerdo con el dato del ejercicio,  $V_2 > V_1$ , la suposición inicial es correcta y, por tanto, la secuencia de fases del sistema es directa.

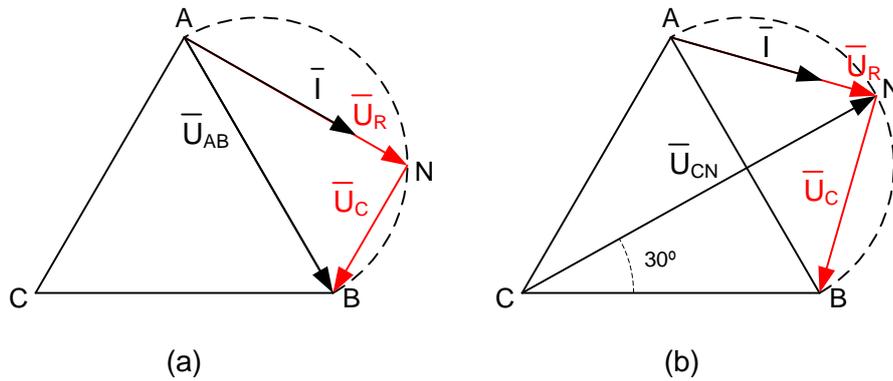


Figura 3.59

(b) El valor máximo de la lectura de V2 se tiene en la situación mostrada en la figura 3.59.b. Por trigonometría se tiene que el valor de esa lectura es:

$$V_2 = U \cos 30^\circ + \frac{U}{2} = 220 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = 300,5 \text{ V}$$

y las lecturas de los otros dos aparatos de medida son:

$$V_1 = U = 220 \text{ V} \quad \text{e} \quad I = \frac{U_R}{R} = \frac{110\sqrt{2}}{50} = 3,11 \text{ A}$$

Conocidos los valores de la intensidad y de la tensión en el condensador, su capacidad C es:

$$I = \omega C U_C \quad \rightarrow \quad C = \frac{3,11}{100\pi \cdot 110\sqrt{2}} = 63,7 \mu\text{F}$$

### Ejercicio 3.8.

(a) La carga trifásica conectada en estrella de la figura 3.42 se sustituye por su carga trifásica equivalente en triángulo, de  $48-j36 \Omega$  por fase: de esta forma se tiene un sistema trifásico  $\Delta - \Delta$ . Ese circuito trifásico puede analizarse mediante su circuito monofásico equivalente fase-fase, que es el que se muestra en la figura 3.60. De esta forma, la intensidad por la fase AB es:

$$\vec{I}_{AB} = \frac{400 \angle 0^\circ}{j3 + 6 + j9 + 48 - j36} = \frac{400 \angle 0^\circ}{54 - j24} = 6,77 \angle 24^\circ \text{ A}$$

y como la secuencia de fases es inversa, la intensidad en la línea A es:

$$\vec{I}_A = \sqrt{3} \cdot 400 \angle 0^\circ + 30^\circ = 11,72 \angle 54^\circ \text{ A}$$

y las otras dos intensidades de línea son:

$$\vec{I}_B = 11,72 \angle 174^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \vec{I}_C = 11,72 \angle -66^\circ \text{ A}$$

valores que coinciden con los obtenidos en el ejercicio 3.2.

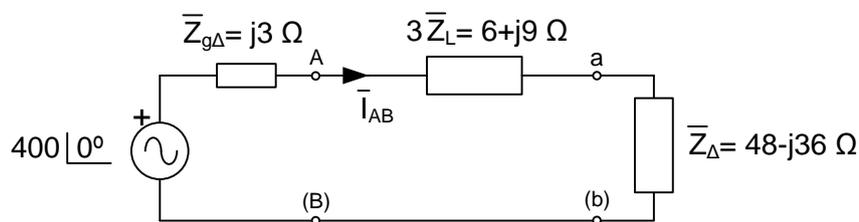


Figura 3.60

(b) Conocida la intensidad de fase  $\vec{I}_{AB}$ , a partir del circuito monofásico equivalente fase-fase (figura 3.60) la tensión de línea en la carga es:

$$\vec{U}_{ab} = 6,77 \underline{24^\circ} \cdot (48 - j36) = 406,1 \underline{-12,9^\circ} \text{ V}$$

y como la secuencia de fases es inversa, las otras dos tensiones de línea son:

$$\vec{U}_{bc} = 406,1 \underline{107,1^\circ} \text{ V} \quad \text{y} \quad \vec{U}_{ca} = 406,1 \underline{-132,9^\circ} \text{ V}$$

Para comprobar este resultado con el del ejercicio 3.2, la tensión de fase en la carga (circuito 3.52.b) es:

$$\vec{U}_{an} = 11,72 \underline{54^\circ} \cdot (16 - j12) = 234,4 \underline{17,1^\circ} \text{ V}$$

y como la secuencia de fases es inversa, la tensión de línea en la carga es:

$$\vec{U}_{ab} = \sqrt{3} \cdot 234,4 \underline{17,1^\circ - 30^\circ} = 406,1 \underline{-12,9^\circ} \text{ V}$$

que coincide con el valor obtenido antes en este apartado.

Como se ha podido comprobar con este ejercicio, un circuito trifásico equilibrado se puede analizar utilizando tanto su circuito monofásico equivalente fase-neutro como su circuito monofásico equivalente fase-fase; aunque lo más habitual es usar el primero (ya que proporciona directamente las intensidades de línea), el utilizar uno u otro dependerá del circuito a analizar.

### Ejercicio 3.9.

(a) Suponemos que la secuencia de fases es directa. Analizando el circuito monofásico RL serie que hay entre las fases B y C, se obtiene el diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la figura 3.61. En él se observa que la tensión del voltímetro,  $U_{AN}$  es siempre menor que la tensión de línea. Como este resultado es contrario al dato que nos dan sobre la lectura del voltímetro, la suposición inicial no es correcta y, por tanto, la secuencia de fases del sistema es inversa.

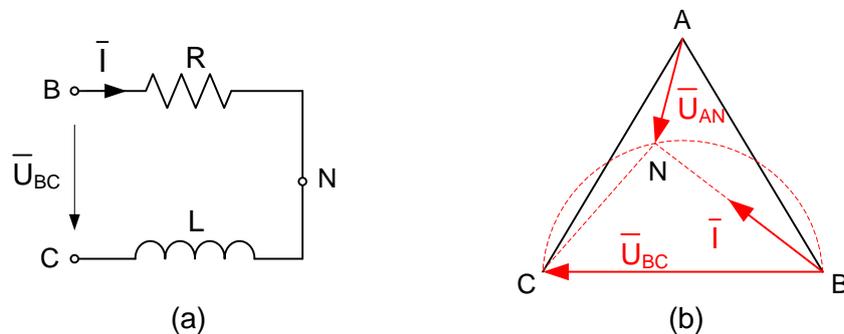


Figura 3.61

(b) La potencia reactiva que consume la carga capacitiva es:

$$\varphi = \arccos 0,7 = 45,6^\circ \rightarrow Q = P \tan \varphi = 7500 \tan(45,6^\circ) = -7651 \text{ VAR}$$

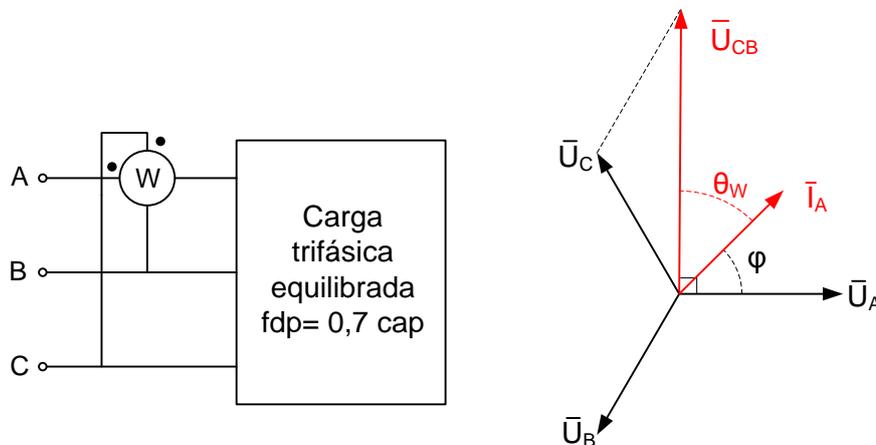


Figura 3.62

El vatímetro se ha de conectar conforme al método explicado para “medir la potencia relativa utilizando un vatímetro” (figura 3.62.a), teniendo cuidado con las polaridades de tensión e intensidad para que la lectura del vatímetro sea positiva, lo que se comprueba mediante el diagrama vectorial (figura 3.62.b, recuerde que para este apartado nos dicen que la secuencia de fases del sistema es directa). De esta forma la lectura del vatímetro es:

$$W = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{7651}{\sqrt{3}} = 4417 \text{ W}$$

### Ejercicio 3.10.

(a) Suponemos que la carga es inductiva. Analizando el circuito sobre el diagrama vectorial de tensiones e intensidades (figura 3.63), se tiene que el ángulo  $\theta_{WA}$  es mayor que el ángulo  $\theta_{WB}$ , por lo que la lectura del vatímetro WA es menor que la del vatímetro WB. Como este resultado es contrario al dato que nos dan sobre las lecturas de esos aparatos de medida, la suposición inicial no es correcta y, por tanto, la carga es capacitiva. Sabiendo ya esto, conforme al método de los dos vatímetros se tiene que:

$$\begin{cases} P = W_A + W_B = 4646 + 1511 = 6157 \text{ W} \\ Q = \sqrt{3} (W_B - W_A) = \sqrt{3} (1511 - 4646) = -5430 \text{ VAR} \end{cases} \quad (3.47)$$

y con estos valores:

$$S = 8209 \text{ VA} \quad \text{y} \quad \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{6157}{8209} = 0,75 \text{ capacitivo}$$

Con lo que los valores de la tensión de línea y de fase del sistema son:

$$U = \frac{S}{\sqrt{3}I} = \frac{8209}{\sqrt{3} \cdot 12} = 395 \text{ V} \quad \text{y} \quad U_f = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{395}{\sqrt{3}} = 228 \text{ V}$$

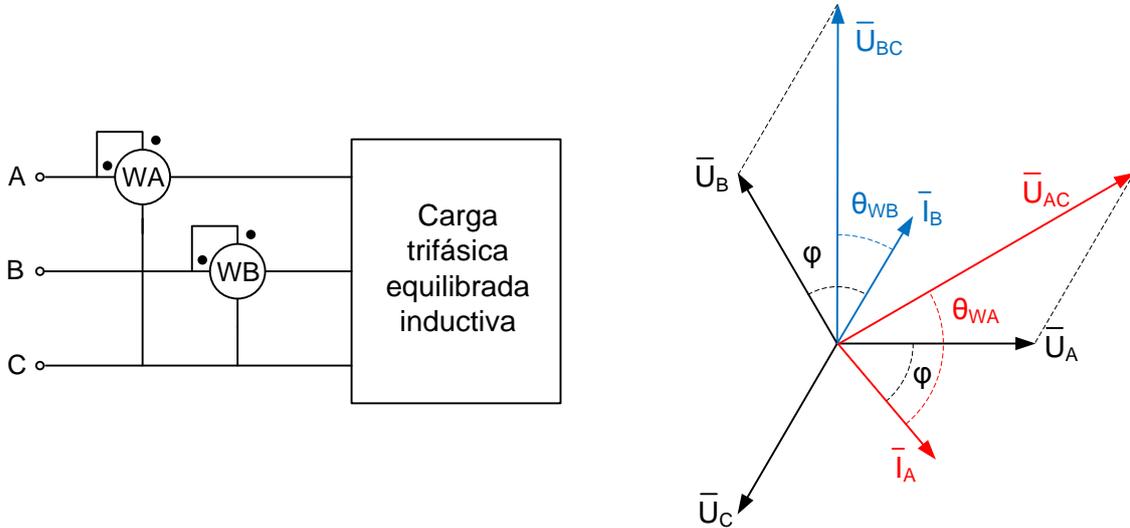


Figura 3.63

(b) Como las fases de la carga están conectadas en triángulo, la tensión en la fase de la carga es igual a la tensión de línea del sistema, por lo que su impedancia por fase es:

$$Z = \frac{U}{I_f} = \frac{395}{12/\sqrt{3}} = 57,01 \Omega \quad \rightarrow \quad \vec{Z} = 57,01 \angle -41,4^\circ = (42,8 - j37,7) \Omega$$

### Ejercicio 3.11.

(a) A la frecuencia de 50 Hz, el valor de la impedancia de cada fase de la carga es  $27 + j69,1 \Omega$  y su factor de potencia es 0,364 inductivo. La potencia compleja que consume la carga es:

$$\vec{S} = 3 \vec{U}_f \vec{I}^* = \frac{3 U_f^2}{\vec{Z}^*} = \frac{400^2}{27 - j69,1} = 784,7 + j2008,5 = P + jQ$$

Como el factor de potencia de la carga es menor que 0,5, al aplicar el método de los dos vatímetros hay que cambiar la polaridad (el terminal  $\bullet$ ) de la bobina amperimétrica del vatímetro que tiene la lectura menor y considerar ésta como negativa en las ecuaciones del método de los dos vatímetros. Así, la conexión de los dos vatímetros es la indicada en la figura 3.64 y sus lecturas son:

$$\left. \begin{aligned} P &= [-W_A] + W_B = 784,7 \text{ W} \\ Q &= \sqrt{3} (W_B - [-W_A]) = 2008,5 \text{ VA}_r \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} W_A &= 187,5 \text{ W} \\ W_B &= 972,2 \text{ W} \end{aligned} \right. \quad (3.48)$$

(b) La intensidad de línea que suministra el sistema a la carga es:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} U \cos \varphi} = \frac{784,7}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot \cos 68,7^\circ} = 3,1 \text{ A}$$

(c) Una vez conectada la batería de condensadores la potencia activa no varía, por lo que la potencia reactiva que consume el conjunto carga-batería es:

$$\varphi_N = \arccos 0,86 = 30,7^\circ \rightarrow Q_N = Q_C + 2008,5 = 784,7 \cdot \tan 30,7^\circ = 465,9 \text{ VAR}$$

Y como los condensadores de la batería entran conectados en triángulo:

$$Q_C = -3U^2 \omega C = 465,9 - 2008,5 = -1542,6 \text{ VAR} \rightarrow C = \frac{1542,6}{3 \cdot 400^2 \cdot 100 \pi} = 10,23 \mu\text{F}$$

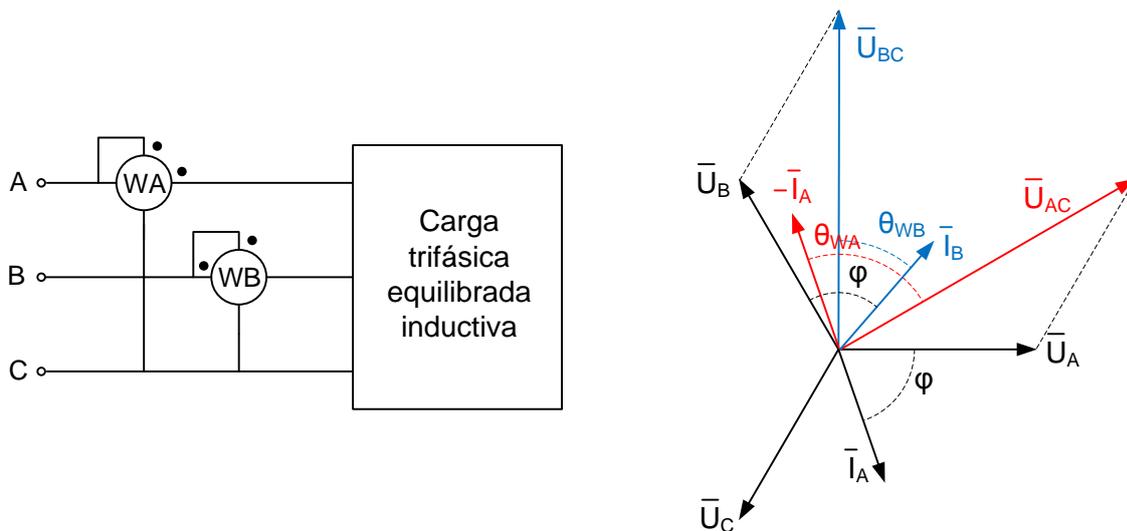


Figura 3.64

Si no se cambia la conexión de los vatímetros y sigue siendo la indicada en la figura 3.64, la lectura del vatímetro WA sería negativa (error de lectura) ya que su ángulo  $\theta_{WA}$  es mayor que  $90^\circ$ , y la lectura del vatímetro WB es:

$$W_B = U I \cos \theta_{WB} = 400 \cdot 1,32 \cdot \cos(30^\circ - 30,7^\circ) = 528 \text{ W}$$

ya que la nueva intensidad de línea que suministra el sistema al conjunto es:

$$I = \frac{784,7}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,86} = 1,32 \text{ A}$$

**Ejercicio 3.12.**

(a) Suponiendo que la carga es inductiva y como el sistema es de secuencia directa, se deduce que la lectura del vatímetro W2 es mayor que la del W1 (compruébelo haciendo el diagrama vectorial de tensiones e intensidades para esta conexión). Pero como el dato que nos dan de las lecturas es al revés,  $W1 > W2$ , la suposición inicial no es la correcta por lo que la carga es capacitiva. Aplicando el método de los dos vatímetros se tiene que:

$$\begin{cases} P = W_1 + W_2 = 1680 + 520 = 2200 \text{ W} \\ Q = \sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}(520 - 1680) = -2009 \text{ VAR} \end{cases} \quad (3.49)$$

y con estos valores:

$$S = 2979 \text{ VA} \quad \text{y} \quad U = \frac{S}{\sqrt{3} I} = \frac{2979}{\sqrt{3} \cdot 4,5} = 382,3 \text{ V}$$

(b) El valor de la impedancia por fase de la carga es:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{2200}{2979} = 0,7385 \text{ capacitivo} \quad \rightarrow \quad \varphi = 42,4^\circ$$

y como está conectada en estrella:

$$Z = \frac{U_f}{I} = \frac{382,3/\sqrt{3}}{4,5} = 49,05 \Omega \quad \rightarrow \quad \vec{Z} = 49,05 \angle -42,4^\circ = (36,2 - j33,1) \Omega$$

(c) Tomando como origen de fases la tensión de línea  $\vec{U}_{ab}$ , la intensidad que circula por la línea a es:

$$\vec{I}_A = \frac{\vec{U}_A}{\vec{Z}} = \frac{220,7 \angle -30^\circ}{49,05 \angle -42,4^\circ} = 4,5 \angle 12,4^\circ \text{ A}$$

Y como la secuencia de fases es directa:

$$\vec{I}_B = 4,5 \angle -107,6^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \vec{I}_C = 4,5 \angle 132,4^\circ \text{ A}$$

(d) Al abrirse el interruptor, queda el circuito monofásico de la figura 3.65. La intensidad que circula es:

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}_{AB}}{2\vec{Z}} = \frac{382,3 \angle 0^\circ}{2 \cdot 49,05 \angle -42,4^\circ} = 3,9 \angle 42,4^\circ \text{ A}$$

por lo que la lectura de amperímetro es 3,9 A. A la vista del diagrama vectorial de tensiones e intensidades de la misma figura, la lectura del vatímetro W2 es:

$$W_2 = \frac{U_{AB}}{2} I \cos \varphi = \frac{382,3 \cdot 3,9 \cdot \cos 42,4^\circ}{2} = 550,5 \text{ W}$$

que coincide con la potencia activa consumida por cada fase de la carga. La lectura del vatímetro W1 es:

$$W_1 = U_{BC} I \cos(-120^\circ - (-137,6^\circ)) = 382,3 \cdot 3,9 \cdot \cos 17,6^\circ = 1421,2 \text{ W}$$

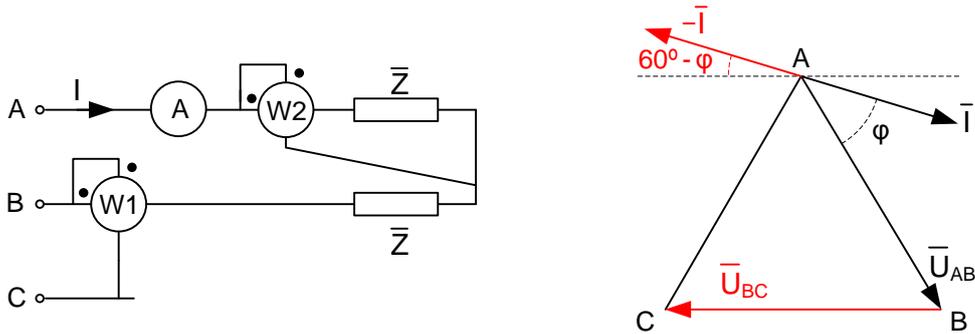


Figura 3.65



## Capítulo 4

# MÁQUINAS ELÉCTRICAS

En esta segunda parte de la asignatura se aborda el estudio de las máquinas eléctricas. Para ello debe utilizar como bibliografía base uno cualquier de los tres libros siguientes:

- [FRAILE 8<sup>a</sup>] Jesús Fraile Mora, “Máquinas eléctricas - 8<sup>a</sup> edición”. Ed. Garceta, 2016.
- [FRAILE 7<sup>a</sup>] Jesús Fraile Mora, “Máquinas eléctricas - 7<sup>a</sup> edición”. Ed. Garceta, 2015.
- [FRAILE 6<sup>a</sup>] Jesús Fraile Mora, “Máquinas eléctricas - 6<sup>a</sup> edición”. Ed. McGraw-Hill, 2008.

A efectos de preparar y estudiar los contenidos de esta segunda parte de la asignatura puede utilizar cualquiera de ellos ya que son prácticamente idénticos en lo que vamos a necesitar. El primero es el que se encuentra actualmente en las librerías, acaba de salir<sup>1</sup>. El tercero está des-catalogado pero aun se encuentra en muchas bibliotecas y librerías y, posiblemente, muchos de ustedes ya lo tengan. Este libro del profesor Fraile, en cualquiera de sus ediciones, es un excelente texto clásico totalmente vigente, un auténtico libro de referencia para el estudio de las máquinas eléctricas que todo Ingeniero debe conocer y, porqué no, tener en su biblioteca.

Como se ha indicado, a efectos de preparar y estudiar los contenidos de esta segunda parte de la asignatura esas tres ediciones son prácticamente idénticas, coincidiendo incluso la numeración de capítulos y apartados. Por esto, al indicar en los siguientes apartados de este documento los contenidos que debe estudiar haciendo referencia a donde los puede encontrar en esos libros, cuando no se indique nada de la edición (por ejemplo, [FRAILE: apartado ...]) debe entender que esa referencia coincide en las tres ediciones y solo cuando exista alguna diferencia entre ellas se indicará la edición (por ejemplo, [FRAILE 7<sup>a</sup>: apartado ...] o [FRAILE 6<sup>a</sup>: apartado ...]).

En cuanto a los contenidos de la asignatura que se detallan a continuación, verá que distinguimos entre **[Repaso]** y **[Estudio]**. Debe preparar y estudiar los segundos ya que son los contenidos nuevos respecto a lo que usted estudió en el grado, mientras que los primeros ya los vio en su momento y, por tanto, debe saber, pero conviene que los vuelva a mirar, con más o menos detenimiento según necesite, ya que son la base necesaria sobre los que se desarrollan los segundos.

Por último, piense que las máquinas eléctricas se conectan y forman parte de las instalaciones eléctricas trifásicas, por lo que es habitual (en la práctica industrial y en los exámenes de esta

---

<sup>1</sup>Acaba de publicarse este verano de 2016. No hay ninguna diferencia con la 7<sup>a</sup> edición de la misma editorial, que apareció en 2015.

asignatura) que muchos datos de su funcionamiento se den o se obtengan mediante aparatos y métodos de medida como los vistos en el capítulo anterior.

## 4.1. PRINCIPIOS GENERALES DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS.

En este capítulo se tratan los aspectos generales constructivos y de funcionamiento de todas las máquinas eléctricas. Aunque su contenido ya se vio en la asignatura anterior de grado conviene que le dé una lectura, rápida pero tranquila, a modo de repaso que le permita tener una visión global de los distintos tipos de máquinas eléctricas que hay, de los aspectos comunes a todas ellas y de su clasificación, que básicamente corresponde a los apartados que hay a continuación.

### ■ CONTENIDO:

**Repaso** Elementos básicos y constructivos de las máquinas eléctricas [FRAILE: apartados 2.1 a 2.4].

**Repaso** Potencia, pérdidas y rendimiento [FRAILE: apartados 2.5 a 2.7].

**Repaso** Clasificación general de las máquinas eléctricas [FRAILE: apartados 2.11 y 2.12].

## 4.2. EL TRANSFORMADOR.

El transformador es la única máquina eléctrica que carece de partes móviles y es una de las más importantes ya que se encuentra en prácticamente toda instalación eléctrica, desde la subestación de salida de una central de generación de energía eléctrica hasta la fuente de alimentación de un equipo electrónico o de un pequeño electrodoméstico. En la asignatura anterior de grado ya se estudió el transformador monofásico y en esta ahora se aborda su extensión al transformador trifásico y a dos tipos de transformadores particulares.

### ■ CONTENIDO:

**Repaso** Aspectos constructivos [FRAILE: apartados 3.1 y 3.2].

**Repaso** Funcionamiento de un transformador ideal y de un transformador real [FRAILE: apartados 3.3 y 3.4].

**Repaso** El transformador monofásico: circuito equivalente, ensayos, caída de tensión, pérdidas y rendimiento [FRAILE: apartados 3.5 a 3.8]. Aunque este contenido ya lo ha visto, conviene que el repaso que le dé sea detenido y a fondo.

**Estudio** El transformador trifásico [FRAILE 8ª y 7ª: apartado 3.11, pero no los subapartados 3.11.1 y 3.11.2], [FRAILE 6ª: apartado 3.11, pero no los subapartados 3.11.2 y 3.11.3]. Igual que los sistemas trifásicos equilibrados se analizan mediante un circuito monofásico equivalente, los transformadores trifásicos también se pueden analizar mediante su circuito monofásico equivalente (de ahí la importancia del repaso a fondo que debe dar en el punto anterior) ya que en esta asignatura se considera siempre que la carga del transformador trifásico es equilibrada. Una vez expuestos los aspectos

constructivos del transformador trifásico y de los distintos tipos de conexiones que hay, según se conecten sus devanados, el estudio del funcionamiento del transformador trifásico lo realiza como una extensión del funcionamiento del transformador monofásico mediante ejemplos [FRAILE: ejemplos de aplicación 3.8 a 3.11].

**Estudio** Autotransformadores [FRAILE: apartado 3.13].

**Estudio** Transformadores con tomas [FRAILE: apartado 3.14].

### 4.3. LA MÁQUINA ASÍNCRONA O DE INDUCCIÓN.

La máquina asíncrona o de inducción es sin duda la máquina eléctrica rotativa más habitual y se puede encontrar en muchas instalaciones eléctricas, de ahí su importancia. Por este motivo ya la ha visto en la asignatura anterior de grado, poco nuevo hay en esta asignatura pero merece la pena que le dé un buen repaso.

- CONTENIDO:

**Repaso** Aspectos constructivos [FRAILE: apartados 4.1 y 4.2].

**Repaso** Principio de funcionamiento [FRAILE: apartados 4.3].

**Repaso** La máquina asíncrona: circuito equivalente, ensayos, balance de potencias y par de rotación [FRAILE: apartados 4.4 a 4.6 y 4.7.1]. En este repaso es de destacar la figura [FRAILE 8ª y 7ª: figura 4.22], [FRAILE 6ª: figura 4.20], que resume perfectamente el balance de potencias en el motor asíncrono utilizando su circuito monofásico equivalente: entienda bien esa figura y podrá analizar sin problema el funcionamiento de este motor. Aunque los contenidos de este punto ya los ha visto, conviene que el repaso que le dé sea detenido y a fondo.

**Estudio** Par de rotación y tipos de funcionamiento de la máquina [FRAILE: apartado 4.7]. A partir del concepto de par de rotación de la máquina asíncrona, que ya conoce, ahora debe estudiar los tres tipos de regímenes de funcionamiento que puede presentar la máquina asíncrona: como motor, como generador y como freno.

**Estudio** Arranque de la máquina asíncrona de jaula de ardilla y de rotor bobinado [FRAILE: apartado 4.9].

### 4.4. EL GENERADOR SÍNCRONO.

La máquina síncrona se utilizan fundamentalmente como generador, así en las centrales de producción de energía eléctrica el alternador acoplado a la turbina es una máquina síncrona. En esta asignatura solo vamos a ver la descripción constructiva de esta máquina y su principio de funcionamiento, dejando para la asignatura siguiente “Tecnología eléctrica” su funcionamiento como generador dentro de la red eléctrica.

- CONTENIDO:

**Estudio** Aspectos constructivos y sistema de excitación [FRAILE: apartados 5.1 a 5.3].

**Estudio** Principio de funcionamiento [FRAILE: apartado 5.4].

**Estudio** Diagrama vectorial del alternador [FRAILE: apartado 5.5].

## 4.5. LA MÁQUINA DE CORRIENTE CONTINUA.

Aunque el uso de la máquina de corriente continua se ha reducido mucho, sobre todo el de las de gran potencia, frente al de la máquina asíncrona (gracias a la posibilidad y facilidad del control de la velocidad de esta última mediante los accionamientos electrónicos), la importancia histórica y, sobre todo, conceptual de la máquina de continua hace que se siga estudiando.

### ■ CONTENIDO:

**Estudio** Aspectos constructivos [FRAILE: apartados 6.1 y 6.2].

**Estudio** Principio de funcionamiento [FRAILE: apartado 6.3]. Dentro del principio de funcionamiento de la máquina de corriente continua debe saber qué es el fenómeno de la reacción de inducido y los problemas que hay en esta máquina debidos a la conmutación en el colector, pero no es necesario que entre en cómo se resuelven, ya que exceden el objetivo y conocimiento de esta asignatura; lea el inicio de [FRAILE: apartados 6.4 y 6.5] para saber en qué consisten y cómo afectan al funcionamiento de la máquina.

**Estudio** El generador de corriente continua, curvas características [FRAILE: apartados 6.6 y 6.7].

**Estudio** El motor de corriente continua, curvas características y frenado [FRAILE: apartados 6.8 a 6.10].

## 4.6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN.

**Ejercicio 4.1.** Sea un transformador trifásico de 6600/400 V, 50 kVA y conexión Yd. Se realizan los dos ensayos siguientes, con las lecturas de los aparatos de medida indicados en cada uno:

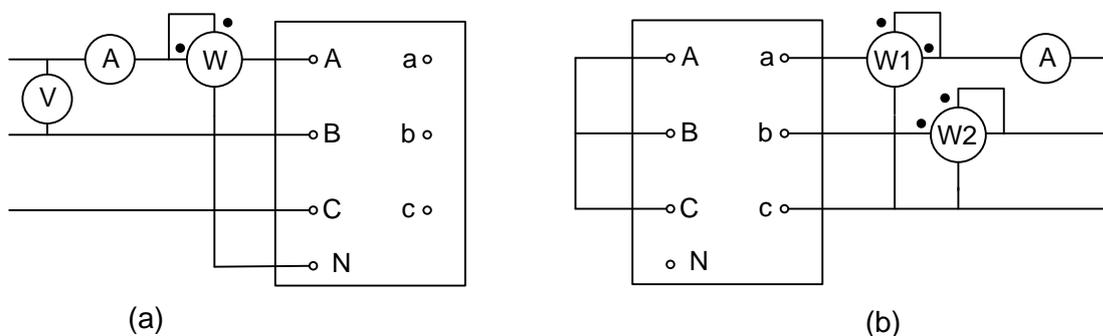


Figura 4.1

- Ensayo en vacío (figura 4.1.a): 6,6 kV; 0,33 A y 365 W.
- Ensayo en cortocircuito (figura 4.1.b): 68 A y de los vatímetros W1 y W2, respectivamente, 1753 W y 241 W.

Se pide calcular: (a) El circuito equivalente fase-neutro del transformador referido al primario. (b) La tensión relativa de cortocircuito. (c) La regulación y el rendimiento cuando se conecta en el secundario del transformador una carga que consume 40 kW con un factor de potencia 0,85 inductivo.

**Ejercicio 4.2.** Determinar la conexión y el índice horario de los tres transformadores trifásicos de la figura 4.2.

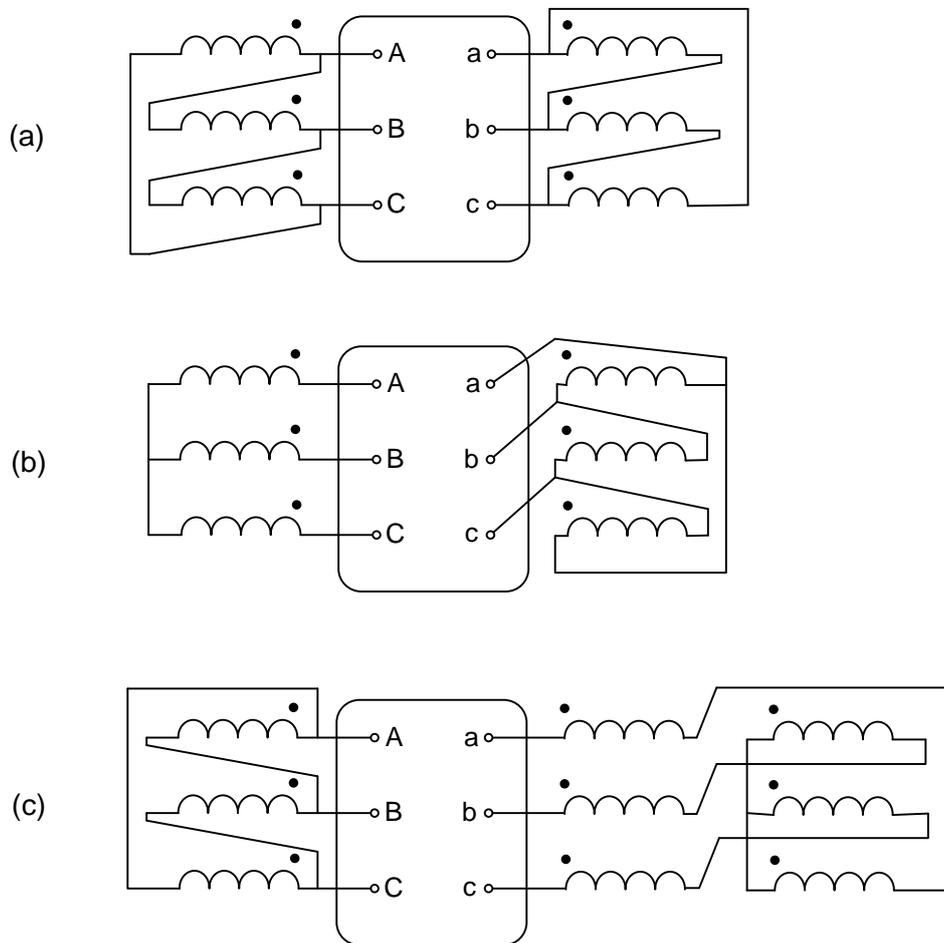


Figura 4.2

**Ejercicio 4.3.** Sea un transformador de 20 kVA, tensiones 1000/400 V y conexión Dy. Se sabe que sus pérdidas en vacío son 450 W y que las lecturas de los aparatos de medida en el ensayo de la figura 4.3 son 26 A, 73 V y 162 W.

Si ese transformador se conecta a un sistema trifásico de 1 kV, se pide: (a) Rendimiento cuando en el secundario se conecta una carga trifásica equilibrada formada por tres impedancias iguales

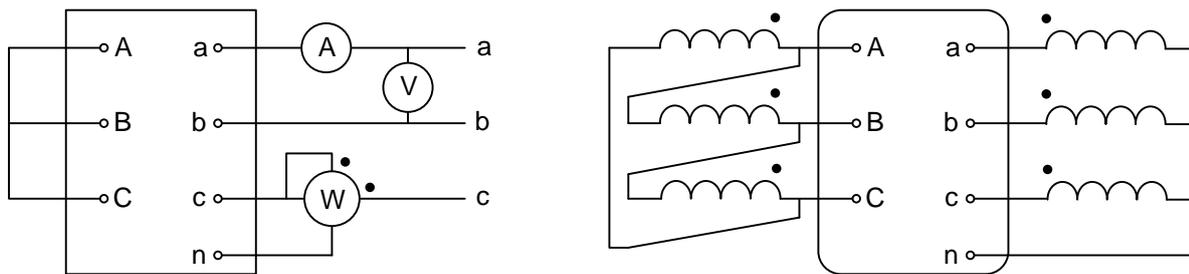


Figura 4.3

de  $24 \Omega$ /fase, conectadas en triángulo y con factor de potencia 0,85 inductivo. (b) Índice de carga óptimo y potencia aparente a la que corresponde. (c) Suponiendo que la carga se conecta al secundario del transformador a través de un cable de cobre de  $16 \text{ mm}^2$  de sección y 80 m de longitud, calcular la tensión de línea que debería tener el sistema para que la tensión en la carga sea 400 V. (d) Índice horario del transformador si las conexiones de sus devanados son las indicadas en la figura 4.3.

**Ejercicio 4.4.** Un motor trifásico de jaula de ardilla se conecta a un sistema trifásico de tensión de línea 230 V, frecuencia 50 Hz y secuencia de fases directa. Para calcular los parámetros de su circuito equivalente se conectan los aparatos de medida de la figura 4.4 y se realizan los siguientes ensayos y lecturas:

- Con el rotor libre, sin carga en el eje: 230 V; 3,1 A y 200 W. Velocidad: 745 rev/min.
- Con el rotor bloqueado: 35 V; 15 A y 240 W.

Se sabe que las pérdidas mecánicas internas del motor son 280 W. Se pide calcular: (a) Número de pares de polos. (b) Circuito equivalente fase-neutro del motor reducido al estator (considerar nulas la reactancia y la resistencia del estator). (c) Las lecturas de los aparatos de medida, el par útil en el eje y el rendimiento del motor cuando se le acopla en el eje una carga que hace que gire a 720 rev/min.

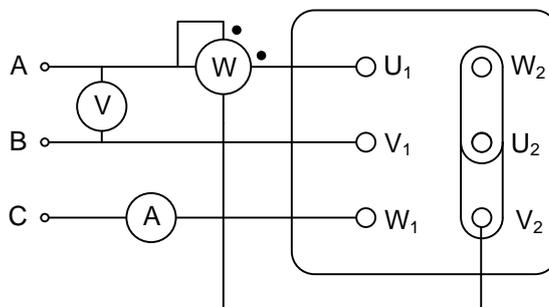


Figura 4.4

**Ejercicio 4.5.** Sea un motor de inducción trifásico de jaula de ardilla que está conectado en triángulo a una red trifásica de tensión de línea 400 V y frecuencia 50 Hz. A esa tensión el motor tiene un par de arranque de 150 Nm y a plena carga desarrolla un par de 60 Nm. Para disminuir la corriente de arranque se plantean dos métodos: (a) Arranque estrella-triángulo, calcule el par de arranque del motor. (b) Arranque mediante autotransformador, calcule la relación de transformación necesaria para tener en el arranque un par que sea un 50% mayor que el par a plena carga. (c) Si la impedancia de cortocircuito reducida al estator de cada fase del motor es  $7,95 + j4,23 \Omega$ , calcule la corriente de arranque que absorbe el motor de la red si se realiza el arranque directo y al aplicar cada uno de los métodos de los dos apartados anteriores.

**Ejercicio 4.6.** Sea un motor trifásico de jaula de ardilla que se conecta a una red trifásica de 440 V y 50 Hz. Se sabe que a 955 rev/min desarrolla una potencia de 5,97 kW y que en esas condiciones de funcionamiento su factor de potencia 0,85 inductivo. Si las pérdidas en el estator son 400 W y las pérdidas mecánicas son 373 W, se pide calcular: (a) Deslizamiento. (b) Pérdidas en el cobre en el rotor. (c) Potencia que consume el motor de la red. (d) Intensidad de línea. (e) Rendimiento.

**Ejercicio 4.7.** Sea un motor de inducción de rotor bobinado, conectado a una red trifásica de tensión de línea 400 V y frecuencia 50 Hz. Los parámetros del circuito monofásico equivalente fase-neutro del motor son:

$$R_1 = 1 \Omega \quad R'_2 = 1,5 \Omega \quad X_1 = X'_2 = 8,5 \Omega$$

El motor gira a 729 rev/min moviendo una carga de par constante que está acoplada a su eje. En estas condiciones se pide calcular: (a) El número de pares de polos del motor. (b) El par en el eje y el rendimiento, si las pérdidas en el hierro son 130 W y la pérdidas mecánicas se consideran despreciables. (c) El par máximo que da y la velocidad a la que se obtiene. (d) ¿Puede arrancar el motor?, justifique su respuesta. (e) La resistencia adicional de arranque referida al estator, por fase, que hay que conectar en el rotor para que el par máximo se tenga en el arranque; explique el proceso de arranque sobre la curva par-velocidad del motor.

**Ejercicio 4.8.** Sea un generador síncrono de 2 MVA y 6,6 kV que tiene una impedancia síncrona igual a  $0,48 + j5,7 \Omega$  por fase física, fases que están conectadas en triángulo. Si suministra una potencia activa de 1,4 MW con la tensión nominal en sus terminales de salida, calcular la regulación del generador para cada uno de los tres casos siguientes según sea el factor de potencia de la carga: (a) 0,8 inductivo. (b) 1 (carga resistiva). (c) 0,8 capacitivo.

**Ejercicio 4.9.** Sea un motor de continua de 240 V, de tipo derivación. Se sabe que en vacío consume 3,5 A, que la corriente de excitación es 1,1 A y que la resistencia del inducido, incluidas las escobillas, es igual a  $0,15 \Omega$ . Si el motor cargado gira a 680 r.p.m. y la corriente de entrada es 32 A, se pide calcular: (a) Rendimiento. (b) Par útil en el eje.

**Ejercicio 4.10.** Sea un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla, de 400/230 V y 4 pares de polos. Los parámetros de su circuito monofásico equivalente fase-neutro reducidos al estator son:

$$R_1 = 0,1 \Omega; \quad X_1 = 0,15 \Omega; \quad R'_2 = 0,15 \Omega; \quad X'_2 = 0,3 \Omega$$

La impedancia de la rama paralelo se puede considerar despreciable, al igual que las pérdidas mecánicas internas. El motor se conecta a una red trifásica de tensión de línea 400 V y frecuencia 50 Hz. Si en estas condiciones, el motor está a plena carga y consume de la red una intensidad de 36,62 A, se pide: a) Indicar cómo se deben conectar las fases del estator. b) Calcular la velocidad de giro del motor, la potencia que absorbe de la red y el par nominal que mueve en el eje.

Suponga ahora que ese motor se conecta a una red trifásica de media tensión de 15 kV a través de un transformador y una línea, tal y como se representa en la figura 4.5. Las características de estos dos elementos son las siguientes:

- Transformador: 35 kVA, 15000/400 V, conexión Dy11, tensión relativa de cortocircuito 8% y pérdidas en el cobre en condiciones nominales 1,6 kW. La rama paralelo se puede considerar despreciable.
- Línea: formada por cuatro cables de cobre, tres fases y neutro (3F+N), siendo la sección de cada conductor de fase 70 mm<sup>2</sup> y la del conductor de neutro 35 mm<sup>2</sup>. La inductancia de cada cable es 0,3 mH/km y su resistencia es simplemente la resistencia ohmica que, en las condiciones del tendido, solo es necesario corregir con la temperatura de trabajo del conductor que es 75 °C (datos para el cobre: la resistividad a 20 °C es 1,7·10<sup>-8</sup> Ωm y su coeficiente de temperatura  $\alpha$  es 3,9·10<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>). La longitud del circuito es de 200 m.

Si el motor debe mantener en el eje el par nominal obtenido antes, se pide: c) Calcular la velocidad de giro del motor, la potencia e intensidad que absorbe de la red y la tensión de línea en sus bornes. d) Explicar si ese punto de funcionamiento del motor es estable y puede mantenerse de forma permanente.

Para finalizar, suponga ahora que el transformador es un transformador de tomas, que en el lado de alta tiene cinco tomas: la nominal y cuatro más de  $\pm 2,5\%$  y  $\pm 5\%$  (para facilitar el cálculo suponer que su impedancia de cortocircuito no varía al cambiar las tomas). Se pide: e) ¿Se puede mejorar de alguna forma el funcionamiento del motor? (si es que en el apartado anterior dedujo que hay algo que se debe corregir); si es así, explicar qué se puede hacer y en las nuevas condiciones de funcionamiento calcular la velocidad de giro del motor, la potencia e intensidad que absorbe de la red y la tensión de línea en sus bornes.

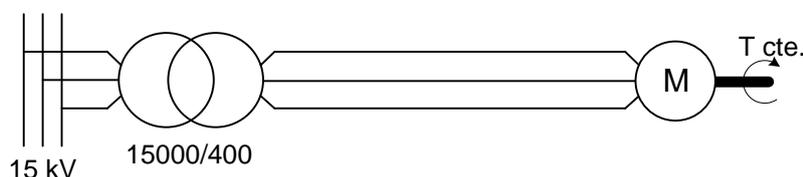


Figura 4.5

**Ejercicio 4.11.** (a) Determinar el símbolo de acoplamiento del transformador cuya conexión interna de sus devanados es la representada en la figura 4.6. (b) Dibujar cómo deben estar internamente conectadas las bobinas de un transformador trifásico para que su símbolo de acoplamiento sea Dd10.

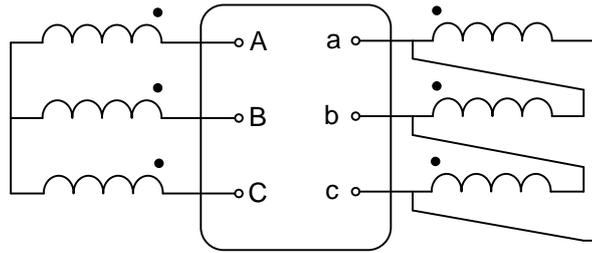


Figura 4.6

**Ejercicio 4.12.** Sea un transformador trifásico de 10 kVA, tensiones 1000/100 V, frecuencia 50 Hz y conexión Yd7. Se sabe que los parámetros de su circuito monofásico equivalente fase-neutro referidos al primario son:

$$R_{Fe} = 5 \text{ k}\Omega; \quad X_{\mu} = 1,75 \text{ k}\Omega; \quad R_{CC} = 1,5 \text{ }\Omega; \quad X_{CC} = 10 \text{ }\Omega$$

Se pide: (a) Indique cómo se realiza el ensayo en vacío: condiciones de realización del ensayo, dibuje un esquema de cómo se realiza el ensayo y de los aparatos de medida que hay que utilizar (indique claramente las conexiones) y calcule los valores de las medidas. (b) Id. del ensayo en cortocircuito. (c) Calcule el valor de la caída relativa de tensión  $\epsilon_{CC}$ . (d) Calcule el rendimiento del transformador con una carga del 75 % y factor de potencia unidad.

**Ejercicio 4.13.** Sea un motor asíncrono cuya curva par-velocidad es la indicada en la figura 4.7. Para cada uno de los tres pares de carga ( $T_R$ ) indicados en esa figura, responder a las siguientes preguntas, justificando su respuesta: ¿Puede arrancar el motor? ¿Funciona correctamente en régimen permanente?

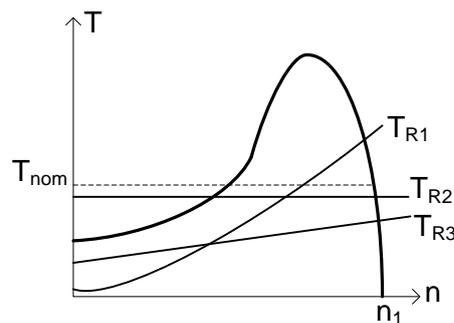


Figura 4.7

**Ejercicio 4.14.** Un motor asíncrono trifásico de 400 V, 50 Hz y con el estator conectado en estrella, tiene los siguientes parámetros:

- Impedancia por fase del rotor referida al estator =  $0,12 + j1,05 \text{ }\Omega$ .
- Impedancia por fase del estator =  $j0,15 \text{ }\Omega$ . (la resistencia por fase del estator se desprecia).

Se sabe que el par nominal se obtiene a la velocidad de 712,5 rev/min. Se pide calcular: (a) El número de pares de polos del motor. (b) La velocidad a la que se tiene el par máximo. (c) La relación entre el par máximo y el par nominal.

**Ejercicio 4.15.** Sea un motor trifásico de inducción en el que se sabe que la corriente de arranque (arranque directo) es 6 veces la intensidad nominal y que el deslizamiento a plena carga es del 4%. Para hacer que la intensidad en el momento del arranque no sea superior a 1,5 veces la nominal, se utiliza un autotransformador. Calcular la relación de transformación del autotrafo y el par de arranque que se tiene ahora en función del par nominal del motor.

**Ejercicio 4.16.** Sea un motor de corriente continua serie que tiene una resistencia entre sus terminales igual a  $0,75 \Omega$ . El motor mueve en su eje una carga cuyo par aumenta linealmente con la velocidad de giro. Si cuando se alimenta a 200 V, consume 28 A y gira a 360 rev/min, calcular la tensión que hay que aplicar para aumentar su velocidad un 25% y la corriente que absorbe en esas condiciones (considerar que en esas condiciones de funcionamiento el circuito magnético no está saturado, es decir, que el flujo magnético es directamente proporcional a la corriente).

## SOLUCIONES

**Ejercicio 4.1.**

(a) Con el ensayo de vacío se calcula el valor de los parámetros de la rama paralelo del circuito monofásico equivalente fase-neutro del transformador (figura 4.8). A partir de las lecturas de los aparatos de medida se tiene que la resistencia  $R_{Fe}$  que representa las pérdidas en el hierro es:

$$P_{0,f} = \frac{U_1^2}{R_{Fe}} \rightarrow R_{Fe} = \frac{(6600/\sqrt{3})^2}{365} = 39,8 \text{ k}\Omega$$

Y la inductancia de magnetización  $X_\mu$  se obtiene a partir de la admitancia de vacío:

$$Y_0 = \frac{I_0}{U_1} = \frac{0,33}{6600/\sqrt{3}} = 8,66 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{Fe}}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_\mu}\right)^2}$$

Sustituyendo valores y despejando se obtiene:

$$X_\mu = \frac{1}{\sqrt{(8,66 \cdot 10^{-5})^2 - (2,51 \cdot 10^{-5})^2}} = 12,1 \text{ k}\Omega$$

En el ensayo en cortocircuito de la figura 4.1.b los dos vatímetros están conectados conforme al método de los dos vatímetros, aunque se ve que los terminales de la bobina amperimétrica del vatímetro W2 se han intercambiado (lo que indica que su lectura se debe considerar como negativa):

$$P = W_1 + W_2 = 1753 - 241 = 1512 \text{ W}$$

y

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2) = \sqrt{3} \cdot (1753 + 241) = 3453,7 \text{ VAR}$$

Con lo que el cálculo de la rama serie vista desde el secundario (donde se hace el ensayo) es:

$$R_{cc2} = \frac{P}{3I_2^2} = \frac{1512}{3 \cdot 68} = 0,109 \Omega \quad \text{y} \quad X_{cc2} = \frac{Q}{3I_2^2} = \frac{3453,7}{3 \cdot 68} = 0,249 \Omega$$

Que finalmente, referidos al primario, son:

$$R_{cc1} = r_t^2 R_{cc2} = \left(\frac{6600}{400}\right)^2 \cdot 0,109 = 29,68 \Omega \quad \text{y} \quad X_{cc1} = \left(\frac{6600}{400}\right)^2 \cdot 0,249 = 67,79 \Omega$$

Para finalizar con el ensayo de cortocircuito, hay que comprobar si se ha realizado en las condiciones nominales, es decir, si la corriente del ensayo es la nominal:

$$I_{2n} = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_{2n}} = \frac{5 \cdot 10^4}{\sqrt{3} \cdot 400} = 72,17 \text{ A}$$

Como la intensidad del ensayo (68 A) no es igual a la intensidad nominal del lado en el que se ha hecho, el ensayo no se ha realizado en condiciones nominales y, por tanto, es necesario calcular la potencia y la tensión de cortocircuito. Con la intensidad nominal del primario:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_{1n}} = \frac{5 \cdot 10^4}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 4,37 \text{ A}$$

y con los valores de la rama serie calculados antes, se tiene que:

$$P_{cc} = 3 I_{1n}^2 R_{cc1} = 3 \cdot 4,37^2 \cdot 29,68 = 1703 \text{ W} \quad \text{y} \quad U_{cc1} = \sqrt{3} I_{1n} Z_{cc1} = \sqrt{3} \cdot 4,37 \cdot 74 = 560,1 \text{ V}$$

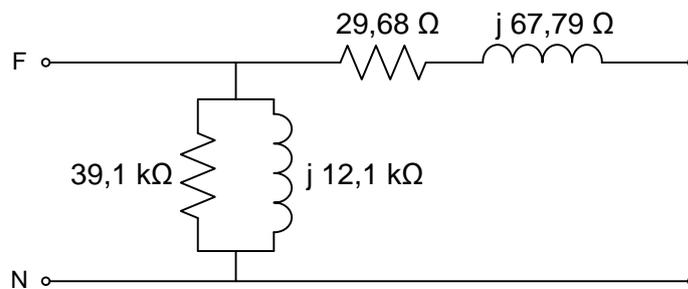


Figura 4.8

(b) La tensión relativa de cortocircuito es:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{U_{cc1}}{U_{1n}} 100 = \frac{560,1}{6600} \cdot 100 = 8,49 \%$$

Y, a partir de ella, se obtienen:

$$\varepsilon_{Rcc} = \varepsilon_{cc} \cos \varphi_{cc} = 8,49 \cdot \cos 66,36^\circ = 3,4\% \quad \text{y} \quad \varepsilon_{Xcc} = 8,49 \cdot \sin 66,36^\circ = 7,78\%$$

(c) Para la carga que se conecta en el secundario, el índice de carga del transformador es:

$$C = \frac{S_2}{S_n} = \frac{P_2 / \cos \varphi_2}{S_n} = \frac{40 / 0,85}{50} = 0,941$$

Con lo que, para esa carga, la regulación del transformador es:

$$\varepsilon_r = C \varepsilon_{Rcc} \cos \varphi_2 + C \varepsilon_{Xcc} \sin \varphi_2 = 0,941 \cdot (3,4 \cdot 0,85 + 7,78 \cdot 0,53) = 6,58\%$$

Y su rendimiento:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{Fe} + C^2 P_{cc}} = \frac{40}{40 + 1,095 + 0,941^2 \cdot 1,703} = 93,9\%$$

### Ejercicio 4.2.

(a) Tomamos dos devanados de una misma columna, por ejemplo, los dos de la de arriba en la figura 4.2.a; de esta forma, como se observa en la figura 4.9, la tensión  $\vec{U}_{AC}$  del devanado de alta y la tensión  $\vec{U}_{ab}$  del lado de baja son colineales, no hay desfase entre ellas. A continuación se superponen el triángulo de tensiones de alta y el triángulo de tensiones del baja y este segundo se gira hasta conseguir la condición anterior de que  $\vec{U}_{AC}$  y  $\vec{U}_{ab}$  sean colineales: se obtiene que el índice horario es 2 y, por tanto, el símbolo de la conexión del transformador es Dd2.

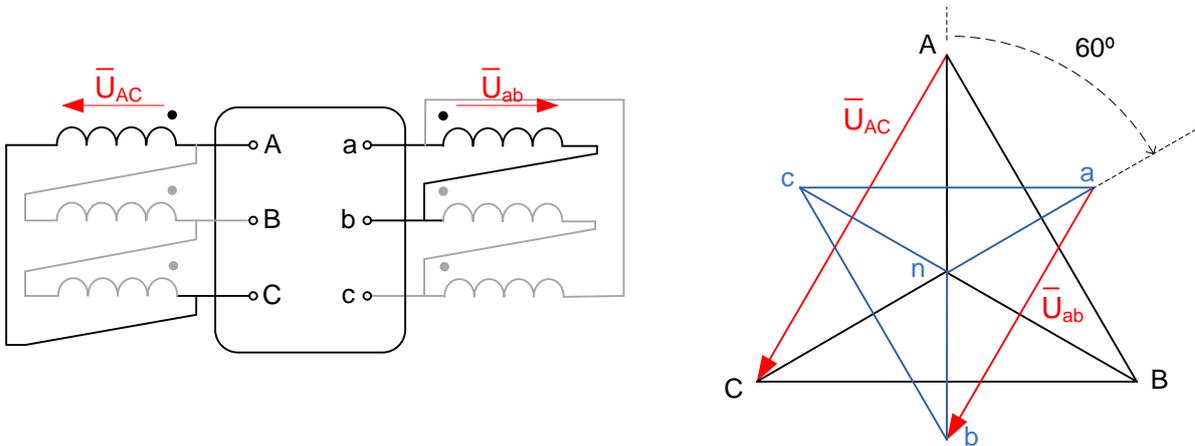


Figura 4.9

(b) En la conexión de los devanados del transformador representada en la figura 4.2.b, la tensión  $\vec{U}_{AN}$  del devanado de alta y la tensión  $\vec{U}_{ba}$  del devanado de baja son colineales. Como se muestra en la figura 4.10, al superponer los dos triángulos de tensiones y una vez girado el de baja hasta conseguir esa condición, se obtiene que el índice horario es 7 y, por tanto, el símbolo de la conexión del transformador es Yd7.

(c) En este caso el devanado de baja está conectado en zig-zag (figura 4.2.c). En ese tipo de conexión del devanado, la tensión de cada fase, por ejemplo  $\vec{U}_{an}$ , es la suma de las tensiones de dos semidevanados,  $\vec{U}_{ax}$  y  $\vec{U}_{xn}$ , tal y como se muestra en la figura 4.11. La tensión  $\vec{U}_{ax}$  es colineal, está en fase, con la tensión  $\vec{U}_{AB}$  del lado de alta y la tensión  $\vec{U}_{xn}$  es colineal con la tensión  $\vec{U}_{AC}$ . Como los módulos de  $\vec{U}_{ax}$  y  $\vec{U}_{xn}$  son iguales, ya que los dos semidevanados tienen el mismo número de espiras, su suma  $\vec{U}_{an}$  resulta colineal con  $\vec{U}_{AN}$ . Finalmente, como se muestra en la figura 4.11, al superponer los dos triángulos de tensiones y una vez girado el de baja hasta conseguir esa condición, se obtiene que el índice horario es 0 y, por tanto, el símbolo de la conexión del transformador es Dz0.

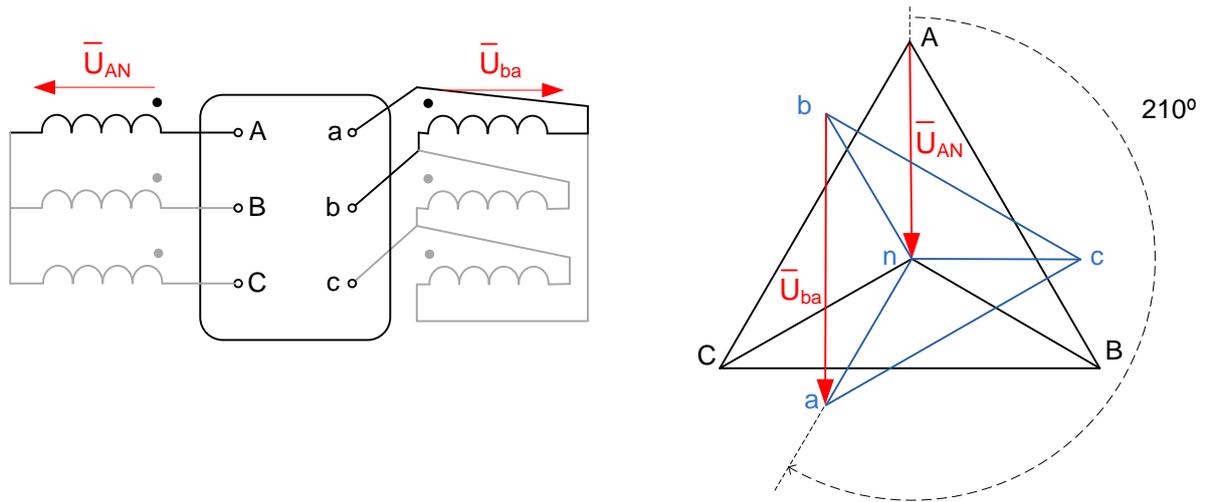


Figura 4.10

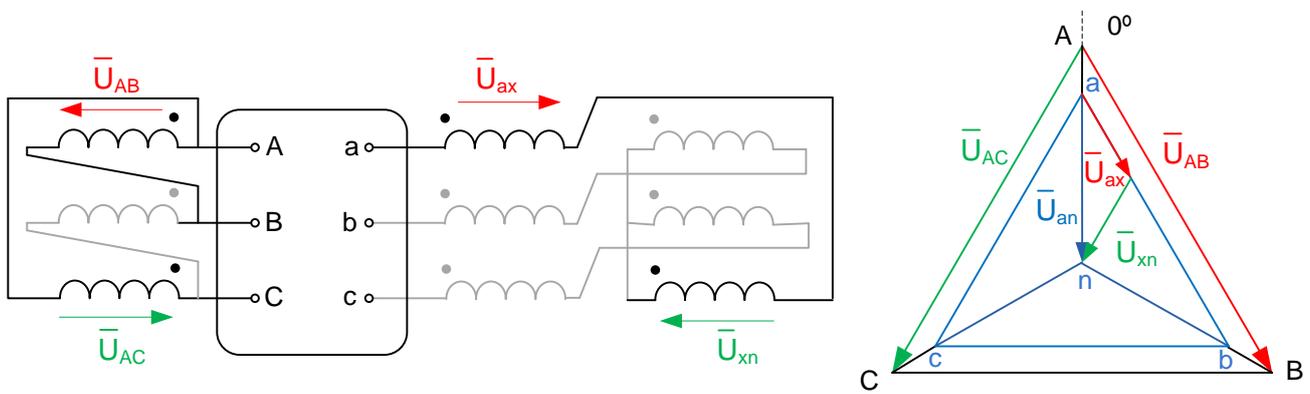


Figura 4.11

**Ejercicio 4.3.**

(a) Con los datos del ensayo se calcula la impedancia serie de su circuito equivalente fase-neutro referido al secundario:

$$\left. \begin{aligned} Z_{cc2} &= \frac{73/\sqrt{3}}{26} = 1,621 \Omega \\ \cos \varphi_{cc} &= \frac{3 \cdot 162}{\sqrt{3} \cdot 73 \cdot 26} = 0,148 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} R_{cc2} = 0,24 \Omega \\ X_{cc2} = 1,6 \Omega \end{cases}$$

La intensidad nominal del secundario es:

$$I_{2n} = \frac{20000}{\sqrt{3} \cdot 400} = 28,87 \text{ A}$$

Como el ensayo de cortocircuito anterior no se ha realizado a la intensidad nominal  $I_{2n}$ , es necesario calcular los valores nominales de la potencia de cortocircuito y de la tensión de cortocircuito. Mediante  $\vec{Z}_{cc2}$  se tiene:

$$P_{cc} = 3 \cdot 28,87^2 \cdot 0,24 = 600 \text{ W} \quad \text{y} \quad U_{cc2} = \sqrt{3} \cdot 28,87 \cdot 1,621 = 81 \text{ V}$$

Con estos valores, el rendimiento del transformador pedido en las condiciones de carga indicadas es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{20 \cdot 0,85}{20 \cdot 0,85 + 0,45 + 1^2 \cdot 0,6} = 0,9418 = 94,18 \%$$

(b) El índice de carga óptimo, que es el que da lugar al rendimiento máximo, es:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{450}{600}} = 0,866$$

que corresponde a una potencia aparente de 17,32 kVA. Ese rendimiento máximo, con el mismo factor de potencia, es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{17,32 \cdot 0,85}{17,32 \cdot 0,85 + 0,45 + 0,866^2 \cdot 0,6} = 0,9528 = 95,26 \%$$

(c) La resistencia por fase del cable es:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 1,8 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{80}{16 \cdot 10^{-6}} = 0,09 \Omega$$

Como ya sabe, al tratarse de una instalación de BT trifásica, para el cálculo de la resistencia del conductor sólo se considera la longitud del cable y, de la misma forma, para esa sección y longitud la parte reactiva de la impedancia del conductor se puede despreciar. De esta forma resulta el circuito monofásico equivalente fase-neutro de la figura 4.12.a. La intensidad que circula por él es:

$$\vec{I}_2 = \frac{231 \angle 0^\circ}{8 \angle 31,8^\circ} = 28,87 \angle -31,8^\circ \text{ A}$$

Y la tensión en el primario reducida al secundario es:

$$\vec{U}'_1 = 231 \angle 0^\circ + (0,09 + 0,24 + j1,6) \cdot 28,87 \angle -31,8^\circ = 265,65 \angle 7,4^\circ \text{ V}$$

Teniendo en cuenta la relación de transformación del transformador, la tensión de línea pedida que debe haber en el primario es:

$$U = \sqrt{3} U_1 = \sqrt{3} U'_1 m = \sqrt{3} \cdot 265,65 \cdot \frac{1000}{400} = 1150,3 \text{ V}$$

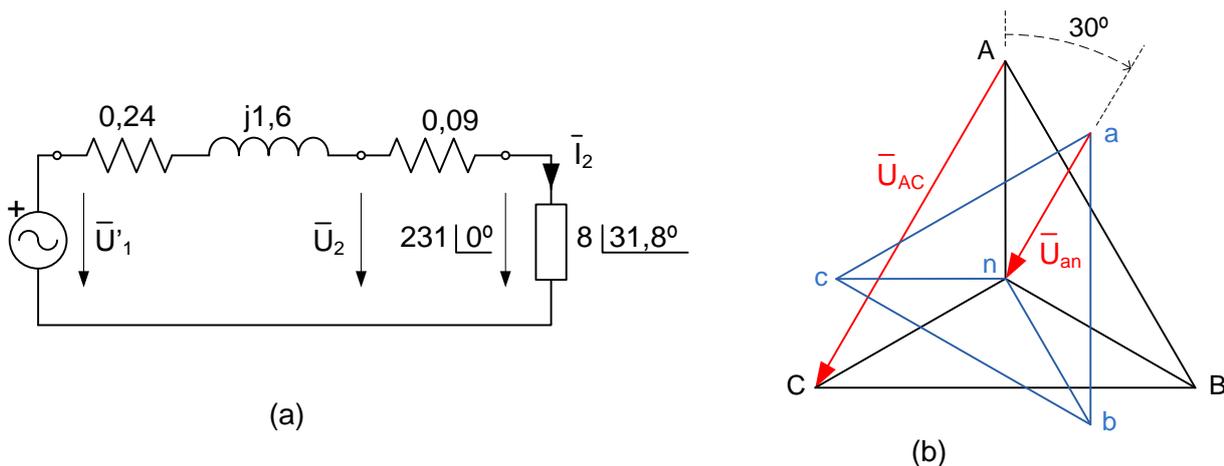


Figura 4.12

(d) Para determinar el índice horario se considera que la secuencia de fases del sistema trifásico que alimenta al transformador es directa. A la vista de la conexión de los devanados del transformación (figura 4.3) y tomando dos que estén en una misma columna del núcleo del trafo (por ejemplo los dos de arriba en esa figura), se tiene que las tensiones  $\vec{U}_{AC}$ , del lado de alta, y  $\vec{U}_{an}$ , del lado de baja, están en fase. Con esta condición se orientan y sitúan, uno sobre otro, los dos triángulos de tensiones, correspondientes a los lados de alta y de baja tensión del trafo (figura 4.12.b): se observa que el índice horario es 1. De esta forma la conexión del transformador es Dy1, lo que significa que todas las tensiones del lado de baja tensión están retrasadas  $30^\circ$  respecto a sus homónimas del lado de alta.

### Ejercicio 4.4.

(a) Con el rotor libre (ensayo en vacío) la velocidad de giro del motor es ligeramente inferior a la de sincronismo, por lo que ésta última es 750 rev/min. De esta forma:

$$n_1 = \frac{60 f}{p} \rightarrow p = \frac{60 \cdot 50}{750} = 4 \text{ pares de polos}$$

(b) Tal y como está conectado el vatímetro, mide la potencia activa consumida por una fase del motor. Del resultado del ensayo en vacío se calcula la rama paralelo del circuito equivalente:

$$P_{Fe} = 3 \cdot 200 - 280 = 320 \text{ W} \quad \text{y} \quad Q_{Fe} = P_{Fe} \tan \varphi_0 = 320 \cdot \tan 75^\circ = 1193 \text{ VAr}$$

ya que:

$$P_{Fe} = \sqrt{3} U I_0 \cos \varphi_0 \rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{320}{\sqrt{3} \cdot 230 \cdot 3,1} = 0,259 \rightarrow \varphi_0 = 75^\circ$$

Con lo que finalmente se obtiene:

$$R_{Fe} = \frac{(230/\sqrt{3})^2}{320/3} = 165,3 \Omega \quad \text{y} \quad X_{\mu} = \frac{(230/\sqrt{3})^2}{1193/3} = 44,35 \Omega$$

Con las medidas obtenidas con el rotor bloqueado (ensayo de cortocircuito) se obtiene la rama serie. Como las lecturas se toman en el estator, los parámetros que se obtienen son los del estator (que nos dicen que son nulos) más los del rotor referidos al estator. Así:

$$P = \sqrt{3} \cdot 35 \cdot 15 \cdot \cos \varphi_{cc} = 3 \cdot 240 = 720 \text{ W} \quad \rightarrow \quad \cos \varphi_{cc} = 0,792 \quad \rightarrow \quad \varphi_{cc} = 37,65^{\circ}$$

Con lo que la impedancia de cortocircuito por fase es:

$$\vec{Z}_{cc} = \frac{35/\sqrt{3}}{15} \angle 37,65^{\circ} = 1,067 + j0,823 \Omega = (R_1 + R'_2) + j(X_1 + X'_2) = R'_2 + jX'_2$$

Con estos valores calculados, el circuito equivalente fase-neutro aproximado del motor reducido al estator es el representado en la figura 4.13. Dese cuenta de que al ser el circuito equivalente fase-neutro, la tensión  $U_1$  en la figura es la tensión de fase del sistema trifásico al que se conecta. Por otro lado, como las fases físicas del estator están conectadas en estrella (como se deduce de las conexiones hechas en la tapa de bornes de la figura 4.4), los valores de los parámetros del circuito equivalente corresponden a los valores de los elementos físicos que forma cada fase del motor.

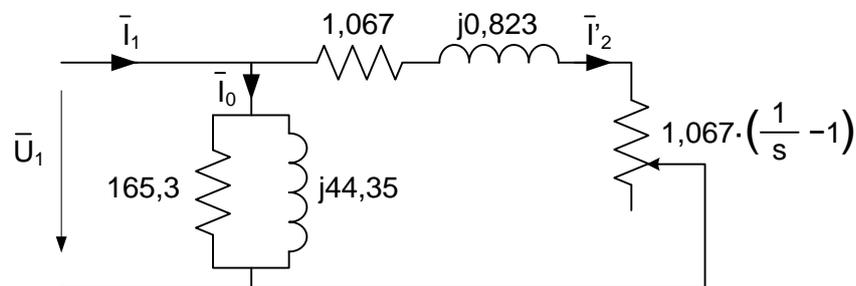


Figura 4.13

(c) El deslizamiento correspondiente a una velocidad de 720 rev/min es:

$$s = \frac{750 - 720}{750} = 0,04 = 4 \%$$

Conocido el deslizamiento, con el circuito equivalente de la figura 4.13 se pueden calcular las intensidades en el rotor (reducida al primario) y de vacío:

$$\vec{I}'_2 = \frac{132,8 \angle 0^{\circ}}{1,067 + j0,823 + 25,608} = 4,976 \angle -1,77^{\circ} \text{ A} \quad \rightarrow \quad \vec{I}_0 = 3,1 \angle -75^{\circ} \text{ A}$$

con lo que la corriente que absorbe el motor del sistema trifásico es:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_0 + \vec{I}_2 = 3,1 \angle -75^\circ + 4,976 \angle -1,77^\circ = 6,578 \angle -28,6^\circ \text{ A}$$

De esta forma, la lectura del voltímetro es 230 V (la tensión de línea del sistema), la lectura del amperímetro es 6,58 A (la intensidad de línea que consume el motor) y la lectura del vatímetro (la potencia activa monofásica que consume el motor) es:

$$W = 132,8 \cdot 6,578 \cdot \cos 28,6^\circ = 767 \text{ W}$$

La potencia mecánica interna del motor, que es la que disipa en la resistencia variable del circuito de la figura 4.13, es:

$$P_{mi} = 3 I_2'^2 R_2' \left( \frac{1}{s} - 1 \right) = 3 \cdot 4,976^2 \cdot 25,608 = 1902,2 \text{ W}$$

Y, por tanto, el par mecánico útil en el eje del motor es:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{1902,2 - 280}{2\pi \cdot \frac{720}{60}} = 21,52 \text{ Nm}$$

Por último, el rendimiento es:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{1622,2}{3 \cdot 767} = 0,705 = 70,5 \%$$

### Ejercicio 4.5.

A partir de la expresión general del par en el eje del motor:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{3 I_2'^2 R_2' \left( \frac{1}{s} - 1 \right)}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{3 U_1^2 R_2' \left( \frac{1}{s} - 1 \right)}{2\pi \frac{n}{60} \left[ \left( R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3 U_1^2 R_2'}{2\pi \frac{s n_1}{60} \left[ \left( R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]}$$

El par de arranque se obtiene para  $s = 1$ :

$$T_a = \frac{3 U_1^2 R_2'}{2\pi \frac{n_1}{60} [(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2]}$$

Como en los métodos de arranque de este ejercicio el valor de  $R_2'$  no varía, no se modifica la impedancia del motor, se observa que el par de arranque solo depende, de forma proporcional, del cuadrado de la tensión aplicada en el estator. Así:

(a) Al conectar en el arranque el motor en estrella, la tensión aplicada es 231 V (la tensión de fase del sistema) que es  $\sqrt{3}$  veces menor que los 400 V (la tensión de línea del sistema) que se aplican en el arranque directo cuando el motor está conectado en triángulo. De esta forma el par de arranque con el motor en estrella es:

$$T_{aY} = T_{a\Delta} \left( \frac{231}{400} \right)^2 = \frac{150}{3} = 50 \text{ Nm} \quad \rightarrow \quad T_{aY} = \frac{T_{a\Delta}}{3}$$

(b) Si se quiere que el par de arranque sea un 50% superior al par de plena carga, la tensión de línea  $U_a$  que debe haber en el estator en el arranque es:

$$T_a = 150 \cdot \left( \frac{U_a}{400} \right)^2 = 90 \text{ Nm} \quad \rightarrow \quad U_a = 309,8 \text{ V}$$

Para lo que la relación de transformación  $m$  del autotransformador debe ser:

$$m = \frac{U}{U_a} = \frac{400}{309,8} = 1,291$$

(c) Como las fases del motor están conectadas en triángulo, en el circuito equivalente del motor el valor de  $U_1$  corresponde a la tensión de línea de la red trifásica a la que se conecta y el valor de  $I_1$  a la intensidad de fase. Así, cuando se realiza el arranque directo de la máquina, la intensidad de línea que demanda de la red es:

$$I_{a\Delta} = \sqrt{3} \frac{U_1}{Z_{cc\Delta}} = \sqrt{3} \cdot \frac{400}{9} = 77 \text{ A}$$

En el método de arranque estrella-triángulo, al conectar las fases del motor en estrella durante el arranque el valor de  $U_1$  ahora corresponde a la tensión de fase de la red trifásica y el valor de  $I_1$  a la intensidad de línea. Así, la intensidad de línea que demanda de la red en el arranque es:

$$I_{aY} = \frac{U_1}{Z_{cc\Delta}} = \frac{400/\sqrt{3}}{9} = 25,66 \text{ A} \quad \rightarrow \quad I_{aY} = \frac{I_{a\Delta}}{3}$$

Por último, al arrancar el motor mediante el autotransformador calculado, la intensidad de línea que demanda de la red es:

$$I_{a1} = \sqrt{3} \frac{U_1}{Z_{cc\Delta}} = \sqrt{3} \cdot \frac{309,8}{9} = 59,62 \text{ A} \quad \rightarrow \quad I_a = \frac{I_{a1}}{m} = \frac{59,62}{1,291} = 46,18 \text{ A}$$

### Ejercicio 4.6.

(a) Si la velocidad nominal es 955 rev/min, entonces la velocidad de sincronismo es 1000 rev/min (3 pares de polos) y el deslizamiento:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1000 - 955}{1000} = 0,045 = 4,5\%$$

(b) Este ejercicio es un buen ejemplo del balance de potencias del motor y su relación con su circuito equivalente, que se muestra en la figura 4.22 de [FRAILE 7<sup>a</sup>] o la figura 4.20 de [FRAILE 6<sup>a</sup>]. La potencia mecánica interna desarrollada por el motor es:

$$P_{mi} = P_u + P_{mec} = 5970 + 373 = 6343 \text{ W}$$

Por lo que las pérdidas en el cobre del rotor son:

$$P_{Cu2} = \frac{s}{1-s} P_{mi} = \frac{0,045}{1-0,045} \cdot 6343 = 299 \text{ W}$$

(c) La potencia que consume el motor de la red a la que está conectado es:

$$P_1 = P_{est} + P_g = P_{est} + P_{Cu2} + P_{mi} = 400 + 299 + 6343 = 7042 \text{ W}$$

(d) Que corresponde a una intensidad de línea suministrada por la red de:

$$P_1 = \sqrt{3} U I \cos \varphi \quad \rightarrow \quad I = \frac{7042}{\sqrt{3} \cdot 440 \cdot 0,85} = 10,87 \text{ A}$$

(e) Por último, el rendimiento del motor es:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{5970}{7042} = 84,8\%$$

### Ejercicio 4.7.

(a) Como la velocidad de giro es 729 rev/min, la velocidad de sincronismo ha de ser 750 rev/min que corresponde a 4 pares de polos:

$$n_1 = \frac{60 f}{p} \quad \rightarrow \quad p = \frac{60 \cdot 50}{750} = 4$$

(b) Para la velocidad de 729 rev/min, el deslizamiento es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{750 - 729}{750} = 0,028 = 2,8\%$$

A partir del circuito equivalente fase-neutro referido al estator del motor (figura 4.14), se tiene que:

$$I_2' = \frac{U_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{400/\sqrt{3}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1,5}{0,028}\right)^2 + 17^2}} = 4,04 \text{ A}$$

Y la potencia mecánica interna en el eje es:

$$P_{mi} = 3 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) (I_2')^2 = 3 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1}{0,028} - 1\right) \cdot 4,04^2 = 2550 \text{ W}$$

Como nos dicen que las pérdidas mecánicas son despreciables ese valor obtenido es también la potencia útil, por lo que el par en el eje (que coincide con el par resistente de la carga) es:

$$T = \frac{P_u}{\omega} = \frac{2550}{\frac{2\pi}{60} \cdot 729} = 33,4 \text{ Nm}$$

Para calcular el rendimiento, hay que calcular primero la potencia que consume el motor de la red:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{est} + P_g = (P_{Fe} + P_{Cu1}) + (P_{Cu2} + P_{mi}) \\ &= 130 + (3 \cdot 1 \cdot 4,04^2) + (3 \cdot 1,5 \cdot 4,04^2) + 2550 = 2802,4 \text{ W} \end{aligned}$$

Así, el rendimiento del motor es:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{2550}{2802,4} = 91 \%$$

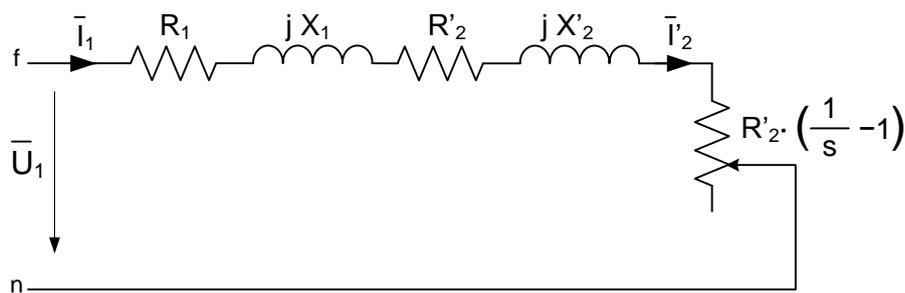


Figura 4.14

(c) La velocidad a la que el motor da el par máximo es:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1,5}{\sqrt{1^2 + 17^2}} = 0,088 \quad \rightarrow \quad n_m = n_1 (1 - s_m) = 750 \cdot (1 - 0,088) = 684 \text{ rev/min}$$

Para este deslizamiento, se tiene que:

$$I'_2 = \frac{U_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_m}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{400/\sqrt{3}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1,5}{0,088}\right)^2 + 17^2}} = 9,32 \text{ A}$$

y

$$P_{mi} = 3 R'_2 \left(\frac{1}{s_m} - 1\right) (I'_2)^2 = 3 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1}{0,088} - 1\right) \cdot 9,32^2 = 4046,7 \text{ W}$$

Y como las pérdidas mecánicas son despreciables, el valor del par máximo es:

$$T_m = \frac{P_u}{\omega} = \frac{4046,7}{\frac{2\pi}{60} \cdot 684} = 56,5 \text{ Nm}$$

(d) El par de arranque de la máquina es:

$$T_{arr} = \frac{3 U_1^2 R'_2}{2\pi \frac{n_1}{60} [(R_1 + R'_2)^2 + X_{cc}^2]} = \frac{400^2 \cdot 1,5}{2\pi \cdot \frac{750}{60} \cdot (2,5^2 + 17^2)} = 10,34 \text{ Nm}$$

Si consideramos que la carga es de par constante (no hay otro dato), el par resistente en el arranque es el calculado a la velocidad nominal, 33,4 Nm. Así, como el par resistente es mayor que el par de arranque del motor, se puede asegurar que el motor no puede arrancar (en arranque directo).

(e) Como el motor es de rotor bobinado, mediante la inserción de resistencias en el rotor se consigue modificar la curva par-velocidad haciendo que el par máximo se obtenga a velocidades menores. El caso límite es cuando el par máximo se obtiene en el arranque, en cuyo caso la resistencia total rotor referida al estator es:

$$s_m = \frac{R''_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad R''_2 = \sqrt{1^2 + 17^2} = 17,03 \Omega$$

Este valor es la suma de la resistencia del rotor más la resistencia exterior adicional que hay que conectar al rotor, cuyo valor referido al estator es:

$$R''_2 = R'_2 + R'_{2,ad} \quad \rightarrow \quad R'_{2,ad} = 17,03 - 1,5 = 15,53 \Omega$$

El proceso de arranque se describe en la figura 4.15 y corresponde a la línea roja. En cada fase del rotor se conecta una resistencia  $R_{2,ad}$ , del valor  $R'_{2,ad}$  referido al estator calculado, con unos interruptores que permitan puentearlas. En el momento del arranque la curva par-velocidad corresponde a  $T_2(s)$ , que tiene el par máximo en el arranque gracias a esas resistencias externas conectadas en el rotor; se conecta el motor a la red, comienza el arranque y su velocidad va aumentando hasta el instante, indicado por  $n_c$ , en el que esas resistencias se puentean y la curva par-velocidad del motor pasa a ser  $T_1(s)$  por la que ya sigue hasta llegar a su velocidad nominal.

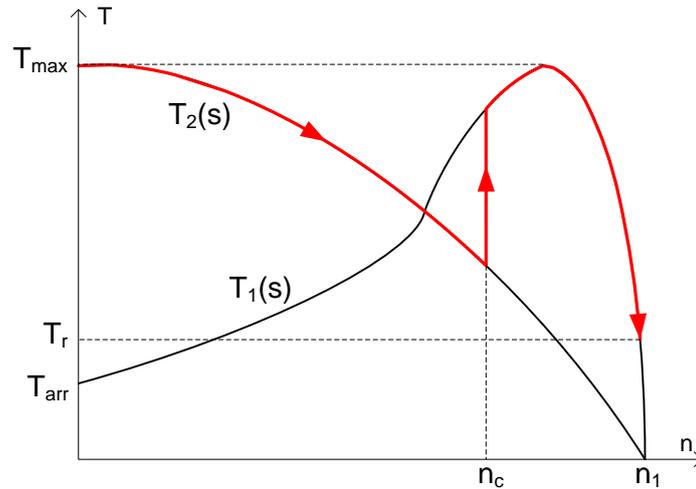


Figura 4.15

### Ejercicio 4.8.

El circuito monofásico equivalente fase-neutro del generador se representa en la figura 4.16. Como la conexión de los devanados del generador es en triángulo, el dato de la impedancia síncrona hay que transformarlo en su impedancia equivalente en estrella. Tomando como origen de fases la tensión en bornes del generador, la tensión interna o f.e.m. de fase del generador es:

$$\vec{E}_0 = (R + jX_S) \vec{I} + \vec{U} = (0,16 + j1,9) \cdot \vec{I} + \frac{6600}{\sqrt{3}} \underline{0^\circ}$$

(a) Cuando el generador suministra 1,4 MW con un factor de potencia 0,8 inductivo, se tiene que:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U \cos \varphi} = \frac{1,4 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 6600 \cdot 0,8} = 153,1 \text{ A} \quad \rightarrow \quad \vec{I} = 153,1 \underline{-36,9^\circ}$$

y la f.e.m. de fase es:

$$\vec{E}_0 = (0,16 + j1,9) \cdot 153,1 \underline{-36,9^\circ} + \frac{6600}{\sqrt{3}} \underline{0^\circ} = 4010,7 \underline{3,11^\circ} \text{ V}$$

De esta forma, la regulación del generador es:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{4010,7 \cdot \sqrt{3} - 6600}{6600} = \frac{6946,7 - 6600}{6600} = 5,25 \%$$

b) Cuando el generador suministra 1,4 MW con un factor de potencia 1, se tiene que:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U \cos \varphi} = \frac{1,4 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 6600 \cdot 1} = 122,5 \text{ A} \quad \rightarrow \quad \vec{I} = 122,5 \underline{0^\circ}$$

y la f.e.m. de fase es:

$$\vec{E}_0 = (0,16 + j1,9) \cdot 122,5 \angle 0^\circ + \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3837,1 \angle 3,48^\circ \text{ V}$$

De esta forma, la regulación del generador es:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{3837,1 \cdot \sqrt{3} - 6600}{6600} = \frac{6646 - 6600}{6600} = 0,7\%$$

c) Por último, cuando el generador suministra 1,4 MW con un factor de potencia 0,8 capacitivo, se tiene que:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} U \cos \varphi} = \frac{1,4 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 6600 \cdot 0,8} = 153,1 \text{ A} \rightarrow \vec{I} = 153,1 \angle 36,9^\circ$$

y la f.e.m. de fase es:

$$\vec{E}_0 = (0,16 + j1,9) \cdot 153,1 \angle 36,9^\circ + \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3663,7 \angle 3,87^\circ \text{ V}$$

De esta forma, la regulación del generador es:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{3663,7 \cdot \sqrt{3} - 6600}{6600} = \frac{6345,7 - 6600}{6600} = -3,85\%$$

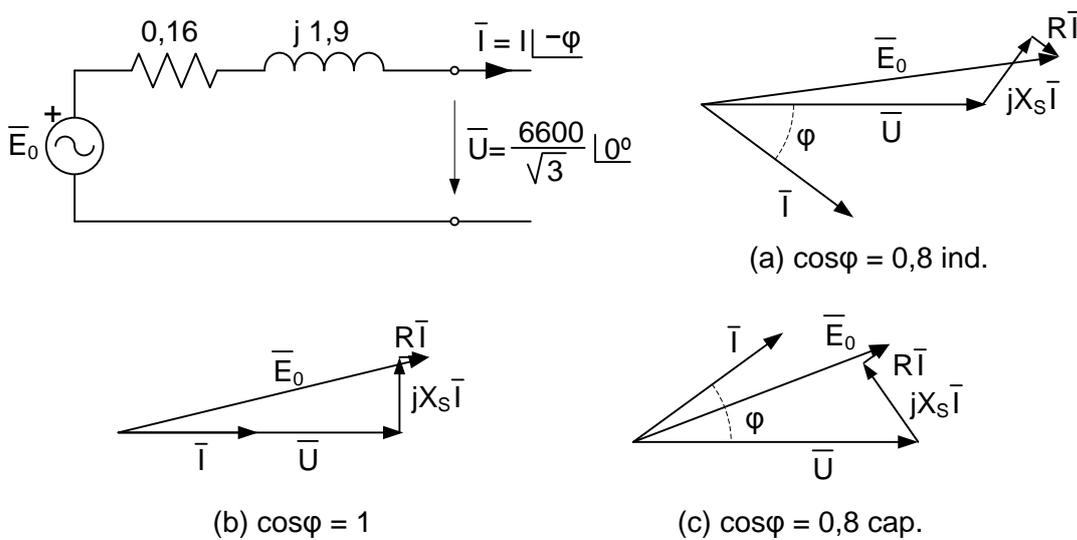


Figura 4.16

En la figura 4.16 se muestra el diagrama vectorial de tensiones e intensidades para cada uno de los tres casos y que permiten ver mejor la influencia del factor de potencia de la carga en la f.e.m. del generador (en los tres casos la caída de tensión en la impedancia síncrona se ha dibujado mucho mayor de lo que es para que se pueda ver mejor la figura).

### Ejercicio 4.9.

El circuito de la figura 4.17 representa el motor en continua con excitación en paralelo del ejercicio. En la figura se representa también el balance de potencias en motor.

En vacío, la potencia que consume el motor es:

$$P_0 = U I_0 = 240 \cdot 3,5 = 840 \text{ W}$$

potencia que corresponde prácticamente a las pérdidas en el inductor, a las pérdidas en el hierro y a las pérdidas mecánicas:

$$P_0 = P_{exc} + P_{Fe} + P_{mec} = 840 \text{ W} \rightarrow P_{Fe} + P_{mec} = 840 - (240 \cdot 1,1) = 576 \text{ W}$$

Estas pérdidas fijas, en el hierro y mecánicas, se pueden considerar constantes ya que no dependen de la velocidad. En vacío las pérdidas en el inducido (incluidas las escobillas) son prácticamente despreciables ya que su valor, como se puede comprobar, es muy pequeño:

$$P_i = R_i I_i^2 = 0,15 \cdot (3,5 - 1,1)^2 = 0,86 \text{ W}$$

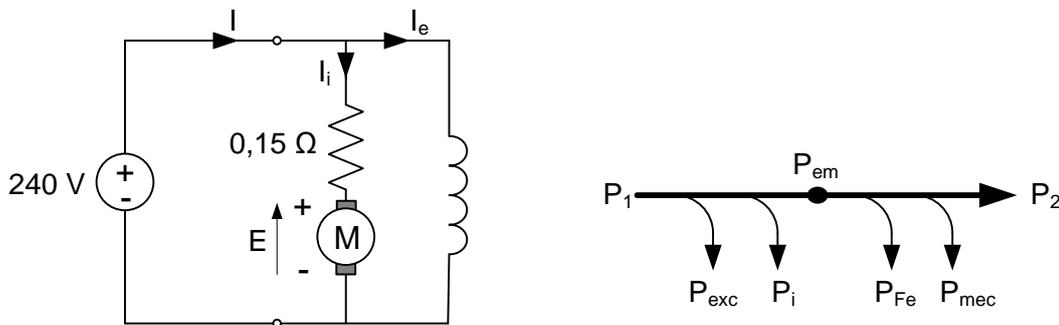


Figura 4.17

Cuando la máquina está cargada y consume 32 A, la f.e.m. es:

$$E = U - R_i I_i = 240 - 0,15 \cdot (32 - 1,1) = 235,4 \text{ V}$$

con lo que la potencia electromagnética resulta:

$$P_{em} = E I_i = 235,4 \cdot 30,9 = 7272,8 \text{ W}$$

y el par interno del motor o par electromagnético es:

$$T = \frac{P_{em}}{\omega} = \frac{7272,8}{2\pi \cdot \frac{680}{60}} = 102,1 \text{ Nm}$$

Como se conocen las pérdidas fijas, la potencia útil en el eje es:

$$P_2 = P_{em} - (P_{Fe} + P_{mec}) = 7272,8 - 576 = 6696,8 \text{ W}$$

Por tanto, el rendimiento del motor es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{6696,8}{240 \cdot 32} = 87,2 \%$$

y el par útil o par en el eje del motor es:

$$T = \frac{P_2}{\omega} = \frac{6696,8}{2\pi \cdot \frac{680}{60}} = 94 \text{ Nm}$$

### Ejercicio 4.10.

(a) Como la tensión de la red coincide con la tensión más alta de las dos dadas para el motor, 400/230 V, la conexión de las fases del estator es en estrella y la conexión de las pletinas en la placa de bornes del motor es la indicada en la figura 4.18.a.

(b) El circuito de la figura 4.18.b corresponde al circuito monofásico equivalente fase-neutro del motor conectado a la red de alimentación de 400 V. Conocida la intensidad de línea que absorbe de la red, la impedancia de ese circuito es:

$$Z = \frac{400/\sqrt{3}}{36,62} = 6,31 \Omega$$

que también es:

$$Z = \sqrt{\left(0,1 + \frac{0,15}{s}\right)^2 + (0,15 + 0,3)^2}$$

Igualando ambas expresiones y despejando el deslizamiento, se obtiene la velocidad en el eje del motor:

$$s = 0,0242 \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s) = 750 \cdot (1 - 0,0242) = 731,8 \text{ rev/min}$$

Tomando como origen de fases la tensión en bornes del motor, la intensidad de línea que consume es:

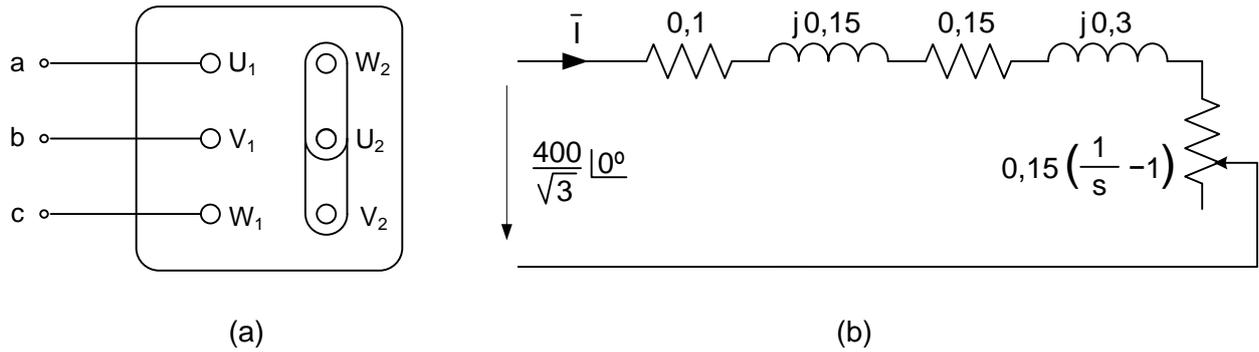


Figura 4.18

$$\vec{I} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(0,1 + \frac{0,15}{0,0242}\right) + j0,45} = 36,62 \angle -4,1^\circ \text{ A}$$

Y la potencia que absorbe de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3} U I \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 36,62 \cdot \cos(-4,1^\circ) = 25306 \text{ W}$$

Por otro lado, como las pérdidas mecánicas se consideran despreciables la potencia útil en el eje es:

$$P_{mi} = 3 I^2 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) = 3 \cdot 36,62^2 \cdot 0,15 \cdot \left(\frac{1}{0,0242} - 1\right) = 24302 \text{ W}$$

Con lo que el par que desarrolla el motor en el eje es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{24302}{2\pi \cdot \frac{731,8}{60}} = 317 \text{ Nm}$$

c) En primer lugar hay que calcular los parámetros del transformador y de la línea referidos al secundario del trafo (a la red de 400 V). La intensidad nominal en el secundario del transformador es:

$$I_{2n} = \frac{S}{\sqrt{3} U_{2n}} = \frac{35000}{\sqrt{3} \cdot 400} = 50,52 \text{ A}$$

Con lo que, a partir de los datos del ensayo en cortocircuito, se obtiene que:

$$\varepsilon_{CC} = \frac{\sqrt{3} Z_{CC2} I_{2n}}{U_{2n}} = \frac{\sqrt{3} Z_{CC2} \cdot 50,52}{400} = 0,08 \rightarrow Z_{CC2} = 0,365 \Omega$$

y

$$R_{CC2} = \frac{P_{CC}}{3 I_{2n}^2} = \frac{1600}{3 \cdot 50,52^2} = 0,209 \Omega \quad \text{y} \quad X_{CC2} = \sqrt{0,365^2 - 0,209^2} = 0,299 \Omega$$

En cuanto a la línea, la resistencia de cada cable de 200 m de longitud a 20 °C es:

$$R_{L,20} = \rho \frac{l}{S} = 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{200}{70 \cdot 10^{-6}} = 0,049 \Omega$$

y corregida con la temperatura de trabajo, finalmente resulta:

$$R_L = R_{L,20} [1 + \alpha (T - 20)] = 0,049 \cdot [1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot (75 - 20)] = 0,059 \Omega$$

La reactancia de cada cable es:

$$X_L = (2 \pi \cdot 50 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,2 = 0,019 \Omega$$

Con todos estos valores, el circuito monofásico equivalente fase-neutro completo que hay que analizar es el de la figura 4.19. En él la tensión de alimentación corresponde a la tensión de fase que hay en el primario del transformador ( $15/\sqrt{3}$  kV) referida al secundario ( $400/\sqrt{3}$  V).

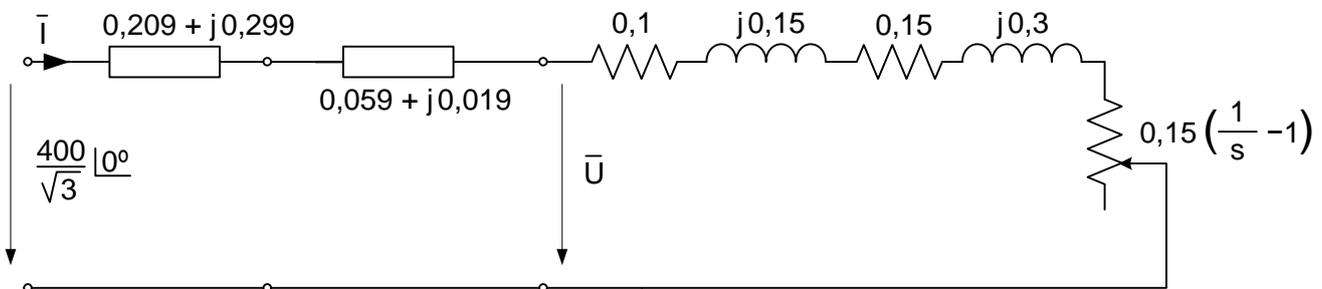


Figura 4.19

La tensión en bornes del motor ahora es menor que en el apartado anterior debido a las caídas de tensión en el transformador y en la línea. Como el par del motor sigue siendo 317 Nm calculado antes (el enunciado nos dice que ese valor es el par nominal que se debe mantener) la velocidad del motor disminuirá. Así, utilizando la expresión del par respecto a la velocidad de sincronismo y el deslizamiento:

$$T = \frac{3 U_1^2 R'_2}{2 \pi \frac{s n_1}{60} \left[ \left( R_{CC2} + R_L + R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + (X_{CC2} + X_L + X_1 + X'_2)^2 \right]} =$$

$$= \frac{400^2 \cdot 0,15}{2\pi \frac{s \cdot 750}{60} \left[ \left( 0,209 + 0,059 + 0,1 + \frac{0,15}{s} \right)^2 + (0,299 + 0,019 + 0,15 + 0,3)^2 \right]} = 317 \text{ Nm}$$

Despejando el deslizamiento, se tiene una ecuación de segundo grado que una vez resuelta nos da el deslizamiento y la velocidad de giro del motor:

$$s^2 - 1,1769s + 0,031 = 0 \quad \rightarrow \quad s = 0,027 \quad \rightarrow \quad n = 750 \cdot (1 - 0,027) = 729,8 \text{ rev/min}$$

Conocido el deslizamiento, la intensidad de línea que el motor demanda de la red es:

$$I = \frac{400/\sqrt{3}}{\sqrt{\left( 0,368 + \frac{0,15}{0,027} \right)^2 + 0,768^2}} = 38,64 \text{ Nm}$$

Con lo que la potencia que absorbe de la red es:

$$P_1 = 3 \cdot 38,64^2 \cdot \left( 0,1 + \frac{0,15}{0,027} \right) = 25334 \text{ W}$$

y la tensión de línea en bornes del motor es:

$$U = \sqrt{3} \cdot 38,64 \cdot \sqrt{\left( 0,1 + \frac{0,15}{0,027} \right)^2 + 0,45^2} = 379,7 \text{ V}$$

d) Observe que debido a las caídas de tensión en el transformador y en la línea, la tensión en el motor pasa de los 400 V nominales a 379,7 V ( $\Delta U = -5,08\%$ ). Para mantener el par en el eje del motor, su velocidad disminuye ligeramente (recuerde que en esa zona de funcionamiento estable de la máquina la curva par-velocidad es muy vertical) pero la corriente que absorbe de la red aumenta pasando de 36,62 A a 38,64 A ( $\Delta I = 5,52\%$ ), lo que hace que la potencia eléctrica de entrada prácticamente no varíe. Como nos dicen que el motor trabajaba a plena carga en las condiciones iniciales, debemos entender que ahora está ligeramente sobrecargado.

De esta forma, respondiendo a la pregunta de este apartado, el punto de funcionamiento del motor es estable ya que, aunque ha aumentado ligeramente el deslizamiento, éste sigue siendo menor que el deslizamiento del par máximo ( $s_m$  es igual a 0,3254). Sin embargo, al estar la máquina sobrecargada se calentará más de lo que corresponde a las condiciones nominales de funcionamiento para las que fue diseñada por lo que, aun siendo un punto de funcionamiento estable, no puede mantenerse de forma permanente.

e) Como el transformador es de tomas, una posible solución es cambiar la toma del primario para que la tensión en su secundario sea superior y así intentar que la tensión en el motor se aproxime lo más posible a los 400 V nominales. Como la caída de tensión que se ha producido es

del  $-5,08\%$ , lo más lógico sería cambiar a la toma superior del lado de alta con lo que la tensión en el secundario del transformador será de  $400 + 5\%$  V (como la tensión en la red de alimentación de 15 kV evidentemente no se puede variar, al pasar en el primario a la toma de  $15 + 5\%$  kV lo que en realidad se hace es disminuir el número de espiras del primario de forma que la tensión en el secundario sea de  $400 + 5\%$  V, esto es, pasamos así a tener una relación de transformación  $15000/420$  V).

De esta forma, utilizando el circuito equivalente fase-neutro de la figura 4.19, pero ahora con la tensión de línea igual a 420 V, y operando igual que se hizo en el apartado c) se tiene que:

$$T = \frac{420^2 \cdot 0,15}{2\pi \frac{s \cdot 750}{60} \left[ \left( 0,368 + \frac{0,15}{s} \right)^2 + 0,768^2 \right]} = 317 \text{ Nm}$$

Despejando  $s$ , se tiene:

$$s^2 - 1,3132s + 0,031 = 0 \quad \rightarrow \quad s = 0,02407 \quad \rightarrow \quad n = 750 \cdot (1 - 0,02407) = 732 \text{ rev/min}$$

Conocido el deslizamiento, la intensidad de línea que el motor demanda ahora de la red es:

$$I = \frac{420/\sqrt{3}}{\sqrt{\left( 0,368 + \frac{0,15}{0,02407} \right)^2 + 0,768^2}} = 36,49 \text{ Nm}$$

con lo que la potencia que absorbe de la red es:

$$P_1 = 3 \cdot 36,49^2 \cdot \left( 0,1 + \frac{0,15}{0,02407} \right) = 25293 \text{ W}$$

y la tensión de línea en bornes del motor es:

$$U = \sqrt{3} \cdot 36,49 \cdot \sqrt{\left( 0,1 + \frac{0,15}{0,02407} \right)^2 + 0,45^2} = 401,2 \text{ V}$$

Como se ve en este resultado, al ser la tensión en el motor ligeramente superior a la nominal y mantener el par en el eje, la velocidad aumenta y la intensidad que absorbe de la red es un poco menor, por lo que ahora el motor trabaja ligeramente por debajo de la plena carga.

### Ejercicio 4.11.

(a) Viendo como son las conexiones de las dos bobinas de, por ejemplo, la columna superior, se sabe que las tensiones  $\vec{U}_{AN}$  y  $\vec{U}_{ac}$ . Con esta condición se sitúan superpuestos los diagramas vectoriales de tensiones y se obtiene que en índice horario es 11, por lo que el símbolo de acoplamiento es Yd11.

(b) Este apartado se resuelve de forma similar. Ahora, en primer lugar, se superponen los diagramas vectoriales de tensiones de forma que se tenga un índice horario 10 (figura 4.20.a): se observa que, por ejemplo, las tensiones  $\vec{U}_{AB}$  y  $\vec{U}_{ac}$  son colineales, están en fase. Los devanados de la primera columna se conectan a los terminales “A” y “B”, y “a” y “c” de forma que se verifique esa igualdad, tal y como se muestra en la figura 4.20.b y, a partir de ellos, se hacen las conexiones en las otras dos columnas (compruebe que la colinealidad de las tensiones en las otras dos columnas, a partir de los diagramas vectoriales, están de acuerdo con las conexiones de los devanados realizadas; por ejemplo, que las tensiones  $\vec{U}_{CA}$  y  $\vec{U}_{cb}$  son colineales).

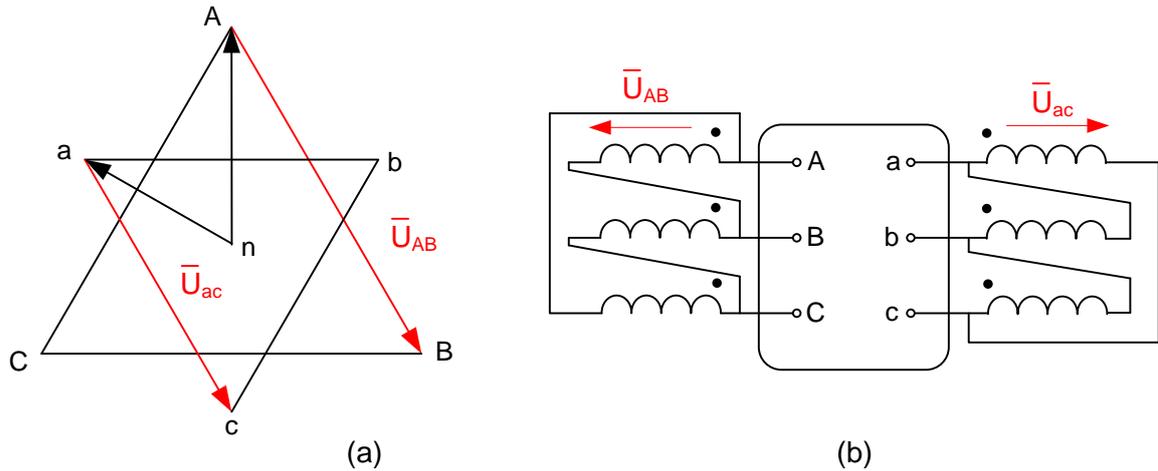


Figura 4.20

### Ejercicio 4.12.

(a) En el ensayo en vacío, se conecta el primario a la tensión nominal y se deja en secundario a circuito abierto. En la figura 4.21.a se indica una posible conexión de los aparatos de medida necesarios. En estas condiciones la rama serie se puede despreciar por lo que solo tenemos la rama paralela de su circuito monofásico equivalente (figura 4.21.b). Analizando ese circuito se tiene:

$$P_0 = 3 \frac{U_f^2}{R_{Fe}} = \frac{1000^2}{5000} = 200 \text{ W}$$

y

$$\vec{Z}_0 = \frac{j1750 \cdot 5000}{5000 + j1750} = 1651,8 \angle 70,7^\circ \Omega \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{1000/\sqrt{3}}{1651,8} = 0,35 \text{ A}$$

Con estos valores, se tiene que las lecturas de los aparatos de medida de la figura son:

$$V = U = 1000 \text{ V}; \quad A = I_0 = 0,35 \text{ A}; \quad W = \frac{P_0}{3} = 66,7 \text{ W}$$

(b) En el ensayo en cortocircuito, se cortocircuita el secundario y en el primario se conecta una fuente de tensión trifásica regulable cuyo valor se va aumentando desde cero hasta obtener en los devanados sus intensidades nominales. En la figura 4.22.a se indica una posible conexión de los aparatos de medida necesarios. En estas condiciones la rama paralelo se puede despreciar por lo

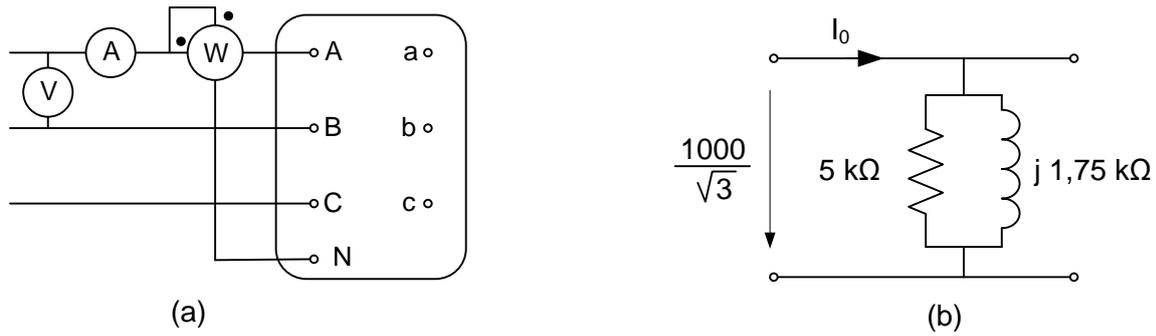


Figura 4.21

que solo tenemos la rama serie de su circuito monofásico equivalente (figura 4.22.b). Analizando ese circuito se tiene:

$$I_{1n} = \frac{10000}{\sqrt{3} \cdot 1000} = 5,77 \text{ A} \quad \rightarrow \quad P_{cc} = 3 I_{1n}^2 R_{cc} = 3 \cdot 5,77^2 \cdot 1,5 = 150 \text{ W}$$

y

$$\vec{Z}_{cc} = 1,5 + j10 = 10,11 \angle 81,4^\circ \text{ } \Omega \quad \rightarrow \quad U_{cc} = \sqrt{3} \cdot 5,77 \cdot 10,11 = 101,1 \text{ W}$$

Con estos valores, se tiene que las lecturas de los aparatos de medida de la figura son:

$$V = U_{cc} = 101,1 \text{ V}; \quad A = I_{1n} = 5,77 \text{ A}; \quad W = \frac{P_{cc}}{3} = 50 \text{ W}$$

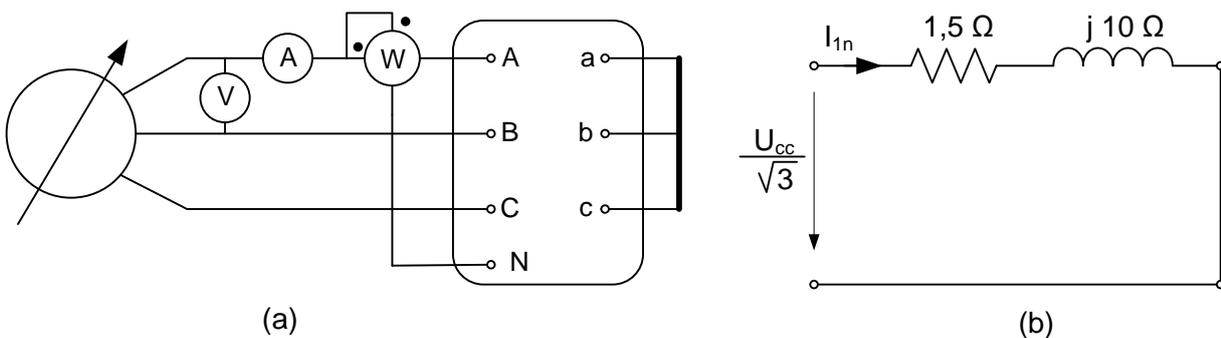


Figura 4.22

(c) La caída de tensión relativa es:

$$\epsilon_{cc} = 100 \frac{U_{cc}}{U} = 100 \cdot \frac{101,1}{1000} = 10,1 \%$$

(d) El rendimiento el transformador con un índice de carga de 0,75 y factor de potencia unidad es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{Fe} + c^2 P_{cc}} = \frac{0,75 \cdot 10000 \cdot 1}{0,75 \cdot 10000 \cdot 1 + 200 + 0,75^2 \cdot 150} = 96,3 \%$$

### Ejercicio 4.13.

Para el par resistente  $T_{R1}$ : el motor puede arrancar ya que el par resistente en el arranque es menor que el par de arranque del motor. Una vez arrancado el motor, su deslizamiento cuando alcanza el punto de funcionamiento permanente es mayor que el deslizamiento nominal (su velocidad es menor que la nominal) por lo que el motor estaría sobrecargado, situación en la que no puede funcionar de forma permanente.

Para el par resistente  $T_{R2}$ : el motor no puede arrancar (arranque directo) ya que el par resistente en el arranque es mayor que el par de arranque del motor. Si se arranca el motor por algún método que haga que  $T_a > T_{R2}$  (por ejemplo insertando resistencias en el rotor si el motor es de rotor devanado), el motor puede funcionar de forma permanente ya que el deslizamiento en el punto de funcionamiento permanente es menor que el deslizamiento nominal.

Para el par resistente  $T_{R3}$ : el motor puede arrancar ya que el par resistente en el arranque es menor que el par de arranque del motor. Y puede funcionar de forma permanente ya que el deslizamiento en el punto de funcionamiento permanente es menor que el deslizamiento nominal.

### Ejercicio 4.14.

(a) Si la velocidad nominal es 712,5 rev/min, la velocidad de sincronismo es 750 rev/min de donde se deduce que el número de pares de polos que tiene el motor es 4.

(b) La velocidad de par máximo es:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,12}{1,05 + 0,15} = 0,1 \quad \rightarrow \quad n_m = 750 \cdot (1 - 0,1) = 675 \text{ rev/min}$$

(c) A partir de la expresión del par desarrollado por el motor, se tiene que la relación entre el par máximo,  $T_m$ , y el par nominal,  $T_n$ , es:

$$\frac{T_m}{T_n} = \frac{s_n}{s_m} \left( \frac{I_m}{I_n} \right)^2 = \frac{0,05}{0,1} \cdot \frac{\left( \frac{0,12}{0,05} \right)^2 + 1,2^2}{\left( \frac{0,12}{0,1} \right)^2 + 1,2^2} = 1,25$$

### Ejercicio 4.15.

La corriente que el motor absorbe de la red en el arranque ( $s=1$ ) es:

$$I_a = \frac{U/\sqrt{3}}{\sqrt{(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2}} = \frac{U}{\sqrt{3} Z_a}$$

y en condiciones nominal esa corriente es:

$$I_n = \frac{U/\sqrt{3}}{\sqrt{(R_1 + R_2'/0,04)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{U}{\sqrt{3} Z_n}$$

Si nos dicen que la corriente de arranque es 6 veces la corriente nominal, de las expresiones anteriores se deduce que la impedancia nominal,  $Z_n$  es 6 veces mayor que la impedancia en el momento del arranque,  $Z_a$ . Por otro lado, al introducir para el arranque un autotransformador de relación de transformación  $m$  (figura 4.23), se tiene que:

$$m I'_a = \frac{U/m}{\sqrt{3} Z_a} \rightarrow I'_a = \frac{U}{m^2 \sqrt{3} Z_a}$$

y por otro lado, como la intensidad que suministra la red en el arranque nos dicen que ha de ser 1,5 la intensidad nominal:

$$I'_a = 1,5 I_n = \frac{1,5 U}{\sqrt{3} Z_n} = \frac{1,5 U}{\sqrt{3} \cdot 6 Z_a}$$

Igualando las expresiones anteriores se obtiene la relación de transformación que ha de tener el autotrafo:

$$\frac{U}{m^2 \sqrt{3} Z_a} = \frac{1,5 U}{\sqrt{3} \cdot 6 Z_a} \rightarrow m = \sqrt{\frac{6}{1,5}} = 2$$

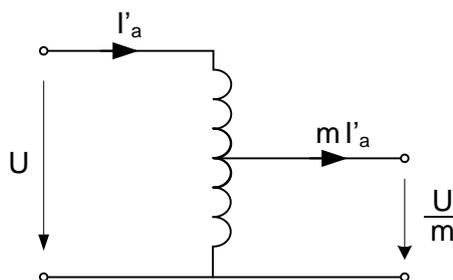


Figura 4.23

(b) A partir de las expresiones del par de arranque del motor con el autotransformador y del par nominal, y con la relación entre la impedancia de arranque y la impedancia nominal obtenida antes, se llega a:

$$\frac{T'_a}{T_n} = \left(\frac{6}{m}\right)^2 s_n = \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 0,04 = 0,36$$

**Ejercicio 4.16.**

El circuito correspondiente al motor de continua serie es el de la figura 4.24. A partir de él se tiene que la f.e.m. es:

$$E = 200 - 28 \cdot 0,75 = 179 \text{ V}$$

Y como nos dicen que el flujo magnético es directamente proporcional a la corriente, su valor es:

$$E = K n \phi \quad \rightarrow \quad K = \frac{179}{360 \phi} = \frac{0,497}{\phi}$$

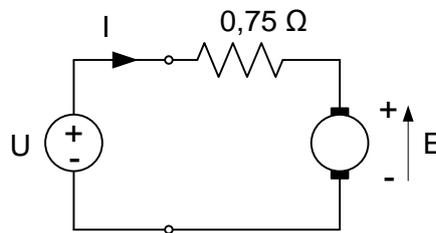


Figura 4.24

Para una velocidad  $n'$  un 25 % superior, el nuevo valor de la f.e.m. es:

$$E' = K n' \phi' = 450 K \phi' \quad \rightarrow \quad \phi' = \frac{E'}{450 K} = \frac{E' \phi}{450 \cdot 0,497} = 4,47 \cdot 10^{-3} E' \phi$$

Y como:

$$\frac{I}{\phi} = \frac{I'}{\phi'} \quad \rightarrow \quad I' = 4,47 \cdot 10^{-3} E' \phi \cdot \frac{28}{\phi} = 0,125 E'$$

Por otro lado, como el par resistente nos dicen que aumenta linealmente con la carga:

$$T' = 1,25 T = 1,25 \cdot \frac{179 \cdot 28}{2 \pi \cdot \frac{360}{60}} = 166,2 \text{ Nm}$$

Y el par que desarrolla el motor es:

$$T' = \frac{E' I'}{\omega'} = \frac{0,125 (E')^2}{2 \pi \cdot \frac{450}{60}} = 2,653 \cdot 10^{-3} (E')^2$$

Igualando ambas expresiones y despejando:

$$E' = \sqrt{\frac{166,2}{2,653 \cdot 10^{-3}}} = 250,3 \text{ V} \quad \text{e} \quad I' = 0,125 \cdot 250,3 = 31,3 \text{ A}$$

Y con el circuito equivalente del motor, se obtiene que la tensión de la fuente de continua que hay que aplicar es:

$$U' = E' + 0,75I' = 250,3 + 0,75 \cdot 31,3 = 273,8 \text{ V}$$



## Capítulo 5

### BIBLIOGRAFÍA

Aunque en el mercado existen muchos libros que abordan distintos aspectos del contenido de esta asignatura, a modo de referencia, citamos los siguientes:

#### ■ TEORÍA DE CIRCUITOS

- V. Parra, “Teoría de circuitos” (2 volúmenes). Ed. UNED, 1992.
- D.E. Scott, “Introducción al análisis de circuitos. Un enfoque sistemático”. Ed. McGraw Hill, 1988.
- G. Queijo, “Fundamentos de tecnología eléctrica”. Ed. UNED, 2009.
- A. Pastor y otros, “Circuitos eléctricos” (2 volúmenes). Ed. UNED, 2003.
- J.W. Nilsson y S.A. Riedel, “Circuitos eléctricos”. Ed. Prentice-Hall, 2005.
- J. Fraile, “Circuitos eléctricos”. Ed. Pearson, 2012.

#### ■ INSTALACIONES ELÉCTRICAS

- R. Guirado y otros, “Tecnología eléctrica”. Ed. McGraw-Hill, 2006.
- Ministerio de industria, “Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión e Instrucciones Técnicas Complementarias” (REBT, R.D.842/2002) y “Guía técnica de aplicación del Reglamento Electrotécnico de Baja Tensión”. Ambas se pueden consultar y descargar en la web del Ministerio de Industria.
- E. Romero y otros, “Fundamentos de instalaciones eléctricas”. Ed. Garceta, 2012.
- J. Carpio y otros, “Alimentación de cargas críticas y calidad de la energía eléctrica”. Ed. UNED, 2013.

#### ■ MÁQUINAS ELÉCTRICAS

- M. Cortés Cherta y otros, “Teoría general de máquinas eléctricas”. Ed. UNED, 1991.
- J. Sanz Feito, “Máquinas eléctricas”. Ed. Pearson, 2002.
- S.J. Chapman, “Máquinas eléctricas”. Ed. McGraw-Hill, 2012.
- J. Fraile y J. Fraile, “Problemas de máquinas eléctricas - 2º edición”. Ed. Garceta, 2015.

Los libros de V. Parra, D.E. Scott y M. Cortés Cherta, están descatalogados e incluso puede ser ya difícil encontrarlos, pero para nosotros siguen siendo excelentes referencias cada uno en su campo.

El libro de R. Guirado forma parte de la bibliografía básica de la asignatura obligatoria “Tecnología eléctrica” que verá a continuación de esta asignatura en este mismo Master (primer curso, segundo cuatrimestre).

Debe acostumbrarse a consultar y a trabajar con la normativa que es de aplicación a cada ámbito técnico. En el caso de las instalaciones eléctricas de baja tensión esa normativa la constituye el Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión (REBT) y sus Instrucciones Técnicas Complementarias (ITC).

Aunque con los dos textos que vamos a utilizar como bibliografía básica creemos que tiene problemas más que suficientes para preparar la asignatura, en esta lista hemos incluido la referencia de un libro de problemas de máquinas eléctricas de J. Fraile. El único motivo para hacerlo es que la mayoría de los problemas que contiene son las soluciones desarrolladas de los problemas que propone en el libro de teoría, donde solo daba la solución numérica final.

Por último, indicar que en cualquier caso la bibliografía complementaria que le hemos propuesto no se trata de una lista exhaustiva y es seguro que usted habrá utilizado y/o podrá encontrar otros libros de teoría y de problemas que le permitan ampliar y profundizar con ellos en los diferentes contenidos de esta asignatura.