TEMA 5

APLICACIONES LINEALES Y DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

1. Aplicaciones lineales

1.1. Definición de aplicación lineal

Dados dos espacios vectoriales V y W, definidos ambos sobre el mismo cuerpo de escalares K, y una aplicación $f : V \longrightarrow W$, se dice que f es un *homomorfismo* o *aplicación lineal* si cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in V \quad f(\overline{u} + \overline{v}) = f(\overline{u}) + f(\overline{v})$

2) $\forall\ \overline{u} \in V,\ \forall \lambda \in K \quad f(\lambda\,\overline{u}) = \lambda\, f(\overline{u})$

Las dos condiciones anteriores son equivalentes a la siguiente:

1) $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in V,\quad \forall \lambda, \mu \in K \quad f(\lambda\,\overline{u} + \mu\,\overline{v}) = \lambda\, f(\overline{u}) + \mu\, f(\overline{v})$

Ejemplo 1. Aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y, z) = (2\,x - y + 4\,z, -3\,x + 5\,y + 6\,z)$.

Ejemplo 2. Aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{12}, a_{21} - a_{11}, a_{22} + a_{21})$.

1.2. Clasificación de aplicaciones lineales

1.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Para cualquier aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ se verifican las siguientes propiedades:

1) $f(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$
2) $f(-\overline{v}) = -f(\overline{v})$
3) Si dos vectores $\overline{u}, \overline{v} \in V$ son linealmente dependientes, entonces sus imágenes $f(\overline{u}), f(\overline{v}) \in W$ también son linealmente dependientes.
4) Si dos vectores $\overline{u}, \overline{v} \in V$ son linealmente independientes, entonces sus imágenes $f(\overline{u}), f(\overline{v}) \in W$ pueden no ser linealmente independientes.
5) Si A es subespacio vectorial de V, el conjunto $f(A) = \{f(\overline{a}) \in W \mid \overline{a} \in A\}$ es un subespacio de W.
6) Si B es subespacio vectorial de W, el conjunto $f^{-1}(B) = \{\overline{a} \in V \mid f(\overline{a}) \in B\}$ es subespacio de V.
7) Si S es un sistema generador del subespacio $A \subset V$, entonces $f(S)$ es sistema generador de $f(A)$.

2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

En las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales hay dos subespacios especialmente importantes: el núcleo y la imagen de la aplicación.

2.1. Núcleo de una aplicación lineal

El *núcleo* de una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$, representado típicamente como $\mathrm{Ker}(f)$ o $\mathrm{Nuc}(f)$, es el conjunto de vectores $\overline{v} \in V$ tal que su imagen es el vector nulo del espacio vectorial W. Es decir:

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\overline{0}_W) = \{\, \overline{v} \in V \mid f(\overline{v}) = \overline{0} \in W \,\}$$

2.2. Imagen de una aplicación lineal

La *imagen* de una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$, representada típicamente como $\mathrm{Im}(f)$ o $f(V)$, es el conjunto de las imágenes correspondientes a los vectores $\overline{v} \in V$. Es decir:

$$\mathrm{Im}(f) = \{\, \overline{w} \in W \mid \exists\, \overline{v} \in V \text{ que verifica } f(\overline{v}) = \overline{w} \,\}$$

A la dimensión de la imagen de F, $\dim(\mathrm{Im}(f))$, se le denomina rango de la aplicación lineal, *rango*(f).

4) Si el espacio vectorial V es de dimensión finita, de manera que $\dim(V) = n$, entonces se verifica la relación $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$.

5) Si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ es un sistema generador de V, entonces $\big(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\big)$ es a su vez un sistema generador de $f(V)$.

3. Características especiales de los isomorfismos y automorfismos

Recordamos que se denomina *isomorfismo* a toda aplicación $f : V \longrightarrow W$ entre espacios vectoriales que sea a la vez lineal y biyectiva. Si $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, se dice que los dos espacios vectoriales V y W son isomorfos.

Ejemplo 3. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es isomorfo al espacio vectorial de los polinomios de grado estrictamente menor que n.

Los isomorfismos tienen las siguientes propiedades:

1) Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = W$ y $\mathrm{Ker}(f) = \{\,\overline{0}\,\}$.

2) Si los espacios vectoriales V y W tienen dimensión finita, una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si $\dim(V) = \dim(W)$.

Por otra parte, recordamos igualmente que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ se dice que es un *automorfismo* si $V = W$. Es decir, un automorfismo es una aplicación lineal biyectiva $f : V \longrightarrow V$.

4. Matriz de una aplicación lineal

Para especificar una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ se puede determinar una ley de formación que transforme los elementos $\overline{v} \in V$ en sus imágenes $f(\overline{v}) \in W$ o, alternativamente, se pueden utilizar las imágenes en W de una base de V.

Sean V y W dos espacios vectoriales, y sean $B_V = \{\,\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\,\}$ y $B_W = \{\,\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m\,\}$ unas bases de V y W respectivamente. Considérense dos vectores $\overline{x} \in V$ e $\overline{y} \in W$, cuyas coordenadas respectivas en función de las bases B_V y B_W son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Se llama matriz de la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ a la matriz $A = [a_{ij}]$ que cumple la siguiente relación:

$$Y = A\,X \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

5. Matrices congruentes, equivalentes y semejantes

5.1. Matrices equivalentes

Dos matrices A y B de orden $m \times n$ con coeficientes en el cuerpo K se dice que son *equivalentes* cuando se pueden encontrar dos matrices P y Q invertibles con coeficientes en el cuerpo K, de orden m y n respectivamente, que permiten escribir la siguiente igualdad:

$$B = P \cdot A \cdot Q$$

La relación entre matrices así definidas constituye una relación de equivalencia.

5.2. Matrices congruentes

Dos matrices cuadradas A y B de orden n con coeficientes en el cuerpo K se dice que son *congruentes* cuando se puede encontrar una matriz P invertible con coeficientes en el cuerpo K de orden n que permite escribir la siguiente igualdad:

$$B = P \cdot A \cdot P^t$$

5.3. Matrices semejantes

Dos matrices cuadradas A y B de orden n con coeficientes en el cuerpo K se dice que son *semejantes* cuando se puede encontrar una matriz P invertible con coeficientes en el cuerpo K de orden n que permite escribir la siguiente igualdad:

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

A la matriz P se le llama matriz de paso. La anterior igualdad es equivalente a la siguiente, sin más que multiplicar por la matriz P a ambos lados de la igualdad:

$$P \cdot B = A \cdot P$$

Ejemplo 4. Hallar una matriz B que sea semejante a la matriz A por medio de la matriz P.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4. Propiedades

6. Matrices diagonalizables

6.1. Diagonalización por semejanza de matrices cuadradas

Diagonalizar por semejanza una matriz A consiste en encontrar una matriz P, denominada *matriz de paso*, y una matriz D, conocida como *matriz diagonal*, tal que:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

La matriz P de paso está formada por *autovectores*, mientras que la matriz diagonal D está compuesta por *autovalores*. Las siguientes relaciones son equivalentes a la ya dada.

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad P \cdot D = A \cdot P$$

6.2. Autovalores y autovectores

En el ámbito del endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, un vector $\overline{x} \in V$ (siendo $\overline{x} \neq 0$) es un *vector propio* o *autovector* del endomorfismo f si existe algún escalar λ, denominado *valor propio* o *autovalor*, tal que

$$f(\overline{x}) = \lambda\,\overline{x}$$

Expresado en forma matricial, dada una matriz A cuadrada de orden n, se dice que un escalar λ del cuerpo K es un autovalor si existe un vector columna X distinto de cero (el autovector), tal que:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

El conjunto de los vectores propios asociados al mismo autovalor λ constituye por sí mismo un subespacio vectorial del espacio vectorial V, y se calcula a partir del propio dato λ.

6.3. Ecuación característica y polinomio característico

Partiendo de la expresión $A \cdot X = \lambda \cdot X$, se obtiene la siguiente cadena de igualdades:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \quad \Longrightarrow \quad A \cdot X - \lambda \cdot X = O \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda \cdot I) \cdot X = O$$

Extendiendo la expresión matricial, se obtiene lo siguiente:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot X = O \quad \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es homogéneo y por ello compatible. Para que este sistema sea indeterminado y tenga soluciones distintas de la trivial el determinante de la matriz de coeficientes deberá ser igual a 0.

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Los valores de λ que permiten hacer cero el determinante anterior son los autovalores, y para una matriz de orden n el número de autovalores será precisamente n, aunque ello no significa que todos los autovalores sean distintos ni que todos sean valores reales, puesto que dependiendo de la matriz A algunos autovalores pueden ser complejos.

Se llama *polinomio característico* a la expresión $|A - \lambda \cdot I|$. Si la matriz A tiene orden n, entonces el polinomio característico tendrá grado n.

Por otra parte, se denomina *ecuación característica* a la igualdad $|A - \lambda \cdot I| = 0$.

En resumen, los autovalores son las soluciones de la ecuación característica o, expresado de manera equivalente, las raíces del polinomio característico. En cuanto a los autovectores, éstos se calculan a partir de la expresión $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = O$, sin más que particularizar para el valor λ concreto. El razonamiento completo sería el siguiente:

$$\lambda \text{ es autovalor} \iff A_{n\times n} \cdot X_{n\times 1} = \lambda \cdot X_{n\times 1} \text{ para algún } X_{n\times 1} \neq O_{n\times 1} \iff$$

$$\iff (A_{n\times n} - \lambda \cdot I_{n\times n}) \cdot X_{n\times 1} = O_{n\times 1} \text{ para algún } X_{n\times 1} \neq O_{n\times 1} \iff$$

$$\iff (A_{n\times n} - \lambda \cdot I_{n\times n}) \text{ es una matriz singular} \iff |A_{n\times n-\lambda\cdot I_{n\times n}}| = 0$$

Ejemplo 5. Obtener los autovalores y autovectores de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6. Obtener los autovalores y autovectores de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6.4. Propiedades de los autovalores

6.5. Obtención de la matriz diagonal D y de la matriz de paso P

La matriz D es la matriz diagonal formada por los autovalores obtenidos a partir de la ecuación característica.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Una forma de comprobar que los autovalores calculados son los correctos consiste en utilizar la siguiente propiedad: la suma de los autovalores es igual a la traza de la matriz A.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i \lambda_i$$

Otra forma de comprobar que los autovalores calculados son los correctos consiste en utilizar esta otra propiedad: el producto de autovalores es igual al valor del determinante de la matriz A.

$$|A| = \prod_i \lambda_i$$

Por su parte, la matriz de paso se genera utilizando como vectores columna un vector libre asociado a cada autovalor, aunque es importante advertir que no siempre que hayamos obtenido la matriz D será posible calcular una matriz P invertible.

6.6. Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización de una matriz

Cualquiera de las siguientes condiciones implican que la matriz A es diagonalizable:

1) Existe una base de V formada por vectores propios.

2) Para todo i, se cumple que $rango(A - \lambda_i I) = n - \alpha_i$, siendo α_i la multiplicidad del autovalor λ_i.

3) La dimensión del subespacio vectorial asociado a cada autovalor es igual a la multiplicidad algebraica de dicho autovalor.

Ejemplo 7. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \end{pmatrix}$$

7. Problemas

1) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por la propiedad $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_1)$.

2) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2\,x_1 + x_2, 2\,x_3 - x_1)$, se pide:

   a) Calcular la matriz de la aplicación lineal.

   b) Indicar qué vectores componen el núcleo de la aplicación lineal.

   c) Calcular una base de la imagen de la aplicación lineal.

3) Hallar el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0,0,0) = (1,-1,2) \qquad f(0,1,0,0) = (2,1,1)$$

$$f(0,0,1,0) = (4,-1,5) \qquad f(0,0,0,1) = (-1,-5,4)$$

4) Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal tal que $f(1,0) = (1,2,0)$ y $f(0,1) = (0,3,1)$, entonces:

   a) Calcular $f(1,1)$ y $f(5,7)$.

   b) Determinar si las imágenes de todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ se encuentran en el plano de la ecuación $2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 = 0$.

5) Hallar unas ecuaciones paramétricas del núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida mediante la propiedad $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3 - x_4)$.

6) Hallar una matriz diagonal D semejante a la matriz A, sabiendo que dicha matriz y su correspondiente matriz de paso P son las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

7) Hallar los autovalores, la matriz diagonal D y la matriz de paso P de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ [illegible] & & \end{pmatrix}$$

9) Hallar los autovalores y la matriz diagonal D de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10) Sea f el endomorfismo de un espacio vectorial real de dimensión 3 cuya matriz respecto de la base canónica es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Obtener el polinomio característico.
b) Calcular los autovalores y autovectores.
c) Diagonalizar, si es posible, la matriz A. En caso contrario, indicar el motivo por el que no se puede diagonalizar.

11) Sea f el endomorfismo de un espacio vectorial real de dimensión 3 cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 14+3a & a & 3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores $a \in \mathbb{R}$ es f diagonalizable?

12) Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ tal que se cumple lo siguiente:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0 \,\}$$

$$f(1, 0, -1, 0) = (0, 1, 1, 0)$$

$$f(0, 1, 1, 0) = (2, 0, 0, 2)$$

Determinar la matriz A de f respecto a la base canónica.

8. Preguntas de test

2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (1,4)$ y $f(2,-1) = (-2,3)$, la imagen (respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$) del vector $(3,-1)$ es:

- ☐ a) $(1/3, 4)$
- ☐ b) $(-5/3, 10/3)$
- ☐ c) $(-5/3, 5/3)$
- ☐ d) $(-8/3, 1/3)$
- ☐ e) $(-7/3, 16/3)$
- ☐ f) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

3) Si A es una matriz cuadrada de orden 2 que es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces:

- ☐ a) $|A| = 1$
- ☐ b) $|A| = -2$
- ☐ c) $|A| = 0$
- ☐ d) No se puede calcular el determinante de la matriz A.

4) Si la ecuación característica de una matriz cuadrada A es $(\lambda-3)^2\,(\lambda+1) = 0$ e I es la matriz unidad del mismo orden que A, se verifica que:

- ☐ a) $|A - I| = |A - 3\,I|$
- ☐ b) $|A + I| = |A - 3\,I|$
- ☐ c) $|A + I| = |A + 3\,I|$
- ☐ d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

5) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A, entonces el valor propio correspondiente a dicho autovector es:

- ☐ a) $\lambda = 0$
- ☐ b) $\lambda = 1$
- ☐ c) $\lambda = 2$
- ☐ d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

7) La matriz A verifica lo siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

☐ a) Tiene 3 autovalores distintos.

☐ b) Tiene sólo un autovalor, cuya multiplicidad algebraica es 2.

☐ c) Tiene 2 autovalores distintos, y uno de ellos tiene multiplicidad algebraica 2.

☐ d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

8) Respecto a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, elegir la opción correcta:

☐ a) La matriz A es diagonalizable sólo si $a = 0$.

☐ b) La matriz A es diagonalizable sólo si $a \neq 0$.

☐ c) La matriz A es diagonalizable siempre, independientemente del valor del parámetro a.

☐ d) La matriz A nunca es diagonalizable, independientemente del valor del parámetro a.

☐ e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

9) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real de tamaño 2×2 donde $a_{11} + a_{22} = -1$ y $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = -2$. Elegir la opción correcta:

☐ a) Con los datos proporcionados no se pueden calcular los autovalores de A.

☐ b) Sus autovalores son $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$.

☐ c) Sus autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

☐ d) Sus autovalores son $\lambda = 2$ y $\lambda = -3$.

☐ e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

10) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal tal que $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (1,1)$ y $f(0,0,1) = (1,0)$, se verifica:

☐ a) El núcleo de la aplicación lineal es el subespacio $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3, x_2 = 0\}$.

☐ b) El núcleo de la aplicación lineal es el subespacio $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- *Introducción al Álgebra Lineal*. José Manuel Casteleiro Villalba. Ed. ESIC.
- *Álgebra Lineal y geometría cartesiana*. Juan de Burgos. Tercera edición. Ed. McGraw-Hill.
- *Álgebra Lineal básica*. A. M. Díaz Hernández et. al. Ed. Sanz y Torres.
- *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Carl D. Meyer. Ed. SIAM.
- *Problemas resueltos de Álgebra Lineal*. Jorge Arvesú Carballo, Francisco Marcellán Español y Jorge Sánchez Ruiz. Ed. Thomson.