

4 Aplicaciones lineales

4.1 Aplicación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo \mathbb{K} (en general, \mathbb{R} o \mathbb{C}). Una aplicación $f : V \rightarrow W$ se llama **aplicación lineal** u **homomorfismo** si

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$
- $f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Estas dos condiciones son equivalentes a la única condición:

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

4.2 Ejemplos

1. Las siguientes aplicaciones, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, son aplicaciones lineales:

- (a) Homotecia: $f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) Proyección: $f(x, y) = (x, 0)$.
- (c) Simetría: $f(x, y) = (x, -y)$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ es una aplicación lineal (asociada a la matriz A). Obviamente, para que tenga sentido el producto $A\mathbf{u}$, se entiende que el vector \mathbf{u} se escribe en columna, como se hará siempre que esté implicado en operaciones matriciales.

3. La aplicación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ -x + 2y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x \\ z' = -x + 2y \end{cases}$$

4.3 Propiedades

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal, se cumple:

- 1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

y **núcleo** al subespacio vectorial $\text{Ker } f = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$.



4.5 Definiciones

Una aplicación lineal (homomorfismo) se llama **monomorfismo** si es inyectiva, **epimorfismo** si es sobreyectiva, e **isomorfismo** si es biyectiva. Cuando los espacios inicial y final coinciden, la aplicación lineal y el isomorfismo se suelen llamar **endomorfismo** y **automorfismo**, respectivamente.

4.6 Condición necesaria y suficiente de monomorfismo

Sea $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal. Entonces

$$f \text{ es monomorfismo} \iff \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$$

Demostración:

(\Rightarrow) Si f es inyectiva, entonces:

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{0}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

luego $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$.

(\Leftarrow) Inversamente, si $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$, entonces

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \implies f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

luego f es inyectiva.

4.7 Dimensión del subespacio imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal. Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V , entonces

$$\text{Im } f = L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}) \text{ y, en consecuencia } \dim \text{Im } f \leq \dim V$$

Demostración: Si $\mathbf{w} \in \text{Im } f$, existe $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \in V$ tal que

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{v}_i)$$

luego $\mathbf{w} \in L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\})$. Inversamente, si $\mathbf{w} \in L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\})$, entonces

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \text{ y } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in V$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración: Para cada $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \in V$ se define

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i$$

Es fácil ver que f es aplicación lineal y que $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, para $1 \leq i \leq n$. Además es única, pues si $g : V \rightarrow W$ verifica la misma condición, entonces

$$g(\mathbf{v}) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i = f(\mathbf{v})$$

4.9 Observaciones

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ viene definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces

- Ker f son las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Si $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n , entonces

$$\text{Im } f = L(\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}) = L(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\})$$

donde \mathbf{c}_i es la columna i -ésima de la matriz A .

4.10 Ejemplo

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}) = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) \\ \text{Ker } f &= \{\mathbf{u} : A\mathbf{u} = \mathbf{0}\} = L(\{(1, 0, -1)\}) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

4.11 Matriz de una aplicación lineal

Como se ha visto, una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ queda unívocamente determinada por las

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

entonces la imagen de cualquier $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{B_V} \in V$, expresada en la base B_W de W , es

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) \mathbf{w}_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{u} \end{aligned}$$

donde las columnas de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, llamada **matriz de la aplicación** respecto de las bases B_V y B_W , son las coordenadas en la base B_W de las imágenes de los vectores de la base B_V . Se suele indicar $A = M(f, B_V, B_W)$.

Fijadas las bases B_V y B_W , a cada aplicación lineal le corresponde una matriz y viceversa.

En el caso particular de que $V = W$ y que la base B en ambos es la misma, se indica simplemente $A = M(f, B)$.

4.12 Ejemplo

La expresión matricial de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida, respecto de las bases canónicas, por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para hallar el núcleo, se resuelve el sistema:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de donde $\text{Ker } f = \{(1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 0)\}$. La imagen es

$$\text{Im } f = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

4.13 Dimensiones de la imagen y el núcleo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Entonces $B_2 = \{f(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $\text{Im } f$, ya que



- B_2 es un sistema de generadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \text{Im } f &\implies \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \in V \\ &\implies \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=r+1}^n x_i f(\mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

- B_2 es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=r+1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0} &\implies \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in \text{Ker } f \implies \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r (-\alpha_i) \mathbf{v}_i \\ &\implies \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies \alpha_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n \implies \alpha_i = 0, \quad r+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$.

4.14 Rango de una aplicación lineal

Si A es la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$, respecto de las bases B_V y B_W , entonces, puesto que el núcleo es el espacio de soluciones del sistema $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, se ha de cumplir que

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim V - \text{rg } A \implies \dim(\text{Im } f) = \text{rg } A$$

Luego el rango de cualquier matriz asociada a f (respecto de bases cualesquiera), que se llama **rango de la aplicación lineal**, ha de ser constante e igual a la dimensión de la imagen.

4.15 Proposición

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal con $\dim V = \dim W = n < \infty$, entonces

$$f \text{ es isomorfismo} \iff f \text{ es monomorfismo} \iff f \text{ es epimorfismo}$$

Demostración:

$$f \text{ es epimorfismo} \iff \dim(\text{Im } f) = \dim W = n \iff \dim(\text{Ker } f) = 0 \iff f \text{ es monomorfismo}$$

4.16 Composición de aplicaciones lineales

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

4.17 Ejemplo

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vienen definidas por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas, entonces $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vienen definidas por

$$g \circ f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}$$

$$f \circ g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -y \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas.

4.18 Matriz de un cambio de base

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$$

dos bases de V . La aplicación que hace corresponder a cada vector $\mathbf{u} \in V$ en la base B el mismo vector expresado en la base B' es la aplicación identidad:

$$Id : V^B \rightarrow V^{B'}$$

$$\mathbf{u}_B \rightarrow \mathbf{u}_{B'} = A\mathbf{u}_B$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es la matriz cuya columna i -ésima es la imagen de \mathbf{v}_i , es decir las coordenadas de \mathbf{v}_i en la base B' .

Puesto que esta aplicación es un isomorfismo, $\text{rg } A = n$ y la matriz A es regular. Su inversa A^{-1} es la que pasa de las coordenadas respecto de B' a las coordenadas respecto de B . Resumiendo:

$$A = M(Id, B, B') = ((\mathbf{v}_1)_{B'}, \dots, (\mathbf{v}_n)_{B'}) \quad \text{y} \quad A\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_{B'}$$

$$A^{-1} = M(Id, B', B) = ((\mathbf{v}'_1)_B, \dots, (\mathbf{v}'_n)_B) \quad \text{y} \quad A^{-1}\mathbf{u}_{B'} = \mathbf{u}_B$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



De esta manera, si $\mathbf{u} = (3, 2, -1)_B$, entonces

$$\mathbf{u}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir $\mathbf{u} = (2, 1, 1)_{B_c} = (2, 1, 1)$. Además:

$$A^{-1} = M(\text{Id}, B_c, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_B = A^{-1}\mathbf{u}_{B_c}$$

de donde $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)_B$, $\mathbf{e}_2 = (1, -1, 1)_B$ y $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, -1)_B$.

4.20 Cambios de base en una aplicación lineal

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal cuya matriz, respecto de las bases B_V en V y B_W en W , es A . ¿Cuál es la matriz de f respecto de nuevas bases B'_V en V y B'_W en W ?

Sean $P = M(\text{Id}_V, B'_V, B_V)$ y $Q = M(\text{Id}_W, B'_W, B_W)$ las matrices del cambio de base en V y W , respectivamente. Observando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V^{B_V} & \xrightarrow{A} & W^{B_W} \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1} \\ V^{B'_V} & \xrightarrow{C} & W^{B'_W} \end{array}$$

se deduce que

$$C = M(f, B'_V, B'_W) = Q^{-1}AP$$

4.21 Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de la base canónica B_c tiene asociada la matriz

$$A = M(f, B_c, B_c) = M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir} \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es la matriz de f respecto de la base

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)\} ?$$

Se construye el diagrama

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$



es decir, que si $\mathbf{u} = (x, y, z)_B$ entonces su imagen, también expresada en la base B , es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuál es la matriz de f respecto de la base B en el espacio inicial y la base canónica en el espacio final? Siendo I la matriz identidad, el nuevo diagrama, y la matriz buscada, son

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow I \\ (\mathbb{R}^3)^B & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \end{array} \quad \text{de donde} \quad D = M(f, B, B_c) = IAP = AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70