Proyecto MaTEX

Derivada-Aplicaciones

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4

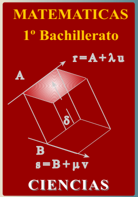


Tabla de Contenido

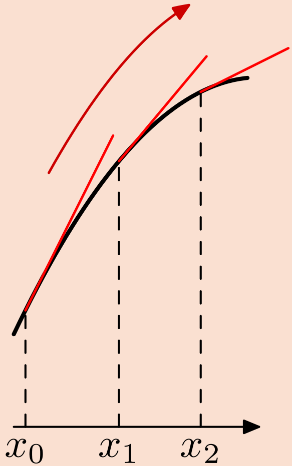
1. Función creciente

Definición 1.1 *Decimos que una función continua f es* ***estrictamente creciente*** *en un intervalo I si cumple*

$$x_0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$$

- Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- Si en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente positiva la función es creciente.
- Si $f(x)$ es derivable se tiene que

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x) \text{ Creciente}$$



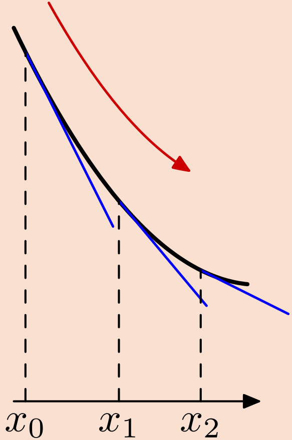
2. Función decreciente

Definición 2.1 *Decimos que una función continua f es* ***estrictamente decreciente*** *en un intervalo I si cumple*

$$x_0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$$

- Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- Si en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente negativa la función es decreciente, .
- Si $f(x)$ es derivable se tiene que

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x) \text{ Decreciente}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

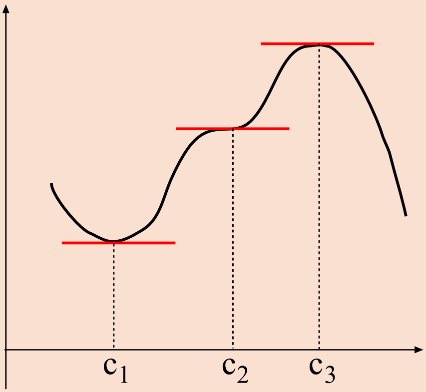
3. Puntos singulares

Definición 3.1 *Sea f una función definida en un intervalo I. Los puntos de la función que tienen tangente horizontal se llaman* ***puntos singulares****.*

Como la tangente es horizontal su pendiente vale 0. En los puntos singulares se tiene que la derivada vale 0, $f'(x) = 0$.

Hay tres casos:

- El punto c_1 se llama punto de mínimo relativo.
$$f'(c_1) = 0$$
- El punto c_2 se llama punto de inflexión.
$$f'(c_2) = 0$$
- El punto c_3 se llama punto de máximo relativo.
$$f'(c_3) = 0$$

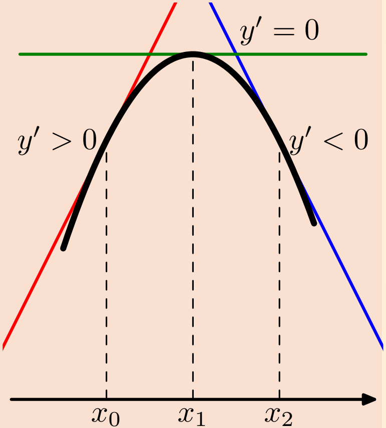


A continuación estudiamos en detalle cada uno de ellos.

- **Máximo**

  Observa el gráfico.

  - A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada
    $$y' > 0$$
  - A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada
    $$y' < 0$$
  - En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un máximo
    $$y'(x_1) = 0$$

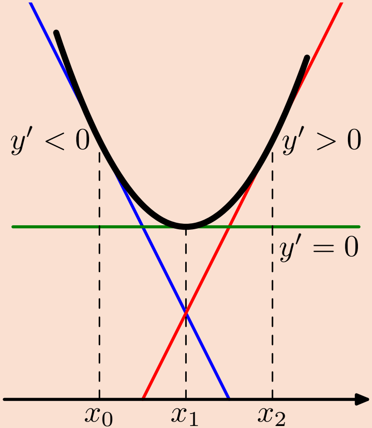


	Máximo relativo		
		x_1	
y'	$+$	0	$-$
$y = f(x)$	$\nearrow$ creciente	$f(x_1)$	$\searrow$ decreciente

- **Mínimo**

  Observa el gráfico.

  - A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada
  $$y' < 0$$
  - A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada
  $$y' > 0$$
  - En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un mínimo
  $$y'(x_1) = 0$$

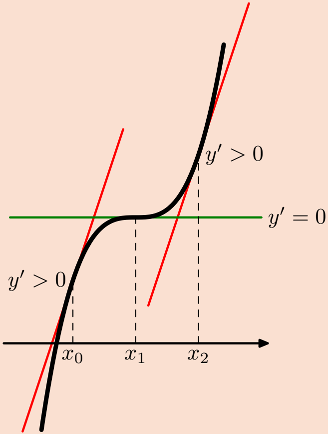


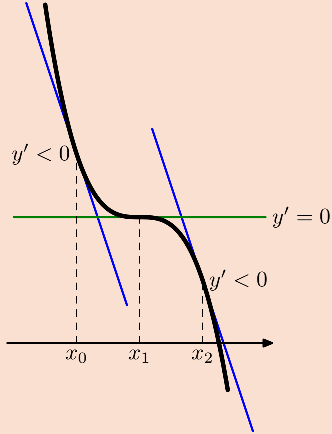
	Mínimo relativo		
		x_1	
y'	$-$	0	$+$
$y = f(x)$	$\searrow$ decreciente	$f(x_1)$	$\nearrow$ creciente

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- **Punto de inflexión**

Cuando la derivada es cero $y' = 0$, no siempre hay máximo o mínimo, pues depende como crezca o decrezca a la izquierda y derecha del punto.





		Punto inflexión	
		x_1	
y'	$+$	0	$+$
$y = f(x)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$

		Punto inflexión	
		x_1	
y'	$-$	0	$-$
$y = f(x)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\searrow$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Así pues para estudiar si una función tiene o no, máximos o mínimos calculamos los puntos que anulan la derivada y', estudiando a continuación el signo de la misma.

3.1. Clasificación Máximos y mínimos con f'

Teorema 3.1. (Test de Clasificación). Sea $f(x)$ una función continua en un punto c:

a) Test de Máximo Si f' es positiva a la izquierda de c y f' es negativa a la derecha de c, entonces c es un máximo local.

b) Test de Mínimo Si f' es negativa a la izquierda de c y f' es positiva a la derecha de c, entonces c es un mínimo local.

c) Test de Inflexión Si $f'(c) = 0$ y tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de c, entonces c es un punto de inflexión.

Ejemplo 3.1. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^2 - 1$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero. $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$
- Estudiamos el signo de la derivada dando valores a la izquierda y a la derecha de 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. En $x = 0$ hay un mínimo.

$\square$

Ejemplo 3.2. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3$.

Solución: Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

La función es siempre creciente El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.3. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \pm 1$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-2) = -24 < 0 \qquad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} < 0 \qquad f'(2) = 24 > 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

- La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$
- La función es creciente en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.
- Hay dos mínimos en $m(-1, -1)$ y $m(1, -1)$.
- Hay un máximo en $M(0, 0)$.

□

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 3.4. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$x(3\,x - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0,\; x = \frac{4}{3}$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-1) = 7 > 0 \qquad f'(1) = -1 < 0 \qquad f'(2) = 4 > 0$$

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(4/3)$	$\nearrow$	

- La función es decreciente en $(0, \dfrac{4}{3})$.
- La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(\dfrac{4}{3}, \infty)$.
- Hay un mínimo en $x = \dfrac{4}{3}$.
- Hay un máximo en $x = 0$.

$\square$

Ejercicio 1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *b*) $g(x) = 4x^3 - x^4$

Ejercicio 2. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^2 - \ln x^2$ *b*) $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$

Ejercicio 3. Sea la función $f(x) = a\,x + \dfrac{1}{x}$. Hallar valores de a para que $f(x)$ sea decreciente en $x = 2$

Ejercicio 4. La función $f(x) = 3\,x^2 + m\,x + 8$, tiene un mínimo en $x = 1$. Calcular m y el valor del mínimo.

Ejercicio 5. Hallar a y b para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b$, tenga un mínimo igual a 3 en $x = 2$.

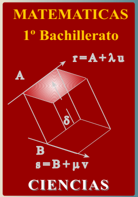
Ejercicio 6. En un día desapacible, la temperatura T en grados centígrados varió con el tiempo t en horas según la función

$$T(t) = t^2 - 9\,t + 8$$

para $0 \leq t \leq 12$.

a) La temperatura a las dos de la mañana

b) ¿Cuál fue la temperatura mínima? ¿A que hora?



c) ¿A que hora hubo 0 grados?

d) Halla $T'(2)$ y explica su significado

Ejercicio 7. El consumo de gasolina de cierto coche viene dado por la función

$$C(x) = \frac{x^2}{400} - \frac{9x}{20} + \frac{113}{4}$$

donde x es la velocidad en km/h y $C(x)$ es el consumo en litros cada 100 km.

a) Calcula cuál es el consumo mínimo y a qué velocidad se obtiene.

b) Estudia (representando la función) el consumo de gasolina en función de la velocidad.

Ejercicio 8. Clasifica los máximos y mínimos de las funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ *b*) $g(x) = (x-1)e^x$

Ejercicio 9. Clasifica los máximos y mínimos de las funciones:

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ *b*) $g(x) = x \ln x$

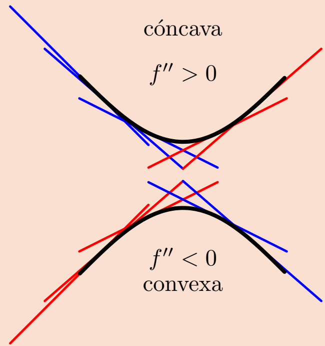
Ejercicio 10. Clasifica los máximos y mínimos de las funciones:

a) $f(x) = x\, e^{-x^2}$ *b*) $g(x) = e^x - 10x$

4. La derivada segunda. Concavidad y convexidad

Como hemos visto, la primera derivada f' nos da información de ciertas propiedades de la función f. Si derivamos f' obtenemos la derivada segunda que representamos por f''.

► ¿Qué nos dice la f''?. Así como $f' > 0$ nos informa de que f es creciente, de forma análoga $f'' > 0$ nos informa de que f' es creciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por encima de sus tangentes, y decimos que tiene concavidad hacia arriba o que es cóncava.



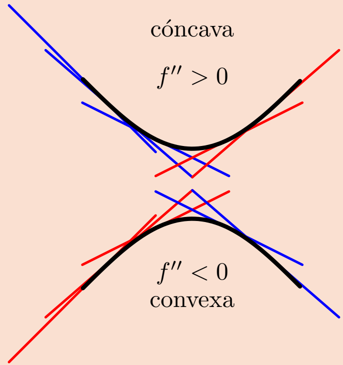
El caso de $f'' < 0$ nos informa de que f' es decreciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por debajo de sus tangentes, y decimos que tiene concavidad hacia abajo o que es convexa.

- Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava, $\cup$.
- Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f es convexa, $\cap$.

4.1. Clasificación Máximos y mínimos con f''

Sea $x = a$ un punto donde $f'(a) = 0$, es decir $x = a$ es un posible máximo o mínimo. Si la función admite derivada segunda, el signo de $f''(a)$, determina el tipo de extremo.

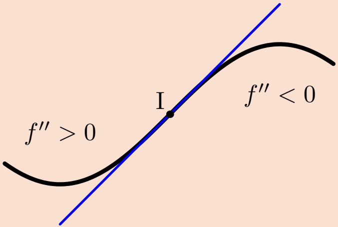
► Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un extremo con concavidad hacia arriba, luego es un mínimo relativo.
► Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un extremo con concavidad hacia abajo o convexa luego es un máximo relativo.
► En el caso $f''(a) = 0$, no podemos decir si $x = a$ es un máximo o mínimo relativo.

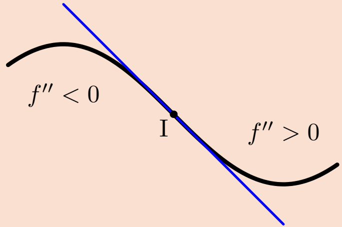


	Mínimo relativo			Máximo relativo		
		$x = a$			$x = a$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$
f''		$f'' > 0$ Cóncava			$f'' < 0$ Cóncexa	

4.2. Punto de Inflexión

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de concavidad se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.





	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$+$	$(\star)$	$-$
f	$\cup$	$\exists f(a)$	$\cap$

	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$-$	$(\star)$	$+$
f	$\cap$	$\exists f(a)$	$\cup$

► Atención Para que exista punto de inflexión es necesario que exista $f(a)$, y cambie de concavidad en a.
No es necesario que estén definidas $f'(a)$ ni $f''(a)$, pero si $f''(a)$ es continua en $x = a$ entonces debe ser $\star = 0$.

Ejemplo 4.1. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Solución: Hallamos f'' derivando dos veces,

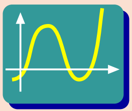
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$, $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(0)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(0,4)$

$\square$



◀ Pulsa y elige el botón Derivadas y realiza la siguiente práctica. Introduce en $f(x)$ la expresión `x^3-3*x+4`, y pulsa en *Nueva Función.*

Práctica 4.1.

Test. Responde a las siguientes cuestiones

1. Para valores de x negativos, la función es:

(a) convexa (b) cóncava

2. Para valores de x positivos, la función es:

(a) convexa (b) cóncava

◀

MaTEX

DERIVADAS. APLICACIONES

Ejemplo 4.2. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Solución: Hallamos f'' derivando dos veces,

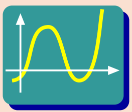
$$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0, f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(-1)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

Puntos de inflexión
$I_1(-1, 5)$
$I_2(1, 5)$

□



◀ Pulsa y elige el botón Derivadas y realiza la siguiente práctica. Introduce en $f(x)$ la expresión `x^4-6*x^2`, y pulsa en *Nueva Función*.

Práctica 4.2.

Test. Responde a las siguientes cuestiones

1. Para valores de $-1 < x < 1$, la función es:

(a) convexa (b) cóncava

2. Para valores de $x > 1$, la función es:

(a) convexa (b) cóncava

◀

Ejemplo 4.3. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución: Es importante determinar el dominio. $Dom(f) = R - \{0\}$.
Hallamos f'' derivando dos veces,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Resolvemos $f'' = 0, f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0 \quad \forall x$. No tiene puntos de inflexión.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

$\square$

Ejercicio 11. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = (x-2)^4$ *b*) $g(x) = xe^x$

Ejercicio 12. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \ln(x+1)$ *b*) $g(x = \dfrac{2-x}{x+1}$

5. Ejercicios

Ejercicio 13. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

(c) $f(x) = x^4 + 2x^2$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(e) $f(x) = e^x(x-1)$.

(f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$.

Ejercicio 14. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

b) Representar $f(x)$ cuando $a = 3$

c) Hallar la derivada de $f(x)$ en $x = -1$ y $x = 1$

Ejercicio 15. Sea la función $f(x) = x \ln \dfrac{x}{a}, a > 0$. Hallar el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$

Ejercicio 16. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17. La función $f(x) = 90\,x^2 - 0{,}2x^4$ es el beneficio en miles de euros que se obtiene por la fabricación de x unidades de cierto producto.

a) ¿Cuántas unidades de este producto se han de fabricar para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál es este beneficio máximo?

Ejercicio 18. En una empresa el coste $C(x)$ de un artículo se calcula a partir de la cantidad x de un producto que se pide cada vez que la empresa se queda sin él. Dicho coste viene expresado por la función

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$$

¿Cuál es la cantidad del producto x que minimiza el coste para la empresa?

Ejercicio 19. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c.

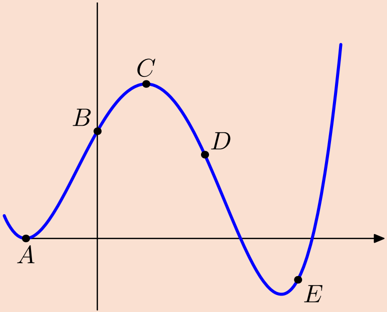
Ejercicio 20. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1, 0)$,la recta $y = -3x + 3$, y presenta un extremo en el punto de abcisa $x = 0$

Ejercicio 21. Hallar el valor de b y m para que la curva $y = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 1)$, y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

Ejercicio 22. En al figura se muestra el grafo de una función $f(x)$. Completar en al tabla el signo positivo, negativo o cero en los puntos del gráfico para f,

f' y f''.

Punto	f	f'	f''
A			
B			
C			
D			
E			



Ejercicio 23. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto $(1, 1)$,la recta $y = -x + 2$, y presenta un extremo en el punto $(0, 2)$.

Ejercicio 24. Determinar el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que tiene 1 y 2 como raíces, pasa por $(-1, 24)$ y tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Test. Si una función $f(x)$ tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ entonces existe $f'(a)$

(a) Verdadero (b) Falso

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Test. Si $f'(c)$ no existe entonces existe $x = c$ es un punto crítico.

(a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 25. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de

$$f(x) = x|x|$$

y comprueba que existe un punto de inflexión en $x = 0$ a pesar de que no existe $f''(0)$.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Con $Dom(f) = R - \{2\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \qquad \forall x \in R - \{2\}$$

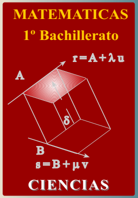
Luego f es estrictamente decreciente.

b) Sea $g(x) = 4x^3 - x^4$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Longrightarrow 4x^2(3-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 3$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	

Ejercicio 1



Ejercicio 2.

a) Sea $f(x) = x^2 - \ln x^2$. Con $Dom(f) = R - \{0\}$ Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) Sea $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$. Con $Dom(g) = R - \{-1, 4\}$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = -\frac{2x-3}{(x+1)^2(x-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3/2$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	$f(\frac{3}{2})$	$\nearrow$	

Ejercicio 2

Ejercicio 3. Siendo

$$f(x) = a\,x + \frac{1}{x}$$

para que $f(x)$ sea decreciente en $x = 2$, (siendo $f(x)$ derivable en) es necesario que $f'(2) \leq 0$

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2}$$

luego

$$f'(2) \leq 0 \Longrightarrow a - \frac{1}{4} \leq 0 \Longrightarrow \boxed{a \leq \frac{1}{4}}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4. Como $f(x) = 3\,x^2 + m\,x + 8$,

$$f'(x) = 6\,x + m$$

- tiene un mínimo en $x = 1$, luego

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow f'(1) = 6\,(1) + m = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{m=-6}}$$

- el valor del mínimo es

$$f(1) = 3\,(1)^2 + 6\,(1) + 8 = 17$$

Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5. Como $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b$,

$$f'(x) = 3\,x^2 + 2\,a\,x$$

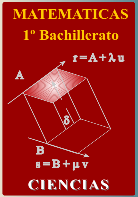
- tiene un mínimo en $x = 2$, luego

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow f'(2) = 3\,(2)^2 + 2\,a\,(2) = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -3}$$

- el valor del mínimo es 3, luego

$$f(2) = 3 \Longrightarrow (2)^3 - 3\,(2)^2 + b = 3 \Longrightarrow \boxed{b = 7}$$

Ejercicio 5



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Como

$$T(t) = t^2 - 9\,t + 8 \qquad 0 \leq t \leq 12$$

a) La temperatura a las dos de la mañana será

$$T(2) = (2)^2 - 9\,(2) + 8 = -6$$

b) Hallamos $T'(t)$

$$T'(t) = 2\,t - 9 = 0 \Longrightarrow \boxed{t = 4{,}5}$$

a las 4,5 horas se alcanzó la temperatura mínima de $T(4{,}5) = -12{,}25$

c) ¿A que hora hubo 0 grados? resolvemos $T(t) = 0$

$$T(t) = t^2 - 9\,t + 8 = 0 \Longrightarrow \boxed{t = 1} \quad \boxed{t = 8}$$

d) Halla $T'(2)$ y explica su significado

$$T'(2) = 2\,(2) - 9 = -5$$

significa que a esa hora la temperatura está bajando a razón de 5 grados centígrados por hora.

Ejercicio 6

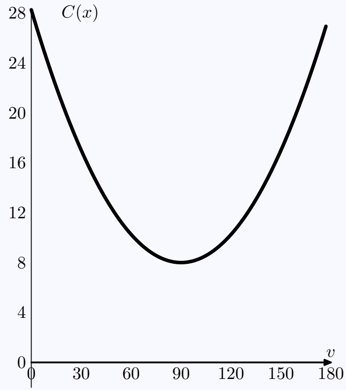
Ejercicio 7. Siendo el consumo $C(x) = \dfrac{x^2}{400} - \dfrac{9x}{20} + \dfrac{113}{4}$

a) $C'(x) = \dfrac{x}{200} - \dfrac{9}{20}$

$$C'(x) = \frac{x}{200} - \frac{9}{20} = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 90}$$

a 90 km/h se alcanza el consumo mínimo que vale $C(90) = 8$ litros.

b) La gráfica de $C(x)$ es una parábola de mínimo $(90; 8)$.



Ejercicio 7

Ejercicio 8.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3.$

Sea $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/4$$

x	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(1/4)$	$\nearrow$

$$\text{Mínimo } m\left(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})\right)$$

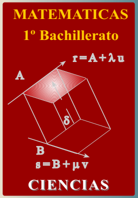
b) Sea $g(x) = (x-1)e^x$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = x\,e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$f(0) = -1$	$\nearrow$

$$\text{Mínimo } m\,(0, -1)$$

Ejercicio 8



Ejercicio 9.

a) Sea $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$. $Dom(f) = R - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^3 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Punto crítico $x = \sqrt[3]{2}$, pues $x = 0 \notin Dom(f)$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
f'		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(\sqrt[3]{2})$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\left(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2})\right)$$

b) Sea $g(x) = x \ln x$.

$$Dom(g) = (0, \infty)$$

Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m(e^{-1}, -e^{-1})$$

Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10.

a) Siendo $f(x)=x\,e^{-x^2}$, el $Dom(f)=R$. Resolvemos $f'=0$

$$f'(x)=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx \pm 0,707$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{0{,}5}$		$\sqrt{0{,}5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$-0{,}4289$	$\nearrow$	$0{,}4289$	$\searrow$	

Máximo $M(\sqrt{0{,}5};0{,}4289)$ Mínimo $m(-\sqrt{0{,}5};-0{,}4289)$

b) Siendo $g(x)=e^x-10x$, el $Dom(g)=R$. Resolvemos $g'=0$

$$g'(x)=e^x-10=0 \Longrightarrow x=\ln 10$$

x	0		$\ln 10$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(\ln 10)$	$\nearrow$	

como $g(\ln 10)=e^{\ln 10}-10\ln 10\approx -13{,}0259$

Mínimo $m(\ln 10,-13{,}0259)$

Ejercicio 10

Ejercicio 11.

a) Sea $f(x) = (x-2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x-2)^3 \qquad f''(x) = 12(x-2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(2)$	$\cup$	

No tiene puntos de Inflexión.

b) Sea $g(x) = xe^x$. Hallamos g''

$$g'(x) = (x+1)e^x \qquad g''(x) = (x+2)e^x$$

Resolvemos $g'' = 0$

$$g''(x) = (x+2)e^x = 0 \Longrightarrow (x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
g''		$-$	0	$+$	
g		$\cap$	$f(-2)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.

a) Sea $f(x) = \ln(x+1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \quad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

b) Sea $g(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$. $Dom(g) = R - \{-1\}$. Hallamos g''

$$g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \qquad g''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $g'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g''		$-$	$\nexists$	$+$	
g		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

Ejercicio 12

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS.
APLICACIONES
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 13(a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- Máximos y mínimos. Resolvemos $f' = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longrightarrow x = 1, 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Máximo $M(1,4)$ Mínimo $m(3,0)$

- Puntos de inflexión. Resolvemos $f'' = 0$.

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow 6(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(2) = 2$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(2,2)$

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 13(b) Sea $f(x) = x^4 - 2x^3$.

- Máximos y mínimos. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Longrightarrow x = 0, 3/2$$

x	$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3/2)$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\left(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$$

- Puntos de inflexión. Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \Longrightarrow 12x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, 1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(0)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

$$\text{Puntos de inflexión } I_1(0,0) \quad I_2(1,-1)$$

$\square$

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS. APLICACIONES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 13(c) Sea $f(x) = x^4 + 2x^2$.

- Máximos y mínimos. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Mínimo $m(0,0)$

- Puntos de inflexión. Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \Longrightarrow \text{ no se anula}$$

no tiene puntos de inflexión. Como

$$f''(x) > 0 \qquad \forall x$$

la función es cóncava $\cup$.

$\square$

Ejercicio 13(d) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

- Máximos y mínimos. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	

Máximo $M(0,1)$

- Puntos de inflexión. Resolvemos $f'' = 0$

$$f'' = 0 \Longrightarrow f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cap$	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cup$	

Puntos de inflexión $I_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ $\quad I_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$

$\square$

Ejercicio 13(e) Sea $f(x) = e^x(x-1)$.

- Máximos y mínimos. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Mínimo $m(0,-1)$

- Puntos de inflexión. Resolvemos $f'' = 0$

$$f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Longrightarrow x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(-1)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-1,-2e^{-1})$

Ejercicio 13(f) Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. Con $Dom(f) = R - \{0\}$.

- Máximos y mínimos. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$$

Como $f'(x) > 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ es siempre creciente.

- Puntos de inflexión. Resolvemos $f'' = 0$.

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$$

Como $f'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ no tiene puntos de inflexión.

$\square$

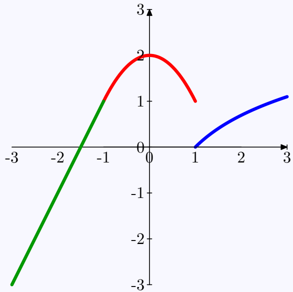
Ejercicio 14. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

$$f(-1^-) = -2 + a = f(-1^+) = 1 \Longrightarrow a = 3$$

b) Representar cuando $a = 3$



c) Es derivable en $x = -1$, pues:

$$f'(-1^-) = 2 \qquad f'(-1^+) = (-2x) = 2$$

y no es derivable en $x = 1$, ya que no es continua.

Ejercicio 14

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15. Siendo

$$f(x) = x \ln \frac{x}{a}, a > 0$$

para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$, (siendo $f(x)$ derivable en) es necesario que $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \ln \frac{x}{a} + x \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{a} = \ln \frac{x}{a} + 1$$

luego

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow \ln \frac{1}{a} + 1 = 0 \Longrightarrow \ln a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = e}$$

Para comprobar que es mínimo se calcula

$$f''(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(1) = 1 > 0 \Longrightarrow \text{ es un mínimo}$$

Ejercicio 15

Ejercicio 16. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{1{+}a{+}b{+}c{=}1}$
- Derivada nula en $(1,1)$ luego $\Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{3{+}2a{+}b{=}0}$
- $(1,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{6{+}2a{=}0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Ejercicio 16

Ejercicio 17. Sea $f(x) = 90\,x^2 - 0{,}2x^4$ da el beneficio en miles de euros que se obtiene por la fabricación de x unidades

a) Buscamos el máximo

$$f'(x) = 180\,x - 0{,}8\,x^3 = 0 \Longrightarrow = x(180 - 0{,}8\,x^2) = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0 \quad x = \pm 15$$

Usando el criterio de la segunda derivada con

$$f''(x) = 180 - 2{,}4\,x^2$$

obtenemos que:

$$f''(0) = 180 > 0 \qquad f''(15) = -360 < 0$$

luego el máximo está en $x = 15$.

b) El beneficio máximo es $f(15) = 90\,(15)^2 - 0{,}2\,(15)^4 = 10125$

Ejercicio 17

Ejercicio 18. Siendo

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$$

buscamos el mínimo con la condición $C'(x) = 0$

$$C'(x) = -\frac{200}{x^2} + \frac{1}{2}$$

luego

$$C'(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{200}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 20$$

Para comprobar si $x = 20$ es máximo, hallamos $C''(29)$

$$C''(x) = +\frac{400}{x^3} \qquad C''(20) > 0 \Longrightarrow \text{ es un mínimo}$$

Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1,1)$ luego $\Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Ejercicio 19

Ejercicio 20. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

- $(1,0)$ es punto de inflexión $\Longrightarrow f''(1) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{6a+2b=0}}$
- $y = -3x + 3$ es tangente en $(1,0)$, luego $f'(1) = -3$

$$\boxed{\text{3a+2b+c=-3}}$$

- f pasa por $(1,0)$, luego $f(1) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{a+b+c+d=0}}$
- En $x = 0$, hay un extremo, luego $f'(0) = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ Ejercicio 20

Ejercicio 21. Como $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + m \qquad f''(x) = 6x + 2b$$

- $(0,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{2b=0}$
- Derivada en $x = 0$ vale 1, luego $\Longrightarrow f'(0) = 1 \Longrightarrow \boxed{m=1}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$b = 0 \quad m = 1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 + x + 1$ Ejercicio 21

Ejercicio 22.

Punto	f	f'	f''
A	0	0	$+$
B	$+$	$+$	$-$
C	$+$	0	$-$
D	$+$	$-$	$-$
E	$-$	$+$	$+$

Ejercicio 22

Ejercicio 23. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=1}}$
- f pasa por $(0, 2)$, luego $f(0) = 2 \Longrightarrow \boxed{\text{d=2}}$
- La pendiente en $x = 1$ es $-1 \Longrightarrow f'(1) = -1 \Longrightarrow \boxed{\text{3a+2b+c=-1}}$
- Un extremo en $x = 0$, luego $\Longrightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Ejercicio 23

Ejercicio 24. Como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

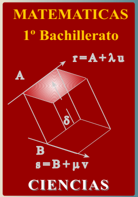
$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad p''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(-1, 24)$, luego $p(-1) = 24 \Longrightarrow \boxed{\text{-a+b-c+d=24}}$
- $x = 1$ es una raíz , luego $p(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=0}}$
- $x = 2$ es una raíz , luego $p(2) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{8a+4b+2c+d=0}}$
- Un mínimo en $x = 1$, luego $\Longrightarrow p'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{3a+2b+c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = -10 \quad d = 4$$

y el polinomio pedido es $p(x) = -2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$ Ejercicio 24



Ejercicio 25. Siendo

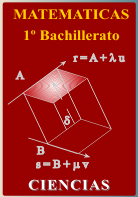
$$f(x) = x|x| \Longrightarrow \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 < x \end{cases}$$

Como

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	$\nexists$	$+$	
f		$\cap$	0	$\cup$	

El punto $x = 0$ es un punto de Inflexión y $f''(0)$ no existe. Ejercicio 25



Soluciones a los Tests

Solución al Test: Puede existir la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ sin que exista la derivada en dicho punto. Por ejemplo la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

tiene en el origen $x = 0$ como tangente vertical el eje OY y sin embargo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

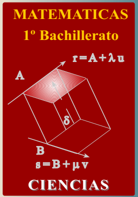
no existe $f'(0)$. Final del Test

Solución al Test: Es falso. Para que $x = c$ sea un punto crítico no basta que no exista $f'(c)$, además c tiene que estar en el dominio de f.

Final del Test

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Índice alfabético



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar