

BLOQUE I: PRELIMINARES
Tema 2
ALGUNAS NOCIONES DE TEORÍA DE CONJUNTOS,
RELACIONES Y FUNCIONES
Lógica
Grado en Ingeniería Informática

Alessandra Gallinari

URJC

1

Contenido

Nociones de teoría de conjuntos

Inclusión e igualdad de conjuntos
Operaciones con conjuntos
Partes de un conjunto y propiedades de las operaciones con conjuntos
Cardinal de un conjunto

Relaciones binarias

Relaciones de equivalencia
Relaciones de orden
Mínimos y máximos de un conjunto

Relaciones n -arias

Funciones

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

2

Nociones de teoría de conjuntos

Este capítulo es un repaso de algunas nociones de teoría de conjuntos y de las definiciones básicas de relaciones y funciones. En esta exposición presentaremos sólo aquellos conceptos indispensables para el estudio de la asignatura de Lógica Matemática.

Nociones de teoría de conjuntos

La lógica y la teoría de conjuntos están estrechamente relacionadas. De hecho en un principio se pensó que toda propiedad $P(x)$ (todo predicado, en el lenguaje de la lógica de primer orden) llevaba asociado un "conjunto",

$$\{x : P(x)\}.$$

El conjunto obtenido estaría formado por los elementos a del universo de

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and orange gradient with a subtle geometric pattern.

Nociones de teoría de conjuntos

Así, por ejemplo, sea nuestro universo de discurso "los seres humanos" y sea $P(x)$ la propiedad de un genérico ser humano x de medir al menos 1,70 metros de altura.

Dado un particular ser humano a , es posible determinar si la altura de a es al menos 1,70 metros, es decir, si a pertenece al conjunto $\{x : P(x)\}$.

5

Nociones de teoría de conjuntos

En 1903 Bertrand Russell propuso el siguiente ejemplo de "conjunto" (según la definición de conjunto de su época)

$$A = \{x : x \notin x\},$$

y preguntó si $A \in A$.

De la definición de A se sigue que $A \in A$ implica que $A \notin A$ y, además, que $A \notin A$ implica que $A \in A$. Por tanto se obtiene la contradicción: $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$.

El ejemplo de Russell muestra que no toda propiedad determina los elementos de un conjunto.

6

Nociones de teoría de conjuntos

La primera de las restricciones es el *axioma de especificación*: una propiedad por sí sola no determina un conjunto, sino que selecciona elementos de un conjunto dado al que es necesario referirse.

Para no incurrir en contradicción con el axioma de especificación, es necesario asumir la no existencia del "conjunto universal U ," el conjunto de todos los conjuntos. En efecto se puede demostrar que si U fuera un conjunto también $A = \{x \in U : x \notin x\}$ tendría que ser un conjunto. Así

Nociones de teoría de conjuntos

En respuesta a la paradoja de Russell, se propusieron varias formulaciones axiomáticas de la teoría de conjuntos. En nuestra exposición, utilizaremos reglas de construcción de conjuntos formuladas en términos de la lógica de predicados, a partir de los conceptos primitivos de conjunto y pertenencia (Zermelo-Fraenkel, 1922).

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, green, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a white, curved, arrow-like shape pointing to the right, which is partially overlaid by a yellow banner.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Los conceptos de **conjunto** y de **pertenencia** de un elemento a un conjunto son conceptos *primitivos*, es decir, no se definen. Diremos que un **conjunto** A es una colección (familia, clase), finita o infinita, de objetos de un universo U , tal que para todo objeto x se pueda determinar si x pertenece a A . Los objetos de un conjunto serán sus **elementos**. Si x pertenece al conjunto A , se escribirá $x \in A$. Si x no pertenece a A , se escribirá $x \notin A$.

Ejemplos:

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los números naturales,
 $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los números enteros,
 $\mathbb{F} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$ es el conjunto de las fracciones de números enteros,
 $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 1 = 0$.

Notación: los símbolos \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} denotarán, respectivamente, el conjunto de los números racionales, reales y complejos.

- ▶ **Inclusión:** Si todo elemento x de un conjunto A es también elemento de un conjunto B , se dirá que A está contenido en B o que A es un **subconjunto** de B (y se escribirá $A \subseteq B$ ó $B \supseteq A$).
- ▶ **Inclusión propia:** Si A es un subconjunto de B y existe un elemento de B que no pertenece a A , entonces A es un **subconjunto propio** de B : $A \subsetneq B$ ó $A \subset B$.
- ▶ **Igualdad:** Dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen los mismos

Nota importante: para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, es necesario verificar las dos siguientes condiciones:

- 1) $A \subseteq B$ (1)
- 2) $B \subseteq A$ (2)

Ejemplos: 1) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$ y $B = \{-2, 1\}$. Los elementos de A son las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$, es



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Inclusión e igualdad de conjuntos

- **Conjunto vacío:** El **conjunto vacío** \emptyset es el conjunto que no tiene elementos.

Nota: el conjunto \emptyset **no es igual** al conjunto $A = \{\emptyset\}$, pues A tiene un elemento, el conjunto vacío.

Ejemplo: Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Entonces $A = \emptyset$.

13

Inclusión e igualdad de conjuntos

Proposición Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $\emptyset \subseteq A$. La justificación de esta proposición es inmediata, ya que (como estudiaremos muy pronto) toda deducción con una premisa falsa es verdadera.

14

Operaciones con conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, es posible construir nuevos conjuntos por medio de las siguientes operaciones:

- la **unión** de A y B es el conjunto $A \cup B$ de todos los elementos de A o de B , es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\},$$

Operaciones con conjuntos

- la **intersección** de A y B es el conjunto $A \cap B$ de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B , es decir

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \text{ y } (x \in B)\}.$$

Si A y B no tienen elementos en común, entonces $A \cap B = \emptyset$ y se dirá que A y B son **disjuntos**.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a background of a blue and orange gradient with a subtle geometric pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Operaciones con conjuntos

- ▶ el **complemento (relativo) de B respecto de A** es el conjunto $A \setminus B$ de todos los elementos de A que no pertenecen a B , es decir

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \text{ y } (x \notin B)\}.$$

17

Operaciones con conjuntos

- ▶ el **producto cartesiano** de dos conjuntos *no vacíos* A y B es el conjunto de todos pares *ordenados* (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \text{ y } (b \in B)\}.$$

Para representar gráficamente un producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos, se puede utilizar un sistema de ejes. Los elementos de A se representan por medio de puntos del eje de las abscisas y los elementos de B por medio de puntos del eje de las ordenadas. Entonces los elementos de $A \times B$ son todos los puntos de "coordenadas" (a, b) .

18

Operaciones con conjuntos

Por ejemplo, sean $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{a, b\}$. La siguiente figura es una representación gráfica (obtenida con el sistema Maple sustituyendo las letras por números: $x = 1, y = 2, z = 3, a = 1, b = 2$) de $A \times B$.

Partes de un conjunto

Si A es un conjunto, se llama **conjunto de las partes de A** , $P(A)$, al nuevo conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de A .

Nota: Para todo conjunto A , $P(A)$ es siempre no vacío, ya que $\emptyset \in P(A)$.

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and white geometric pattern, possibly representing a globe or a map, with a blue and orange gradient bar at the bottom.

Propiedades de las operaciones con conjuntos

Sean A, B y C tres conjuntos. Las principales propiedades de las operaciones con conjuntos son las siguientes:

1) **idempotencia** de la unión y de la intersección:

$$A \cup A = A \quad (3)$$

$$A \cap A = A \quad (4)$$

21

Propiedades de las operaciones con conjuntos

2) **conmutatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup B = B \cup A \quad (5)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (6)$$

3) **asociatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (7)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (8)$$

22

Propiedades de las operaciones con conjuntos

4) **distributividad** de la unión respecto de la intersección y de la intersección respecto de la unión:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (9)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (10)$$

5)

Propiedades de las operaciones con conjuntos

6) **Leyes de De Morgan** (para conjuntos):

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \quad (13)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \quad (14)$$

7)

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad (15)$$

The logo for 'Cartagena99' features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a drop shadow, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The text is set against a background of a blue and orange gradient with a subtle geometric pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos

Las definiciones de unión y de intersección de dos conjuntos se pueden extender a una familia arbitraria de conjuntos. Si J es un conjunto fijado y asociamos a cada $j \in J$ un conjunto A_j , entonces obtenemos la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in J}$.

La unión de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j \in J}$ es el nuevo conjunto

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j$$

tal que x es un elemento de A si x es un elemento de al menos uno de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j \in J}$.

25

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos

La intersección de los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j \in J}$ es el nuevo conjunto

$$A = \bigcap_{j \in J} A_j$$

tal que x es un elemento de A si x es un elemento de todos los conjuntos de la familia $\{A_j\}_{j \in J}$.

26

Unión e intersección de una familia arbitraria de conjuntos

Ejemplo: Si $J = \mathbb{N}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos $N_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n = \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n = \{1\}$.

Cardinal de un conjunto

El **cardinal** de un conjunto finito A , $Card(A)$, es el número de elementos de A . Si A es un conjunto infinito se escribirá $Card(A) = \infty$.

Cardinal de la unión: Sean A y B dos conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) \leq Card(A) + Card(B)$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a background of a light blue and white geometric shape that resembles a stylized '9' or a similar symbol.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cardinal de un conjunto

Observación: Se puede comprobar que si A es un conjunto finito con $\text{Card}(A) = n$, entonces $\text{Card}(P(A)) = 2^n$.

Ejemplos: 1) $\text{Card}(\mathbb{N}) = \infty$

2) Sean $A = \{-2, 0, 3, 17\}$ y $B = \{-7, 0, 5, 17, 18\}$. Entonces, $A \cup B = \{-7, -2, 0, 3, 5, 17, 18\}$ y $A \cap B = \{0, 17\}$. Luego, se verifica que

$$7 = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 4 + 5 - 2.$$

29

Relaciones binarias

Definición: Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una **relación binaria** entre A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$ se dirá que a y b están relacionados y se escribirá aRb .

30

Relaciones binarias

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$. Entonces aRd, bRe, cRd y cRe .

Relaciones binarias

Si $R \subseteq A \times A$ (es decir, si $A = B$), se dirá que R es una **relación binaria en A** .

En las siguientes definiciones vamos a emplear el cuantificador universal \forall y el símbolo de implicación \rightarrow de la lógica de predicados, que estudiaremos en detalle. La notación $\forall x \in A$ quiere interpretarse como "para todo elemento x del conjunto A ".

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a background of a light blue and white geometric shape that resembles a stylized 'C' or a banner.

Una relación R en un conjunto no vacío A puede ser:

- ▶ R1) **reflexiva:** $\forall x \in A \quad xRx$
- ▶ R2) **simétrica:** $\forall x, y \in A \quad xRy \rightarrow yRx$
- ▶ R3) **antisimétrica:** $\forall x, y \in A \quad (xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$
- ▶ R4) **transitiva:** $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$

Para estudiar las propiedades de una relación binaria sobre un conjunto A es conveniente representar gráficamente la relación (ver ejercicio 6).
Observación: Las únicas relaciones binarias en un conjunto no vacío A que sean al mismo tiempo simétricas y antisimétricas son tales que $R \subseteq \{(x, y) : x = y\}$.

- Ejemplos:** 1) Sea A el conjunto de las personas y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ es el padre de } b\}$. Esta relación no tiene ninguna de las propiedades $R1, R2$ y $R4$.
- 2) En el conjunto de las partes $P(A)$ de un conjunto A , la relación de inclusión $R = \{(B, C) \in P(A) \times P(A) : B \subseteq C\}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- 3) En el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros, la relación

- 4) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación " r es ortogonal a s " no es reflexiva, es simétrica y no es transitiva.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relaciones binarias

Definición: Si $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria, se denomina

- ▶ **dominio** de R al conjunto

$$\text{dom}(R) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- ▶ **imagen directa (o rango)** de R al conjunto

$$\text{Im}(R) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq B$$

- ▶ **imagen inversa (o recíproca)** de un subconjunto C de B al conjunto

$$R^{-1}(C) = \{x \in A : \exists y \in C \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- ▶ **codominio** de R al conjunto B .

37

38

Relaciones de equivalencia

Definición: Una relación binaria R en un conjunto no vacío A se denomina **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Si R es una relación de equivalencia en A y $a, b \in A$ son tales que aRb , se escribirá $a \sim b$.

Si $a \in A$ y \sim es una relación de equivalencia en A , se puede definir un subconjunto $C(a)$ de A denominado **clase de equivalencia de a** :

$$C(a) = \{x \in A : x \sim a\}. \quad (18)$$

Relaciones de equivalencia

Sea b otro elemento de A . Puede ocurrir sólo una de las siguientes situaciones:

$$\text{si } a \sim b, \text{ entonces } C(a) = C(b), \quad (19)$$

$$\text{si } a \not\sim b, \text{ entonces } C(a) \cap C(b) = \emptyset. \quad (20)$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Por tanto, si consideramos el conjunto de las *distintas* clases de equivalencias, este conjunto representa una *partición* de todo A entre subconjuntos disjuntos y se denomina *conjunto cociente*.

Ejemplos: 1) La relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$, es una relación de equivalencia y $\mathbb{Z} = C(0) \cup C(1)$. $C(0)$ es el conjunto de todos los enteros pares y $C(1)$ de los enteros impares.

2) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación “ r es paralela a s ” es una relación de equivalencia. Para toda recta r , $C(r)$ representa a la **dirección** determinada por r .

3) Números racionales

En el conjunto \mathbb{F} de las fracciones $\mathbb{F} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$, para todo par de fracciones $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ y $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, se define la relación de equivalencia R como $r_1 \sim r_2 \leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$. El conjunto de las clases de equivalencia es el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales.

Definición: Una relación R en un conjunto (no vacío) A es una **relación de orden** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si R es una relación de orden en A y $x, y \in A$ son tales que xRy , se escribirá $x \leq y$. Una relación de orden R sobre A tal que cada dos elementos x e y de A se pueden comparar (es decir, $\forall x, y \in A, xRy$ ó yRx) es una **relación de orden total**. Si una relación de orden R no es de orden total, entonces es una **relación de orden parcial**.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Relaciones de orden

Ejemplos: 1) En el conjunto de los números reales la relación "menor o igual que" (\leq) es una relación de orden total. En particular, sea $A := \{1, 2, 3, 4, 12\}$. El orden del conjunto A dado por \leq se puede representar con un grafo orientado:

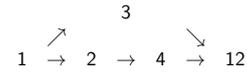
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 12$$

2) En el conjunto de las partes de un conjunto A , la relación de inclusión (\subseteq) es una relación de orden parcial.

45

Relaciones de orden

3) En el conjunto de los números naturales la relación "ser divisor de", $|$, es una relación de orden parcial. En particular, para el mismo conjunto $A := \{1, 2, 3, 4, 12\}$ del ejemplo 1), la relación $|$ se puede representar por medio del siguiente grafo:



46

Relaciones de orden

A toda relación de orden " \leq " en A se le puede asociar una **relación de orden estricto**, definida por

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y. \quad (21)$$

La relación $<$ es tal que

i) no existen elementos $x, y \in A$ tales que $x < y$ e $y < x$

Relaciones de orden

Viceversa, a partir de una relación R en A que cumple las condiciones i) y ii), se puede definir la relación de orden

$$x \leq y \iff ((x < y) \vee (x = y)).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relaciones de orden

Son muy importantes las **relaciones de orden estricto y total**, es decir, las relaciones que satisfacen las siguientes dos propiedades:

- ▶ **transitiva:** $\forall x, y, z \in A, (x < y \text{ e } y < z) \rightarrow x < z$.
- ▶ **de tricotomía:** $\forall x, y \in A$, se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x.$$

49

Relaciones de orden

Ejemplos:

- 1) En el conjunto de los números reales la relación "menor que" es una relación de orden estricto y total.
- 2) En el conjunto de las partes de un conjunto A , la relación de inclusión propia (es decir, $\forall B, C \in P(A), B < C$ si $B \subseteq C$ y $B \neq C$) es una relación de orden estricto parcial.

50

Mínimos y máximos de un conjunto

Definición:

Si \leq es una relación de orden en un conjunto A y $B \subseteq A$, un elemento $m \in B$ es un **mínimo** de B si $\forall x \in B, m \leq x$. Un elemento $M \in B$ es un **máximo** de B si $\forall x \in B, x \leq M$.

Se puede comprobar fácilmente que el mínimo y el máximo de un conjunto existen, entonces son únicos.

Mínimos y máximos de un conjunto

- Ejemplos:** 1) \emptyset es el mínimo y A el máximo del conjunto de las partes $P(A)$ del conjunto A , ordenado con la inclusión.
2) -1 es el mínimo y 4 es el máximo del intervalo (cerrado) $[-1, 4] \subseteq \mathbb{R}$, donde \mathbb{R} tiene el orden "menor o igual que."
3) En el conjunto de los números naturales ordenados por "ser divisor de," 1 es un mínimo, pero no existe un máximo.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definición: Sean A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos no vacíos. Una **relación de aridad n o n -aria** es un subconjunto R del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ se dirá que (a_1, a_2, \dots, a_n) están relacionados.

Ejemplo: Sean $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$ y $A_3 = \{1, 2\}$.
 $R = \{(a, d, 1), (b, e, 1), (c, d, 2), (c, e, 2)\}$ es una relación ternaria sobre $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Una función (o aplicación) $(n + 1)$ -aria, $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$, de un conjunto no vacío $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ a un conjunto no vacío B se puede definir como "una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ un único elemento $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$."

Esta definición es muy intuitiva, pero no explica el término "regla de correspondencia" con suficiente claridad.

La siguiente definición es más general e identifica el concepto de función con una clase particular de relaciones binarias.

Definición: Sean A_1, A_2, \dots, A_n y B conjuntos no vacíos. Una **función (o aplicación) $(n + 1)$ -aria** $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$ es una relación $(n + 1)$ -aria $f \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B$ tal que
 f1) $dom(f) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$,
 f2) si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in dom(f)$ existe un **único** $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$

Entonces una función $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$ es una relación entre $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ y B tal que a cada elemento de $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ corresponde un único elemento $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ del codominio B .

Si $(a_1, a_2, \dots, a_n, f(a_1, a_2, \dots, a_n)) \in f$, se dirá que $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la **imagen de (a_1, a_2, \dots, a_n)** por la función f o el **valor de f** en (a_1, a_2, \dots, a_n) .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Test de la recta vertical: Una relación $R \subseteq A \times B$ es una función si y sólo si

- 1) $dom(R) = A$ y
- 2) su gráfica corta a cada "recta vertical" en un punto a lo más.

- Ejemplos:**
- 1) La relación binaria definida por: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y $R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$ no es una función.
 - 2) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, es tal que $dom(f) = \mathbb{R}$ y $Im(f) = \mathbb{R}$.
 - 3) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$, es tal que $dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} (= [0, \infty))$. En este caso, $f^{-1}([0, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $f^{-1}((-2, 0]) = \{0\}$.
 - 4) La función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida sólo para números reales no negativos, entonces $dom(f) = Im(f) = [0, \infty)$.
 - 5) El dominio de la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Definición: Dos funciones $f, g \subseteq A \times B$ son **iguales** si y sólo si:

- a) $dom(f) = dom(g)$
- b) $\forall x \in dom(f), f(x) = g(x)$.

Ejemplo: Las funciones $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2, \forall x > 0$ no son iguales, ya que $dom(f) \neq dom(g)$.

Definición: Una función $f : A \rightarrow B$ es

- ▶ **inyectiva:** si $\forall x, y \in A,$
 $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$ o, equivalentemente,
 $f(x) = f(y) \rightarrow x = y.$
 A elementos distintos x e y de A corresponden elementos distintos $f(x)$ y $f(y)$ de B .
- ▶ **sobreyectiva:** si $f(A) = B$ o, equivalentemente, si

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

► **biyectiva:** si es inyectiva y sobreyectiva.

Por tanto, una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si $\forall b \in B \exists!$ (existe un único) $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Test de la recta horizontal: Una función f es inyectiva si y sólo si cada "recta horizontal" corta la gráfica de f en un punto a lo más.

61

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Ejemplos: 1) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, es biyectiva.

2) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$, no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

3) La función $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$, es biyectiva.

4) La función **proyección** sobre A , $p : A \times B \rightarrow A$, definida por $p(a, b) = a$, es sobreyectiva y no es inyectiva (salvo que $\text{card}(B) = 1$).

5) La función **identidad** en A , $Id_A : A \rightarrow A$, definida por $Id_A(a) = a$, es biyectiva.

Observación: Si $f : A \rightarrow B$ es una función inyectiva, entonces la función $f : A \rightarrow f(A)$ es biyectiva.

62

Composición de funciones

Definición: Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dos funciones. La función **composición (o compuesta)** de f y g es la función $g \circ f : A \rightarrow C$ definida por $\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
Entonces

$$g \circ f = \{(a, g(f(a))) : a \in A\} \subseteq A \times C.$$

Composición de funciones

Ejemplos:

a) Siendo \mathbb{R}^+ el conjunto de los números reales positivos, sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función $f(x) = x^2 + 1$ y sea $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función $g(x) = \sqrt{x}$.
Entonces, la función $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es la función $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Composición de funciones

b) Sean D el conjunto de las personas, M el subconjunto de las madres y A el subconjunto de las abuelas.
Definimos las funciones $f : D \rightarrow M$ y $g : M \rightarrow A$ que asocian a toda persona y a toda madre, respectivamente, su propia madre.
En este caso la función $g \circ f : D \rightarrow A$ resulta ser la función que asocia a toda persona su abuela materna.

65



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70