

# Parte1. Introducción a las Mecánica Newtoniana y Analítica (Lagrangiana y Hamiltoniana)

## Mecánica Newtoniana

### 1 1.A.1. Introducción. Leyes de Newton.

El establecimiento de la primera axiomática de la Mecánica se debe a Isaac Newton (1643-1727) quien la redujo a tres principios que aparecieron en el año 1687 en su obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

El enunciado literal de sus tres famosas *Leyes* fue el siguiente:

*Primera ley. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado por fuerzas aplicadas que cambien su estado.*

*Segunda ley. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.*

*Tercera ley. Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: es decir, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.*

Los enunciados anteriores involucran una serie de conceptos (cuerpo, reposo, fuerzas aplicadas, acción, reacción,...) que requirieron paulativas precisiones en las que intervinieron, además del propio Newton, numerosos autores y principalmente Leonhardt Euler (1707-1783).

Las críticas posteriores que tales principios han suscitado son muy numerosas, ya sea por los mismos principios o como consecuencia de nuevas directrices (mecánica relativista, cuántica, etc.)

Nuestras limitaciones de espacio y el propósito de este curso nos obliga, a prescindir de exponer pormenorizadamente esas críticas, dando nuevos enunciados que permitan un desarrollo coherente y sintético de la Mecánica. Seguiremos la aproximación de Ludwig Lange (1863-1936) en 1885.

#### **Comentarios a la primera ley: noción de sistema inercial o de Galileo.**

El contenido de la primera ley es a veces conocido como *Principio de inercia* y fue ya establecido por Galileo Galilei (1564-1642) en 1632 bajo condiciones particulares y por R. Descartes (1596-1650) en forma más general. Sin embargo, la inclusión en la misma del concepto de fuerza, no definido aun, obliga a su modificación.

### 2 1.A.2. Cinemática del punto material

A lo largo de estas notas entenderemos por *punto material* (o *partícula*) a todo cuerpo cuyas dimensiones son despreciables en la escala en que la se realiza la observación, por lo que, a esos efectos, puede ser considerado, en cuanto a su posición en el espacio como un punto geométrico.

Mas adelante veremos que la anterior hipótesis de reducción tiene sentido, a veces, aun cuando se estudie el movimiento de cuerpos de tamaño no despreciable. La ley del movimiento del centro de masa, por ejemplo, hace que los planetas puedan ser estudiados en su movimiento como puntos en el espacio, reduciendo cada uno de ellos a un punto situado en su centro de masa. Así por ejemplo, en lo que respecta al movimiento de la Tierra alrededor del Sol, podemos identificar nuestro planeta a un punto material pues el radio de la Tierra es  $R = 6.368 \text{ Km}$  y la *distancia media* al Sol es  $a = 149,5 \times 10^6 \text{ Km}$  con lo que la longitud recorrida es, aproximadamente,  $2\pi a = 920,02 \times 10^6 \text{ Km}$ : es decir, la longitud de recorrido es aproximadamente 5.858.560 veces el radio de la Tierra.

## 2.1 i) Sistemas inerciales. Teorema de Coriolis-Poisson, Teorema de Galileo.

### 2.1.1 Velocidad y aceleración: Sistemas de referencia.

Supondremos que  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  es un sistema de referencia ortonormal y orientado. Esto significa que  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  con  $\delta_{ij}$  la delta de Kröncker  $\delta_{ij}$  ( $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ). Aquí (y en todo lo que sigue se hará análogamente), se ha denotado al *producto escalar euclídeo* entre dos vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$  mediante el símbolo  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Así, decir de dos vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$  que son ortogonales entre sí equivale a saber que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . El hecho de que la base está formada por vectores *ortonormales* significa que

$$\|\mathbf{e}_i\| = 1,$$

donde se ha utilizado (y en todo lo que sigue se hará análogamente) la norma euclídea de un vector  $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3$  mediante  $\|\mathbf{r}\|$ , es decir

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}.$$

Es importante resaltar que con gran frecuencia utilizaremos el convenio de denotar a la norma euclídea (o módulo) de un vector  $\mathbf{r}$  mediante su misma letra pero sin escribirla en negrita (y sin flecha alguna si se hace a mano), e.d.

$$r := \|\mathbf{r}\|$$

con lo que evitaremos utilizar nuevos símbolos (especialmente ventajoso en expresiones con varios vectores). Finalmente, lo de *orientado* hace alusión a que

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,$$

donde se ha utilizado (y en todo lo que sigue se hará análogamente) la notación  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  para el *producto vectorial* de dos vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$ .

Se define el *vector de posición*, el *vector velocidad* y el *vector aceleración* por

$$\mathbf{r}(t) := \overrightarrow{OP(t)} := \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i = P(t) - O, \text{ es decir, } P(t) = O + \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \mathbf{e}_i.$$

#### Expresión en coordenadas cilíndricas

Se introduce el cambio de variables

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \theta \\ x_2 = \rho \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

con  $\rho \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $z \in (-\infty, \infty)$  (nótese que no adoptamos el convenio de identificar ángulos con su homólogo en un intervalo de amplitud  $2\pi$ , como por ejemplo  $[0, 2\pi]$  o  $[-\pi, \pi]$ ). Recíprocamente

$$\begin{cases} \rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ z = x_3. \end{cases}$$

Se define la base móvil  $\mathcal{B}_c(\theta) = \{\mathbf{e}_\rho(\theta), \mathbf{e}_\theta(\theta), \mathbf{e}_3\}$  siendo

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho(\theta) = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \end{cases}$$

vectores denominados como *vector (unitario) radial-plano* y *vector (unitario) ortorradial-plano* respectivamente. Se comprueba que  $\mathcal{B}_c(\theta) = \{\mathbf{e}_\rho(\theta), \mathbf{e}_\theta(\theta), \mathbf{e}_3\}$  es una base ortonormal y orientada. Con el fin de expresar los vectores velocidad y aceleración en ese sistema es útil observar que

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}_\rho(\theta)}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta(\theta)}{d\theta} = -\cos\theta\mathbf{e}_1 - \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_\rho. \end{cases}$$

Escribiendo ahora el vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  como

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_3,$$

respecto de  $\mathcal{R}(t) = \{O; \mathbf{e}_\rho(\theta(t)), \mathbf{e}_\theta(\theta(t)), \mathbf{e}_3\}$ , aplicando la regla de la cadena resulta que

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + \rho(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t)) + \dot{z}(t)\mathbf{e}_3$$

y análogamente

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_3$$

(nótese que, si una curva es recorrida en sentido creciente de los ángulos,  $\dot{\theta}(t) > 0$ , el convenio de identificar ángulos con su homólogo en  $[0, 2\pi]$  haría técnicamente complicado expresar que  $\dot{\theta}(t_*) > 0$  si  $\theta(t_*) = 2\pi$ ).

**Ejemplo 1.** Consideremos el caso de un punto material en movimiento sobre la circunferencia del plano  $x_3 = 0$  de radio  $R$  (ya estudiado por Christian Huygens (1629-1695)). Entonces

$$\rho(t) \equiv R \text{ y } z(t) \equiv 0,$$

con lo que

$$\mathbf{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t)), \text{ y } \mathbf{a} = -R\left(\dot{\theta}\right)^2\mathbf{e}_\rho + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta.$$

Definiendo el vector unitarios *tangente* por

$$\mathbf{t}(\theta) = \mathbf{e}_\theta(\theta)$$

y si definimos el vector unitario *normal*  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\theta)$  a través de la operación derivada del vector tangente

$$\frac{d\mathbf{t}(\theta)}{d\theta} = -\mathbf{e}_\rho(\theta) = \mathbf{n}(\theta),$$

se llega a la descomposición

$$\mathbf{a} = R\left(\dot{\theta}\right)^2\mathbf{n} + R\ddot{\theta}\mathbf{t} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

con  $\mathbf{a}_n = a_n\mathbf{n}$ , la componente normal y  $\mathbf{a}_t = a_t\mathbf{t}$ , la componente tangencial. Nótese que en este caso  $\mathbf{a}_n$  tiene carácter centrípeto (por apuntar hacia el origen). Se tiene la relación escalar

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

(siendo  $v$  el módulo del vector  $\mathbf{v}$ ). Veremos en el Apéndice 1 que es posible mostrar que la anterior relación (1) se tiene siempre cuando una partícula se mueve sobre una curva plana regular arbitraria.

### Coordenadas esféricas

Se introduce el cambio de variables

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \cos \Phi \\ x_2 = r \operatorname{sen} \theta \cos \Phi \\ x_3 = r \operatorname{sen} \Phi, \end{cases}$$

con  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $\Phi \in \mathbb{R}$ . A los ángulos  $\theta$  y  $\Phi$  se les denomina *longitud* y *latitud* respectivamente. Recíprocamente

$$\begin{cases} r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ \Phi = \operatorname{arcsen} \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}. \end{cases}$$

Se define la base móvil  $\mathcal{B}(\theta, \Phi) = \{\mathbf{e}_r(\theta, \Phi), \mathbf{e}_\theta(\theta), \mathbf{e}_\Phi(\theta, \Phi)\}$  siendo

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r(\theta, \Phi) = \cos \theta \cos \Phi \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} \theta \cos \Phi \mathbf{e}_2 + \operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\operatorname{sen} \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\Phi(\theta, \Phi) = -\cos \theta \operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_1 - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_2 + \cos \Phi \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\mathcal{B}_e$  es una base ortogonal orientada (de hecho para los puntos del plano  $x_3 = 0$  se tiene que  $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_c$ ). Los vectores  $\mathbf{e}_r(\theta, \Phi)$ ,  $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ ,  $\mathbf{e}_\Phi(\theta, \Phi)$  son tangentes a las *líneas de coordenadas* originadas cuando sólo varía una de las coordenadas esféricas.

El vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  se puede escribir ahora como

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\theta(t), \Phi(t)).$$

Para el calculo de los vectores velocidad y aceleración seguiremos una línea similar a la del caso de coordenadas cilíndricas. Para ello es conveniente utilizar el siguiente

**Lemma 1** *Se tiene que*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \cos \Phi \mathbf{e}_\theta, & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \Phi} = \mathbf{e}_\Phi \\ \frac{d \mathbf{e}_\theta}{d \theta} = -\cos \Phi \mathbf{e}_r + \operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_\Phi, & \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\Phi}{\partial \theta} = -\operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_\theta, & \frac{\partial \mathbf{e}_\Phi}{\partial \Phi} = -\mathbf{e}_r. \end{cases}$$

**Demostración.** Basta derivar y aplicar la definición analítica de los vectores. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen} \theta \cos \Phi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \cos \Phi \mathbf{e}_2 = \cos \Phi \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \Phi} &= -\cos \theta \operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_1 - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \Phi \mathbf{e}_2 + \cos \Phi \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\Phi. \end{aligned}$$

El resto de las identidades se obtienen de forma similar. ■

Aplicando el anterior resultado se obtiene

**Lemma 2**

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \cos \Phi \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\Phi} \mathbf{e}_\Phi$$

y análogamente

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \cos^2 \Phi - r \dot{\Phi}^2) \mathbf{e}_r \\ &+ (2\dot{r} \dot{\theta} \cos \Phi - 2r \dot{\theta} \ddot{\Phi} \operatorname{sen} \Phi + r \ddot{\theta} \cos \Phi) \mathbf{e}_\theta \\ &(2\dot{r} \dot{\Phi} + r \ddot{\Phi} + r \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi) \mathbf{e}_\Phi. \end{aligned}$$

■

Nótese que todos los términos son homogéneos de dimensión  $LT^{-2}$ .

Como aplicación se puede considerar un movimiento sobre la superficie esférica, e.d.  $r(t) \equiv R$ . En el caso de un movimiento sobre un meridiano se tiene además que  $\theta(t) \equiv \theta_0$  con lo que

$$\mathbf{v} = R\dot{\Phi}\mathbf{e}_\Phi \text{ y } \mathbf{a} = -R\dot{\Phi}^2\mathbf{e}_r + R\ddot{\Phi}\mathbf{e}_\Phi.$$

Si el movimiento es sobre un paralelo,  $\Phi(t) = \Phi_0$  y resulta

$$\mathbf{v} = R\cos\Phi_0\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

y

$$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\cos^2\Phi_0\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\cos\Phi_0\mathbf{e}_\theta + R\dot{\theta}^2\sin\Phi_0\cos\Phi_0\mathbf{e}_\Phi.$$

## Apéndice 1. Movimiento sobre una curva dada. Sistema de referencia intrínseco a una curva

Supondremos fijado un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ortonormal y orientado. La escritura de vectores en términos de elementos de  $\mathbb{R}^3$  se referirán a sus coordenadas respecto de esa base.

La representación mas frecuente de una curva  $\Gamma$  es la llamada *representación paramétrica*, que viene dada a través de una función  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$  con  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  función de clase  $C^1$ ,  $\mathbf{x}(\lambda) = (\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\lambda), \tilde{x}_3(\lambda))$ , siendo  $I = (\lambda_0, \lambda_1)$ . Bajo hipótesis de no singularidad, es bien conocido que en un entorno de tales puntos las tres expresiones de una curva  $\Gamma$  antes mencionadas son equivalentes entre si. Nótese que la noción de punto *no singular* viene ahora dada por

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\lambda^*) \neq \mathbf{0}, \text{ supuesto que } \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\lambda^*).$$

**Definition 3** Dada una curva  $\Gamma$  en forma paramétrica  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ , se define la longitud de arco de la curva entre los puntos  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\lambda^*)$  y  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$  mediante

$$s = s(\lambda : \lambda^*) := \int_{\lambda^*}^{\lambda} \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\sigma) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\sigma)} d\sigma \quad (2)$$

Si no hay confusión posible se simplificara la anterior notación mediante  $s = s(\lambda)$ . A la longitud de arco entre los puntos  $\mathbf{x}(a)$  y  $\mathbf{x}(b)$  se le denomina *longitud de la curva* y se denota por  $l$

$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\sigma) \right\|^2} d\sigma = s(b : \lambda_0) - s(a : \lambda_0)$$

EJEMPLOS:

1. En el caso de una circunferencia

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}(\lambda) \right\| = \|(-R\sin\lambda, R\cos\lambda, 0)\| = R$$

y así

$$s = s(\lambda : \lambda^*) := \int_{\lambda^*}^{\lambda} R d\tau = (\lambda - \lambda^*)R.$$

2. En el caso de una elipse de semiejes  $a \geq b$ ,  $\mathbf{x}(\lambda) = (a \cos \lambda, b \operatorname{sen} \lambda, 0)$

$$\begin{aligned} s = s(\lambda : \lambda^*) &:= \int_{\lambda^*}^{\lambda} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau} d\tau = \int_{\lambda^*}^{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \operatorname{sen}^2 \tau} d\tau \\ &= E(\lambda - \lambda^*, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}), \end{aligned}$$

siendo  $E(\cdot, \cdot)$  una integral no expresable en términos de funciones elementales conocida como *integral elíptica de segunda especie*. Al parámetro

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

se le llama *excentricidad de la elipse*. Nótese que  $e \in [0, 1]$  y que  $e = 0$  corresponde a una circunferencia de radio  $a$ .

3. Para una *hélice circular*,  $\mathbf{x}(\lambda) = (R \cos \lambda, R \operatorname{sen} \lambda, h\lambda)$ ,  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ , donde  $h > 0$  es una constante dada. Nótese que un *paso de la hélice* viene dado por la variación de  $\lambda$  en un intervalo  $(\lambda^*, \lambda^* + 2\pi)$  y que por tanto la variación de altura viene dada por  $H := \tilde{x}_3(\lambda^* + 2\pi) - \tilde{x}_3(\lambda^*) = 2\pi h$ . La longitud de arco es

$$s = s(\lambda : \lambda^*) := \int_{\lambda^*}^{\lambda} \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 \tau + R^2 \cos^2 \tau + h^2} d\tau = (\lambda - \lambda^*) \sqrt{R^2 + h^2}$$

Un resultado de gran importancia es el siguiente

**Theorem 4** *La longitud de un arco es invariante frente a cambios (admisibles y orientado) de parámetros.*

*Demostración.* Comencemos recordando que un cambio de parámetros  $\lambda = \tilde{\lambda}(\mu)$ , con  $\tilde{\lambda}$  una biyección de clase  $C^1$  entre  $(\lambda_0, \lambda_1)$  y  $(\mu_0, \mu_1)$  se dice *admissible* si no altera (ni genera) puntos singulares. Es fácil ver que esto equivale a que  $\tilde{\lambda}'(\mu) \neq 0$  para todo  $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$ . Si además se tiene que  $\tilde{\lambda}'(\mu) > 0$  para todo  $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$  se dice que el cambio es *orientado*. Haciendo el cambio de variable  $\sigma = \tilde{\lambda}(\delta)$  en la fórmula (2) encontramos que

$$\begin{aligned} s &= \int_{\lambda^*}^{\lambda} \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\sigma) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\sigma)} d\sigma = \int_{\mu^*}^{\mu} \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\tilde{\lambda}(\delta)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\tilde{\lambda}(\delta)) \tilde{\lambda}'(\delta)} d\delta \\ &= \int_{\mu^*}^{\mu} \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{d\mu}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\mu}(\theta)} d\theta. \blacksquare \end{aligned}$$

En un punto no singular,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\lambda^*)$ , se tiene que

$$s'(\lambda^*) = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\lambda^*) \right\| > 0.$$

Por tanto, por el *Teorema de la función inversa* sabemos que la función  $s(\lambda)$  es invertible en un entorno  $I(\lambda_0)$  de  $\lambda_0$ , e.d. existe una función  $\tilde{\lambda}(s)$  tal que  $\tilde{\lambda} = s^{-1}$  y además

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{d\lambda}(\tilde{\lambda}(s))} = \frac{1}{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\tilde{\lambda}(s)) \right\|}.$$

Por tanto, en un entorno de  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\lambda^*)$ , la curva  $\Gamma$  se puede escribir como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\lambda}(s)) =: \mathbf{x}^*(s)$  donde ahora  $s$  es un parámetro (denominado *arco de la curva*) y se dice que es la *representación intrínseca de la curva*. De la anterior construcción se deduce que

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds}(s) \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}(\tilde{\lambda}(s)) \right\| \frac{d\tilde{\lambda}}{ds}(s) = 1,$$

es decir, el vector  $\frac{d\mathbf{x}^*}{ds}(s)$  es unitario.

**Definition 5** Al vector  $\frac{d\mathbf{x}^*}{ds}(s)$  se le denomina **vector tangente** a la curva en el punto  $\mathbf{x}^*(s)$  y le denotaremos por  $\mathbf{t}(s)$ .

El vector  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$  es ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ . En realidad ésta es una propiedad genérica válida para una función vectorial  $\mathbf{u}(\sigma)$  de vectores unitarios pues al derivar, respecto de  $\sigma$ , en la identidad  $\mathbf{u}(\sigma) \cdot \mathbf{u}(\sigma) = 1$  se obtiene que  $\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma}(\sigma) \cdot \mathbf{u}(\sigma) = 0$ .

**Definition 6** Se denomina **vector normal principal** a la curva  $\Gamma$ , en un punto no singular  $\mathbf{x}^*(s)$ , al vector unitario en la dirección  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$  y se denota por  $\mathbf{n}(s)$ .

Por tanto

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \right\|} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s),$$

es decir

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$$

siendo  $k(s) (= \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \right\|)$  el escalar denominado *curvatura en el punto no singular  $\mathbf{x}^*(s)$* . Al escalar  $1/k(s)$  se le denomina *radio de curvatura en el punto no singular  $\mathbf{x}^*(s)$*  y se le denota por  $R(s)$ .

Finalmente, se completa el anterior par de vectores mediante un vector ortogonal a los dos

**Definition 7** Se denomina **vector binormal** en el punto no singular  $\mathbf{x}^*(s)$  al vector unitario  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ .

Nótese que la terna  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  forman una base ortonormal y orientada (y se le denomina *triedro de Jean Frederic Frenet (1816-1900) y Joseph Alfred Serret (1819-1895)*). Se tiene

**Theorem 8 (de Frenet-Serret).** Existe un escalar  $\chi(s)$ , denominado *torsión de la curva  $\Gamma$  en el punto no singular  $\mathbf{x}^*(s)$* , tal que

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = & +k(s)\mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = & -k(s)\mathbf{t}(s) & +\chi(s)\mathbf{b}(s) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = & & -\chi(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

*Demostración.* Dado que la terna  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  forman una base se tendrá

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}. \end{cases}$$

Ya vimos que  $a_{11} = a_{13} = 0$  y que  $a_{12} = k$ . Como  $\mathbf{n}(s)$  y  $\mathbf{b}(s)$  son unitarios se tendrá que  $a_{22} = a_{33} = 0$ . Derivando en la expresión que define  $\mathbf{b}$  se tiene

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = k\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (a_{21}\mathbf{t} + a_{23}\mathbf{b}) = -a_{23}\mathbf{n},$$

es decir,  $a_{31} = 0$  y  $a_{32} = -a_{23}$ . Finalmente, derivando en la identidad  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{b}(s)$  y razonando análogamente se obtiene que  $a_{21} = -k$  con lo que basta tomar  $a_{23} = \chi$ . ■

Ya estamos en condiciones de identificar los vectores velocidad y aceleración de un punto al moverse sobre una curva dada:

**Corollary 9** Sea un punto en movimiento sobre una curva  $\Gamma$  no singular y supongamos que  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}^*(s(t))$ , es decir, con el movimiento caracterizado por la función  $s = s(t)$ . Entonces se tiene que

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{t}(s(t))$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_n(t) = \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v(t)^2}{R(s(t))}\mathbf{n}(s(t)).$$

*Demostración.*  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{x}^*}{ds}(s(t))\dot{s}(t) = \dot{s}(t)\mathbf{t}(s(t))$ . Como  $\mathbf{t}$  es unitario, se deduce que

$$v(t) = \left| \dot{s}(t) \right|.$$

Además,  $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + (\dot{s}(t))^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s(t))$  y basta aplicar la definición de  $\mathbf{n}$  para obtener la conclusión. ■

**Remark 10** Nótese que una descomposición similar ya se había encontrado en el caso de coordenadas cilíndricas (aunque allí es  $\mathbf{t}(\theta(t)) = \mathbf{e}_\theta(\theta(t))$  y entonces  $\mathbf{n}(\theta(t)) = -\mathbf{e}_\rho(\theta(t))$ : el signo negativo justifica la buena orientación de la base  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ ). Nótese también que el vector aceleración está siempre en el plano osculador (que contiene a los vectores  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$ ) y que  $\mathbf{a}_n(t)$  es siempre centrípeta (apunta hacia el centro de curvatura o centro del círculo osculador).

Se tiene el siguiente resultado:

**Proposition 11** Sea el sistema de referencia dado por el triedro de Frenet  $\widehat{\mathcal{R}}(t) = \{\widehat{O}(t); \mathbf{t}(s(t)), \mathbf{n}(s(t)), \mathbf{b}(s(t))\}$ . Se define el vector de Darboux (1842-1917)

$$\mathbf{e}(s) = \chi(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{b}(s).$$

Entonces el vector velocidad angular  $\widehat{\omega}(t)$  asociado al triedro de Frenet viene dado por

$$\widehat{\omega}(t) = v(s(t))\mathbf{e}(s(t)).$$

*Demostración.* De la definición de  $\widehat{\omega}(t)$  basta observar que  $\left| \dot{s}(t) \right| = v(t)$  y que del teorema de Frenet se deduce sin dificultad que

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{e} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{e} \times \mathbf{b}. \blacksquare$$

## Apéndice 2. Coordenadas curvilíneas ortogonales: velocidad y aceleración. Operadores diferenciales.

Resulta cómodo realizar un repaso del caso de un sistema ortogonal curvilineo general de coordenadas. Supongamos dada una transformación de coordenadas

$$x_i = x_i(u, v, w), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

A veces es también cómodo utilizar la notación  $(u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$ . Por tanto se puede escribir

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{r}(u, v, w).$$



A la transformación le pediremos algunas propiedades:

1. En cada región en consideración se tiene una biyección entre las triadas  $(x_1, x_2, x_3)$  y  $(u, v, w)$  de manera que las ecuaciones (3) se pueden “resolver”

$$u = u(x_1, x_2, x_3), \quad v = v(x_1, x_2, x_3), \quad w = w(x_1, x_2, x_3). \quad (4)$$

2. Las funciones  $x_i(u, v, w)$  son de clase  $C^1$  y el determinante

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial w} & \frac{\partial x_2}{\partial w} & \frac{\partial x_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(el *Jacobiano de la transformación*) no se anula en ningún punto.

Dado un punto  $P$  de coordenadas  $(u_0, v_0, w_0)$ , se definen las *líneas de coordenadas* (de  $u, v$  y  $w$ , respectivamente) que pasan por el punto  $P$  como las curvas dadas por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0, w_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v, w_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0, w),$$

donde  $u, v$  y  $w$  varían en intervalos conteniendo a  $u_0, v_0$  y  $w_0$ , respectivamente.

**Definición.** Diremos que la transformación es **ortogonal** si las tangentes, en el punto  $P$ , a las líneas de coordenadas de  $u, v$  y  $w$  son mutuamente ortogonales.

**Observación.** Algunas veces la transformación no cumple las propiedades pedidas en puntos aislados o curvas o superficies. En el caso de cilíndricas, el eje  $z$  es una anomalía pues los puntos de coordenadas cilíndricas  $(0, \theta, z_0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , corresponden al único punto de coordenadas cartesianas  $(0, 0, z_0)$ .

Con el fin de definir la base móvil de los vectores ortonormales, comenzamos introduciendo los escalares

$$h_u(u, v, w) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v, w) \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right\|,$$

y que algunas veces también serán denominados como

$$h_u(u, v, w) = h_1(u, v, w), \quad h_v = h_2(u, v, w), \quad h_w = h_3(u, v, w).$$

Nótese que los elementos de las filas de la matriz de  $J$  son las componentes de  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$  respectivamente. Por tanto, como  $J \neq 0$  no puede ser que las tres componentes de los vectores  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$  sean nulos a la vez y por tanto  $h_i(u, v, w) > 0$ .

Definimos los vectores  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  y  $\mathbf{e}_w$  como los vectores unitarios tangentes a cada una de las líneas de coordenadas de  $u, v$  y  $w$ , en el punto  $P$ . Por tanto

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}.$$

Algunas veces, esos vectores suelen ser denotados por  $\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{u_2}, \mathbf{e}_{u_3}$  que no deben confundirse con la base cartesiana  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

También podemos definir los vectores (en general no unitarios)

$$\mathbf{h}_u = h_u \mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{h}_v = h_v \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{h}_w = h_w \mathbf{e}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \mathbf{h}_3.$$

Observese que

$$\mathbf{h}_u = h_u \mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i(u, v, w)}{\partial u} \mathbf{e}_i$$

y con análogas expresiones para  $\mathbf{h}_v$  y  $\mathbf{h}_w$ .

Resultará conveniente analizar las derivadas parciales de los vectores  $\mathbf{h}_i$ . Se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial u_j}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k(u_1, u_2, u_3) \mathbf{h}_k(u_1, u_2, u_3)$$

para ciertos escalares  $\Gamma_{ij}^k(u_1, u_2, u_3)$  denominados cómo *símbolos de Christoffel de segunda especie* (en honor de Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)).

Dado que el sistema *se supone ortogonal*, la base móvil  $\mathcal{B}(u, v, w) = \{\mathbf{e}_u(u, v, w), \mathbf{e}_v(u, v, w), \mathbf{e}_w(u, v, w)\}$  es una base ortonormal. Por convenio supondremos que la transformación conduce a una base  $\mathcal{B}$  con orientación positiva (nótese que tomando, por ejemplo,  $-u$  como nuevo parámetro el vector unitario tangente resultante es  $-\mathbf{e}_u$ ). Nótese que, a diferencia del caso cartesiano, la base  $\mathcal{B}(u, v, w)$  puede variar de punto en punto.

**Observación.** A veces es cómodo utilizar argumentos geométricos para calcular los coeficientes  $h_i$

En el caso de cilíndricas resulta

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1.$$

En el caso de esféricas, si  $\Phi$  es la latitud y  $\theta$  la longitud (recuérdese que la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\Phi\}$  es ortonormal y orientada), se tiene que

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \cos \Phi, \quad h_3 = r.$$

Es fácil ver que en esos casos  $\mathcal{B}(u, v, w)$  se reduce a  $\mathcal{B}_c$  y  $\mathcal{B}_e$  respectivamente.

Denotando  $(u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$  se tendría que, fijado un origen  $O$ , un punto en movimiento vendría dado por

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \mathbf{e}_i = \mathbf{r}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)).$$

**Lema.** El vector velocidad se puede escribir cómo

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{du_i}{dt}(t) \mathbf{h}_i(u_1(t), u_2(t), u_3(t)).$$

Finalmente, el vector aceleración viene dado por

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 u_i}{dt^2}(t) \mathbf{h}_i(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) + \sum_{i,j,k=1}^3 \Gamma_{ij}^k(u_1, u_2, u_3) \frac{du_i}{dt}(t) \frac{du_j}{dt}(t) \mathbf{h}_k(u_1, u_2, u_3).$$

De esta manera descomponiendo el vector  $\mathbf{a}(t)$  en términos del triedro  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}$  como

$$\mathbf{a}(t) = a_{u_1} \mathbf{h}_1 + a_{u_2} \mathbf{h}_2 + a_{u_3} \mathbf{h}_3$$

encontramos que

$$a_{u_k} = \frac{d^2 u_k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k(u_1, u_2, u_3) \frac{du_i}{dt}(t) \frac{du_j}{dt}(t).$$

*Demostración.* Basta utilizar que  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \frac{du_i}{dt}(t)$  y que

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2 u_i}{dt^2}(t) \mathbf{h}_i(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{du_i}{dt}(t) \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial u_j}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \frac{du_j}{dt}(t),$$

por lo que aplicando la definición de los símbolos de Christoffel se obtiene el resultado.

Recordando que  $\mathbf{h}_i = h_i \mathbf{e}_{u_i}$  podemos encontrar fácilmente la expresión de los vectores velocidad y aceleración respecto de la base ortonormal  $\{\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{u_2}, \mathbf{e}_{u_3}\}$ . En particular, si se toman los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas se obtienen las expresiones vistas en las clases de teoría del Capítulo 1.

Observemos también que si suponemos que una partícula  $P(t)$  se mueve sobre una de las superficies generadas por dos líneas de coordenadas, pongámos por caso  $u_1, u_2$  entonces el vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  tendrá su  $u_3$  constante en el tiempo  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(u_1(t), u_2(t), u_3^0) \mathbf{e}_i = \mathbf{r}(u_1(t), u_2(t), u_3^0)$  con lo que las expresiones de los vectores velocidad y aceleración se simplificarán automáticamente. Esto es una generalización de lo que se vió en el Capítulo 1 al analizar un punto en movimiento sobre una esfera y utilizar coordenads esféricas. Análogamente, se puede suponer también que  $P(t)$  se mueve sobre una de las líneas de coordenadas, pongámos por caso  $u_1$ , y entonces el vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  tendrá sus  $u_2$  y  $u_3$  constantes en el tiempo  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(u_1(t), u_2^0, u_3^0) \mathbf{e}_i = \mathbf{r}(u_1(t), u_2^0, u_3^0)$  y las expresiones de los vectores velocidad y aceleración se simplificarán aún más, automáticamente. Esto es una generalización de lo que se vió en el Capítulo 1 al analizar un punto en movimiento sobre meridiano o un paralelo de una esfera y utilizar coordenads esféricas (o al considerar un punto sobre una circunferencia del plano  $z = 0$  y utilizar coordenadas cilíndricas).

Pasémos ahora a analizar la expresión de los operadores diferenciales usuales en términos de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Dada una función vectorial  $\mathbf{F}$  esta puede expresarse en términos de los elemento de la base curvilínea  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  y  $\mathbf{e}_w$

$$\mathbf{F}(u, v, w) = F_u(u, v, w) \mathbf{e}_u + F_v(u, v, w) \mathbf{e}_v + F_w(u, v, w) \mathbf{e}_w$$

y a las funciones escalares  $F_u, F_v, F_w$  se les denomina *componentes  $\mathbf{F}$  de a lo largo de las líneas de coordenadas*. Se tiene una fácil relación con la descomposición cartesiana

**Lemma 12** Si  $\mathbf{F}(u, v, w) = \sum_{i=1}^3 F_i(x_1(u, v, w), x_2(u, v, w), x_3(u, v, w)) \mathbf{e}_i$ , entonces

$$F_u = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial u}, F_v = \frac{1}{h_2} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial v}, F_w = \frac{1}{h_3} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial w}.$$

*Demostración.* Se tiene que  $F_u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_u = \sum_{i=1}^3 F_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_u$ . Pero recordando que

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u} \mathbf{e}_i$$

basta sustituir en la expresión de  $F_u$  para obtener el resultado. ■

Con respecto a los operadores diferenciales se tiene

**Theorem 13** Si  $V = V(u, v, w)$  es una función escalar de clase  $C^1$  entonces

$$\text{grad}V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \mathbf{e}_w, \quad (5)$$

*e.d.*, en forma operacional,

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{e}_w$$

Si  $\mathbf{F}(u, v, w)$  es una función vectorial de clase  $C^1$  entonces

$$\text{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 F_u & h_2 F_v & h_3 F_w \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 F_w) \right\}.$$

Finalmente, el operador laplaciano (suma de las derivadas segundas) viene dado por

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}.$$

*Demostración.* Como

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u} \mathbf{e}_i$$

y

$$\operatorname{grad} V = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_i,$$

la componente de  $\operatorname{grad} V$  en la dirección  $\mathbf{e}_u$  será, por la regla de la cadena,

$$\mathbf{e}_u \cdot \operatorname{grad} V = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u}$$

lo que demuestra (5).

Para mostrar (6) es conveniente comenzar aplicando el anterior resultado a las funciones escalares  $u = \tilde{u}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = \tilde{v}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $w = \tilde{w}(x_1, x_2, x_3)$ . Entonces se tiene que

$$\mathbf{e}_u = h_1 \nabla \tilde{u}, \mathbf{e}_v = h_2 \nabla \tilde{v}, \mathbf{e}_w = h_3 \nabla \tilde{w}.$$

Por otra parte,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)$$

por lo que conviene examinar, por separado, la expresión de cada uno de los tres sumandos resultantes. Se tiene que

$$\nabla \times (F_u \mathbf{e}_u) = \nabla \times (h_1 F_u \nabla \tilde{u}).$$

Usando la propiedad

$$\nabla \times (f \mathbf{G}) = f \nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla f$$

válida para funciones (de clase  $C^1$ ) genéricas, escalar y vectorial, respectivamente, se obtiene que

$$\nabla \times (F_u \mathbf{e}_u) = h_1 F_u \nabla \times \nabla \tilde{u} - \nabla \tilde{u} \times \nabla (h_1 F_u),$$

pero como  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$  para toda función escalar  $f$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_u \mathbf{e}_u) &= \nabla (h_1 F_u) \times \nabla \tilde{u} \\ &= \left[ \frac{\mathbf{e}_u}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} (h_1 F_u) + \frac{\mathbf{e}_v}{h_2} \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_u) + \frac{\mathbf{e}_w}{h_3} \frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_u) \right] \times \frac{\mathbf{e}_u}{h_1} \\ &= \frac{\mathbf{e}_v}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_u) - \frac{\mathbf{e}_w}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_u) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 F_u & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\nabla \times (F_v \mathbf{e}_v) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 0 & h_2 F_v & 0 \end{vmatrix}$$

y

$$\nabla \times (F_w \mathbf{e}_w) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 0 & 0 & h_3 F_w \end{vmatrix},$$

con lo que sumando las anteriores expresiones se llega a (6).

## 2.1.2 Cinemática relativa: Teoremas de Coriolis-Poisson y de Galileo.

En Mecánica Clásica es especialmente útil referir la descripción de las magnitudes cinéticas (vectores de posición, velocidad y aceleración) con respecto a distintos sistemas de referencia. Así, por ejemplo, en el estudio del sólido rígido interesará utilizar al menos dos sistemas de referencia: uno externo al sólido y otro ligado a él. Por tanto, es conveniente suponer que se dispone de dos sistemas de referencia: uno fijo, o *absoluto*,  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y otro móvil, o *relativo*,  $\widehat{\mathcal{R}}(t) = \{\widehat{O}(t); \widehat{\mathbf{e}}_1(t), \widehat{\mathbf{e}}_2(t), \widehat{\mathbf{e}}_3(t)\}$  y que por tanto puede depender de  $t$ . Sea, ahora, una partícula en movimiento  $P(t)$  de vectores de posición  $\mathbf{r}(t)$  y  $\widehat{\mathbf{r}}(t)$  respectivamente, es decir,

$$\mathbf{r}(t) := \overrightarrow{OP(t)} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{r}}(t) := \overrightarrow{\widehat{O}(t)P(t)} = \sum_{i=1}^3 \widehat{x}_i(t) \widehat{\mathbf{e}}_i(t).$$

Los vectores velocidad *absoluta* y *relativa* (respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$ ) vienen dados por

$$\mathbf{v}_a(t) := \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right)_{\mathcal{R}} := \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{v}}_r(t) := \left(\frac{d\widehat{\mathbf{r}}}{dt}(t)\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} := \sum_{i=1}^3 \dot{\widehat{x}}_i(t) \widehat{\mathbf{e}}_i(t)$$

Analogamente, los vectores aceleración *absoluta* y *relativa* (respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$ )

$$\mathbf{a}_a(t) := \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}(t)\right)_{\mathcal{R}} := \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \mathbf{e}_i \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{a}}_r(t) := \left(\frac{d\widehat{\mathbf{v}}_r}{dt}(t)\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} := \sum_{i=1}^3 \ddot{\widehat{x}}_i(t) \widehat{\mathbf{e}}_i(t)$$

Un simple cálculo permite relacionar las anteriores magnitudes vectoriales:

**Proposition 14** *Se tiene que*

$$\mathbf{v}_a(t) = \widehat{\mathbf{v}}_r(t) + \mathbf{v}_e(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_a(t) = \widehat{\mathbf{a}}_r(t) + \mathbf{a}_e(t) + \mathbf{a}_c(t)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e(t) &:= \mathbf{v}_{\widehat{O}}(t) + \sum_{i=1}^3 \widehat{x}_i(t) \left(\frac{d\widehat{\mathbf{e}}_i}{dt}(t)\right)_{\mathcal{R}}, & (\text{velocidad de arrastre}) \\ \mathbf{a}_e(t) &:= \mathbf{a}_{\widehat{O}}(t) + \sum_{i=1}^3 \widehat{x}_i(t) \left(\frac{d^2\widehat{\mathbf{e}}_i}{dt^2}(t)\right)_{\mathcal{R}}, & (\text{aceleración de arrastre}) \\ \mathbf{a}_c(t) &:= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{d\widehat{x}_i}{dt}(t) \left(\frac{d\widehat{\mathbf{e}}_i}{dt}(t)\right)_{\mathcal{R}}, & (\text{aceleración de Coriolis}). \end{aligned}$$

*Demostración.* Basta observar que  $\mathbf{r}(t) = \widehat{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}_{\widehat{O}}(t)$  y derivar respecto de  $t$ .

**Remark 15** *Nótese que  $\mathbf{v}_e(t)$  y  $\mathbf{a}_e(t)$  coinciden con  $\mathbf{v}_a(t)$  y  $\mathbf{a}_a(t)$  para aquellos puntos  $P(t)$  que “se mueven sólidamente con”  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$ , esto es, para los que  $\widehat{x}_i(t)$  es constante en  $t$  para todo  $i = 1, 2, 3$  (por lo que  $\widehat{\mathbf{v}}_r(t) = \widehat{\mathbf{a}}_r(t) = \mathbf{0}$ ). Obsérvese que se ha utilizado la notación*

$$\mathbf{v}_{\widehat{O}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_{\widehat{O}}(t) = \left(\frac{d\mathbf{r}_{\widehat{O}}(t)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}, \quad \mathbf{a}_{\widehat{O}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_{\widehat{O}}(t) = \left(\frac{d^2\mathbf{r}_{\widehat{O}}(t)}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

tal y como es usual en el caso del sólido rígido que analizaremos más adelante.

Es ilustrativo analizar con detalle el caso en el que  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y  $\widehat{\mathcal{R}}(t) = \{\widehat{O}(t); \widehat{\mathbf{e}}_1(t), \widehat{\mathbf{e}}_2(t), \widehat{\mathbf{e}}_3(t)\}$  difieren únicamente por una rotación alrededor de uno de los ejes (por ejemplo  $\mathbf{e}_3$ ). Más concretamente supongamos que

$$\begin{aligned}\widehat{O}(t) &= O, & \widehat{\mathbf{e}}_3(t) &= \mathbf{e}_3 \\ \widehat{\mathbf{e}}_1(t) &= \cos\theta(t)\mathbf{e}_1 + \text{sen}\theta(t)\mathbf{e}_2, & \widehat{\mathbf{e}}_2(t) &= -\text{sen}\theta(t)\mathbf{e}_1 + \cos\theta(t)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Definamos el escalar *velocidad angular* por  $\dot{\theta}(t)$  y el *vector velocidad angular* por

$$\widehat{\omega}(t) := \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_3.$$

En este caso es posible expresar los vectores velocidad y aceleración de arrastre y la aceleración de Coriolis en términos del vector aceleración angular

**Theorem 16** (*G. G. de Coriolis, 1792-1843*).

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_e &= \widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{a}_e &= \dot{\widehat{\omega}} \times \widehat{\mathbf{r}} + \widehat{\omega} \times (\widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{a}_c = 2\widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{v}}_r.\end{aligned}$$

**Demostración.** Se verá más tarde como consecuencia de un resultado más general. Para una demostración directa véanse textos elementales pre-universitarios de Física y la interpretación geométrica de los diferentes términos dada allí. ■

Se verá (Teorema de Chasles en el estudio del sólido rígido (ángulos de Euler) o bien en Mecánica de Medios Continuos) que todo cambio de referencia se puede expresar como composición de una traslación y de 3 giros alrededor de ciertos ejes. No es extraño que el anterior resultado se pueda extender a un cambio de referencia genérico. La dificultad primordial radica en identificar lo equivalente al vector velocidad angular. Esto fue abordado por Denis Poisson (1741-1840) quien propuso una definición del vector velocidad angular para el caso general tras observar que en caso de la rotación alrededor de un eje, antes considerada, se cumple que

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{\mathbf{e}}_1}{dt} = \dot{\theta}\widehat{\mathbf{e}}_1 = \widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{e}}_1 \\ \frac{d\widehat{\mathbf{e}}_2}{dt} = -\dot{\theta}\widehat{\mathbf{e}}_2 = \widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{e}}_2 \\ \frac{d\widehat{\mathbf{e}}_3}{dt} = \mathbf{0} = \widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{e}}_3. \end{cases}$$

Más en general, se tiene

**Proposition 17** *Dado un sistema de referencia arbitrario  $\widehat{\mathcal{R}}(t) = \{\widehat{O}(t); \widehat{\mathbf{e}}_1(t), \widehat{\mathbf{e}}_2(t), \widehat{\mathbf{e}}_3(t)\}$  existe un único vector  $\widehat{\omega}(t)$ , denominado vector velocidad angular de  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$  respecto de  $\mathcal{R}$ , tal que*

$$\frac{d\widehat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \widehat{\omega} \times \widehat{\mathbf{e}}_i, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

*Demostración.* Obviamente, podremos escribir

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{\mathbf{e}}_1}{dt} = a_{11}\widehat{\mathbf{e}}_1 + a_{12}\widehat{\mathbf{e}}_2 + a_{13}\widehat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{d\widehat{\mathbf{e}}_2}{dt} = a_{21}\widehat{\mathbf{e}}_1 + a_{22}\widehat{\mathbf{e}}_2 + a_{23}\widehat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{d\widehat{\mathbf{e}}_3}{dt} = a_{31}\widehat{\mathbf{e}}_1 + a_{32}\widehat{\mathbf{e}}_2 + a_{33}\widehat{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \quad (7)$$

para ciertos escalares  $a_{ij}$ . Es claro que la matriz asociada  $\mathbf{A}(t)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

es antisimétrica, e.d.  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , pues basta derivar, respecto de  $t$ , en la identidad  $\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij}$ , para todo  $t$ . Por tanto, podemos suponer que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

para algunas funciones escalares  $\alpha(t), \beta(t)$  y  $\gamma(t)$ . Por otra parte, se tiene que dado un vector  $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i \hat{\mathbf{e}}_i$  entonces se tiene que

$$\begin{cases} \hat{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_2. \end{cases} \quad (9)$$

Por tanto, identificando las expresiones (7), supuesto (8), con (9) concluimos que el vector buscado es el dado por

$$\hat{\omega}_1 = \gamma, \quad \hat{\omega}_2 = -\beta \quad \hat{\omega}_3 = \alpha.$$

La unicidad de  $\hat{\omega}$  es obvia. ■

**Remark 18** Aunque  $\hat{\omega}(t)$  viene dado por la composición de tres giros alrededor de los ejes (véase ...) no conviene imaginar el resultado final  $\hat{\omega}(t)$  como un vector paralelo a algún eje (véase el problema...).

**Remark 19** Nótese que si conocemos las componentes  $\hat{\omega}_i(t)$  y los valores iniciales de los vectores  $\hat{\mathbf{e}}_i(0)$  entonces los vectores  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$  quedan unívocamente determinados  $\forall t$  como los vectores solución del Problema de Cauchy asociado al sistema (7). Esto se dá con alguna frecuencia pues  $\hat{\omega}_i(t) = \hat{\omega}(t) \bullet \hat{\mathbf{e}}_i(t)$  y algunas veces conocemos el vector  $\hat{\omega}(t)$  y los ángulos con los ejes móviles generados por  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$ . Como veremos en el capítulo 7, el movimiento de un sólido rígido viene determinado por un sistema de referencia  $\hat{\mathcal{R}}(t)$  ligado a él y, en general, desconocido a priori.

Se tiene

**Theorem 20** (de Coriolis-Poisson) Dado  $\hat{\mathcal{R}}(t)$  y un punto material en movimiento, se tiene que

$$\mathbf{v}_a(t) = \hat{\mathbf{v}}_r(t) + \mathbf{v}_e(t) \quad (10)$$

y

$$\mathbf{a}_a(t) = \hat{\mathbf{a}}_r(t) + \mathbf{a}_e(t) + \mathbf{a}_c(t) \quad (11)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e(t) &:= \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t) + \hat{\omega}(t) \times \hat{\mathbf{r}}(t) && \text{(velocidad de arrastre),} \\ \mathbf{a}_e(t) &:= \mathbf{a}_{\hat{\mathcal{O}}}(t) + \dot{\hat{\omega}}(t) \times \hat{\mathbf{r}}(t) + \hat{\omega}(t) \times (\hat{\omega}(t) \times \hat{\mathbf{r}}(t)) && \text{(aceleración de arrastre),} \\ \mathbf{a}_c(t) &:= 2\hat{\omega}(t) \times \hat{\mathbf{v}}_r(t) && \text{(aceleración de Coriolis).} \end{aligned}$$

Antes de dar la demostración, veamos un sencillo resultado que será de gran utilidad:

**Lemma 21** Dado una función vectorial genérica  $\hat{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}(t) &= \sum_{i=1}^3 \dot{\hat{u}}_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t) + \hat{\omega}(t) \times \hat{\mathbf{u}}(t) \\ &= \left( \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}(t) \right)_{\hat{\mathcal{R}}} + \hat{\omega}(t) \times \hat{\mathbf{u}}(t), \end{aligned}$$

donde

$$\left( \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}(t) \right)_{\hat{\mathcal{R}}} = \sum_{i=1}^3 \frac{d\hat{u}_i}{dt}(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t).$$

*Demostración.* Basta aplicar la regla de la cadena y la definición del vector  $\widehat{\omega}(t)$ . ■

**Remark 22** En terminología de “operadores funcionales” se tiene

$$\left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} + \widehat{\omega}(t) \times \bullet.$$

*Demostración del Teorema.* La identidad (10) se obtiene al aplicar el anterior Lema a la función vectorial  $\widehat{\mathbf{u}}(t) = \widehat{\mathbf{r}}(t)$  (posición relativa respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$ ). Para mostrar (11) observemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a(t) &= \mathbf{a}_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) + \left[\left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} + \widehat{\omega}(t) \times \bullet\right]^2(\widehat{\mathbf{r}}(t)) \\ &= \mathbf{a}_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) + \left[\left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} + \widehat{\omega}(t) \times \bullet\right] \left[\left(\frac{d\widehat{\mathbf{r}}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} + \widehat{\omega}(t) \times \widehat{\mathbf{r}}(t)\right] \\ &= \mathbf{a}_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) + \left(\frac{d\widehat{\mathbf{r}}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} \times (\widehat{\omega}(t) \times \widehat{\mathbf{r}}(t)) + 2\widehat{\omega}(t) \times \left(\frac{d\widehat{\mathbf{r}}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} + \left(\frac{d\widehat{\omega}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} \times \widehat{\mathbf{r}}(t). \end{aligned}$$

Dado que  $\widehat{\mathbf{v}}_r(t) = \left(\frac{d\widehat{\mathbf{r}}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}}$ , basta ver que  $\left(\frac{d\widehat{\omega}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} = \dot{\widehat{\omega}}(t)$ , lo que es obvio pues por el Lema

$$\left(\frac{d\widehat{\omega}(t)}{dt}\right)_{\widehat{\mathcal{R}}} + \widehat{\omega}(t) \times \widehat{\omega}(t) = \left(\frac{d\widehat{\omega}(t)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\widehat{\omega}}(t)$$

dado que  $\widehat{\omega}(t) \times \widehat{\omega}(t) = \mathbf{0}$ . ■

Una importante consecuencia de los resultados anteriores es que el vector aceleración no admite una única representación sino que depende, de manera fundamental, del sistema de referencia elegido. Esto tiene una gran importancia a la hora de justificar la fórmula

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

que aunque no la abordaremos hasta la sección siguiente el lector conocerá de cursos elementales. ¿Bajo que hipótesis las aceleraciones correspondientes a dos sistemas de referencia distintos coinciden? Esto es lo que da respuesta el siguiente resultado. Antes recordemos

**Definition 23** El movimiento de un punto material se dice rectilíneo y uniforme respecto del sistema de referencia  $\mathcal{R}$  si  $\left(\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{0} \forall t$ . Un sistema de referencia  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$  se dice en movimiento rectilíneo y uniforme respecto del sistema de referencia  $\mathcal{R}$  si todos los puntos solidarios a él (e.d. con coordenadas constantes respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$ ) se mueven rectilínea y uniformemente (con idéntica velocidad) respecto de  $\mathcal{R}$ .

**Theorem 24** (de Galileo Galilei: 1564-1642) Sean  $\mathcal{R}$  y  $\widehat{\mathcal{R}}$  dos sistemas de referencia. Las siguientes afirmaciones son equivalentes: i)  $\widehat{\mathcal{R}}$  se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme respecto de  $\mathcal{R}$  (e.d.,  $\mathbf{a}_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) = \mathbf{0}$  y  $\widehat{\omega}(t) = \mathbf{0}$ ), ii)  $\mathbf{a}_a(t) = \widehat{\mathbf{a}}_r(t)$  para todo punto material en movimiento  $P(t)$ , iii) todo movimiento rectilíneo y uniforme respecto de  $\mathcal{R}$  aparece como tal respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$  y viceversa, iv)  $\mathbf{a}_e = \mathbf{0}$  (aceleración nula de arrastre) para todo punto material  $P$  fijo respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$ .

**Demostración.** Que i) implica ii) es una obvia consecuencia del Teorema de Coriolis- Poisson. Veamos que ii) implica iii). Sea un punto  $P(t)$  en movimiento rectilíneo y uniforme respecto de  $\mathcal{R}$ . Entonces  $\mathbf{a}_a(t) = \mathbf{0}$  y, por ii),  $\widehat{\mathbf{a}}_r(t) = \mathbf{0}$ . Por tanto

$$\frac{d^2\widehat{x}_i(t)}{dt^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$



lo que implica que

$$\widehat{x}_i(t) = C_i^1 t + C_i^0$$

y así, el movimiento de  $P(t)$  es rectilíneo (con vector velocidad relativa  $\sum_{i=1}^3 C_i^1 \widehat{\mathbf{e}}_i(t)$ , constante respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$ ) y pasa por el punto de vector de posición relativa  $\sum_{i=1}^3 C_i^0 \widehat{\mathbf{e}}_i(t)$ .

Para mostrar que iii) implica iv), sea ahora un punto material  $P$  fijo respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$ . En ese caso, gracias a iii), el “movimiento” rectilíneo de  $P$  y uniforme respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}$  lo es así también respecto  $\mathcal{R}$ . Tomando  $P = \widehat{O}$  se obtiene que  $\mathbf{a}_{\widehat{O}}(t) = \mathbf{0}$ . Además, tomando  $P = \widehat{O} + \widehat{\mathbf{e}}_i$  se tiene también que como su velocidad relativa es nula, su velocidad absoluta es constante  $\mathbf{c}$ , y por tanto

$$\frac{d\widehat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \mathbf{c} = \widehat{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\mathbf{e}}_i, i = 1, 2, 3$$

lo que implica que  $\mathbf{c}$  es ortogonal a los tres vectores  $\widehat{\mathbf{e}}_i$  y por tanto  $\mathbf{c} = \mathbf{0} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}$ .

Finalmente, si suponemos iv), tomando  $P = \widehat{O}$  deducimos que  $\mathbf{a}_{\widehat{O}}(t) = \mathbf{0}$ . Multiplicando escalarmente por  $\widehat{\mathbf{r}}$  en la definición de  $\mathbf{a}_e$  se tiene que

$$0 = (\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \widehat{\mathbf{r}}) \cdot \widehat{\mathbf{r}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \widehat{\mathbf{r}}) \cdot \widehat{\mathbf{r}}$$

El primer término de la derecha es claramente nulo. Además, utilizando la propiedad del producto vectorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

(muéstrese como ejercicio) obtenemos que

$$0 = \widehat{\mathbf{r}} \cdot [\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}) - \widehat{\mathbf{r}}(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}})] = (\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})^2 - (\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}) = -\|\widehat{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\mathbf{r}}\|^2$$

pues

$$\begin{aligned} \|\widehat{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\mathbf{r}}\|^2 &= \left[ (\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}})^{1/2} (\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})^{1/2} \left[ 1 - \frac{(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})^2}{(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}})(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})} \right]^{1/2} \right]^2 \\ &= (\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}})(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}) \left[ 1 - \frac{(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})^2}{(\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}})(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})} \right] = (\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}})(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}) - (\widehat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{r}})^2. \end{aligned}$$

Como  $\widehat{\mathbf{r}}$  es arbitrario, deducimos que ha de ser  $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ . ■

## Apéndice 3: Repaso sobre el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 2.1.3 Introducción

Como se dijo en Dinámica, supuesto un sistema inercial los problemas (llamados *directos*) de la Mecánica Clásica asociados a una partícula de masa  $m$  consisten en hallar su posición  $\mathbf{r}(t)$ , a lo largo del tiempo, supuestos conocidos el siguiente *conjunto de datos*:

i) La *fuerza total*  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ , es decir una función  $\mathbf{f} : D(\mathbf{f}) \rightarrow \mathbb{E}^3$  donde  $D(\mathbf{f})$  es un abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$  (con frecuencia las fuerzas “se hacen infinito” en ciertos puntos del espacio). Supondremos siempre que  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1$  (mientras no se indique expresamente lo contrario).

ii) Los *datos iniciales*  $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{E}^3$  y  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{E}^3$ .

La Segunda Ley de Newton se formula (siguiendo a Euler) al problema de valores iniciales (a veces denominado Problema de A. Cauchy (1789-1857))

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \text{ en } \mathbb{E}^3, \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

con  $t_0 \in \mathbb{R}$  y que en muchos casos será  $t_0 = 0$ .

El anterior sistema de ecuaciones involucra 3 ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden. Suele ser habitual trabajar sobre las 6 ecuaciones diferenciales de primer orden que resultan al rebajar el orden

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)) \text{ en } \mathbb{E}^6, \quad (12)$$

con  $\mathbf{X}(t) := (\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \in \mathbb{E}^6$ , y  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) := \left( \dot{\mathbf{r}}(t), \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \right)$  (se deben leer como vectores columnas). Los *sistemas autónomos* en los que  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$  son un caso muy importante y frecuentes en la práctica. Son uno de los principales ejemplos de *sistema dinámico*. En realidad, toda EDO se puede asimilar a un sistema dinámico a base de aumentar *la dimensión de la incognita*.

En este Apéndice, es adecuado considerara un problema de Cauchy genérico (no necesariamente sobre  $\mathbb{E}^6$  si no en  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 1$  pues, de hecho, podemos suponer dado un sistema de referencia lo que permite sustituir  $\mathbb{E}^n$  por  $\mathbb{R}^n$ )

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)) \text{ en } \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (13)$$

Recuerdese ahora la noción de "*grado de libertad de un problema mecánico*":

**Definición.** Diremos que un problema mecánico concreto tiene  $l$  "grados de libertad" si la posición del sistema mecánico (partícula, sistema de partícula, sólido rígido o sistema de sólidos rígidos) queda determinada mediante  $l$  funciones escalares del tiempo.

En el caso de una partícula (respectivamente de un sistema de  $N$  partículas) el número de grados de libertad es claramente "menor o igual a" 3 (respectivamente  $3N$ ).

Recordemos el valor de  $l$  para algunos ejemplos de fuerzas ya vistos:

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 1 \\ l = 2 \\ l = 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{disparo y caída con velocidad inicial puramente vertical (con o sin amortiguamiento)} \\ \text{muelle elástico con velocidad inicial puramente horizontal (con o sin amortiguamiento)} \\ \text{péndulo plano (con o sin amortiguamiento)} \\ \text{movimiento (con ligadura) sobre una curva del espacio tridimensional} \\ \text{disparo y caída con velocidad inicial no vertical (con o sin amortiguamiento)} \\ \text{muelle elástico con velocidad inicial no horizontal (con o sin amortiguamiento)} \\ \text{péndulo esférico (con o sin amortiguamiento)} \\ \text{movimiento (con ligadura) sobre una superficie del espacio tridimensional} \\ \text{interacción atractiva newtoniana [más tarde se mostrará que, de hecho, } l \leq 2] \\ \text{interacción electromagnética [más tarde se mostrará, de hecho, que } l \leq 2] \\ \text{caída vertical en un sistema relativo en rotación} \\ \text{fuerza electromagnética de Lorentz (dato inicial ortogonal al vector guía)} \end{array}$$

Más adelante se verá un fácil criterio con condiciones suficientes para que sea  $l < 3$ .

Para el tipo de ecuaciones diferenciales, dadas por (36), cuando queremos determinar sus soluciones de manera única debemos añadir unas *condiciones auxiliares*. Como ya se ha expresado anteriormente las más habituales son las

i) *Condiciones iniciales*. Se prescribe un comportamiento conocido en un instante dado. Da lugar al conocido como *Problema de Cauchy*. Lo usual es pedir  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ .

Sin embargo, en el curso veremos también otro tipo de condiciones auxiliares:

ii) *Condiciones de periodicidad*. Se impone ahora la condición  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t + T)$ , para un instante  $T$  (supuestamente conocido) denominado *periodo*. Claramente, esa condición equivale a  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + T)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t + T)$ . Conviene señalar que un problema de gran trascendencia en Mecánica aparece cuando se desconoce el periodo  $T$  y por el contrario lo que se pretende es mostrar que bajo adecuadas condiciones sobre los datos iniciales (y la fuerza) la solución del Problema de Cauchy se hace periódica (para un cierto periodo  $T$  que depende de los datos del problema).

Por último, especialmente en el tratamiento de movimientos con ligaduras de la Mecánica Analítica (Apéndice 5) manejaremos un tercer tipo de condiciones auxiliares:

iii) *Condiciones de contorno.* Ahora se pide que la solución de la ecuación diferencia verifique que  $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}(t_2) = \mathbf{X}_2$ .

### 2.1.4 Existencia, unicidad y dependencia continua

Respecto de un problema de Cauchy genérico (no necesariamente sobre  $\mathbb{E}^6$  si no en  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 1$  pues podemos suponer dado un sistema de referencia lo que permite sustituir  $\mathbb{E}^n$  por  $\mathbb{R}^n$ )

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)) \text{ en } \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (14)$$

gracias a la *Teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias* podemos enunciar los siguientes resultados:

**Teorema** (*Existencia de solución local*). *Supongamos que  $\mathbf{F}$  es continua en el rectángulo cerrado*

$$\mathcal{R} = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq T, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq k\}$$

*para algunos  $T > 0$  y  $k > 0$ . Entonces existe, al menos, una solución  $\mathbf{X}(t)$  de (14) definida en el intervalo  $(t_0 - \tilde{T}, t_0 + \tilde{T})$  con  $\tilde{T} := \min \left\{ T, \frac{k}{M} \right\}$ ,  $M = \max \{\|\mathbf{F}(t, \mathbf{u})\| : (t, \mathbf{u}) \in \mathcal{R}\}$ .*

**Teorema** (*Dependencia continua*). *Supongamos  $\mathbf{F}$  como en el teorema anterior y tal que  $\mathbf{F}(t, \mathbf{u})$  es Lipschitziana respecto  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathcal{R}$ , es decir, tal que*

$$\exists L > 0 \text{ tal que } \|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in \mathcal{R}.$$

*Entonces la solución local del teorema anterior es única. Además, si  $\mathbf{F}$  es continua en  $\mathcal{R}$  y tal que*

$$\left\| \mathbf{F}(t, \mathbf{u}) - \tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{u}) \right\| \leq \varepsilon, \forall (t, \mathbf{u}) \in \mathcal{R}$$

*para algún  $\varepsilon > 0$ , y si  $\mathbf{X}(t)$  es solución local de (14) para un cierto  $\mathbf{X}_0$  con  $\left\| \mathbf{X}_0 - \tilde{\mathbf{X}}_0 \right\| \leq k$ , entonces*

$$\left\| \mathbf{X}(t) - \tilde{\mathbf{X}}(t) \right\| \leq e^{L|t-t_0|} \left\| \mathbf{X}_0 - \tilde{\mathbf{X}}_0 \right\| + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

**Corolario** (*Unicidad*). *Si  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$  satisface la condición de Lipschitz sobre un rectángulo  $\mathcal{R}$  centrado en  $t_0$  entonces el problema de Cauchy tiene una única solución local para cada dato inicial  $\mathbf{X}_0$ .*

**Observación.** La condición de Lipschitz es claramente más fuerte que la mera continuidad, pues se exige un control sobre el módulo de continuidad, que ahora es uniforme, respecto de esa variable. Es fácil ver que un criterio suficiente, y cómodo de comprobar, para que esta condición sea verificada es que

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R} : \mathbb{R}^n),$$

en cuyo caso, se puede tomar

$$L = \max \left\{ \left\| \frac{\partial F_i}{\partial u_j}(t, \mathbf{u}) \right\|, \forall 1 \leq i, j \leq n, \forall (t, \mathbf{u}) \in \mathcal{R} \right\}.$$

Ahora se podría mencionar los resultados sobre prolongabilidad, dependencia diferenciable, linealización,...

Una consecuencia importante de la unicidad de soluciones del problema de Cauchy es la posibilidad de reducir el número de incógnitas del problema. Veamos un criterio general que asegura que  $l < 3$  (un criterio similar puede ser obtenido para el caso de sistema de puntos que se verá más adelante):

**Teorema.** *Sea una partícula de masa  $m$  moviéndose, respecto de un sistema inercial, mediante  $\mathbf{r}(t)$ , con unos datos iniciales  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{v}_0$ , bajo la acción de una fuerza  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  que satisface la condición de Lipschitz sobre un rectángulo  $\mathcal{R}$  centrado en  $t_0$  y con  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathbb{E}^6$ . Sea  $V$  un subespacio **propio** del espacio euclídeo tridimensional  $\mathbb{E}^3$ . Sea  $l = \dim V$  (por tanto  $l < 3$ ). Sean  $\mathbf{r}_{0,s}$  y  $\mathbf{r}_0^\perp$  las componentes de  $\mathbf{r}_0$  en la descomposición  $\mathbb{E}^3 = V \oplus V^\perp$ . Supongamos que*

$$\mathbf{v}_0 \in V$$

$\mathbf{f}$  deja invariante a  $V$ , es decir,

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}_0^\perp + \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V, \forall t, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V.$$

Entonces la única solución local del problema de Cauchy inicial verifica que

$$\mathbf{r}(t) \in \mathbf{r}_0^\perp + V \text{ para todo } t \text{ donde esté definida.}$$

En particular, el número de grados de libertad se reduce a  $l$ .

*Demostración.* Definamos la función  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \times V \times V \rightarrow V$  mediante

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{f}(t, \mathbf{r}_0^\perp + \mathbf{a}, \mathbf{b}), \forall t, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V,$$

y sea  $\mathbf{r}_s(t)$  la solución local (única) del problema de Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}_s(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t)) \\ \dot{\mathbf{r}}_s(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}_s(t_0) = \mathbf{r}_{0,s} \end{cases}$$

Definamos  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0^\perp + \mathbf{r}_s(t)$ . Es claro que la función  $\mathbf{r}(t)$  así definida cumple las condiciones iniciales requeridas. Además,  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_s(t)$  y

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}_s(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}_0^\perp + \mathbf{r}_s(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)).$$

Por el Corolario anterior,  $\mathbf{r}(t)$  coincide con la única solución local del problema de Cauchy inicial. ■

**Ejemplos.** Sea  $\mathbf{f} = -mg\mathbf{e}_3$  la fuerza gravitatoria. Si  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_3$  entonces se puede tomar  $V := L(\mathbf{e}_3)$  con lo que  $l = 1$ . Más en general, dado  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{E}^3$ , podemos definir la base del sistema de referencia de manera que  $\mathbf{v}_0 = v_{0,1}\mathbf{e}_1 + v_{0,3}\mathbf{e}_3$  y entonces se puede tomar  $V := L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  con lo que  $l = 2$ .

### 2.1.5 Ecuaciones lineales y no lineales

Veremos a lo largo del curso la gran diferencia en el tratamiento de problemas mecánicos según que éstos sean lineales o no. Una rápida definición de esta noción se puede ofrecer para la formulación (14) en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición.** Diremos que la ecuación  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t))$ , en  $\mathbb{R}^n$ , es **lineal** si se tiene que

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{G}(t) \text{ con } \mathbf{A}(t) \in \mathcal{M}_{n \times n} \text{ y } \mathbf{G}(t) \in \mathbb{R}^n \text{ para todo } t.$$

Con respecto a los distintos de fuerzas vistas podemos clasificar ya los problemas correspondientes según su naturaleza lineal o no:

{	Ecuaciones lineales	disparo y caída con velocidad inicial arbitraria muelle elástico con velocidad inicial puramente horizontal caída vertical en un sistema relativo en rotación fuerza electromagnética de Lorentz (dato inicial ortogonal al vector guía) disparo y caída con velocidad inicial arbitraria con amortiguamiento turbulento	
	{	Ecuaciones no lineales	péndulo plano (con o sin amortiguamiento)
			péndulo esférico (con o sin amortiguamiento)
			movimiento (con ligadura) sobre una curva del espacio tridimensional
movimiento (con ligadura) sobre una superficie del espacio tridimensional			
		interacción atractiva newtoniana [más tarde se mostrará que, de hecho, $l \leq 2$ ]	
		interacción electromagnética [más tarde se mostrará, de hecho, que $l \leq 2$ ]	

### 2.1.6 Estados de equilibrio y estabilidad.

La resolución cuantitativa (exacta) de las ecuaciones diferenciales se limita a ecuaciones muy concretas. De ahí la gran importancia del estudio cuantitativo de las soluciones de (36). A este respecto, todo empieza por analizar los *estados de equilibrio* (o *estacionarios*) que, sencillamente, corresponden a las soluciones constantes  $\mathbf{X}_\infty(t) \equiv \mathbf{X}_\infty \in \mathbb{R}^n$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . También son de gran importancia el análisis de las *órbitas o soluciones periódicas*, por definir comportamientos que están bien definidos para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

El tema central es analizar el llamado *comportamiento asintótico*  $t \rightarrow \infty$ , lo que en alguna manera viene a representar la predicción del futuro más lejano.

En el caso de la dinámica de una partícula el sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)), \quad (15)$$

viene dado por  $\mathbf{X}(t) := (\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$  y  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) := \left( \dot{\mathbf{r}}(t), \frac{1}{m} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \right)$ . En lo que sigue, el *espacio de*

*las fases* es el espacio de las imágenes o estados,  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , de las soluciones de (15). Por analogía con el caso escalar, a veces se suele denominar *plano de las fases*. Un punto de equilibrio en el espacio de las fases se corresponde una solución constante de (15). Consecuentemente,  $\mathbf{X}_\infty = (\mathbf{X}_{\infty,1}, \mathbf{X}_{\infty,2}) \in \mathbb{E}^6$  es un punto de equilibrio si

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_\infty) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_{\infty,2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_{\infty,1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, en nuestro caso,

$$\mathbf{X}_\infty = (\mathbf{r}_\infty, \mathbf{0}) \text{ con } \mathbf{f}(t, \mathbf{r}_\infty, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

En general, un punto de equilibrio,  $\mathbf{X}_\infty \in \mathbb{R}^n$ , se dice *estable* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\mathbf{X}(t)$  es otra solución de (15) con  $\|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_\infty\| \leq \delta$  se verifica que  $\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_\infty\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Obviamente, se dirá que  $\mathbf{X}_\infty$  es *inestable* cuando no es estable. Finalmente, es muy útil introducir la siguiente definición: un punto de equilibrio,  $\mathbf{X}_\infty$ , se dice que es *asintóticamente estable* si para todo existe  $\delta > 0$  tal que si  $\mathbf{X}(t)$  es otra solución de (15) con  $\|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_\infty\| \leq \delta$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_\infty\| = 0$ .

## Apéndice 4 : Relatividad especial. Transformaciones de Lorentz: de la relatividad de Galileo a la de Einstein

### 3 Transformaciones de Galileo

En el Teorema de Galileo que hemos visto al final del Capítulo 1 se daban condiciones necesarias y suficientes para que las aceleraciones relativa  $\hat{\mathbf{a}}_r(t)$  y absoluta  $\mathbf{v}_a(t)$  de un punto material  $P(t)$  en movimiento coincidiesen. A Galileo le preocupaba ya el indagar sobre lo que años más tarde Newton adoptaría como su primera ley: “toda partícula en reposo, o en movimiento rectilíneo y uniforme, tiene aceleración absoluta nula”. Pero esto, como queda expresado en el Teorema de Coriolis-Poisson, no es siempre cierto para cualquier sistema de referencia.

Surge así la siguiente definición:

**Definición.** *Un sistema de referencia  $\hat{\mathcal{R}}(t) = \{\hat{\mathbf{O}}(t); \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\}$  se dice **inercial** si “toda partícula en reposo, o en movimiento rectilíneo y uniforme respecto de  $\hat{\mathcal{R}}(t)$  tiene aceleración absoluta nula”*

Obviamente, un sistema “absoluto” (estático)  $\mathcal{R} = \{\mathbf{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  sería inercial, pues si  $\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_0$  es constante entonces  $\mathbf{a}_a(t) = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt}(t) = \mathbf{0}$ .

Al día de hoy no se conoce ningún sistema de referencia natural que sea absoluto en un sentido estricto pues: i)  $\mathcal{R}$  no puede estar ligado a la Tierra (con, p.e., O el centro de la Tierra) pues ésta está en rotación; ii)  $\mathcal{R}$  no puede estar ligado al Sol pues se ha demostrado que el Sol está en movimiento respecto de nuestra galaxia; y iii)  $\mathcal{R}$  no puede estar fijo respecto de nuestra galaxia pues se sabe que el universo está en expansión.

No obstante, en los tres casos anteriores, las diferencias entre  $\mathbf{v}_a(t)$  y  $\hat{\mathbf{v}}_r(t)$  son muy pequeñas (aunque cuantificables) y así son despreciables para movimientos con velocidades mucho menores que  $c$ , la velocidad de la luz.

El propio Galileo, se planteó ya la siguiente pregunta: ¿Cuál es la transformación más general, del espacio y del tiempo, que transforma un sistema inercial en otro inercial?

En respuesta a dicha pregunta surgió el siguiente resultado.

**Teorema** (*Grupo de las Transformaciones de Galileo*). *Sea la transformación*

$$g : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R} \quad (16)$$

$$g \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{r} + t\mathbf{v} + \mathbf{w} \\ t + s \end{pmatrix} \quad (17)$$

donde  $\mathbf{R}$  (que se supone dada por una matriz ortogonal (e.d. tal que  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ) con  $\det(\mathbf{R}) = 1$ ),  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}^3$  y  $s \in \mathbb{R}$  están dados (y fijos). Entonces, todo sistema inercial  $\mathcal{R}(t)$  se transforma mediante  $g$  en otro sistema inercial  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{t})$ .

*Demostración.* Sólo tenemos que comprobar que  $\hat{\mathbf{a}}_a = \mathbf{0}$  para toda partícula que esté en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme respecto de  $\mathcal{R}(t)$ . Sea  $\mathbf{r}(t)$  el vector de posición de esa partícula. Entonces:

$$\begin{cases} g(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{R}\mathbf{r}(t) + t\mathbf{v} + \mathbf{w} \\ \hat{t} := g(t) = t + s \end{cases}$$

con lo que  $\hat{\mathbf{r}}(\hat{t}) := \mathbf{R}\mathbf{r}(\hat{t} - s) + (\hat{t} - s)\mathbf{v} + \mathbf{w}$ . Ahora, derivando dos veces la expresión de  $\hat{\mathbf{r}}(\hat{t}(t))$  obtenemos la aceleración absoluta:

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2} \hat{\mathbf{r}}(\hat{t}) = \mathbf{R} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(\hat{t} - s) = \mathbf{0},$$

por ser el sistema  $\mathcal{R}(t)$  inercial por hipótesis.

#### Observaciones:

1. Se puede demostrar el recíproco: es decir, que toda transformación  $g : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$  que transforma un sistema inercial en un sistema inercial ha de ser de la forma (16).

2. Se puede demostrar que cada transformación de la forma (16) depende de 10 parámetros (1 asociado a  $s$ , 6 asociados a  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  y 3 asociados a la matriz  $\mathbf{R}$ . (la longitud y la latitud del vector  $\mathbf{n}$  de cambio unitario, y el ángulo de giro respecto de  $\mathbf{n}$ )).
3. Se puede demostrar que la familia de todas las transformaciones  $g$  de la forma (16) tiene *estructura de grupo* con respecto de la operación composición.
4. En la mayoría de los textos se analiza solo el caso particular en el que, por ejemplo,  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  se mueve con velocidad uniforme  $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{e}_1$  con respecto de  $\mathcal{R}(t)$  y que  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  tiene ejes paralelos a los de  $\mathcal{R}(t)$ .

Este tipo de conclusiones llevó a Galileo a enunciar el siguiente principio (*Principio de la Relatividad de Galileo*): " Todas las leyes de la Mecánica Clásica son invariantes frente al grupo de transformaciones de Galileo (16)".

## 4 Relatividad Especial de Einstein y Transformaciones de Lorentz

Entre 1881 y 1887, Albert Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923) mostraron experimentalmente algo muy revolucionario: la velocidad de la luz  $c$  es constante e independiente de todo sistema de referencia. Eso le valió a Michelson ganar el Premio Nóbel en Física en 1907 (el primer norteamericano en ganar un Premio Nobel). Hoy día sabemos que  $c$  es el máximo valor de toda velocidad posible ( $c = 299792,458$  km/s, del orden de  $10^6$  veces la velocidad del sonido).

A raíz de estos resultados se dedujeron una serie de paradojas, que fueron la motivación de los principios de Einstein.

Una de las muchas paradojas que se formularon, fue la siguiente:

**Paradoja:** Sea un tren en movimiento rectilíneo uniforme, por ejemplo,  $\mathbf{v} = v_{\hat{O}}\mathbf{e}_1$ , con  $v_{\hat{O}} = 240.000$  km/s. Se emite un rayo de luz desde el último vagón. Veamos la velocidad con la que luz llega a la cabeza del tren. Sea  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y sea  $\widehat{\mathcal{R}}(t) = \{\widehat{O}(t); \widehat{\mathbf{e}}_1(t), \widehat{\mathbf{e}}_2(t), \widehat{\mathbf{e}}_3(t)\}$ , con  $\widehat{O}(t)$  el punto inicial del tren. Entonces, en modulo, la velocidad absoluta del tren será:  $v_a = v_r + v_{\hat{O}}$  (la dirección es la de  $\mathbf{e}_1$ ). Ahora, sabiendo que el rayo de luz se mueve con velocidad absoluta  $c$ , resultaría que  $c = v_r + v_{\hat{O}}$  y por tanto  $v_r = c - v_{\hat{O}} \approx 60.000$  km/s, lo cual es falso según las experiencias de Michelson y Morley. Por otro lado, también se llegaría a un absurdo si la luz se emitiese desde la cabeza del tren (e.d., al revés), pues en ese caso se tendría que  $\mathbf{v}_r^* = -\mathbf{v}_r$  y por tanto  $v_r^* = c + v_{\hat{O}} \approx 540.000$  km/s.

La razón de todo este tipo de paradojas reside en el hecho de que a velocidades tan grandes el tiempo *ya no es universal*, por lo que resulta necesario modificar el Principio de la Relatividad de Galileo antes mencionado.

Esto fue lo que intuyó Albert Einstein (1879-1955), quién, dentro de su *Teoría de la Relatividad Especial* o Restringida (1905)<sup>1</sup>. Propuso dos *axiomas* para evitar las paradojas que resultaban de los experimentos de Michelson y Morley.

**Axioma A:** *Todas las leyes de la Naturaleza ( de la electricidad, del magnetismo,... y , por supuesto, de la Mecánica Clásica) son las mismas para dos observadores que se mueven rectilínea y uniformemente entre sí.*

**Axioma B:** *La magnitud de la velocidad de la luz es independiente del movimiento del observador*<sup>2</sup>.

Es importante subrayar que, contemporáneos a los trabajos de Einstein sobre su Teoría de la Relatividad Especial, fueron los estudios de 1904 realizados por Antoon Lorentz (1853-1928) y por Henri

<sup>1</sup>En 1915 A. Einstein propuso una segunda Teoría de la Relatividad que se denomina *Relatividad General* en contraste a la que propuso en 1905.

<sup>2</sup>Este axioma no se probó de manera práctica hasta 1919, tras un eclipse de Sol. Hasta entonces, sólo era una suposición manejada por varios científicos, pero contraria a la Mecánica de Newton.

Poincaré (1854-1912) sobre la invariancia de las leyes del electromagnetismo (en particular en el sistema de las ecuaciones de Maxwell) frente a cambios de referencia.

Veámos ahora, en particular, que transformaciones entre sistemas inerciales son compatibles con el Axioma B (se ha visto que las de Galileo no respetan ese axioma). La clave será, entre otras cosas, el cambio en la escala del tiempo. Consideraremos sólo el caso en el que  $\mathcal{R}(t)$  y  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  son sistemas inerciales y que, por ejemplo,  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  se mueve con velocidad uniforme  $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{e}_1$  con respecto de  $\mathcal{R}(t)$  (el caso general en el que la dirección de  $\mathbf{v}$  no coincide con ninguno de los ejes es una pequeña variación técnica de este). Supondremos, además, que  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  tiene ejes paralelos a los de  $\mathcal{R}(t)$ .

Supongamos ahora que, cuando  $t = \hat{t} = 0$  ( y por tanto  $O = \widehat{O}$ ), se dispara un rayo de luz que llega (tras un cierto instante) a un punto P arbitrario. ¿Cómo ven el rayo O y  $\widehat{O}$  ?

Si P tiene coordenadas espaciales  $x, y$  y  $z$  y si  $t$  es el tiempo que tarda la luz en llegar de O a P, entonces la longitud recorrida es  $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , luego  $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}/t = c$ , por lo que

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (18)$$

Análogamente, sabiendo que por el Axioma B la velocidad de la luz es siempre la misma, si desde  $\widehat{O}$  se ve que la luz llega a P en un instante  $\hat{t}$ , como la distancia recorrida es  $(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)^{1/2}$ , se ha de tener que

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = c^2 \hat{t}^2. \quad (19)$$

Lo que se quiere ver es qué tipo de transformaciones, entre  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  y  $\mathcal{R}(t)$ , son coherentes con las fórmulas (18) y (19).

Para simplificar la exposición seguiremos la terminología de Herman Minkowski (1864-1909) quien introdujo un espacio con una coordenada compleja, que se denomina, en su honor, como *espacio cósmico o de Minkowski*:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^4 &= \mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R} \\ ((x, y, z), ict) &= (x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \quad (20)$$

En este espacio se tiene la equivalencia (18)  $\Leftrightarrow \sum_{\mu=1}^4 x_\mu^2 = 0$ <sup>3</sup>, y, análogamente, (19)  $\Leftrightarrow \sum_{\mu} \hat{x}_\mu^2 = 0$ .

Obsrvemos que la parte izquierda de estas dos frmulas define una forma bilineal. Se tiene el siguiente resultado afirma que esas dos formas no slo coinciden los conjuntos de nivel a altura cero, sino que coinciden también a cualquier otro nivel.

**Lema** (de Minkowski). Si  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$  con respecto a  $\mathcal{R}(t)$ , entonces  $s^2 \equiv \hat{s}^2$ , siendo  $s^2 := \sum_{\mu=1}^4 x_\mu^2$  y  $\hat{s}^2 := \sum_{\mu=1}^4 \hat{x}_\mu^2$  dos formas bilineales sobre  $\mathbb{M}^4$ .

*Demostración.* Sea

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{M}^4 &\rightarrow \mathbb{M}^4 \\ \mathbf{x} &\rightarrow \widehat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (21)$$

la transformación originada por el cambio de referencia de  $\mathcal{R}(t)$  a  $\widehat{\mathcal{R}}(\hat{t})$ . Se quiere probar que  $s^2 = \hat{s}^2 \quad \forall \mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{M}^4$ , donde  $\widehat{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x})$ . Podemos suponer que  $x_2 = \hat{x}_2$  y  $x_3 = \hat{x}_3$ , ya que dicho cambio de sistema de referencia no afecta a esas coordenadas. Por tanto

$$\begin{aligned} s^2 = 0 &\Leftrightarrow (18) \quad \text{con} \quad x_4 = ict \\ \hat{s}^2 = 0 &\Leftrightarrow (19) \quad \text{con} \quad \hat{x}_4 = ict, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Por convenio, escribiremos los subíndices mudos en griego si estos varían de 1 a 4 (y en el alfabeto usual si varían de 1 a 3).



por lo que sabemos que los conjuntos de nivel a la altura 0 de las dos formas bilineales coinciden. Cómo las variables  $x_2$  y  $x_3$  coinciden con  $\hat{x}_2$  y  $\hat{x}_3$  respectivamente, podemos definir escribir:

$$\Psi = \Phi|_{(x_2, x_3)} : \mathbb{R} \times i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times i\mathbb{R} \quad (22)$$

$$(x_1, ict) \rightarrow (\hat{x}_1, ic\hat{t})$$

Y así  $\Psi$  mantiene el conjunto de nivel cero de ambas formas bilineales (pues  $\Phi$  lo hace). Además,  $\Phi$  es una *aplicación lineal*, pues respecto de las coordenadas espaciales sólo hacemos un cambio de base (que es lineal). Respecto del tiempo, el cambio dado por  $\Phi$  proviene de un movimiento rectilíneo uniforme de  $\hat{O}$ , luego  $\Phi$  depende linealmente del tiempo y por tanto  $\Psi$  es también lineal en  $t$ . En consecuencia, a lo sumo, existirá una constante  $\lambda = \lambda(\mathbf{v})$ , tal que:

$$\hat{s}^2 = \lambda(x_1^2 + x_4^2) + x_2^2 + x_3^2$$

y por tanto se ha de tener que  $\hat{x}_1 = \sqrt{\lambda}x_1 \Leftrightarrow \hat{t} = \sqrt{\lambda}t = \frac{1}{c}\hat{x}_1$ . Pero además,  $\lambda$  no puede depender más que del módulo de  $\mathbf{v}$  (pues no hay puntos del espacio privilegiados: "propiedad de isotropía"): es decir  $\lambda = \lambda(v)$ .

Si ahora hacemos el cambio inverso (e.d., se cambia el papel de  $\hat{s}^2$  y de  $s^2$ ), tenemos que

$$\frac{1}{\lambda(v)} = \lambda(v) \Rightarrow \lambda^2(v) = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Pero en el caso particular de  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  concluimos que  $\lambda(0) = 1$ , luego, por continuidad respecto de  $\mathbf{v}$ , ha de ser  $\lambda(v) = +1$ , de lo que concluimos que  $s^2 = \hat{s}^2$  (y por tanto la coincidencia entre ambas formas bilineales para todos los conjuntos de nivel).■

Lorentz caracterizó este cambio de variables por medio de una matriz y dió forma al teorema siguiente, también llamado de Lorentz-Einstein. Lorentz lo probó inicialmente al ocuparse del electromagnetismo (las ecuaciones de Maxwell). Poco tiempo después Einstein lo extendió a la Mecánica Clásica.

**Teorema** (de Lorentz-Einstein). *La aplicación lineal  $\Phi : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{M}^4$  asociada al cambio de referencia indicado anteriormente, viene dada por la matriz:*

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (23)$$

donde  $\beta := v/c$  y  $\gamma := 1/(1 - \beta^2)$ . En particular

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \hat{x}_2 = x_2 \\ \hat{x}_3 = x_3 \\ \hat{t} = \frac{t - x_1v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad (24)$$

*Demostración.* De la linealidad de  $\Phi$  y de otras propiedades vistas sobre ella podemos asociar a  $\Phi$  la matriz de cambio de base

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix} = (\lambda_{\alpha\nu}), \quad \alpha, \nu = 1, \dots, 4. \quad (25)$$

(Recordemos que  $x_2$  y  $x_3$  han de coincidir con  $\hat{x}_2$  y  $\hat{x}_3$ ). Los términos  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{41}$  y  $\lambda_{44}$  podrían ser números complejos (dependientes del tiempo), pero  $\lambda_{11}$  siempre tendrá que ser un número real ya que define el

cambio de coordenada espacial de  $x_1$  a  $\hat{x}_1$  (obviamente ha de ser  $\lambda_{11} \neq 0$ ). Por el Lema de Minkowski,  $\mathbf{L}$  es una isometría (pues mantiene las seminormas: aún más, es una matriz ortogonal). Por tanto

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{I} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{\nu=1}^4 \lambda_{\alpha\nu}\lambda_{\alpha\nu} = \delta_{\alpha\mu} = \begin{cases} 1 & \alpha = \mu \\ 0 & \alpha \neq \mu \end{cases} \\ \sum_{\alpha=1}^4 \lambda_{\alpha\mu}\lambda_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

Coordenada a coordenad tenemos que (26) equivale a

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 & 0 & 0 & \lambda_{11}\lambda_{41} + \lambda_{14}\lambda_{44} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41}\lambda_{11} + \lambda_{44}\lambda_{14} & 0 & 0 & \lambda_{41}^2 + \lambda_{44}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = 1 & (A) \\ \lambda_{41}^2 + \lambda_{44}^2 = 1 & (B) \\ \lambda_{11}\lambda_{41} + \lambda_{14}\lambda_{44} = 0 & (C) \end{cases}$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{41}^2 & 0 & 0 & \lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_{41}\lambda_{44} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{14}\lambda_{11} + \lambda_{44}\lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{14}^2 + \lambda_{44}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{11}^2 + \lambda_{41}^2 = 1 & (D) \\ \lambda_{14}^2 + \lambda_{44}^2 = 1 & (E) \\ \lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_{41}\lambda_{44} = 0 & (F) \end{cases}$$

Entonces, si  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{L}$  viene dada por la (25) suponiendo que  $\lambda_{11} \neq 0$  tenemos que necesariamente

$$\hat{x}_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{14}x_4 = \lambda_{11} \left( x_1 + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}ict \right).$$

Utilizando el hecho de que, cuando  $\hat{x}_1 = 0$  (e.d. la primera coordenada de  $\widehat{\mathcal{O}}$ ) entonces resulta  $x_1 = vt$ , podemos escribir

$$0 = \lambda_{11} \left( vt + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}ict \right) \Rightarrow \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}} = \frac{vi}{c} = i\beta.$$

Además, por el axioma (A), se tiene que

$$\lambda_{11}^2 \left( 1 + \frac{\lambda_{14}^2}{\lambda_{11}^2} \right) = 1 \Rightarrow \lambda_{11}^2 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{14}^2}{\lambda_{11}^2}} \Rightarrow \lambda_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \pm\gamma.$$

Para determinar el signo de  $\lambda_{11}$  razonamos de la siguiente manera: cuando  $v \rightarrow 0$  entonces  $\hat{x}_1 \rightarrow x_1$  (si no hay velocidad, no hay cambio). Por tanto, ha de ser  $\lambda_{11} > 0$  pues en otro caso, sin movimiento alguno, habría cambio de signo. Deducimos pues que  $\lambda_{11} = \gamma$ . Análogamente, de (A) resulta que

$$\lambda_{14}^2 = 1 - \lambda_{11}^2 = (D) = \lambda_{41}^2 \Rightarrow \lambda_{14} = \pm\lambda_{41}.$$

Además, por (F):

$$\lambda_{44} = -\frac{\lambda_{14}\lambda_{11}}{\lambda_{41}} = \pm\lambda_{11} = \pm\gamma;$$

de hecho, resulta  $\lambda_{44} > 0$  ya que  $\hat{x}_4 = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}x_4 = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}ict$ , y en el origen  $x_1 \rightarrow 0$  los tiempos deben de coincidir ( $\hat{t} \rightarrow t$ ). Luego  $\lambda_{44} = \gamma$ . Finalmente, otra vez por (F), se tiene que

$$\lambda_{14} = -\frac{\lambda_{44}\lambda_{41}}{\lambda_{11}} = -\lambda_{41}$$

y, de la (A) deducimos que

$$\lambda_{14}^2 = 1 - \lambda_{11}^2 = 1 - \frac{1}{1 - \beta^2} = -\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Rightarrow \lambda_{14} = i\beta\gamma,$$

lo que acaba la demostración. ■

**Observación.** Entre las muchas consecuencias que se deducen del anterior teorema podemos señalar las siguientes:

1. *Contracción de la longitud de FitzGerald-Lorentz.* Dada una barra inicialmente en reposo sobre el eje  $\mathbf{e}_1$  del sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de longitud  $l$ , su longitud medida por con respecto a  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  (con  $\hat{O}(\hat{t})$  moviéndose con velocidad constante  $v$  a lo largo de  $\mathbf{e}_1$ ) será

$$\hat{l} = l\sqrt{1 - \beta^2},$$

siendo  $\beta = v/c$ .

2. *Dilatación del tiempo.* Si un reloj ocupa una posición determinada en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$  y emite señales con un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , ese mismo intervalo de tiempo medido por un observador desde el sistema móvil  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  será

$$\Delta\hat{t} = \Delta t / (\sqrt{1 - \beta^2}).$$

3. *Regla relativista de composición (adición) de velocidades.* Supongamos tres sistemas de referencia inerciales  $\mathcal{R}$ ,  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  y  $\mathcal{R}^*(t^*)$  que se mueven colinealmente a lo largo de sus ejes  $\mathbf{e}_1$  respectivos. Sea  $\hat{v}$  el módulo de la velocidad de  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{t})$  respecto de  $\mathcal{R}$  y  $v^*$  el módulo de la velocidad de  $\mathcal{R}^*(t^*)$  respecto de  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{t})$ . Entonces, la velocidad  $v$  de  $\mathcal{R}^*(t^*)$  respecto de  $\mathcal{R}$  viene dada por

$$v = \frac{\hat{v} + v^*}{1 + (\hat{v}v^*/c^2)}.$$

En particular, las hipótesis  $\hat{v} \leq c$  y  $v^* \leq c$  implican que  $v \leq c$  con lo que se ha evitado la paradoja observada desde finales del siglo XIX cuando Albert Michelson y Edward Morley mostraron que no se puede superar la velocidad de la luz  $c$ .

## 1.A.3. Dinámica de una partícula.

### 1.A.3. i) Comentarios a las Leyes de Newton. Tipos de fuerzas.

Recordemos de nuevo que tres principios que aparecieron en el año 1687 en la obra de Newton (1643-1727) "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

*Primera ley. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado por fuerzas aplicadas que cambien su estado.*

*Segunda ley. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.*

*Tercera ley. Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: es decir, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.*

Como dijimos,

Seguiremos la aproximación de Ludwig Lange (1863-1936) de 1885 suponiendo.

AXIOMA I.- *Existen ciertos sistemas de referencia  $\mathcal{R}$ , llamados inerciales o Galileanos, con respecto a los cuales toda partícula aislada se mantiene en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.*

Nótese que en los sistemas inerciales la primera ley dice que una partícula aislada debe verificar que  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}^1 t + \mathbf{c}^2$ , para ciertos vectores constantes  $\mathbf{c}^1$  y  $\mathbf{c}^2$ . Por tanto  $(\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2})_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$ .

Si tomamos un sistema de referencia  $\hat{\mathcal{R}}(t)$  vimos que

$$\mathbf{a}_a(t) = \hat{\mathbf{a}}_r(t) + \mathbf{a}_e(t) + \mathbf{a}_c(t)$$

con lo que afirmar que una partícula está en reposo respecto de  $\mathcal{R}$  no implica necesariamente que  $\widehat{\mathbf{a}}_r(t) = \mathbf{0}$  con lo que su movimiento podría no verse como *rectilíneo y uniforme o en reposo* respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$ . El Teorema de Galileo, visto en Cinemática, muestra que si  $\widehat{\mathcal{R}}(t)$  se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme respecto de  $\mathcal{R}$  entonces  $\widehat{\mathcal{R}}$  es también inercial (son las implicaciones i)  $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) del Teorema de Galileo que se mantienen sin pedir que  $\mathcal{R}$  sea absoluto).

Comentarios a la segunda y tercera ley: nociones de masa y de fuerza.

El filósofo y físico austriaco Ernest Mach (1838–1916) propuso un camino alternativo al de intentar justificar al pie de la letra las leyes segunda y tercera de Newton, permitiendo una definición no acoplada de las nociones de masa y de fuerza. La idea clave es precisar de manera cuantitativa el concepto de interacción ya señalado por Newton:

AXIOMA II.- *Dado un sistema aislado de dos partículas  $P_1, P_2$ , los módulos de sus aceleraciones,  $a^1(t)$  y  $a^2(t)$ , medidas respecto de un sistema inercial arbitrario son estrictamente positivos, para cada instante  $t$ , y están en una proporción  $m_{1,2}$ , es decir,*

$$\frac{a^1(t)}{a^2(t)} = m_{1,2},$$

*que no depende del instante  $t$  ni del estado cinemático del sistema. Además, las constantes de interacción  $m_{0,1}$  y  $m_{0,2}$  con una tercera partícula  $P_0$  obtenidas considerando la interacción en condiciones de aislamiento de  $P_0, P_1$  y  $P_0, P_2$  respectivamente, verifican que*

$$m_{1,2} = \frac{m_{0,2}}{m_{0,1}}.$$

Notese que de esta forma  $m_{0,1}a^1(t) = m_{0,2}a^2(t)$ . La partícula  $P_0$  puede ser tomada como partícula *patrón* y así para conocer la interacción entre dos partículas arbitrarias  $P_1, P_2$  basta conocer la constante de interacción de cada una de ellas con la partícula patrón. Llegamos así a la siguiente

**Definition 25** *Sea  $P_0$  una partícula tomada como patrón de un sistema de unidades. Diremos entonces que en ese sistema de unidades  $P_0$  tiene de masa la unidad:  $m_0 = 1$ . Dada cualquier otra partícula  $P_1$  diremos que la masa inercial  $m_1$  de  $P_1$  respecto de la unidad de medida  $m_0$  viene dada por la constante de interacción  $m_1 = m_{0,1}$  entre  $P_0$  y  $P_1$ .*

Nótese que la masa  $m$  de una partícula no está unívocamente determinada si no es con la explícita mención a la unidad de masa  $m_0$  en la que es medida. Pero antes de comentar las distintas unidades universales de medida sigamos en nuestro camino de interpretación de las leyes de Newton. El siguiente axioma da una dirección a la interacción entre dos partículas y, más tarde, conducirá a la tercera ley

AXIOMA III: *Los vectores aceleración  $a^1(t)$  y  $a^2(t)$  correspondientes a las partículas  $P_1, P_2$ , del Axioma II tienen la dirección del vector  $\overrightarrow{P_1P_2}$  y sentido opuesto.*

Para poder abordar el caso de la interacción de más de dos partículas necesitaremos un último axioma:

AXIOMA IV: *La aceleración producida por otras partículas  $P_i$  sobre una partícula  $P$  es la suma de las aceleraciones que se producirían si las partículas  $P_i$  y  $P$  estuviesen aisladas dos a dos.*

Si ahora queremos enlazar con las leyes de Newton bastará definir el concepto de fuerza a través del de masa, es decir como efecto dinámico complejo sobre una partícula  $P$  por la interacción con otras partículas:

**Definition 26** *Dado un instante  $t$  y una partícula  $P$  de masa  $m$  con una aceleración  $\mathbf{a}$  respecto de un sistema inercial, diremos que la fuerza total  $\mathbf{f}$  que actúa sobre  $P$  viene dada por la expresión*

$$\mathbf{f}(t) := m\mathbf{a}(t).$$

Nótese que finalmente, para lograr una correcta presentación hemos preferido “deducir” la segunda ley a partir de unos axiomas al camino contrario de partir de la segunda ley como postulado.

Otra consecuencia del Axioma III es que

$$m_1\mathbf{a}^1(t) = -m_2\mathbf{a}^2(t),$$

lo que nos muestra que la fuerza  $\mathbf{f}_{1,2} = m_1\mathbf{a}^1$  que ejerce  $P_2$  sobre  $P_1$  es igual y contraria a la fuerza  $\mathbf{f}_{2,1}$  que ejerce  $P_1$  sobre  $P_2$  con lo que, de nuevo, la tercera ley es ahora una conclusión y no un postulado.

Conviene señalar que todo lo dicho hasta ahora se ha de entender asociado a un sistema de referencia inercial. Esta es la razón por la que a este concepto de masa se le denomina *masa inercial*. Tras la *Teoría restringida de la Relatividad* de Einstein se sabe que en realidad hay un concepto dinámico de masa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde  $m_0$  es la masa inercial,  $v$  es el módulo de la velocidad de un sistema de referencia no absoluto y  $c$  la velocidad de la luz. Como en la práctica  $v^2/c^2 \ll 1$  se tiene que  $m = m_0 + O(v^2/c^2)$  y por tanto, para fenómenos no relativistas podemos identificar la masa dinámica y la inercial.

## Problemas directos e inversos de la Mecánica Newtoniana de una partícula.

En lo que sigue tendremos en cuenta la eventual dependencia de las fuerzas como una función (a valores en  $\mathbb{E}^3$ ) del tipo

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)).$$

Nótese que por la Segunda Ley de Newton no es posible la dependencia de  $\mathbf{f}$  respecto de la aceleración. A grandes rasgos, existen tres *tipos de fuerzas*, bien entendido que con frecuencia se pueden yuxtaponer varias fuerzas de distinto tipo sobre una misma partícula:

- i) *fuerzas de impulso*. Son independientes de la posición y velocidad,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ .
- ii) *fuerzas de posición*. Dependen exclusivamente del vector posición  $\mathbf{r}(t)$  de la partícula  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))$ . Como veremos más adelante, tienen una gran importancia en Mecánica Clásica.
- iii) *fuerzas de rozamiento*. Dependen exclusivamente del vector velocidad de la partícula  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{r}}(t))$ .

Por tanto, supuesto un sistema inercial los problemas (llamados *directos*) de la Mecánica Clásica asociados a una partícula de masa  $m$  consisten en hallar su posición  $\mathbf{r}(t)$ , a lo largo del tiempo, supuestos conocidos el siguiente *conjunto de datos*:

i) La *fuerza total*  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ , es decir una función  $\mathbf{f} : D(\mathbf{f}) \rightarrow \mathbb{E}^3$  donde  $D(\mathbf{f})$  es un abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$  (con frecuencia las fuerzas “se hacen infinito” en ciertos puntos del espacio). Supondremos siempre que  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1$  (mientras no se indique expresamente lo contrario).

ii) Los *datos iniciales*  $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{E}^3$  y  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{E}^3$ .

La Segunda Ley de Newton se formula (siguiendo a Euler) al problema de valores iniciales (a veces denominado Problema de A. Cauchy (1789-1857))

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \text{ en } \mathbb{E}^3, \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

con  $t_0 \in \mathbb{R}$  y que en muchos casos será  $t_0 = 0$ . Sería Leonhard Euler quien en su obra magistral *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*, de 1755, señalase con una clarividencia sorprendente para la época una profunda reflexión: “la teoría queda reducida a unas ecuaciones diferenciales: solo falta el cultivo de su análisis matemático”. Este es la gran diferencia entre el presente curso y otros de naturaleza más elemental como los que se ofrecen antes del periodo universitario o en textos más elementales en los

que no se utiliza el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Insistiremos mucho en que no utilizaremos las ecuaciones diferenciales en calidad de especialistas sino en calidad de usuarios (en la misma medida de que no hace falta ser un especialista en Informática para poder manejar un simple ordenador, ni un especialista en motores de coches para poder conducirlo)

Señalemos también que en algunas ocasiones no se conoce completamente la fuerza total: se trata de los llamados *problemas directos incompletos* ó *mal planteados*. Un ejemplo importante aparece con los *movimientos con ligaduras* (o *restricciones*) a los que nos referiremos más adelante y, en especial, en el Apéndice 5. Pensemos, por ejemplo, en una cuenta de collar descendiendo por una alambre: junto a la acción de la gravedad, que provocaría un descenso vertical en ausencia del alambre, hay otra fuerza, *desconocida a priori*, debida a la restricción de deslizarse por el alambre.

Otro tipo diferentes de problemas son los llamados *problemas inversos*. Son aquellos en los que la verdadera incógnitas del problema son uno o varios datos de la formulación directa. La mayoría de las veces esos datos se deben calcular de manera que se optimice un cierto objetivo. Este es el caso de multitud de problemas de la Teoría de Control. Ejemplos sencillos surgen en el estudio de las trayectorias de satélites artificiales: se pretende conseguir, mediante *controles* adecuados, que la trayectoria obedezca a unos objetivos muy concretos que requieren una *actuación artificial*.

Antes de ofrecer un listado de los ejemplos más frecuentes de fuerzas que serán consideradas en este curso señalemos que existen tan solo 4 tipos distintos de interacciones fundamentales: interacción nuclear fuerte, interacción nuclear débil, interacción electromagnética e interacción gravitatoria. Casi toda la historia de la física moderna se ha centrado en la unificación de estas interacciones. Galileo hizo una completa descripción de los efectos de la gravedad en la Tierra y Kepler describió por primera vez el movimiento planetario de manera independiente de los resultados de Galileo. Hasta ese momento se creía que ambos fenómenos eran diferentes hasta que Isaac Newton, en sus Principia de 1668, los describió bajo el mismo concepto, la fuerza gravitatoria.

Por otro lado, antes del siglo XIX, varios científicos como Stephen Gray, Joseph Priestley, Charles Coulomb y Alessandro Volta habían ya descrito casi en su totalidad los fenómenos eléctricos. En 1820, Hans Christian Ørsted descubrió por primera vez perturbaciones magnéticas producidas por corrientes eléctricas. Finalmente, James Clerk Maxwell en 1861 unificó ambos tipos de fenómenos con sus ecuaciones sobre el electromagnetismo.

La *Teoría de la Relatividad General* de 1915 de Einstein estudia el comportamiento de la interacción gravitatoria a escala planetaria y supragaláctica describiéndolo como el espacio-tiempo sufre una deformación por la presencia de grandes masas. La teoría newtoniana de la gravitación que analizaremos en este curso no es más que una aproximación no-relativista a la interacción gravitatoria pero que es muy efectiva si las velocidades de los puntos no son cercanos a la velocidad de la luz.

La llamada *Teoría del todo* pretende la unificación de todas las interacciones. La denominada *Teoría de supercuerdas* persigue ese fin.

Tan solo las interacciones gravitatoria y electromagnéticas tienen un alcance infinito (las otras dos solo aparecen a distancias extremadamente pequeñas). La electromagnética es mucho más fuerte que la gravitatoria y describe casi todos los fenómenos de nuestra experiencia cotidiana. Estos van desde el rayo láser y la radio, a la estructura atómica y a fenómenos tales como la fricción y el arco iris. Una tabla orientativa es la siguiente

Interacción	Fuerza relativa	Función distancia	Alcance (m)
Gravitatoria	1	$\frac{1}{r^2}$	$\infty$
Electromagnética	$10^{36}$	$\frac{1}{r^2}$	$\infty$
Fuerte	$10^{38}$	$\frac{e^{-\frac{r}{R}}}{r^2}$	$10^{-15}$
Débil	$10^{25}$	$\frac{e^{-m_{W,Z}r}}{r^2}$	$10^{-18}$

a) El primer tipo de fuerza de interacción unificada que se comprendió en primer lugar fue la gravitatoria, también llamada *fuerza de atracción Newtoniana*: ya Galileo y Huygens habían medido en experimentos

(caídas de piedras, péndulos) que la gravedad venía dada por  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$  con  $g = 9,8ms^{-2}$ . La fuerza es entonces  $\mathbf{f} = m\mathbf{g}$

Basándose en las leyes de Kepler, Newton propuso una *ley de atracción* (entre la Tierra y la Luna) del tipo

$$\mathbf{f} = -M_T M_L \frac{4\pi C}{r^2} \mathbf{e}$$

siendo  $r$  = la distancia entre ellas,  $C$  una *constante universal* y  $\mathbf{e}$  el vector unitario que les une. Después calculó esa constante  $C$  y *demostró* que si la ley era válida para cualesquiera dos masas (por ejemplo una piedra y la Tierra) entonces  $g\mathbf{e}_3$  con  $g = 9,8ms^{-2}$ . Finalmente propuso que

$$\mathbf{f} = -M_T M_L \frac{G}{r^2} \mathbf{e},$$

con  $G=6.668 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$  o bien

$$\mathbf{f} = -GM_T M_L \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}$$

Como  $M_T \gg M_L$  se puede despreciar (en una primera aproximación) la atracción de la Luna sobre la Tierra y poner a esta última en el origen de coordenadas: esa fue la *primera justificación* de la gravedad. El éxito es que esa ley también regula la atracción entre dos estrellas. Veremos la justificación de esta figura en otro capítulo.

Una vez descrito este tipo de fuerzas ya se pueden abordar numerosos *problemas directos* de la Mecánica Clásica como por ejemplo el de la *caída vertical en un sistema no inercial*.

Un ejemplo sencillo de *problema inverso* ligado a esta fuerza es el que se refiere aun lanzador de peso que intenta optimizar el ángulo de su lanzamiento (manteniendo el módulo de su velocidad inicial) de manera que el alcance sea máximo.

**b) de interacción electromagnéticas.** A escala macroscópica forman la Ley de Charles Coulomb (1736-1806)

$$\mathbf{f} = Kq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}$$

con  $q_1, q_2$  cargas eléctricas (independientes de las masas) y  $K$  constante positiva universal dependiente de las unidades. Nótese que es atractiva o repulsiva según que  $q_1, q_2$  tengan distinto o igual signo. Las fuerzas de interacción nuclear débil o nuclear fuerte solo se manifiestan a escalas microscópicas (del orden de  $10^{-15}m$ ) y, salvo que se indique lo contrario no serán analizadas en este curso.

Otro tipo de fuerzas macroscópicas que intervienen en ese contexto son las llamadas *fuerzas de Hendrik Antoon Lorentz* (1853-1928) en las que una partícula cargada  $q$  interactúa con su exterior por medio de un campo electromagnético constituido por la asociación de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y un campo magnético  $\mathbf{B}$  originando la fuerza

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

**c) de interacción con medios continuos**

**c1) resistencia en un fluido** (G.G.Stokes (1819-1903)) Resultan macroscópicamente de un análisis complicado tras simplificar la situación: Por ejemplo: esfera de radio  $r$  moviéndose en un fluido viscoso de viscosidad  $\lambda$ . Si la velocidad es pequeña ( $v < 2ms^{-1}$ ) recibe una fuerza de rozamiento opuesta al movimiento de intensidad

$$\|\mathbf{f}\| = -6\pi r\lambda \|\mathbf{v}\|$$

(habría que sustituir la esfera por el centro de masa pero seguiría apareciendo  $r$ , es decir no se haría  $r \rightarrow 0$ ). Vectorialmente

$$\mathbf{f} = -6\pi r\lambda \mathbf{v}.$$

Si la velocidad es moderadamente mayor ( $2\text{ms}^{-1} < v < 200\text{ms}^{-1}$ ) se dice que la resistencia es de tipo hidráulico y resulta

$$\mathbf{f} = -\beta v \mathbf{v} \quad (\text{notese que } f = \beta v^2).$$

Si la velocidad es aun mayor la resistencia se dice de tipo balístico y  $f = f(v)$  con  $f$  que crece mas rápidamente que  $v^2$ .

**c2a)** *Fuerza de reacción a soportes materiales (ligaduras).* Cuando un cuerpo se apoya sobre una superficie se dice que hay una *ligadura unilateral* (se puede despegar de ella pero no atravesarla). Aparece la fuerza de reacción  $\mathbf{R}$  que ejerce el soporte sobre el móvil como opuesta a la que ejerce el móvil sobre el soporte (y que suele ser despreciable por su pequeña magnitud incapaz de originar movimientos sobre el soporte).

Se suele descomponer  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_t$ ,  $\mathbf{R}_n = R_n \mathbf{n}$ , con  $\mathbf{n}$  vector normal a la superficie (nótese que la condición de contacto es  $R_n \geq 0$ ). Aparecen dos coeficientes de rozamiento (dinámico y estático) originados por  $\mathbf{R}_t$ .

El caso de una partícula moviéndose exactamente sobre una superficie (o sobre una curva) pasa a ser una ligadura bilateral. Sobre una curva la fuerza  $\mathbf{R}_n$  tiene la dirección de la normal. En general son difíciles de determinar a priori y sólo se pueden calcular al final de largos procesos (véase el Apéndice 5).

**c2b)** *Resistencia con una superficie elástica o sólida (Coulomb).* Ahora el análisis se obtiene del estudio de sólido contra sólido. Resulta

$$\mathbf{f} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (\text{notese que } f = \mu N)$$

con  $\mu$  (coeficiente de fricción: en realidad hay uno estático y otro menor dinámico),  $N$  módulo de la fuerza normal a la superficie en el que hay contacto.  $N$  suele depender del peso  $m\mathbf{g}$  (plano inclinado, superficie horizontal..) aunque a veces puede que no sea así (contacto vertical con algo en movimiento: carretilla,...: en ese caso es  $N = ma$ ). Obsérvese que es una fuerza que no está bien definida para  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  y que de hecho es discontinua para  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (de los pocos ejemplos de fuerzas discontinuas en Mecánica Clásica).

**c3)** *ley de Robert Hooke (1635-1703):* Muelle con un punto fijo y el otro libre con una masa  $m$ . Se define  $x(t)\mathbf{e}$  elongación. Fuerza unidireccional. Macroscopicamente

$$\mathbf{f} = -kx(t)\mathbf{e}$$

Caso de un muelle con los dos extremos libres ... Origen de la *Teoría de la Elasticidad lineal...*

**d)** *Fuerzas ficticias en sistemas no inerciales.* Si el sistema se describe desde un sistema no inercial entonces vimos en Cinemática que

$$\mathbf{a}_a = \widehat{\mathbf{a}}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

con lo que

$$m\widehat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{f} + \mathbf{f}_f$$

siendo

$$\mathbf{f}_f := -m(\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c),$$

que es denominada *fuerza ficticia*. Observe el parecido entre la fuerza ficticia de Coriolis y la de Lorentz.

Este es el momento adecuado para hacer un rápido repaso de los resultados más elementales de la *Teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias* que en este curso utilizaremos de manera sistemática aunque no como especialistas sino en calidad de usuarios (en la misma medida de que no hace falta ser



un especialista en Informática para poder manejar un simple ordenador, ni un especialista en motores de coches para poder conducirlo). [Ver ahora las primera páginas del Apéndice 3].

### 1.A.3. iii). Momento lineal y angular de una partícula. Momento angular de una fuerza. Ecuación del péndulo.

Dada una partícula de masa  $m$  moviéndose respecto de un sistema inercial  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  con vector de posición  $\mathbf{r}(t)$ , se define el *vector momento angular* (respecto del punto  $O$ ) mediante la expresión

$$\mathbf{L}(t) := \mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t).$$

Por tanto,  $\mathbf{L}(t)$  es un vector ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  y a  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ . A su módulo,  $L(t)$ , se le denomina simplemente como *momento angular*, o *momento angular escalar (respecto del origen  $O$ )*. Se trata de una noción que tiene su aplicación y origen ya en la *ley de la palanca* que aparece en los trabajos de Aristóteles (384-322 a. de C.) y Arquímedes (287-212 a.de C.). Así, dada una fuerza  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  se define el vector *vector momento angular de  $\mathbf{f}$*  (respecto del punto  $O$ ), que algunos autores denominan *torque de  $\mathbf{f}$* , mediante el vector  $\mathbf{N}(t) := \mathbf{r}(t) \times \mathbf{f}$ . Una sencilla aplicación de la segunda Ley de Newton conduce a

**Corolario.** Si  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  es la fuerza ejercida sobre la partícula entonces se tiene que

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{N}(t)$$

*Demostración.* Basta derivar el vector  $\mathbf{L}(t)$ , observar que  $\dot{\mathbf{r}}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$  y aplicar la segunda ley de Newton.

**Observaciones.** 1. Si (como hizo L. Euler (1707-1783) en su tratado de 1736, *Mechanica sive motus scientia analytice expositia*) se define previamente el vector *vector momento lineal* (respecto del punto  $O$ ) mediante la expresión

$$\mathbf{p}(t) := m\dot{\mathbf{r}}(t)$$

entonces  $\mathbf{L}(t) := \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$ .

2. Veremos que en el caso de sistema de partículas se tiene una fácil extensión de este Corolario. Por el contrario, en el caso del sólido rígido (tal y como señaló Euler, y en contra de lo que supuso Newton) no es posible deducir la variación del vector momento angular de la segunda ley. Por el contrario necesitaremos suponer una ley adicional (a las equivalentes a las tres leyes de Newton para sólidos rígidos) regulando tal variación.

3. En el Apéndice sobre movimientos con ligaduras se verá la importancia (y vigencia para el caso de "ligaduras perfectas") de este Corolario.

Antes de seguir con otras nociones sencillas pero que poseen una gran importancia en el estudio de la Dinámica, aplicaremos la anterior Proposición a la deducción de la ecuación no lineal más elemental en Mecánica Clásica: la ecuación del péndulo simple.

*Esquema:* Una partícula material, de masa  $m$ , se mantiene en todo momento en un plano (a diferencia del llamado péndulo esférico) y a una distancia  $l$  de un punto fijo  $O$  (movimiento con ligaduras) sobre el que se situa un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  (que suponemos inercial) describiendo un punto  $P(t)$  que se mueve (sobre esa circunferencia) bajo la única acción de la gravedad  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$  (despreciamos en este caso todo posible rozamiento). En un principio el numero de grados de libertad sería 2 pero si se introduce  $\theta(t)$ , el ángulo del vector de posición  $\mathbf{r}(t) = l\mathbf{e}_\rho(\theta(t))$  (al trabajar en coordenadas cilíndricas sobre el plano en el que se produce el movimiento y que podemos suponer, sin pérdida de generalidad que es el generado por  $O; \mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_3$ : es decir, de vector normal  $\mathbf{e}_2$ ) entonces tendremos que

$$\mathbf{L}(t) := \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = l\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) \times ml\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t)) = ml^2\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_2,$$

de lo que deducimos que

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = ml^2 \ddot{\theta}(t) \mathbf{e}_2.$$

Sólo nos falta hallar el momento angular de la fuerza total y aplicar el Corolario. La fuerza total es

$$\mathbf{f} = -mg\mathbf{e}_3 + \mathbf{R}$$

donde  $\mathbf{R}$  es la *fuerza de ligadura* (al estar obligado a moverse sobre la circunferencia). Aunque en general se tiene la descomposición  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_t$ , con  $\mathbf{R}_n = R_n \mathbf{n}$ , con  $\mathbf{n}$  vector normal a la curva (que en nuestro caso es  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho(\theta(t))$ ) se supone que  $\mathbf{R}_t \equiv \mathbf{0}$  (condición de ligadura perfecta o ideal) con lo que  $\mathbf{R} = R_n \mathbf{e}_\rho(\theta(t))$  (que se puede asociar también a la *tensión del hilo inmaterial*). Ahora, basta utilizar la descomposición  $-\mathbf{e}_3 = \cos\theta(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) - \sin\theta(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t))$  para comprobar que

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{f} = -mgl \sin\theta(t) \mathbf{e}_2$$

de lo que concluimos

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin\theta(t) = 0$$

que es la llamada *ecuación del péndulo simple*.

### 1.A.3. iv). Potencia y trabajo de una fuerza. Energía cinética.

Leibniz, en 1695, se interesó por los efectos (activos o inactivos) de las fuerzas sobre la trayectoria del movimiento. Los efectos inactivos los asociaba a lo que denominó *fuerzas muertas* (por ejemplo las que son ortogonales a los movimientos) e introdujo la siguiente

**Definición.** Dada una fuerza  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  originando un movimiento  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , se denomina **potencia de  $\mathbf{f}$  relativa al movimiento  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$** , en el instante  $t = t_0$  al escalar

$$\mathcal{P}(t_0) := \mathbf{f}(t_0, \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) \cdot \mathbf{v}(t_0)$$

Su acumulación temporal lleva al concepto de trabajo

**Definición.** Dada una fuerza  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  originando un movimiento  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , se denomina **trabajo de  $\mathbf{f}$  relativo al movimiento  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$** , en el intervalo  $(t_1, t_2)$ , al escalar

$$\mathcal{L}(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt$$

**Observaciones.** 1. Nótese la interpretación geométrica de esos conceptos: lo que se mide es la proyección de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$  sobre  $\mathbf{v}(t)$ . Las *fuerzas muertas* corresponden a aquellas en las que  $\mathcal{L}(t_1, t_2) = 0$  (no realizan trabajo).

2. En algunos textos se introduce el trabajo elemental mediante  $d\mathcal{L} = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  pero, al menos por ahora, evitaremos esta noción dada la complejidad de la definición matemática de las diferenciales.

3. Dimensionalmente

$$[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}, [\mathcal{L}] = ML^2T^{-2}.$$

4. Las anteriores nociones dependen del sistema de referencia y así respecto un nuevo sistema de referencia

$$\mathcal{P}_a = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_a = \mathbf{f} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_r + \mathbf{v}_e) := \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_e.$$

5. Si la fuerza es posicional  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$  (e.d. si se trata de un *campo de fuerzas*  $\mathbf{f} : D(\mathbf{f}) \rightarrow \mathbb{E}^3$  donde  $D(\mathbf{f})$  es un abierto de  $\mathbb{E}^3$ ) el trabajo en el intervalo  $(t_1, t_2)$  coincide con la noción de **integral curvilínea de  $\mathbf{f}$**  a lo largo de la curva  $\Gamma$  dada por la trayectoria del movimiento parametrizada con el tiempo como  $\mathbf{r} : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  (supuesto fijado un sistema de referencia), es decir,

$$\mathcal{L}(t_1, t_2) = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$

La noción de integral curvilínea y su desarrollo matemático surgió pues de la Mecánica Clásica (como muchas otras herramientas matemáticas que luego se aplicaron en contextos enteramente diferentes).

Se introduce ahora la siguiente noción crucial

**Definición.** Dada una partícula de masa  $m$ , se denomina **energía cinética en el instante  $t$**  al escalar

$$\mathcal{K}(t) := \frac{1}{2} m \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2,$$

(cuya inicial viene motivada por la terminología griega e inglesa: *kinetic (energy)* tiene su raíz en el término griego *kinesis* que significa movimiento).

**Proposición** (de las fuerzas vivas). Se tiene que

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = \mathcal{P}(t).$$

En particular,

$$\mathcal{K}(t_2) - \mathcal{K}(t_1) = \mathcal{L}(t_1, t_2).$$

*Demostración.* Multiplicando (escalarmente) en la expresión de la segunda ley de Newton por  $\mathbf{v}(t)$  se tiene que

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Basta entonces aplicar que

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)) = 2 \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$$

y utilizar las definiciones de potencia y de trabajo. ■

**Observaciones.** 1. La descomposición dimensional de  $\mathcal{K}(t)$  es la misma que la del trabajo:

$$[\mathcal{K}] = ML^2T^{-2}.$$

2. Nótese que la expresión de la energía cinética depende del sistema de referencia. Así, en un sistema no inercial relativo se tiene que

$$\mathcal{K}_a(t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_r(t) \cdot \mathbf{v}_r(t) + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_e(t) \cdot \mathbf{v}_e(t) + m \mathbf{v}_r(t) \cdot \mathbf{v}_e(t)$$

Como vimos, de la segunda ley se deriva que  $m \hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{f} + \mathbf{f}_f$  con lo que si se define

$$\mathcal{K}_r(t) := \frac{1}{2} m \mathbf{v}_r(t) \cdot \mathbf{v}_r(t) \text{ y } \mathcal{P}_r(t_0; \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t_0, \hat{\mathbf{r}}(t_0), \mathbf{v}_r(t_0)) \cdot \mathbf{v}_r(t_0),$$

entonces se tiene que

$$\dot{\mathcal{K}}_r(t) = \mathcal{P}_r(t; \mathbf{f}) + \mathcal{P}_r(t; \mathbf{f}_f).$$

## Fuerzas conservativas: energía potencial.

En todo lo que sigue utilizaremos indistintamente la expresión campo vectorial al hablar de fuerza posicional,  $\mathbf{f} : D(\mathbf{f}) \rightarrow \mathbb{E}^3$  con  $D(\mathbf{f})$  un abierto de  $\mathbb{E}^3$ . Recordemos que supuesto un sistema de referencial inercial  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  podemos identificar  $\mathbb{E}^3$  con  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición.** Un campo vectorial,  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ , se dice **conservativo**, si existe una función escalar  $V : D(V) \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $D(\mathbf{f}) \subset D(V) \subset \mathbb{E}^3$ ), de clase  $C^1$ , tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \text{ para todo } \mathbf{r} \in D(\mathbf{f}).$$

En tal caso, a la función  $V$  se le denomina **función potencial**. Además, si  $\mathbf{r}(t)$  es el vector de posición de una partícula de masa  $m$  en movimiento originado por un campo vectorial conservativo  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ , a la función  $t \rightarrow V(\mathbf{r}(t))$  se le denomina **energía potencial** (que está determinada salvo una constante aditiva).

**Observaciones.** 1. La ecuación dimensional de la energía potencial es

$$[V(\mathbf{r})] = [\text{fuerza}] \cdot [\text{longitud}] = \text{ML}^2\text{T}^{-2},$$

que coincide con la de la energía cinética.

2. En coordenadas cartesianas, si  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r}), f_3(\mathbf{r}))$  y si se utiliza la identificación de  $\mathbb{E}^3$  con  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$  identificado a  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  entonces la anterior condición equivale a pedir que

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) \text{ para todo } i = 1, 2, 3 \text{ y para todo } \mathbf{r} \in D(\mathbf{f}).$$

En el Apéndice 7 veremos la expresión del operador diferencial gradiente en sistemas curvilíneos diferentes al cartesiano.

3. Veremos muchos ejemplos de campos de fuerzas que son conservativos (los más importantes son los llamados centrales). Señalémos que las fuerzas de fricción o rozamiento no entran en esta clase de fuerzas dado que, ya de partida, no son posicionales.

4. Usualmente se requiere la regularidad  $C^1$  sobre la fuerza, y consecuentemente, se suele pedir la regularidad  $C^2$  a la función potencial.

5. El signo  $-$  de la definición de potencia es por convenio (como veremos a continuación).

El calificativo conservativo proviene del siguiente resultado que es fundamental para lo que sigue

**Proposición** (Conservación de la energía total). *Sea  $\mathbf{r}(t)$  el vector de posición de una partícula de masa  $m$  en movimiento originado por un campo vectorial conservativo  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  de potencial  $V(\mathbf{r})$ . Entonces, la función*

$$E(t) := \mathcal{K}(t) + V(\mathbf{r}(t)),$$

*es constante en  $t$ . A la función  $E(t)$  se le denomina **energía total** (en el instante  $t$ ), y, en particular se tiene que*

$$E(t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + V(\mathbf{r}_0) := E_0 \text{ para todo } t \geq t_0. \quad (27)$$

*Demostración.* Por la Segunda Ley de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)),$$

de modo que multiplicando por  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  a ambos lados obtenemos que

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}(t)) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Utilizando la regla de la cadena y que  $2\dot{\mathbf{r}}(t) \bullet \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t))$  concluimos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t)) \right) = 0.$$

Integrando entre  $t_0$  y  $t$  se obtiene (32). ■

**Observación.** La conservación de la energía es lo que se llama "una integral primera" del movimiento y permite rebajar en uno el número de grados de libertad (usualmente es  $l \leq 3$  dado que la Segunda Ley es una EDO vectorial en  $\mathbb{E}^3$  de segundo orden en  $t$  pero ahora pasa a ser  $l < 3$  pues necesariamente

se ha de verificar la ODE, de primer orden en  $t$ , de la conservación de la energía). Veremos que en el caso de movimientos unidireccionales (e.d. con  $l = 1$ ) la conservación permite la completa resolución del problema.

El siguiente teorema es uno de los resultados más bellos del llamado "Análisis Vectorial" y permite indagar de manera rápida cuando un campo es conservativo o no:

**Teorema.** *Supongamos, por simplicidad, que  $D(\mathbf{f}) = \mathbb{E}^3$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  es un campo vectorial conservativo.
- ii) Fijado un sistema de referencia e identificando  $\mathbb{E}^3$  con  $\mathbb{R}^3$  (e.d.  $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{E}^3$  con  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ), el campo vectorial  $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$  es un campo vectorial irrotacional, e.d.

$$\text{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) := \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1(x_1, x_2, x_3) & f_2(x_1, x_2, x_3) & f_3(x_1, x_2, x_3) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \text{ para todo } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- iii) Para toda curva cerrada (simple y orientada)  $\Gamma$  de  $\mathbb{E}^3$  se tiene que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

- iv) Para todo par de curvas (simples y orientadas)  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  de  $\mathbb{E}^3$  de iguales extremos se tiene que

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

**Observaciones** 1. La demostración del Teorema es asequible en numerosos textos de análisis de varias variables (véase, por ejemplo, J.E. Marsden y A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, 3ª edición, Pearson Prentice Hall, Madrid, 1991, donde también se podrá encontrar numerosas reflexiones sobre el significado geométrico del operador rotacional y ejemplos). En la demostración, se aprecia fácilmente que el resultado se mantiene válido si las curvas son  $C^1$  a trozos (y así, por ejemplo, pueden ser *curvas poligonales*). 2. En el caso en el que  $D(\mathbf{f}) \subsetneq \mathbb{E}^3$  es necesario añadir al conjunto  $D(\mathbf{f})$  la hipótesis de ser "simplemente conexo": es decir que toda curva cerrada sumergida en él se puede deformar de manera continua hasta transformarla en un punto). En otro caso, se pueden encontrar ejemplos de campos vectoriales irrotacionales que admiten diferentes funciones potenciales pero que no difieren en una constante (lo que implica que el trabajo sobre curvas con extremos idénticos no es necesariamente el mismo). 3. La propiedad iii) expresa que el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  sobre cualquier trayectoria periódica  $\mathbf{r}(t)$  (cuya órbita es una curva cerrada de  $\mathbb{E}^3$ ) es nulo. El caso de iv) se puede interpretar como que el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  sobre cualquier trayectoria  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  depende únicamente de los extremos  $\mathbf{r}(t_1)$  y  $\mathbf{r}(t_2)$  (y no de cómo hemos procedido para movernos entre ellos).

El problema de hallar la función potencial  $V$  para un campo dado del que sabemos que es conservativo (por ejemplo por ser irrotacional) puede no ser enteramente trivial. Comencemos señalando que de la propia demostración del anterior Teorema (que a su vez utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo) se comprueba que dada una curva  $\Gamma$ , de clase  $C^1$  a trozos, y de extremos los puntos  $A$  y  $B$  del espacio afín  $\mathbb{A}^3$ , y fijado el origen  $O \in \mathbb{A}^3$  del espacio, podemos definir la función escalar

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{r}, \text{ con } \mathbf{r} := \overrightarrow{OB}, \text{ arbitrario tal que } \mathbf{r} \in D(\mathbf{f}).$$

Se comprueba fácilmente que  $V$  es una función potencial para  $\mathbf{f}$ .

En esas condiciones, si por ejemplo  $D(\mathbf{f}) = \mathbb{E}^3$  la función potencial se puede obtener de forma sencilla tomando como  $\Gamma$  una poligonal de lados paralelos a los ejes. Por ejemplo, fijado el sistema de referencia inercial, identificamos  $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{E}^3$  con  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  con la terna  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  y definimos

$$V(\mathbf{x}) := - \left( \int_0^{x_1} f_1(s, 0, 0) ds + \int_0^{x_2} f_2(x_1, s, 0) ds + \int_0^{x_3} f_3(x_1, x_2, s) ds \right).$$

Otras veces basta inspeccionar las meras condiciones sobre  $V$  que aparecen en su propia definición.

**Ejemplo.** Consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = x_2 \mathbf{e}_1 + (x_1 + x_3 \cos(x_2 x_3)) \mathbf{e}_2 + x_2 \cos(x_2 x_3) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i.$$

Se comprueba sin dificultad que es un campo irrotacional. Por ejemplo, basta observar que la matriz jacobiana

$$J(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -x_3^2 \operatorname{sen}(x_2 x_3) & -x_3 x_2 \operatorname{sen}(x_2 x_3) + \cos(x_2 x_3) \\ 0 & -x_3 x_2 \operatorname{sen}(x_2 x_3) + \cos(x_2 x_3) & -x_2^2 \operatorname{sen}(x_2 x_3) \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica para todo  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  (lo que equivale a que  $\mathbf{f}$  es irrotacional). La función potencial asociada  $V$  se puede calcular de varias formas:

a) *Método de la poligonal:* Aplicando lo expuesto encontramos que

$$V(\mathbf{r}) = - \left( \int_0^{x_1} 0 ds + x_1 \int_0^{x_2} ds + x_2 \int_0^{x_3} \cos(x_2 s) ds \right) = -x_1 x_2 - \operatorname{sen}(x_2 x_3).$$

b) *Método directo (inspección de las condiciones de la definición):* Se ha de tener

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{r}) = -x_2 \quad \text{y por tanto} \quad V(\mathbf{r}) = -x_1 x_2 + \Phi(x_2, x_3).$$

Sustituyendo

$$-x_1 - x_3 \cos(x_2 x_3) = \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{r}) = -x_1 + \frac{\partial \Phi(x_2, x_3)}{\partial x_2} \quad \text{y por tanto} \quad \Phi(x_2, x_3) = -\operatorname{sen}(x_2 x_3) + \Psi(x_3).$$

Sustituyendo de nuevo

$$-x_2 \cos(x_2 x_3) = \frac{\partial V}{\partial x_3}(\mathbf{r}) = -x_2 \cos(x_2 x_3) + \Psi'(x_3),$$

de donde

$$V(\mathbf{r}) = -x_1 x_2 - \operatorname{sen}(x_2 x_3).$$

Obviamente, la función potencial hallada coincide en ambos casos.

### 1.A.3.v) El oscilador armónico simple y amortiguado. El oscilador armónico simple.

El caso más paradigmático de los movimientos unidireccionales está constituido por los osciladores armónicos. Un Oscilador Armónico es una partícula cuyo movimiento está determinado por una fuerza proporcional a su distancia a un punto de equilibrio. Se dice entonces que se trata de un Movimiento Armónico.

**Ejemplo 1.**(Muelle elástico sin amortiguamiento). Consideremos, como ya se ha comentado con anterioridad, el caso de una partícula de masa  $m$  cuyo movimiento esté determinado por una fuerza

posicional  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}$ , siendo  $\|\mathbf{e}\| = 1$  en donde ahora  $r$  representa el "desplazamiento respecto de la configuración de equilibrio". Si los datos iniciales verifican  $\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}$  el movimiento es unidireccional de la forma  $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}$ . Entonces, para un muelle horizontal, la Segunda Ley de Newton nos lleva a la ecuación

$$m\ddot{r}(t) = -kr(t),$$

para la elección  $f(r) = -kr$ , siendo  $r$  el tamaño sujeto a la recuperación, siguiendo la Ley de Hooke, de la que hay que descontar el natural del muelle  $\ell$ . El sistema dinámico asociado

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \quad \text{en } \mathbb{R}^2,$$

con  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \left(\dot{r}, -\frac{k}{m}r\right)$ , muestra que  $(0, 0)$  es el único punto de equilibrio.

**Ejemplo 2.** (Muelle elástico vertical sin amortiguamiento). Consideremos ahora un caso parecido al anterior pero ahora para un muelle vertical para la fuerza posicional  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (-kr(t) + mg)\mathbf{e}_3$  supuesto que los datos iniciales son de la forma  $\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_3$ , siendo  $\mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_3$ . Por tanto la Segunda Ley de Newton nos lleva a la ecuación

$$m\ddot{r}(t) = -kr(t) + mg.$$

De nuevo,  $\left(\frac{mg}{k}, 0\right)$  es el único punto de equilibrio del sistema dinámico asociado (de primer orden en  $t$ ).

Los ejemplos anteriores conducen a una ecuación del tipo

$$m\ddot{r}(t) + kr(t) = 0 \tag{28}$$

(con un término independiente en el Ejemplo 2), lo que conviene escribir como

$$\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) = 0,$$

siendo  $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$  la llamada *constante de elongación* o *de pulsación*.

Veamos el cálculo de la fórmula explícita de las soluciones aprovechando que se trata de una ecuación lineal. Por tener coeficientes constantes (siguiendo lo ya sugerido por Euler) podemos intentar buscar soluciones de la forma

$$r(t) = ce^{\lambda t}.$$

En efecto, en ese caso una condición necesaria se sigue al sustituir esa conjetura en la ecuación diferencial, obteniéndose la llamada *ecuación característica*

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{\pm} = \pm\omega_0 i \quad \text{donde } i \text{ representa la unidad imaginaria } i^2 = -1.$$

Puesto que las soluciones asociadas son linealmente independientes (e.d. funcionalmente linealmente independientes, como funciones), obtenemos

**Proposición.** *La solución general (con valores reales) de la ecuación del oscilador armónico es*

$$r(t) = R \cos(\omega_0 t + \Phi),$$

con la "amplitud"  $R$  y la "fase"  $\Phi$  relacionados con los datos iniciales mediante  $r(0) = R \cos \Phi$ ,  $\dot{r}(0) = -R\omega_0 \sin \Phi$ .

*Demostración.* Ante todo, por ser una ecuación con coeficientes constantes los resultados de unicidad determinan que

$$r(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}, \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R},$$

sea la representación general (a valores complejos) de la solución. Las fórmulas

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}{2}, \quad \text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}}{2i}, \quad (29)$$

permiten expresar la solución general en la forma

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \text{sen}(\omega_0 t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, la representación con valores reales se obtiene al tomar

$$A = R \cos \Phi \quad \text{y} \quad B = -R \text{sen} \Phi$$

con  $R$  y  $\Phi$  reales arbitrarios. Una simple cuenta permite ahora concluir el resultado. ■

**Observación.** La energía total es

$$E(t) = E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2.$$

### Oscilador lineal amortiguado.

Considerémos ahora el movimiento de una partícula, de masa  $m$ , originada por una fuerza como la del ejemplo 1 pero a la que se añade un término de rozamiento

$$m \ddot{r}(t) = -kr(t) - b\dot{r}(t)$$

o si se prefiere

$$\ddot{r}(t) + 2\beta\dot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) = 0,$$

donde  $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$  y  $\beta := \frac{b}{2m}$  es el llamado *factor de amortiguamiento*. Tal ecuación es conocida como la *ecuación del oscilador armónico amortiguado*.

**Observaciones.** 1. Se ve sin dificultad que  $(0, 0)$  es el único punto de equilibrio del sistema dinámico asociado.

2. La presencia de la fuerza parcial de recuperación  $-kr$  proporciona una función potencial para esa parte de la fuerza

$$V(r) = \frac{k}{2} r^2.$$

Sin embargo, ahora se tiene que

$$0 = \dot{r}(t) \left( m \ddot{r}(t) + kr(t) + b\dot{r}(t) \right) = \frac{d}{dt} E(t) + b(\dot{r}(t))^2 \geq \frac{d}{dt} E(t),$$

siendo

$$E(t) := \frac{1}{2} m (\dot{r}(t))^2 + V(r(t))$$

la *energía total*, que ahora no se conserva, sino que se disipa con el tiempo

$$E(t) \leq E_0 \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

La resolución analítica no es difícil: como en el caso sin amortiguamiento, se trata de una ecuación con coeficientes constantes para la que (siguiendo a Euler) conjeturamos que las soluciones son de la forma

$$r(t) = ce^{\lambda t},$$



La condición necesaria se obtiene al sustituir esa conjetura en la ecuación diferencial, llegando así a la *ecuación característica*

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$$

de la que

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

son sus raíces. Puesto que las soluciones correspondientes son linealmente (funcionalmente) independientes, los resultados de unicidad de soluciones determinan que

$$r(t) = e^{-\beta t} \left( A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

es la representación general de las soluciones. Distinguiremos tres casos con un comportamiento cualitativo muy diferente:

*i) Movimiento subamortiguado*  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$ . Para este caso, se tiene

**Proposición.** *La solución general real de la ecuación del oscilador armónico subamortiguado es*

$$r(t) = R e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \Phi),$$

con  $r(0) = R \cos \Phi$ ,  $\dot{r}(0) + \beta r(0) = -R \omega_1 \sin \Phi$ .

*Demostración.* No hay más que utilizar las fórmulas vistas en (29) para obtener la solución general en la forma

$$r(t) = e^{-\beta t} (A e \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

De nuevo, tomando

$$A = R \cos \Phi \quad y \quad B = -R \sin \Phi$$

se concluye el resultado. ■

**Observaciones.** 1. El calificativo subamortiguado proviene de que el factor de amortiguamiento es pequeño,  $\beta^2 < \omega_0^2$ , y no impide la oscilación. En general, se dice que existe oscilación si se dan una infinidad de máximos y mínimos.

2. Nótese que la disipación muestra que la amplitud,  $R e^{-\beta t}$ , decrece, obteniéndose que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}(t) = 0.$$

3. No se trata de un movimiento periódico oscilador, pues su "cuasi periodo"  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  verifica que

$$\frac{R e^{-\beta t^*}}{R e^{-\beta(t^* + T_1)}} = e^{\beta T_1},$$

y por tanto la proporción de elongación no es homogénea al transcurrir un cuasi-periodo.

Podemos realizar también un tratamiento cualitativo representando las órbitas en el plano de fases. Observémos que

$$\begin{cases} r(t) = R e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \Phi), \\ \dot{r}(t) + \beta r(t) = -R e^{-\beta t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi), \end{cases}$$

de modo que para el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} u_1 = \omega_1 x_1, \\ u_2 = -x_2 - \beta x_1 \end{cases}$$

las órbitas son las espirales

$$\begin{cases} u_1(t) = R e^{-\beta t} \omega_1 \cos(\omega_1 t + \Phi), \\ u_2(t) = R e^{-\beta t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi). \end{cases}$$

lo que expresa que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio denominado como *asintóticamente estable* (cosa que no pasaba en el caso sin amortiguación).

ii) *Movimiento críticamente amortiguado*  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = 0$ .

Se tiene

**Proposición.** *La solución general (con valores reales) de la ecuación del oscilador armónico críticamente amortiguado es*

$$r(t) = (A + tB)e^{-\beta t},$$

con  $A = r(0)$ ,  $B = \dot{r}(0) + \beta r(0)$ .

*Demostración.* La ecuación

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$$

sólo admite la solución  $\lambda = -\beta$ , con lo que

$$r(t) = Ae^{-\beta t}$$

es una solución. De nuevo, siguiendo a Euler, por reducción de orden, se comprueba que la función

$$r(t) = Bte^{-\beta t}$$

es otra solución linealmente (funcionalmente) independiente con la anterior, por lo que

$$r(t) = (A + tB)e^{-\beta t},$$

es la solución general. ■

**Observaciones.** 1. Cálculos directos llevan a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}(t) = 0,$$

con lo que se dice que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.

2. De la expresión

$$\dot{r}(t) = e^{-\beta t}(B(1-t) - \beta A)$$

deducimos que el instante

$$t^* = \frac{\dot{r}(0)}{\dot{r}(0) + \beta r(0)}$$

es el único tiempo en el que  $r(t)$  puede alcanzar un extremo relativo. Consecuentemente, el movimiento  $r(t)$  no oscila. El calificativo críticamente amortiguado proviene del hecho de que por cualquier pequeña disminución del factor de amortiguamiento,  $\beta$ , provocaría la existencia de oscilaciones.

3. Para darnos una idea de este tipo de movimientos consideremos el caso  $r(0) > 0$ . Entonces,

3.a) Si  $\dot{r}(0) > 0$ , la función crece hasta alcanzar un máximo en  $t^*$  para decrecer a continuación hacia 0 sin tomar valores negativos.

3.b) Si  $\dot{r}(0) = 0$ , la función decrece hacia 0 sin tomar valores negativos.

3.c) Si  $\dot{r}(0) < 0$ , con  $\dot{r}(0) + \beta r(0) < 0$ , la función decrece hasta alcanzar un mínimo en  $t^*$  para crecer a continuación hacia 0 sin volver a tomar valores positivos.

3.d) Si  $\dot{r}(0) < 0$ , con  $\dot{r}(0) + \beta r(0) = 0$ , como en el caso 3.b), la función decrece hacia 0 sin tomar valores negativos.

iii) *Movimiento superamortiguado*  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 < 0$ . Una pequeña variación de los argumentos anteriormente expuestos conduce a

**Proposición.** *La solución general (con valores reales) de la ecuación del oscilador armónico superamortiguado es*

$$r(t) = e^{-\beta t} \left( Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \right), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

donde ahora  $r(0) = A + B$ ,  $\dot{r}(0) + \beta r(0) = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} (A - B)$ .

**Observaciones.** 1. Puesto que

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$$

se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}(t) = 0,$$

con lo que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

2. De la expresión

$$\dot{r}(t) = e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \left( A(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) + B \left( -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) e^{-2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \right)$$

deducimos que  $r(t)$  alcanza a lo sumo un único extremo relativo. Consecuentemente, el movimiento  $r(t)$  no oscila. El calificativo críticamente sobre amortiguado proviene del hecho de que el factor de amortiguamiento,  $\beta$ , impide la existencia de oscilaciones.

3. En el caso  $r(0) > 0$  las gráficas de este tipo de movimiento son análogas a las vista en el caso críticamente amortiguado.

**Nota importante.** Se podrían dar ahora los resultados sobre oscilaciones forzadas, resonancia e incluso sobre Series de Fourier (pero dado que esos temas se verán en los otros cursos (EDOs,...) no lo detallaremos aquí).

### 1.A.3. vi). Fuerzas posicionales unidireccionales. Criterio de existencia de órbitas periódicas.

En el caso de fuerzas unidireccionales se tiene que  $l = 1$  y si la fuerza es posicional entonces automáticamente es conservativa. pues

$$V(r) = - \int_0^r f(s) ds.$$

Consecuentemente, se verifica el Principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}(t))^2 + V(r(t)) = \frac{1}{2} m (\dot{r}(0))^2 + V(r(0)),$$

o si se prefiere

$$\frac{1}{2} m x_2^2 + V(x_1) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(r_0).$$

en el correspondiente *Plano de las fases*  $(r, \dot{r}) \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , donde éstas son las únicas posibles órbitas. Una importante propiedad que se obtiene de esas igualdades es

$$\dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(r(t)))},$$

ó

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(x_1))},$$

siendo  $E_0$  la cantidad de energía total (que sabemos que se conserva a lo largo del tiempo  $t$ ).

Para el oscilador armónico (simple: e.d. sin amortiguamiento y sin forzamiento) todas las órbitas son curvas cerradas (e.d. soluciones periódicas en  $t$ ) en el plano de fases. En efecto  $V(r) = \frac{k}{2}r^2$ , con  $k \neq 0$ , lo que determina que  $(0,0)$  sea el único punto de equilibrio del sistema dinámico asociado.

En el caso del oscilador armónico usual  $k > 0$  y entonces el valor  $r = 0$  es un mínimo de la función potencial  $V$  y las líneas de nivel de energía son elipses homotéticas centradas en el origen

$$mx_2^2 + kx_1^2 = E_0,$$

recorridas en el sentido positivo.

El caso de  $\mu = -k > 0$  tiene interés para la linealización del péndulo entorno a posiciones inestables (se verá más adelante). En ese caso las órbitas resultan ser las hipérbolas

$$mx_2^2 - \mu x_1^2 = E_0.$$

Consideremos ahora el problema general de Cauchy (e.d., en general, no lineal)

$$\begin{cases} m\ddot{r}(t) = -V'(r(t)) \\ r(t_0) = r_0 \\ \dot{r}(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (30)$$

supuesto que

$$V'(x) \geq -C, \text{ para alguna } C > 0. \quad (31)$$

**Teorema** (caracterización de órbitas periódicas) *El movimiento  $r(t)$  es periódico si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

i) *Existen dos raíces consecutivas  $x_-$  y  $x_+$  de la ecuación  $V(x) = E_0$  con*

$$E_0 = \frac{m}{2}v_0^2 + V(r_0) \quad (32)$$

*tales que  $r_0 \in [x_-, x_+]$*

*y*

ii)  *$V'(x_-) < 0$  y  $V'(x_+) > 0$ .*

*Además, si se cumplen i) e ii) el periodo viene dado por*

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - V(r)}}.$$

*Demostración.* Veremos tan sólo con detalle que i) e ii) forman una condición suficiente para la periodicidad de  $r(t)$  (para la parte necesaria véase, por ejemplo el texto G. Gallavoti: The elements of Mechanics, Springer, Berlin,1983).

De i) e ii) deducimos que  $V(x) < E_0 \forall x \in (x_-, x_+)$ . Por tanto, utilizando la conservación de la energía total deducimos que

$$r(t) \in [x_-, x_+], \forall t \geq t_0.$$

Supongamos, por un momento, que  $v_0 > 0$  (los casos de  $v_0 = 0$  y  $v_0 < 0$  se tratan de manera similar). Por continuidad,  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $r(t) > r_0 \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ . Sea

$$t_+ := \sup\{t \geq t_0 : \dot{r}(\tau) > 0, \forall \tau \in [t_0, t]\}.$$

(por tanto  $\dot{r}(t) \geq 0, \forall t \in [t_0, t_+]$ , de hecho  $\dot{r}(t) > 0, \forall t \in [t_0, t_+)$  y  $\dot{r}(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow t_+$ ). De la conservación de la energía total

$$\frac{m}{2}\dot{r}(t)^2 + V(r(t)) = E_0$$

podemos despejar  $\dot{r}(t)$  a través de la rama positiva de la raíz cuadrada para obtener que

$$\dot{r}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}, \forall t \in [t_0, t_+]. \quad (33)$$

Ésta es una *ecuación de variables separables* que podemos integrar para obtener implícitamente  $r(t)$  por medio de la fórmula

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}}, \forall t \in [t_0, t_+]. \quad (34)$$

En efecto, como  $\dot{r}(t) > 0, \forall t \in [t_0, t_+)$  la aplicación  $t \rightarrow r(t)$  es invertible, e.d. se puede definir su inversa  $t = \hat{t}(r)$  y además se verifica que

$$\frac{d\hat{t}}{dr} = \frac{1}{\frac{dr}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}}.$$

Integrando entre  $r_0$  y  $r(t)$  se obtiene que

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{d\hat{t}}{dr}(r) dr = \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}}$$

y como  $\hat{t}(r(t)) = t$  y  $\hat{t}(r_0) = t_0$  (pues  $r_0 = r(t_0)$ ) obtenemos la fórmula (34).

Veamos que

- a) existe el  $\lim_{t \rightarrow t_+} r(t) := r_+$ ,
- b)  $r_+ = x_+$ ,
- c)  $t_+ < +\infty$ .

a) La función  $r(t)$  está uniformemente acotada superiormente y es estrictamente creciente si  $t \in [t_0, t_+)$ . Por tanto, por el Teorema de Weierstrass, existe el  $\lim_{t \rightarrow t_+} r(t)$ . Nótese que además necesariamente  $r_+ \in$

$[x_-, x_+]$ .

b) Supongamos, por reducción al absurdo, que  $r_+ < x_+$ . De la continuidad de  $V$  deducimos que existe el  $\lim_{t \rightarrow t_+} V(r(t))$  y que debe coincidir con  $V(r_+)$ . De (33) concluimos que existe el  $\lim_{t \rightarrow t_+} \dot{r}(t)$ , que ha de

coincidir con  $\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r_+)}$ , y que por tanto ese límite es estrictamente positivo lo que contradice la definición de  $t_+$ .

c) Tomando límites, cuando  $t \rightarrow t_+$ , en la expresión (34); lo que es posible por existir el  $\lim_{t \rightarrow t_+} r(t)$ , obtenemos que

$$t_+ - t_0 = \int_{r_0}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}}$$

con lo que

$$t_+ < +\infty \Leftrightarrow \int_{r_0}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}} < \infty.$$

Ahora bien, el integrando es singular en el extremo  $r = x_+$ . Una condición suficiente para la integrabilidad de esa integral (*impropia de segunda especie*) es que

$$E_0 - V(r) \geq k(x_+ - r), \forall r \in (x_+ - \delta, x_+) \quad (35)$$

pues en ese caso

$$0 < \int_{r_0}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(r)}} \leq \sqrt{\frac{m}{2}} \left[ \int_{r_0}^{x_+ - \delta} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - V(r)}} + \int_{x_+ - \delta}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - V(r)}} \right] := I_1 + I_2$$

y la integrabilidad de  $I_2$  (que es la única no trivial) quedaría asegurada pues

$$\int_{x_+ - \delta}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - V(r)}} \leq \int_{x_+ - \delta}^{x_+} \frac{dr}{\sqrt{k(x_+ - r)}} < \infty.$$

Para mostrar (35) aplicamos el desarrollo de Taylor en  $x_+$

$$E_0 - V(x) = E_0 - V(x_+) - (E_0 - V)'(\theta)(x_+ - x), \text{ para algún } \theta \in (x, x_+).$$

Pero  $-(E_0 - V)'(\theta) = V'(\theta) \geq k$  si se define  $k := \min\{V'(r) : r \in [x_+ - \delta, x_+]\}$  con lo que se obtiene (35)

Continuemos ahora para tiempos superiores pero cercanos a  $t^+$ . Como  $f(x_+) = -V'(x_+) < 0$ , se tendrá  $\ddot{r}(t^+) < 0$ , con lo que  $\dot{r}(t^+) = 0$  implica, por monotonía y continuidad,  $\dot{r}(t) < 0$ ,  $r(t) < r(t_0)$  para  $0 < t - t^+$  pequeños. Definamos entonces

$$t^- = \sup \left\{ t \geq t^+ : \dot{r}(\tau) < 0, \forall \tau \in [t^+, t] \right\}.$$

Ahora, por construcción, se verifica

$$\dot{r}(t) < 0, \quad t^+ < t < t^- \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t^-} \dot{r}(t) = 0.$$

Además procediendo como antes se obtendrá

$$\lim_{t \rightarrow t^-} r(t) = x_-, \quad t^- < \infty.$$

y

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t^- - t^+) = - \int_{x_+}^{x_-} \frac{ds}{\sqrt{E_0 - V(s)}}$$

(nótese que en  $]t^+, t^-[$  la derivada  $\dot{r}$  es negativa). En el último recorrido la función  $r(t)$  “ha pasado por”  $r(0) = r_0$ , pero con derivada negativa. Finalmente, con los razonamientos anteriores, aprovechando la igualdad  $f(x_-) = -V'(x_-) > 0$ , podemos de nuevo recorrer el intervalo  $[x_1^-, x_+]$  en sentido creciente y describir  $r_0 = r(t_0 + T)$ , en un instante  $t_0 + T > t^-$ , con lo que

$$\dot{r}(t_0 + T) = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(r_0))} = v_0$$

es decir,  $(r(t_0), \dot{r}(t_0)) = (r(t_0 + T), \dot{r}(t_0 + T))$ . La propiedad de unicidad implica que se trata de una solución periódica. Además,

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t_0 + T - t^-) = \int_{x_1^-}^{r_0} \frac{ds}{\sqrt{E_0 - V(s)}}.$$

Finalmente, se tiene

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t_0 + T - t^- + t^- - t^+ + t^+) = \left( \int_{x_-}^{r_0} - \int_{x_+}^{x_-} + \int_{r_0}^{x_+} \right) \frac{ds}{\sqrt{E_0 - V(s)}},$$

es decir,

$$\sqrt{\frac{2}{m}}T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{ds}{\sqrt{E_0 - V(s)}}.$$

A la vista de la argumentación se aprecia que la condición  $v_0 > 0$  sólo sirve para llevar un cierto orden didáctico, en el caso contrario se procede en forma análoga. Lo que concluye la demostración de la parte suficiente.

La demostración de la parte necesaria es fruto de numerosos casos que responden esencialmente a particularidades del extremo  $x_-$ . El primer resultado en esa dirección tiene que ver con el cambio de sentido de las órbitas, debido al signo de  $V'$  sobre los extremos de la región de admisibilidad de las soluciones. Así cuando en uno de ellos no hay un signo determinado se obtiene;

**Proposición** (Soluciones no periódicas acotadas) a) Sea  $-\infty < x_- < x_+ < +\infty$  tal que

$$V(x_-) = V(x_+) = E_0 \quad \text{y} \quad V(x) < E_0, \quad x_- < x < x_+,$$

con

$$V'(x_-) = 0 \quad \text{y} \quad V'(x_+) > 0$$

Entonces la correspondiente curva de nivel de energía

$$\frac{1}{2}mx_2^2 + V(x_1) = E_0,$$

define, en el plano de las fases, una curva abierta, cuya proyección en el eje  $Ox$  es el intervalo abierto  $]x_-, x_+]$ . (Nótese que la adherencia de la curva de nivel de energía es cerrada y que  $(x_-, 0)$  es un punto de equilibrio).

b) Sea  $x_+ \in \mathbb{R}$  tal que

$$V(x_+) = E_0 \quad \text{y} \quad V(x) < E_0, \quad x < x_+, \quad \text{con} \quad V'(x_+) > 0.$$

Entonces la correspondiente curva de nivel de energía

$$\frac{1}{2}mx_2^2 + V(x_1) = E_0,$$

define, en el plano de las fases, una curva abierta, cuya proyección en el eje  $Ox$  es el intervalo semiacotado  $] -\infty, x_+]$ .

**Observaciones.** 1. Recuérdese que en los sistemas autónomos no tiene mucho sentido hablar de valor inicial, pues siempre podemos considerar los tiempos anteriores. De esta forma, aunque la prueba anterior dejase un tramo cualquier a  $r(0) > x_-$  siempre podemos “ir hacia atrás” para completar la descripción total de la curva abierta.

2. Aunque se trate de una curva acotada, ésta requiere un tiempo infinito para su descripción. En efecto, argumentando como en la prueba anterior, si  $x_1^-$  es un punto de equilibrio para el que

$$\lim_{t \rightarrow t^-} r(t) = x_-.$$

Además, si admitimos  $f'(x_-) = -V''(x_-) \neq 0$ , se tendrá

$$E_0 - V(s) = (E_0 - V(x_-)) + (E_0 - V'(x_-))(s - x_-) + \frac{1}{2}f'(x_-)(s - x_-)^2 + o(|s - x_-|^2), \quad s - x_- \ll 1.$$

i.e.

$$0 < E_0 - V(s) = \frac{1}{2}f'(x_-)(s - x_-)^2 + o(|s - x_-|^2), \quad s - x_- \ll 1,$$

de donde

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t^- - t^+) = - \int_{x_+}^{x_-} \frac{ds}{\sqrt{E_0 - V(s)}} = \int_{x_-}^{x_+} \frac{ds}{\sqrt{E_0 - V(s)}} = \frac{2}{\sqrt{f'(x_-)}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{ds}{s - x_-} = \infty.$$

Nótese que si  $f'(x_-) = 0$  el desarrollo anterior usa términos de orden superior y la divergencia de la integral sigue siendo válida. Nótese que comentarios anteriores muestran la propiedad

$$\lim_{\pm\infty} r(t) = x_-.$$

3. En todos los caso en los que de las órbitas tienen adherencia cerrada, cada valor  $r(t)$  es descrito dos veces, teniendo sentido los casos de la igualdad

$$\dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(r(t)))}.$$

Por tanto, la órbita presenta una simetría respecto del eje  $Ox_+$ .

4. Observamos que para fuerzas posicionales unidireccionales los movimientos resultantes no pueden tener forma de espiral en el plano de las fases, pues si su proyección en  $Ox_+$  tiene adherencia cerrada, la adherencia de las curvas de nivel de energía son cerradas y acotadas.

5. Los resultados correspondientes al extremo  $x_-$ , así como otras combinaciones, se enuncian en forma análoga.

Los resultados anteriores tienen una inmediata aplicación al estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio. En particular, se tiene:

**Teorema** (de P.G.L. Dirchlet (1805-1859)). *i) Si  $x_\infty$  es un mínimo local de la función potencial entonces  $(x_\infty, 0)$  es un punto de equilibrio estable, que no es asintóticamente estable.*

*ii) Si  $x_\infty$  es un máximo local de la función potencial entonces entonces  $(x_\infty, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.*

*Demostración.* Comenzaremos por i). Sea  $x_\infty$  es un mínimo de la función potencial  $V$ , *i.e.*

$$V'(x_\infty) = 0, \quad V''(x_\infty) \geq 0.$$

Para  $\tau \in ]0, 1[$  consideremos ahora la perturbación

$$V_\tau(r) = V(r) + \tau(r - x_\infty)^2,$$

para la que  $x_\infty$  es un mínimo verificando

$$V'_\tau(x_\infty) = 0, \quad V''_\tau(x_\infty) \geq \tau > 0.$$

Formemos la aproximación local

$$\begin{aligned} V_\tau(r) &= V_\tau(x_\infty) + V'_\tau(x_\infty)(r - x_\infty) + \frac{1}{2}V''_\tau(x_\infty)(r - x_\infty)^2 + o(|r - x_\infty|^2) \\ &= V_\tau(x_\infty) + \frac{1}{2}V''_\tau(x_\infty)(r - x_\infty)^2 + o(|r - x_\infty|^2). \end{aligned}$$

El Principio de Conservación de la Energía para el potencial perturbado,  $V_\tau$ , queda en la forma

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}(t) \right)^2 + V_\tau(r(t)) = E_\tau,$$

con

$$E_\tau = \frac{1}{2} \left( \dot{r}(t_0) \right)^2 + V_\tau(r(t_0)),$$

de donde

$$\left( \dot{r}(t) \right)^2 + (r(t) - x_\infty)^2 < \frac{2}{a} (E_\tau - V_\tau(x_\infty)),$$

para  $a = \min \{m, V''_\tau(x_\infty)\} > 0$ , pues  $V''_\tau(x_\infty) \geq \tau$ . La desigualdad

$$\left( \dot{r}(t) \right)^2 + (r(t) - x_\infty)^2 < \frac{2}{a} \left( \frac{1}{2} \left( \dot{r}(t_0) \right)^2 + V_\tau(r(t_0)) - V_\tau(x_\infty) \right),$$

lleva a

$$\left( \dot{r}(t) \right)^2 + (r(t) - x_\infty)^2 < \frac{2}{a} \left( \frac{1}{2} \left( \dot{r}(t_0) \right)^2 + V(r(t_0)) - V(x_\infty) + \tau|r(t_0) - x_\infty|^2 \right),$$



y, así, la continuidad de la función  $V$  concluye la estabilidad del punto de equilibrio,  $(x_\infty, 0)$ . Nótese que, sin embargo, no puede ser asintóticamente estable, pues del Principio de Conservación de la Energía para el potencial,  $V$ , se obtiene

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}(t) \right)^2 + V(r(t)) = E,$$

y

$$\left( \dot{r}(t) \right)^2 + (r(t) - x_\infty)^2 > \frac{2}{b} (E - V(x_\infty)),$$

con  $b = \max \{m, V''(x_\infty)\} > 0$ , para el desarrollo

$$V(r) = V(x_\infty) + \frac{1}{2} V''(x_\infty) (r - x_\infty)^2 + o(|r - x_\infty|^2).$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \left( \dot{r}(t) \right)^2 + (r(t) - x_\infty)^2 \right) \geq \frac{2}{b} \left( \frac{1}{2} \left( \dot{r}(t_0) \right)^2 + V(r(t_0)) - V(x_\infty) + \tau |r(t_0) - x_\infty|^2 \right) \neq 0.$$

Veamos ahora ii). Sea  $x_\infty$  es un máximo de la función potencial  $V$ , *i.e.*

$$V'(x_\infty) = 0, \quad V''(x_\infty) \leq 0.$$

Para  $\tau \in ]0, 1[$  consideremos de nuevo la perturbación

$$V_\tau(r) = V(r) - \tau(r - x_\infty)^2,$$

para la que  $x_\infty$  es un máximo verificando

$$V'_\tau(x_\infty) = 0, \quad V''_\tau(x_\infty) \leq -\tau < 0.$$

Formemos la aproximación local

$$\begin{aligned} V_\tau(r) &= V_\tau(x_\infty) + V'_\tau(x_\infty)(r - x_\infty) + \frac{1}{2} V''_\tau(x_\infty)(r - x_\infty)^2 + o(|r - x_\infty|^2) \\ &= V_\tau(x_\infty) + \frac{1}{2} V''_\tau(x_\infty)(r - x_\infty)^2 + o(|r - x_\infty|^2). \end{aligned}$$

El Principio de Conservación de la Energía para el potencial perturbado,  $V_\tau$ , queda en la forma

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}(t) \right)^2 + V_\tau(r(t)) = E_\tau,$$

con

$$E_\tau = \frac{1}{2} \left( \dot{r}(t_0) \right)^2 + V_\tau(r(t_0)),$$

de donde

$$\frac{\left( \dot{r}(t) \right)^2}{\frac{1}{m}} - \frac{(r(t) - x_\infty)^2}{\frac{2}{|V''_\tau(x_\infty)|}} = E_\tau - V_\tau(x_\infty).$$

Por tanto, las correspondientes curvas de nivel de energía “próximas” a  $x_\infty$  son hipérbolas que transcurren arbitrariamente cerca de él para después alejarse. Cuando  $V_\tau(x_\infty) = E_\tau$  se tiene el caso degenerado determinado por las rectas

$$\dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{|V''_\tau(x_\infty)|}{m}} (r(t) - x_\infty)$$

que son las asíntotas de las hipérbolas anteriores. ■

**Observación 0.** Podemos aplicar el tratamiento cualitativo expuesto. Recordemos que en el plano de las fases las órbitas correspondientes vienen dadas (por el principio de conservación de la energía) por

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + V(x_1) = E_0$$

que en este caso son elipses centradas en el origen. Vemos que para todo valor de la energía total  $E_0$  se tiene que

$$V(x_{\pm}) = E_0 \iff x_{\pm} = \pm R,$$

(dado que  $k = m\omega_0^2$ ). Por tanto, la curva de nivel de energía total  $E_0$  correspondiente, es una curva cerrada, que se corresponde con una solución periódica, cuya proyección sobre el eje  $Ox_1$  es el intervalo cerrado  $[-R, R]$ , siendo

$$T = 2 \int_{-R}^R \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(s))}}$$

(véase el Teorema de caracterización de soluciones periódicas). Nótese que

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-R}^R \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(s))}} \\ &= \frac{2}{\omega_0} \int_{-R}^R \frac{ds}{\sqrt{(R - s^2)}} \\ &= \frac{2}{\omega_0} \arcsen\left(\frac{s}{R}\right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\pi}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Lo que coincide con el periodo anteriormente obtenido directamente de la expresión analítica. Por tanto, el movimiento oscilatorio es un movimiento que en el plano de las fases oscila periódicamente alrededor del punto de equilibrio que es un punto estable. Nótese que al ser  $r = 0$  un mínimo de la función potencial, por el Teorema de Dirichlet ya sabíamos que  $(0, 0)$  es un punto estable.

**Observación.** 1. Se ha demostrado que la **linealización** en el entorno de un mínimo local (punto estable)  $x_{\infty}$  tras hacer  $V_{\tau}(r) = V(r) + \tau(r - x_{\infty})^2$  conduce a

$$V_{\tau}(r) = V_{\tau}(x_{\infty}) + \frac{1}{2}V_{\tau}''(x_{\infty})(r - x_{\infty})^2 + o(|r - x_{\infty}|^2),$$

y así, si hacemos  $k := V_{\tau}''(x_{\infty}) > 0$  observamos que  $x(t) := r(t) - x_{\infty}$  se comporta como la solución del oscilador armónico simple  $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$  para el que sabemos que su potencial  $V_a(r) = \frac{k}{2}x^2$  determina que las líneas de nivel de energía son elipses homotéticas centradas en el origen

$$\frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{k}{2}x^2 = E_0,$$

recorridas en el sentido positivo.

2. Por el contrario, la **linealización** en el entorno de un máximo local (punto inestable)  $x_{\infty}$  tras hacer  $V_{\tau}(r) = V(r) + \tau(r - x_{\infty})^2$  conduce a

$$V_{\tau}(r) = V_{\tau}(x_{\infty}) + \frac{1}{2}V_{\tau}''(x_{\infty})(r - x_{\infty})^2 + o(|r - x_{\infty}|^2),$$

y así, si hacemos  $\mu = -V_{\tau}''(x_{\infty}) > 0$  observamos que  $x(t) := r(t) - x_{\infty}$  se comporta como la solución de la ecuación  $m\ddot{x}(t) = \mu x(t)$  para el que sabemos que su potencial  $V_a(r) = -\frac{\mu}{2}x^2$  determina que las líneas de nivel sean las hipérbolas

$$\frac{m}{2}(\dot{x})^2 - \frac{\mu}{2}x^2 = E_0.$$

3. Se tiene un teorema general de estabilidad linealizada que vale en contextos mucho más generales: véase algún texto sobre EDOs.

4. En el caso del péndulo no lineal, la función potencial asociada es

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta).$$

El principio de conservación de la energía lleva a

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}(t))^2 + mgl(1 - \cos \theta(t)) = E_0$$

El sistema dinámico (de primer orden en  $t$ ) asociado es

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \text{ en } \mathbb{R}^2, \quad (36)$$

con  $\mathbf{X}(t) := (\theta(t), \dot{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^2$ , y  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \left( \dot{\theta}(t), -\frac{g}{l} \text{sen} \theta(t) \right)$  por lo que los puntos de equilibrio son  $(n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . De la conocida expresión

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \theta}{\theta} = 1,$$

(lo que se suele expresar mediante  $\text{sen} \theta \approx \theta$ , si  $\theta \ll 1$ ) obtenemos la ecuación linealizada

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

para la que  $(0, 0)$  es el único punto de equilibrio y así vemos que el  $(0, 0)$  (y en realidad, todos los puntos de la forma  $(2n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) son estables para la ecuación no lineal, con órbitas cerradas a su alrededor. Por el contrario, la linealización en torno al  $(\pi, 0)$  conduce a la ecuación

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l} x(t)$$

siendo  $x(t) = \theta(t) - \pi$  y sabemos que ahora el origen es inestable lo que implica la inestabilidad del  $(\pi, 0)$  (y en realidad, de todos los puntos de la forma  $((2n+1)\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ )

## 1.A.4. Campos centrales.

### 1.A.4.i) Campos centrales conservativos: caracterización y propiedades.

**Motivación:** campo gravitatorio (y eléctrico-magnético) en el que la diferencia de masa (o de carga) es tan grande que se puede despreciar la acción de la masa o carga pequeña sobre la mayor de manera que esta última se supone, en todo instante, inmóvil en el origen (caso de los pares de masas Sol/Tierra o Tierra/Luna, ...). En efecto, obsérvese que en el caso de un sistema cerrado de dos partículas

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}^1(t) = \mathbf{f}^{12}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}^2(t) = -\mathbf{f}^{12} \end{cases}$$

por lo que, tal y como se expresó cuando definimos el concepto de masa,

$$\frac{\|\ddot{\mathbf{r}}^1(t)\|}{\|\ddot{\mathbf{r}}^2(t)\|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

En el caso del Sol y la Tierra, ese cociente vale 1/333.433 veces la masa de la Tierra (aquí tomada como la partícula de masa  $m_2$ ) y por tanto la aceleración del Sol (por la interacción con la Tierra) es despreciable. En el caso del protón y el electrón el cociente entre las masas vale 1/1.836.

En el capítulo referente a sistemas se analiza como incluso si las masas a cargas no son tan distintas es posible reducirse al caso antes mencionado mediante adecuados argumentos (pues la fuerza de interacción cuando sólo depende de la distancia relativa es una fuerza central hacia el centro de masas).

En todo el capítulo se supone fijado un sistema inercial sobre el espacio en el que el origen está ocupado por la mayor de las masas (o cargas). Esta es una hipótesis que no es cierta en un sentido estricto (el Sol también se mueve con nuestra galaxia) pero el grado de inexactitud es tolerable para los fines de un curso introductorio como este.

**Definición.** Un campo de fuerzas  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  se denomina un "campo (o fuerza) central" si  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{r}$  para todo  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ ; es decir, si existe  $F : \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\mathbf{r}$  para todo  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ .

De manera premeditada, la anterior definición evita el requerimiento de que el campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  esté definida en el origen: el dominio de definición  $D(\mathbf{f})$  es meramente  $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ . De hecho, en los dos casos particulares de mayor relevancia (el campo gravitatorio y el electrostático)  $\mathbf{f}$  es de la forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3} \mathbf{r} \text{ con } k \in \mathbb{R},$$

por lo que  $\mathbf{f}$  tiene una singularidad si  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Nuestro principal propósito será analizar los movimientos  $\mathbf{r}(t)$  originados por  $\mathbf{f}$  sobre una masa  $m$  que en un instante inicial  $t_0$  está alejada del origen: es decir  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$ . Supondremos que

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \text{ es una función localmente Lipschitziana sobre } \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}.$$

Por los resultados mencionados en el capítulo anterior esto garantiza la existencia y unicidad de solución local  $\mathbf{r}(t)$  del problema de Cauchy

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)), \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \end{cases}$$

Además, por los resultados sobre prolongabilidad de soluciones de la teoría general podemos afirmar que  $\mathbf{r}(t)$  está definida sobre el intervalo  $[t_0, T^*)$  con  $T^* > t_0$  caracterizado por  $\lim_{t \nearrow T^*} \mathbf{r}(t) \in \partial D(\mathbf{f})$  o bien  $\lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{r}(t)\| = +\infty$  es decir

$$\lim_{t \nearrow T^*} \mathbf{r}(t) = \mathbf{0} \text{ o bien } \lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{r}(t)\| = +\infty.$$

(análogos resultados se tienen para tiempos menores que  $t_0$ ). Uno de los primeros resultados que veremos es que la condición de campo central implica que, de hecho,  $T^* = +\infty$ .

### Conservación del momento angular. Ley de las áreas de Kepler (1571-1630)

Una importante propiedad de los campos centrales es la conservación del momento angular, independientemente de si el campo es conservativo o no

**Teorema.** Sea  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$  un campo central de fuerzas y sea  $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m \dot{\mathbf{r}}(t)$  el vector momento angular de una partícula de masa  $m$  de trayectoria  $\mathbf{r}(t)$ . Entonces  $\mathbf{L}(t)$  es un vector constante en el tiempo. En particular,  $T^* = +\infty$ .

*Demostración.* Es obvio pues

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t) \times F(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}. \blacksquare$$

En capítulos anteriores hemos visto ejemplos de movimientos tridimensionales que no se podían reducir a movimientos planos. El resultado anterior permite deducir que los movimientos originados por un campo central se producen en un único plano

**Corolario.** Los movimientos originados por un campo central se producen en el plano que contiene al origen, a la posición inicial  $\mathbf{r}(t_0)$  y es ortogonal al vector  $\mathbf{L}(t_0)$ , supuesto que  $\mathbf{L}(t_0) \neq \mathbf{0}$ . En el caso en el que  $\mathbf{L}(t_0) = \mathbf{0}$  el movimiento se realiza en la recta que contiene al origen y a la posición inicial  $\mathbf{r}(t_0)$ . En ambos casos se tiene que  $\mathbf{r}(t)$  está definida en todo  $[t_0, +\infty)$ , es decir  $T^* = +\infty$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbf{L}(t_0) \neq \mathbf{0}$ . Como  $\mathbf{L}(t)$  es constante y es ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  el plano ortogonal al vector  $\mathbf{L}(t_0)$  que contiene al origen ha de contener necesariamente al vector  $\mathbf{r}(t)$ . Además, es claro que no puede existir un tiempo finito  $T^* > t_0$  tal que  $\lim_{t \nearrow T^*} \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$  ni  $\lim_{t \nearrow T^*} \|\mathbf{r}(t)\| = +\infty$ . Si  $\mathbf{L}(t_0) = \mathbf{0}$  los vectores  $\mathbf{r}(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  tienen la misma dirección, para todo  $t \geq t_0$ , por lo que ha de existir una función continua  $g : [t_0, t) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $\dot{\mathbf{r}}(t) = g(t)\mathbf{r}(t)$ . Así,  $\mathbf{r}(t)$  ha de coincidir con la expresión de la solución de la ecuación (vectorial) diferencial ordinaria lineal homogénea de primer orden y por tanto

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) e^{\int_{t_0}^t g(s) ds}$$

lo que muestra que la partícula se mueve en la recta que contiene al origen y a la posición inicial  $\mathbf{r}(t_0)$ . De las propiedades de la función exponencial deducimos, de nuevo, que ha de ser  $T^* = +\infty$ .  $\blacksquare$

Una vez conocido que  $\mathbf{r}(t)$  permanece en un único plano (si  $\mathbf{L}(t_0) \neq \mathbf{0}$ ) será útil trabajar con su representación en las coordenadas polares asociadas a ese plano concreto o, si se quiere, con la representación en coordenadas cilíndricas  $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_3$  en la que  $\mathbf{e}_3$  se debe reemplazar por  $\mathbf{L}(t_0)/\|\mathbf{L}(t_0)\|$ ,  $z(t) \equiv 0$  y por tanto  $\rho(t) = r(t)$ .

**Proposición.** *Supongamos que  $\mathbf{L}(t_0) \neq \mathbf{0}$ . Si se define  $L_0 := \|\mathbf{L}(t_0)\|$  entonces*

$$L_0 = mr^2(t) \left| \dot{\theta}(t) \right|. \quad (1)$$

En particular, la expresión  $r^2(t) \left| \dot{\theta}(t) \right|$  es constante en el tiempo y  $\left| \dot{\theta}(t) \right| > 0$  para todo  $t \geq t_0$  y por tanto la aplicación  $t \mapsto \theta(t)$  es inversible.

*Demostración.* Recordando la fórmula  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + \rho(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t)) + \dot{z}(t)\mathbf{e}_3$  ( $\mathbf{e}_3$  dado por el vector unitario  $\mathbf{L}(t_0)/\|\mathbf{L}(t_0)\|$ ) concluimos en nuestro caso que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= r(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) \times m(\dot{r}(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + r(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t))) = \\ &= mr^2(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_3. \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación.** La consideración de un campo de fuerzas central elimina, como se ha señalado, los movimientos que no son planos. Ahora, la propiedad  $\left| \dot{\theta}(t) \right| > 0$  deja fuera como posibles otro buen número de movimientos planos en los que  $\theta(t)$  cambia de monotonía (por ejemplo de creciente a decreciente) pues en ese caso debería ser  $\dot{\theta}(t_0) = 0$  para algún  $t_0$ , lo que es imposible si  $L_0 > 0$ . Nótese que  $\dot{\theta}(t) > 0$  y  $L_0 > 0$  son condiciones perfectamente compatibles entre sí.

Veamos como se deduce del anterior resultado la famosa Segunda ley de Kepler (o ley de las áreas barridas) que él enunció a partir de las observaciones de Tycho Brahe (1546 – 1601).

**Teorema** (Segunda ley de Kepler) *Las áreas,  $A(T)$ , de las regiones barridas por el extremo del vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  en periodos de igual duración,  $[\tau, \tau + T]$ , son las mismas y por tanto independientes del instante inicial  $\tau$ . De hecho se tiene la fórmula*

$$\frac{d}{dT}A(T) = \frac{L_0}{2m}. \quad (2)$$

La demostración será una fácil consecuencia del siguiente resultado válido en un contexto mucho más general (en el que  $\mathbf{r}(t)$  no tiene porqué estar asociado a un campo central)

**Lema.** *Supongamos (por simplicidad) que  $\dot{\theta}(t) > 0$ . Sea  $A(t)$  el área de las región barrida por el extremo del vector de posición  $\mathbf{r}(s)$ , cuando  $s$  varía en el intervalo  $[\tau, \tau + t]$ , supuesto que  $\mathbf{r}(s)$  es una función de clase  $C^1(\mathbb{R})$  y que  $\dot{\theta}(s) > 0$  para todo  $s \in [\tau, \tau + t]$ . Entonces*

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{2}r^2(t)\dot{\theta}(t).$$

*Demostración del Teorema.* Del lema y de la conservación del momento angular se concluye la fórmula (2) (con  $T$  reemplazado por  $t$ ). Integrando y aplicando la definición

$$A(T) = A(\tau + T) - A(\tau) = \frac{L_0 T}{2m}. \blacksquare$$

*Demostración del Lema.* Sea  $h > 0$  fijo. Sean  $t_-$  y  $t_+$  los instantes del intervalo  $[t, t + h]$  para los que  $r(t)$  toma sus valores mínimo y máximo respectivamente. Recordando que el área del sector circular de radio  $R$  y ángulo  $\vartheta$  viene dado por  $R^2\vartheta/2$  es obvio que

$$\frac{r(t_-)^2}{2}(\theta(t+h) - \theta(t)) \leq A(t+h) - A(t) \leq \frac{r(t_+)^2}{2}(\theta(t+h) - \theta(t)).$$

Dividiendo por  $h$ , observando que (por continuidad)  $r(t_-)$  y  $r(t_+)$  convergen a  $r(t)$  cuando  $h \searrow 0$  y pasando al límite se concluye el resultado (el caso de  $h < 0$  es similar).  $\blacksquare$

**Observación.** Probablemente, Newton pudo utilizar la segunda ley de Kepler para mostrar el carácter radial del campo gravitatorio. En efecto, como  $\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{2}r^2(t)\dot{\theta}(t)$  es constante, recordando la expresión del vector aceleración en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_3,$$

como el movimiento se produce en un plano, las componentes tangencial y normal viene dadas por los coeficientes de los vectores  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\rho$  respectivamente. Por tanto, deducimos que la componente tangencial es nula pues como aquí  $\rho = r$  se tiene que

$$\frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt}(r(t)^2\dot{\theta}(t)) = 0,$$

con sólo suponer que la velocidad de áreas es constante. Este enfoque es como estudiar un *problema inverso* (sabiendo una propiedad [velocidad de áreas constante] podemos determinar la naturaleza de la fuerza [fuerza central] antes de conocerla explícitamente).

### Campos centrales conservativos.

El siguiente resultado caracteriza los campos conservativos que son centrales y será utilizado sistemáticamente en lo que resta de capítulo.

**Teorema.** Sea  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$  un campo conservativo de potencial  $V$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes: a)  $\mathbf{f}$  es un campo central, b)  $V(\mathbf{r})$  no depende más que de  $r$  (módulo de  $\mathbf{r}$ ); es decir, existe  $\tilde{V} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$V(\mathbf{r}) = \tilde{V}(r), \text{ para todo } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}.$$

c)  $F(\mathbf{r})$  no depende más que del módulo de  $\mathbf{r}$ ; es decir, existe  $h : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = h(r)\mathbf{r}, \text{ para todo } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}. \quad (3)$$

Además (salvo una constante que aquí tomaremos nula)

$$\tilde{V}(r) = - \int_0^r h(s)ds, \text{ para todo } r \in (0, +\infty). \quad (4)$$

*Demostración.* a) $\Rightarrow$ b) Basta ver que la función  $V$  es constante sobre cada superficie esférica  $S_r := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{r}\| = r\}$ , o, equivalentemente (como  $S_r$  es conexo por arcos), que la derivada de  $V$ , sobre cada curva  $\mathbf{\Gamma}$  inmersa en una superficie esférica arbitraria  $S_r$ , es nula. Sea, pues,  $\mathbf{\Gamma} : I \rightarrow S_r$ , de clase  $C^1$ , con  $I$  un intervalo abierto real: es decir,  $\|\mathbf{\Gamma}(\tau)\| = r$ , para todo  $\tau \in I$ . Entonces, utilizando a),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(V \circ \mathbf{\Gamma}(\tau)) &= \text{grad}V(\mathbf{\Gamma}(\tau)) \bullet \frac{d}{d\tau}\mathbf{\Gamma}(\tau) = -\mathbf{f}(\mathbf{\Gamma}(\tau)) \bullet \frac{d}{d\tau}\mathbf{\Gamma}(\tau) \\ &= -F(\mathbf{\Gamma}(\tau))\mathbf{\Gamma}(\tau) \bullet \frac{d}{d\tau}\mathbf{\Gamma}(\tau) = -\frac{F(\mathbf{\Gamma}(\tau))}{2} \frac{d}{d\tau} \|\mathbf{\Gamma}(\tau)\|^2 = 0. \end{aligned}$$

b) $\Rightarrow$ c) Como  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\tilde{V}(r)$ , recordando la expresión del gradiente de una función en polares basta observar que, por b),

$$-\text{grad} \tilde{V}(r) = -\frac{\tilde{V}'(r)}{r} \mathbf{r}$$

por lo que basta definir  $h(r) = -\frac{\tilde{V}'(r)}{r}$  (lo que muestra también la fórmula (4)). La implicación c) $\Rightarrow$ a) es obvia. ■

El siguiente resultado muestra que en el caso de campos centrales conservativos el módulo  $r(t)$  varía de manera análoga a como lo hace esa masa  $m$  por la acción de una cierta fuerza unidireccional

**Proposición.** *Sea una partícula de masa  $m$  moviéndose por la acción de un campo central conservativo de fuerzas de potencial  $\tilde{V}(r)$ . Sean*

$$E_0 := \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t) + \tilde{V}(r(t))$$

y  $L_0$  las constantes dadas por la energía total y el módulo del momento angular, respectivamente. Entonces, para todo  $t \geq t_0$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + W(r(t)) = E_0 \tag{5}$$

siendo  $W(r)$  el "potencial efectivo" definido sobre  $(0, +\infty)$  por

$$W(r) = \tilde{V}(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}.$$

*Demostración.* Recordando que

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + r(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta(\theta(t)) \tag{6}$$

(véase la demostración de la conservación del momento angular) y que  $L_0 = mr^2(t) \left| \dot{\theta}(t) \right|$  se tiene que la energía cinética viene dada por

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + \frac{L_0^2}{2mr(t)^2}. \blacksquare$$



**Observación. 1.** Al término  $\frac{L_0^2}{2mr^2}$  se le denomina **potencial ficticio**. Se puede decir que representa una fuerza ficticia centrífuga pues su gradiente es un vector que crece con  $r$ .

**2.** El resultado anterior tiene muchas consecuencias. Por ejemplo si  $W$  es como una parábola existe la distancia mínima y máxima al origen (apogeo y perigeo,...)<sup>1</sup>.

Como en el caso de movimientos unidireccionales, es posible caracterizar aquellos problemas de Cauchy cuya solución  $\mathbf{r}(t)$  es una función periódica en el tiempo. Curiosamente aparece ahora una condición relacionado con otros campos insospechados de la matemática (*Teoría de números e Integrales racionales*).

**Teorema.** Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}(t) = h(r(t))\mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

y sea  $W$  el potencial efectivo asociado a  $h$  y a  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_0 \times m\mathbf{v}_0$ . Supongamos que  $W'(x) \geq -C$ , para alguna  $C > 0$ . Sea  $E_0 := \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \bullet \mathbf{v}_0 + \tilde{V}(r_0)$ . Entonces el movimiento plano  $\mathbf{r}(t)$  es periódico si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

- i) existen dos raíces positivas y consecutivas  $r_-, r_+$  de la ecuación  $W(r) = E_0$  tales que  $r_0 \in [r_-, r_+]$  (con  $r_0 := \|\mathbf{r}_0\|$ ),
- ii)  $W'(r_-) < 0$  y  $W'(r_+) > 0$ ,
- iii)  $L_0 > 0$  y la integral impropia

$$\Lambda(h, m, L_0, E_0) := \frac{L_0}{\pi\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2\sqrt{E_0 - W(r)}} \quad (7)$$

es un número racional.

Además, si se cumplen i), ii) e iii) y el número  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  es de la forma  $\frac{p}{q}$ , con  $p$  y  $q$  naturales y primos entre sí, entonces el periodo viene dado por

$$T = q\sqrt{2m} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - W(r)}}. \quad (8)$$

*Demostración.* Si no se cumple i) o ii) por el resultado visto sobre movimientos unidireccionales sabemos que  $r(t)$  no es una función periódica y por tanto tampoco lo puede ser  $\mathbf{r}(t)$ . Supongamos ahora que se verifican i) e ii). Si  $L_0 = 0$  ya sabemos que el movimiento es unidireccional y por tanto, al ser central,  $r(t)$  no puede ser una función periódica. Supongamos pues que  $L_0 > 0$  (y que se verifican i) e ii)). De (5), como en el caso unidireccional, deducimos que

$$\dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E_0 - W(r(t))}} \quad (9)$$

---

<sup>1</sup>Los radios  $r_-$  y  $r_+$  representan la menor y la mayor distancia al origen. Corresponden a los puntos llamados *apsides* (*pericentro*  $r_-$  y *apocentro*  $r_+$ , respectivamente: *perihelio* y *apohelio* en el sistema Sol-Tierra y *perigeo* y *apogeo* en el sistema Tierra-Luna). El ángulo  $\beta$  que forman recibe el nombre de *ángulo apsidal* y vale  $\pi/2$  en el caso de una elipse y, en general, una fracción racional de  $2\pi$  en el caso de una órbita cerrada genérica.

según que  $t$  varíe en intervalos en los que  $\dot{r}(t) > 0$  o  $\dot{r}(t) < 0$ . Sean  $t_-$  y  $t_+$  los instantes consecutivos en los que  $r(t_-) = r_-$  y  $r(t_+) = r_+$  y supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $t_- < t_+$ . Se tiene que

$$t_+ - t_- = \frac{\sqrt{2m}}{2} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - W(r)}}, \quad (10)$$

Nótese que la misma fórmula es válida si  $t_- > t_+$  pues en ese caso estaría siendo  $\dot{r}(t) < 0$ . Como se vió en el estudio de movimientos unidireccionales, la anterior integral impropia es convergente y el periodo de  $r(t)$  es

$$T_r = 2|t_+ - t_-|.$$

Veamos que el ángulo  $\beta := |\theta(t_+) - \theta(t_-)|$ , generado entre los radiovectores asociados  $\mathbf{r}(t_{\pm})$ , viene dado por la expresión

$$\beta = \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - W(r)}}. \quad (11)$$

En efecto, como la aplicación  $t \mapsto \theta(t)$  es inversible podemos generar la función  $\tilde{r}(\theta) = r(\tilde{t}(\theta))$  donde  $\tilde{t}(\theta)$  es la función inversa de  $\theta(t)$ . Supongamos que  $\dot{\theta}(t) > 0$  (en otro caso todo es análogo sólo que la órbita avanza con  $t$  en sentido negativo, es decir en el sentido de las agujas del reloj). Se tiene (gracias a (1)) que

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}(r(\tilde{t}(\theta(t)))) = \frac{d}{d\theta} \tilde{r}(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = \frac{d}{d\theta} \tilde{r}(\theta(t)) \frac{L_0}{m \tilde{r}(\theta(t))^2}$$

y por tanto

$$\frac{d}{d\theta} \tilde{r}(\theta) = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L_0} \tilde{r}(\theta)^2 \sqrt{E_0 - W(\tilde{r}(\theta))}$$

según que  $\theta$  varíe en intervalos en los que  $\frac{d}{d\theta} \tilde{r}(\theta) > 0$  o  $\frac{d}{d\theta} \tilde{r}(\theta) < 0$  (lo que es equivalente a  $\dot{r}(t) > 0$  o  $\dot{r}(t) < 0$  pues  $\dot{\theta}(t) > 0$ ). Por ser una ecuación de variables separables, *el truco de Leibniz* conduce a la fórmula

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{\tilde{r}(\theta)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - W(r)}} \quad (12)$$

(notese que como  $0 < r_- \leq \tilde{r}(\theta) \leq r_+$ , no hay mas singularidad en el integrando que las que se originan cuando  $r = r_-$  y  $r = r_+$ , pues en esos casos  $W(r_{\pm}) = E_0$ ). Integrando entre  $\theta(r_-)$  y  $\theta(r_+)$  se obtiene (11).

Nótese que por la definición de  $\Lambda$  se tiene que  $\beta\pi = \Lambda(h, m, L_0, E_0)$ . Si  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  es un número racional, de la forma  $\frac{p}{q}$ , con  $p$  y  $q$  naturales y primos entre sí, entonces  $q\beta = p\pi$ , es decir, después de  $2q$  iteraciones (u oscilaciones de  $r(t)$  entre  $r_-$  y  $r_+$ ) el vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  habrá dado exactamente  $p$  vueltas y  $\mathbf{r}(t_0 + 2q|t_+ - t_-|) = \mathbf{r}(t_0 + 2q|t_+ - t_-|)$  pues los dos vectores tienen el mismo módulo y ángulos  $2\pi$ -congruentes. Por tanto el movimiento es periódico de periodo

$$T_{\mathbf{r}} = 2q|t_+ - t_-| = 2q\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{E_0 - W(r)}}.$$

Por último, si  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  fuese un número irracional ninguna iteración del proceso conduciría a la posición ocupada inicialmente y el movimiento no podría ser nunca periódico. ■

**Observaciones.** 1. Véase la interpretación geométrica de las figuras hecha en clase.

2. Al igual que pasaba con el periodo de movimientos unidireccionales no lineales, el periodo (en caso de existir) depende de los datos iniciales (pues  $E_0$  y  $L_0$  dependen de los datos iniciales) y lo que es peor aún, depende del valor de la masa (para unos datos iniciales prefijados el número  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  es racional o no dependiendo de la masa  $m$ ). Sin embargo, veremos a continuación que en el caso del potencial newtoniano, bajo ciertas hipótesis adicionales, el número  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  es racional (algo que parece sorprendente después de lo que hemos visto pero que no debe parecerse demasiado extraño algo de ese estilo sucedía cuando analizamos la dependencia del periodo respecto de los datos iniciales en el caso de los movimientos ecuaciones periódicos: el periodo era constante, e independiente de los datos iniciales, cuando la ecuación era lineal).

3. Se puede demostrar fácilmente (ejercicio) que si  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  es irracional entonces la órbita de  $\mathbf{r}(t)$ , cuando  $t$  varía en el intervalo  $[t_0, +\infty)$ , genera una curva que es un conjunto denso en el anillo de  $\mathbb{R}^2$  de radios  $r_-$  y  $r_+$ .

## 1.A.4. ii) 1. Teorema de Binet.

Pese a que ya hemos obtenido importantes resultados cualitativos que nos permitirán analizar la naturaleza de las órbitas en el caso del potencial newtoniano, necesitaremos otros resultados más cuantitativos para poder dilucidar que tipo de órbitas periódicas se producen. Newton realizó su teoría mediante argumentos estrictamente geométricos<sup>2</sup>. Aquí seguiremos otra aproximación, históricamente aparecida más de un siglo después de la demostración de Newton, pero más fácilmente comprensible<sup>3</sup> y con aplicabilidad a otros campos diferentes del newtoniano.

La forma peculiar del “potencial ficticio” sugiere introducir la nueva variable  $u = 1/r$ . Más concretamente, como la aplicación  $t \mapsto \theta(t)$  es invertible podemos definir su aplicación inversa  $\tilde{t} : \theta(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Definamos ahora, para todo  $\theta \in \theta(\mathbb{R})$ ,

$$u(\theta) := \frac{1}{r(\tilde{t}(\theta))} = \frac{1}{\tilde{r}(\theta)}.$$

El siguiente resultado analiza algunas propiedades de esta función y será sistemáticamente utilizado más adelante

**Teorema** (de J. P. M. Binet (1786-1856)). *Sea una partícula de masa  $m$  moviéndose por la acción de un campo central conservativo de fuerzas  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = h(r)\mathbf{r}$ . Supongamos que el módulo del momento angular es  $L_0 > 0$ . Entonces*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}(\theta) + u(\theta) = -\frac{m}{L_0^2 u(\theta)^3} h\left(\frac{1}{u(\theta)}\right) \quad (13)$$

<sup>2</sup>Pese a que en un pequeño pasaje indicase que no sería difícil repetir su demostración geométrica (la típica de ese tiempo) al nuevo lenguaje de las derivadas que él mismo había introducido, sin dar más detalles al respecto.

<sup>3</sup>Un intento reciente de repetir los argumentos geométricos de Newton con algo más de claridad fue llevado a cabo por un Premio Nobel de Física: Feynman (*La conferencia perdida de Feynman*. Tusquets Editores, Barcelona, 1999).

*Demostración.* A partir de la expresión de la aceleración en polares se tiene que

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{r}}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) + (r(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t))\mathbf{e}_\theta(\theta(t)) \\ = h(r(t))r(t)\mathbf{e}_\rho(\theta(t)) \end{aligned}$$

de lo que, utilizando la expresión (y conservación) del momento angular en polares deducimos que

$$m\dot{r}(t) - \frac{L_0^2}{mr(t)^3} = h(r(t))r(t). \quad (14)$$

Pero suponiendo que  $\dot{\theta}(t) > 0$  tenemos que

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u(\theta(t))}\right) = -\frac{\frac{du}{d\theta}(\theta(t))}{u(\theta(t))^2}\dot{\theta}(t) = -\frac{du}{d\theta}(\theta(t))\frac{L_0}{m}$$

y análogamente

$$\ddot{r}(t) = -\frac{d^2u}{d\theta^2}(\theta(t))u(\theta(t))^2\frac{L_0^2}{m^2}. \quad (15)$$

Si  $\dot{\theta}(t) < 0$  ahora se tiene que  $\dot{\theta}(t) = -m^{-1}r^{-2}(t)L_0 = m^{-1}u^2L_0$  y aunque  $\dot{r}(t) = \frac{du}{d\theta}(\theta(t))\frac{L_0}{m}$  derivando obtenemos de nuevo la relación (15).

Finalmente, sustituyendo en (14) y dividiendo por  $u^2$  se concluye la fórmula. ■

**Observaciones. 1.** La fórmula de Binet es especialmente útil para campos en los que

$$\frac{1}{u^3}h\left(\frac{1}{u}\right) = a + bu$$

con  $a$  y  $b$  constantes, es decir, si

$$h(r) = \frac{a}{r^3} + \frac{b}{r^4}.$$

En ese caso la ecuación pasa a ser lineal y se tiene una fórmula explícita de la solución, lo que explotaremos de manera sistemática en la siguiente sección.

**2.** Con los cambios de incógnitas que hemos introducido, es fácil comprobar que la energía cinética pasa a tener la expresión

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{m}\left(\left(\frac{du}{d\theta}(\theta)\right)^2 + u(\theta)^2\right)$$

en donde ahora lo escribimos en términos del ángulo polar  $\theta$  en vez de la dependencia usual en términos del tiempo  $t$ .

**3.** En el siglo que transcurrió entre la demostración geométrica de Newton y la de Binet hubo varias otras alternativas que también utilizaron el cálculo diferencial. Una de ellas se debió a Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) quién mostró que en el caso de la fuerza de atracción newtoniana ( $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ , con  $k < 0$ ) el vector

$$\mathbf{A}(t) := \mathbf{p}(t) \times \mathbf{L}(t) - m(-k)\frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}$$

es constante en el tiempo. Aquí  $\mathbf{p}(t)$  designa al vector momento lineal,  $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ . Ese vector fue estudiado también por Hamilton (en 1845), J. W. Gibbs (1839-1903) (en 1900) y especialmente por W. Lenz (1888-1957) y Carl Runge (1856–1927) quienes lo utilizaron alrededor de 1925 para estudiar el átomo de hidrógeno. En su honor (y en el de Laplace) el vector  $\mathbf{A}(t)$  es conocido en nuestros días como el *vector de Laplace-Runge-Lenz*. Volveremos sobre otras consecuencias de la conservación de  $\mathbf{A}(t)$  a la hora de caracterizar las órbita periódicas generadas.

4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de la Mecánica Analítica nos llevan a resultados que aquí hemos visto por otros argumentos. En efecto, si introducimos las coordenadas polares como coordenadas generalizadas

$$\begin{cases} q_1 = r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ q_2 = \arctan \frac{x_2}{x_1} = \theta \end{cases}$$

Entonces

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}_1)^2 + q_1^2(\dot{q}_2)^2] - \tilde{V}(q_1)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\mathbf{r}(t)$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}(\dot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{r}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\dot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{r}(t))$$

conducen, tras el cambio de incógnita a coordenadas generalizadas, a las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\mathbf{q}(t)$  que resultan ser las dadas por

$$m\ddot{q}_1 - m q_1 (\dot{q}_2)^2 + \tilde{V}'(q) = 0 \tag{16}$$

y

$$\frac{d}{dt} (m q_1^2 \dot{q}_2) = 0 \tag{17}$$

Curiosamente, la ecuación (17) no es otra cosa que la ecuación ya obtenida sobre la conservación del momento angular. La ecuación (16) es una versión de la fórmula (14) vista en la demostración del Teorema de Binet.

## 1.A.4.ii) 2. Clasificación de las cónicas según su expresión en polares.

Con el fin de definir las cónicas comenzamos considerando dos puntos dados del plano  $F$  y  $F'$ , consideremos el origen de coordenadas  $\tilde{O}$  en el punto medio del segmento  $\overline{FF'}$  y para un punto  $P$  del plano afín  $\mathbb{A}^2$  definimos  $r := d(P, F)$  y  $r' := d(P, F')$ .

**Definición.** Dado un número positivo  $a > d(F, F')/2$  definimos la **elipse** (de semieje mayor  $a$ ) como el conjunto

$$\mathcal{E} = \{P : r + r' = 2a\}.$$

**Definición.** Dado un número positivo  $a < d(F, F')/2$  definimos la **hipérbola** como el conjunto

$$\mathcal{H} = \{P : |r - r'| = 2a\} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$$

siendo

$$\mathcal{H}_\pm = \{P : r - r' = \pm 2a\}.$$

En el caso de la parábola sustituimos uno de los puntos (por ejemplo el  $F'$ ) por una recta  $D$  (llamada *directriz*) consideremos el origen de coordenadas  $\tilde{O}$  en el punto medio del segmento ortogonal a  $D$  que une esta recta con  $F$  y para un punto  $P$  del plano definimos  $r := d(P, F)$  y  $r' := d(P, D)$ .

**Definición.** Sea  $a = d(F, D)$ . La **parábola** es el conjunto

$$\mathcal{P} = \{P : r = r'\}.$$

La mera aplicación reiterada del Teorema de Pitágoras conduce al siguiente resultado:

**Teorema.** Sea  $\varphi$  el ángulo polar de un punto  $P$ . Sea el número no negativo  $\varepsilon$  (denominado **excentricidad**)

$$\varepsilon =: \frac{d(\tilde{O}, F)}{a}$$

Entonces:

a) en el caso de una elipse (con  $F$  a la derecha del centro de simetría  $\tilde{O}$ ),  $\varepsilon \in [0, 1)$  y se tiene que

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon \cos \varphi + 1},$$

b) en el caso de una hipérbola (con  $F$  a la izquierda del centro de simetría  $\tilde{O}$ ),  $\varepsilon \in (1, \infty)$  y

$$r(\varphi) = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{|\varepsilon \cos \varphi \pm 1|},$$

(con  $+1$  (respect.  $-1$ ) si  $r' - r = 2a$  (respect.  $r - r' = 2a$ ),

c) en el caso de una parábola (con la recta  $D$  a la derecha del centro de simetría  $\tilde{O}$ )

$$r(\varphi) = \frac{a}{\cos \varphi + 1}.$$

*Demostración.* a) Se deduce identificando las expresiones

$$(r')^2 = (r \operatorname{sen} \varphi)^2 + (2\varepsilon a + r \cos \varphi)^2 \text{ y}$$

$$(r')^2 = (2a - r)^2.$$

b) Considerémos la "rama negativa"  $\mathcal{H}_- = \{P : r' - r = 2a\}$ . Identificando las expresiones

$$(r')^2 = (r \operatorname{sen}(\pi - \varphi))^2 + (2\varepsilon a + r \cos(\pi - \varphi))^2 \text{ y}$$

$$(r')^2 = (2a + r)^2.$$

se obtiene la expresión deseada. El caso de la rama positiva es similar.

c) Se obtiene de la identidad

$$d(P, D) = a = r + r \cos \varphi. \blacksquare$$

**Observación.** Véanse las figuras hechas en clase para familias de diferentes elipses, hipérbolas y parábolas variando alguno de los parámetros (por ejemplo  $\varepsilon$ ) pero dejando fijo otros (por ejemplo  $a$ ).

Las fórmulas anteriores caracterizan completamente la naturaleza de las cónicas en el sentido siguiente:

**Teorema.** *Sea una curva del plano en representación paramétrica en términos del ángulo polar  $r = r(\varphi)$ . Entonces,*

a) *Si los puntos de una curva vienen dados por la fórmula*

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon \cos \varphi + 1},$$

*para unas ciertas constantes  $a > 0$  y  $\varepsilon \in [0, 1)$  entonces la curva es una elipse (con  $F$  a la derecha del centro de simetría  $\tilde{O}$ ).*

b) *Si los puntos de una curva vienen dados por la fórmula*

$$r(\varphi) = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon \cos \varphi \pm 1},$$

*para unas ciertas constantes  $a > 0$  y  $\varepsilon \in (1, \infty)$  entonces la curva es una hipérbola.*

c) *Si los puntos de una curva vienen dados por la fórmula*

$$r(\varphi) = \frac{a}{\cos \varphi + 1}$$

*para una cierta constante  $a > 0$  entonces la curva es una parábola.*

*Demostración.* Es una mera comprobación (aunque bastante tediosa en algunos casos) y se deja como ejercicio.  $\blacksquare$

Si la recta nodal  $F'F$  no es horizontal si no que forma un ángulo  $\theta_0$  con la horizontal que pasa por  $F$ , definiendo  $\varphi = \theta - \theta_0$  podemos aplicar la caracterización anterior a la curva  $r = \tilde{r}(\theta) := r(\theta - \theta_0)$  con  $r = r(\varphi)$  la curva rotada de manera que ahora la recta nodal  $F'F$  aparezca como horizontal. En particular, por ejemplo, la expresión

$$\tilde{r}(\theta) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon \cos(\theta - \theta_0) + 1},$$

con  $a > 0$  y  $\varepsilon \in [0, 1)$  corresponde a una elipse rotada (desde el punto  $F$ ) un ángulo  $\theta_0$  respecto de la horizontal que pasa por  $F$ .

Nótese que cuando  $\theta_0 = \pi$ , como  $\cos(\theta - \pi) = -\cos \theta$  se obtienen las cónicas simétricas en las que el foco  $F$  es reemplazado por  $F'$ . En particular, se tiene que

**Corolario.** Sea  $\varphi$  el ángulo polar de un punto  $P$ . Sea el número no negativo  $\varepsilon$  (denominado **excentricidad**)

$$\varepsilon =: \frac{d(\tilde{O}, F)}{a}$$

Entonces:

a) en el caso de una elipse con  $F$  a la izquierda del centro de simetría se tiene que  $\varepsilon \in [0, 1)$  y

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{-\varepsilon \cos \varphi + 1},$$

b) en el caso de una hipérbola con  $F$  a la derecha del centro de simetría se tiene que  $\varepsilon \in (1, \infty)$  y

$$r(\varphi) = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{|-\varepsilon \cos \varphi \pm 1|},$$

con  $+1$  (respect.  $-1$ ) si  $r' - r = 2a$  (respect.  $r - r' = 2a$ ),

c) en el caso de una parábola con la recta  $D$  a la derecha del foco  $F$  se tiene que

$$r(\varphi) = \frac{a}{-\cos \varphi + 1} \blacksquare$$

**Corolario.** En todos los casos de cónicas orientación horizontal, si se escribe

$$\frac{1}{r(\varphi)} = A \cos \varphi + B \tag{18}$$

con  $A$  y  $B$  constantes, entonces se cumple que

$$a = \left| \frac{B}{A^2 - B^2} \right| \text{ y } \varepsilon = \frac{|A|}{|B|}.$$

*Demostración.* Es fruto de manipulaciones obvias y se deja como ejercicio. ■

**Observación.** Si se parte de la expresión (18) tal y como sucede cuando se aplica el Teorema de Binet al campo newtoniano, se puede obtener sin dificultad una clasificación de las cónicas correspondientes en función de los valores de las constantes  $A$  y  $B$ . Véase la figura hecha en clase.

## 1.A.4. iii) Teorema de Newton: fuerzas centrales inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.



Como ya se ha señalado anteriormente, en los dos casos particulares de campos centrales conservativos de mayor relevancia (el campo gravitatorio y el electrostático)  $\mathbf{f}$  es de la forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3} \mathbf{r} = \frac{k}{r^2} \mathbf{e}_\rho \text{ con } k \in \mathbb{R},$$

y el módulo de la fuerza es inversamente proporcional a  $r$ , es decir, al cuadrado de la distancia de la partícula al origen.

El distinto signo de la constante  $k$  corresponde a situaciones muy diferentes. Si  $k < 0$  se dice que la fuerza es “atractiva” y es el caso del campo gravitatorio

$$k = -GMm$$

con  $M$  la masa situada en el origen de coordenadas y  $G = 6.668 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ . Si  $k > 0$  se dice que la fuerza es “repulsiva” y el mejor ejemplo de ellas corresponde al campo electrostático correspondientes a dos cargas eléctricas de igual signo, en cuyo caso

$$k = Kq_1q_2$$

donde  $q_1, q_2$  son las cargas eléctricas y  $K$  es una constante positiva universal dependiente de las unidades (esa misma expresión de  $k$  es válida también para cargas de signo distinto en las que la fuerza pasa a ser atractiva).

Como potencial asociado (determinado salvo una constante) tomaremos

$$\tilde{V}(r) = \frac{k}{r} \text{ para } r > 0.$$

Por tanto, el potencial efectivo es

$$W(r) = \frac{k}{r} + \frac{L_0^2}{2mr^2},$$

con lo que ahora podemos particularizar los resultados obtenidos para movimientos unidireccionales visto en capítulos anteriores. Antes de pasar a los detalles, es muy ilustrativo representar gráficamente la función  $W(r)$  resultante de la “competición” (en el origen,  $r \rightarrow 0$ , y en el infinito,  $r \rightarrow +\infty$ ) de las funciones  $\frac{k}{r}$  y  $\frac{L_0^2}{2mr^2}$  según que sea  $k < 0$  o  $k > 0$  y, sobre todo  $L_0 = 0$  o  $L_0 > 0$ . El caso más variado aparece cuando  $k < 0$  y  $L_0 > 0$  y enseguida se comprueba sin dificultad que aparece un único mínimo en  $r = \frac{L_0^2}{m(-k)}$  y que

$$\text{Min}_{r \in (0, +\infty)} W(r) = W\left(\frac{L_0^2}{m(-k)}\right) = \frac{-mk^2}{2L_0^2}.$$

De esta manera, la ecuación  $W(r) = E_0$  tiene dos raíces positivas y consecutivas  $r_-, r_+$  con  $W'(r_-) < 0$  y  $W'(r_+) > 0$  para valores de  $E_0$  “ceranos” al mínimo. El siguiente resultado ofrece una mayor precisión a estos argumentos generales.

**Corolario.** *Se tiene:*

- a) Si  $k > 0$ , la energía total  $E_0$  es estrictamente positiva, no hay movimientos periódicos y  $r(t) \rightarrow +\infty$  si  $t \rightarrow \pm\infty$ .
- b) Si  $k < 0$  y  $L_0 = 0$  la energía total  $E_0$  es estrictamente negativa, no hay movimientos periódicos y  $r(t) \rightarrow +0$  si  $t \rightarrow +\infty$ .

c) Si  $k < 0$  y  $L_0 > 0$  se dan los siguientes subcasos:

c1) si  $E_0 \geq 0$  no hay movimientos periódicos y  $r(t) \rightarrow +\infty$  si  $t \rightarrow \pm\infty$ .

c2) si  $E_0 \in (\frac{-mk^2}{2L_0^2}, 0)$  la ecuación  $W(r) = E_0$  tiene dos raíces positivas y consecutivas  $r_-, r_+$  con  $W'(r_-) < 0$  y  $W'(r_+) > 0$ . Además se tiene la caracterización

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{m(-k)}{L_0^2} \mp \sqrt{\left(\frac{m(-k)}{L_0^2}\right)^2 - \frac{2m(-E_0)}{L_0^2}},$$

es decir

$$r_{\pm} = \frac{k}{2E_0} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2E_0}\right)^2 - \frac{L_0^2}{2m(-E_0)}}.$$

En particular, si  $r_0 > \frac{L_0^2}{2m(-k)}$  (el único cero de  $W$ ) entonces la función escalar  $r(t)$  es periódica.

c3) si  $E_0 = \frac{-mk^2}{2L_0^2}$  entonces la órbita es una circunferencia de radio  $r(t) = r_0 = \frac{L_0^2}{m(-k)}$ ,

c4) ningún movimiento puede tener una energía total negativa inferior a  $\frac{-mk^2}{2L_0^2}$ .

*Demostración.* Es fruto de la expresión explícita de la función  $W(r)$ . Por ejemplo, la ecuación  $W(r) = E_0$  equivale a la ecuación cuadrática para  $u := 1/r$

$$\frac{L_0^2}{2m}u^2 + ku - E_0 = 0$$

lo que conduce al cálculo explícito de  $\frac{1}{r_{\pm}}$ . El resto de afirmaciones resulta de aplicar a este caso el estudio realizado sobre los movimientos unidireccionales en un campo conservativo. ■

**Observación.** Véase la figura de clasificación de las órbitas en función de las cantidades conservadas  $E_0$  y  $L_0$ .

Para obtener una información más precisa recurriremos a la fórmula de Binet y el estudio de las cónicas en polares que se verá por separado:

**Teorema (Newton).** *Supuesto  $L_0 > 0$  se tiene que:*

a) existen dos constantes,  $A$  y  $\theta_0$ , dependientes de los datos iniciales, tales que para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\tilde{r}(\theta) = \frac{1}{A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{m(-k)}{L_0^2}}. \quad (19)$$

De hecho, si  $k < 0$  y  $E_0 \in [\frac{-mk^2}{2L_0^2}, 0)$ , la constante  $A$  admite la siguiente expresión explícita en términos de  $L_0$  y  $E_0$

$$A^2 = \frac{m^2k^2}{L_0^4} + \frac{2mE_0}{L_0^2}. \quad (20)$$

b) La función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  describe una cónica caracterizada por los parámetros

$$a = \left| \frac{k}{2E_0} \right| \text{ y } \varepsilon^2 = 1 + \frac{2E_0L_0^2}{mk^2}. \quad (21)$$

En particular,

b.1) si  $k > 0$  entonces  $\mathbf{r}(t)$  describe una hipérbola,

b.2) si  $k < 0$  y  $E_0 > 0$  entonces  $\mathbf{r}(t)$  describe una hipérbola,

b.3) si  $k < 0$  y  $E_0 = 0$  entonces  $\mathbf{r}(t)$  describe una parábola,

b.4) si  $k < 0$  y  $E_0 \in [-\frac{mk^2}{2L_0^2}, 0)$  entonces  $\mathbf{r}(t)$  describe una elipse,

b.5) si  $k < 0$  y  $E_0 = -\frac{mk^2}{2L_0^2}$  entonces  $\mathbf{r}(t)$  describe una circunferencia de radio  $a = r_0 = \frac{L_0^2}{m(-k)} = \frac{k}{2E_0}$ .

*Demostración.* a) La ecuación de Binet se reduce a la ecuación lineal

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}(\theta) + u(\theta) = \frac{m(-k)}{L_0^2}$$

cuya solución general puede escribirse en la forma

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{m(-k)}{L_0^2} \quad (22)$$

con  $A$  y  $\theta_0$  constantes dependientes de  $u(\theta_0)$  y  $\frac{du}{d\theta}(\theta_0)$  que pueden ser determinados a través de los datos iniciales. Como  $\tilde{r}(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}$ , de la fórmula (22) deducimos que

$$r_{\pm} = \frac{1}{\mp A + \frac{m(-k)}{L_0^2}}.$$

Identificando las dos expresiones halladas para  $r_{\pm}$  en el Corolario obtenemos la fórmula (20). El resto de las afirmaciones es fruto del estudio de las cónicas en polares. En particular,

$$\varepsilon = \frac{A}{\frac{m(-k)}{L_0^2}}$$

lo que implica la fórmula (21). ■

**Observaciones.** 1. *Problema inverso.* Sabiendo la órbita se puede determinar la fuerza. Hemos ratificado la Primera Ley de Kepler a partir de resultados de campos centrales de fuerzas y del caso en el que dicho campo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Sin embargo, históricamente, sucedió al revés. Como se ha indicado, Kepler dedujo sus leyes sobre el movimiento de los planetas a partir de las observaciones visuales de Brahe. Estas leyes fueron utilizadas por Newton, medio siglo después, para obtener la ley de la gravitación. Con el lenguaje actual podemos imaginar como pudo proceder Newton, de una u otra manera, para proponer su *Ley de gravitación universal*. La cuestión se puede plantear en los siguientes términos: se sabe que un campo central de fuerzas  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = h(r)\mathbf{r}$  origina órbitas elípticas (par ciertos datos iniciales). Mostrar que necesariamente el módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

Una resolución “con trampa” (pues va a utilizar un resultado publicado casi un siglo después de Newton) es la siguiente: como los planetas se mueven en órbitas elípticas, introduciendo los cambios de incógnitas mencionados anteriormente llegamos a que necesariamente

$$u(\theta) = \frac{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}{\ell},$$

para ciertas constantes adecuadas. Por tanto, sustituyendo esa función concreta en la fórmula de Binet para una fuerza conservativa genérica  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = h(r)\mathbf{r}$  encontramos que

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = -\frac{m}{L_0^2 (u(\theta))^3} h\left(\frac{1}{u(\theta)}\right),$$

de lo que deducimos que necesariamente ha de ser

$$\frac{1}{\ell} = -\frac{m}{L_0^2 (u(\theta))^3} h\left(\frac{1}{u(\theta)}\right),$$

es decir

$$h(r)r = -\frac{L_0^2}{\ell m r^2}.$$

Más tarde, cuando veamos la tercera Ley de Kepler podremos concluir incluso algo más: el cociente

$$\frac{L_0^2}{\ell m r^2} \text{ es una constante, } G, \text{ independiente de } m,$$

donde  $M$  es la masa de la partícula que se ha supuesto (inmóvil) en el origen. De esta manera podemos concluir, como quizás pudo hacer Newton, que el campo gravitatorio viene dado por

$$\mathbf{f} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}.$$

**2.** Aunque es un camino mucho más árduo, es posible obtener la fórmula (19) mediante la expresión obtenida en el resultado sobre los ápsides para potenciales generales. En efecto, aplicándolo a nuestro caso e introduciendo, una vez más, el cambio de variable  $u = 1/r$  se obtiene que

$$\theta - \theta_0 = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{(2mE_0/L_0^2) + (2mku/L_0^2) - u}}.$$

Aplicando la fórmula de integración

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arccos\left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{q}}\right)$$

con  $q = b^2 - 4ac$ , se llega a

$$u = \frac{mk}{L_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{mk}} \cos(\theta - \theta_0)\right),$$

que es fácil ver que coincide con (19).

**3.** Recuerdese la representación de familias diferentes elipses, parábolas e hipérbolas con el mismo valor de  $a$  pero variando la excentricidad  $\varepsilon$ .

4. En realidad, enlazando las conclusiones del Teorema de Newton con el teorema visto sobre caracterización de órbitas periódicas en campos centrales conservativos, sin necesidad de hacer ninguna integral, podemos concluir no solamente que el número  $\Lambda(h, m, L_0, E_0)$  es irracional cuando  $h(r) = \frac{k}{r^3}$ ,  $k < 0$  y  $E_0 \in (\frac{mk}{2L_0^2}, 0)$ , si no que además se tiene que el ángulo de transición entre dos ápsides consecutivos es  $\beta = \pi$  (pues el origen es uno de los focos) y por tanto que, asombrosamente, se ha de tener que  $\Lambda(h, m, L_0, E_0) = 1$ . En otros términos, sin hacer la integral racional involucrada, hemos demostrado que

$$\frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - \frac{k}{r} - \frac{L_0^2}{2mr^2}}} = \pi,$$

siendo

$$r_{\pm} = \frac{k}{2E_0} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2E_0}\right)^2 - \frac{L_0^2}{2m(-E_0)},}$$

supuesto que  $k < 0$  y  $E_0 \in (\frac{mk}{2L_0^2}, 0)$ .

Además de la forma geométrica de las órbitas descritas por  $\mathbf{r}(t)$  podemos conocer informaciones muy útiles sobre el módulo del vector velocidad  $v(t) := \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ .

**Proposición.** *Supongamos  $L_0 > 0$  y  $k < 0$ . Entonces:*

i) si  $E_0 \in [\frac{-mk^2}{2L_0^2}, 0)$ , y si  $a$  es el semieje mayor de la elipse, se tiene que

$$v(t)^2 = \frac{(-k)}{m} \left( \frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a} \right),$$

ii) si  $E_0 = \frac{-mk^2}{2L_0^2}$  entonces la trayectoria circular,  $r(t) = a = r_0$  se recorre con una velocidad de módulo constante  $v(t) = v_0$  con

$$(v_0)^2 = \frac{(-k)}{mr_0},$$

iii) si  $E_0 = 0$  entonces la **velocidad de escape**  $v_0$  (esto es, la velocidad mínima requerida para que una partícula pueda escapar de la atracción del origen y llegar al infinito) viene dada por la relación (en términos de los valores conocidos para un tiempo inicial  $t_0$  genérico)

$$(v_0)^2 = \frac{2(-k)}{mr_0}. \quad (23)$$

*Demostración.* Por la conservación de la energía total

$$\frac{1}{2}m \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + \frac{k}{r(t)} = E_0, \quad (24)$$

lo que permite expresar, en todos los casos posibles, la velocidad en términos del módulo del vector posición y de  $E_0$ . Así, si definimos (de acuerdo con lo indicado en (21))  $\varepsilon^2 := 1 + 2E_0 \frac{L_0^2}{m(-k)}$ ,

haciendo  $\ell = \frac{L_0^2}{(-k)m}$ , se tiene que  $E_0 = \frac{k}{2} \frac{1 - \varepsilon^2}{\ell}$ , y por tanto, sustituyendo en (24), concluimos que

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 = \frac{(-k)}{m} \left( \frac{1 - \varepsilon^2}{\ell} - \frac{2}{r(t)} \right).$$

Utilizando ahora (21), podemos comprobar que

$$\frac{1 - \varepsilon^2}{\ell} = \frac{1}{a},$$

lo que nos conduce al siguiente cuadro en el que se expresa el módulo de la velocidad en función del parámetro  $a$  según los casos :

órbita circular	$\varepsilon = 0$	$E_0 = \frac{-mk^2}{2L_0^2}$	$\ \dot{\mathbf{r}}(t)\ ^2 = \frac{(-k)}{mr_0},$
órbita elíptica	$0 < \varepsilon < 1$	$\frac{-mk^2}{2L_0^2} < E_0 < 0$	$\ \dot{\mathbf{r}}(t)\ ^2 = \frac{(-k)}{m} \left( \frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a} \right),$
órbita parabólica	$\varepsilon = 1$	$E_0 = 0$	$\ \dot{\mathbf{r}}(t)\ ^2 = \frac{2(-k)}{mr(t)},$
órbita hiperbólica	$\varepsilon > 1$	$E_0 > 0$	$\ \dot{\mathbf{r}}(t)\ ^2 = \frac{(-k)}{m} \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{r(t)} \right).$

En particular, podemos calcular la *velocidad de escape*, esto es, la velocidad mínima requerida para que una partícula pueda escapar de la atracción del campo y llegar al infinito. En ese caso,  $E_0 = 0$  (en particular  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 \rightarrow 0$  cuando  $r(t) \rightarrow \infty$ ). Consecuentemente, si particularizamos en un instante inicial  $t_0$  se obtiene la velocidad de escape (23), típica de órbitas parabólicas. ■

**Observaciones. 1.** Interpretación en términos de diferentes  $v_0$ . Ver figuras.

**2.** Aplicación a órbitas de transferencia.....

### 1.A.4. iv) Tercera Ley de Kepler [y Ecuación de Kepler].

A finales del siglo XVII, aprovechando las observaciones visuales, sin telescopio, hechas por Tycho Brahe (1546–1601) sobre la órbita de Marte, Johannes Kepler<sup>4</sup> (1571–1630) enunció sus famosas tres leyes del movimiento planetario, de las cuales ya hemos visto con detalle dos de ellas (a la estela de la proeza de Isaac Newton, 50 años después de Kepler, cuando inspirado en esas leyes estableció la ley de gravitación universal y demostró matemáticamente). Las leyes que Kepler propuso son anteriores a las potentes herramientas del Cálculo Diferencial introducidas por Leibniz y Newton años más tarde:

- i) los planetas se mueven describiendo órbitas elípticas que tienen al Sol en uno de sus focos*
- ii) las áreas barridas por el radio vector desde el Sol a un planeta en tiempos iguales son iguales.*
- iii) los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semi-ejes mayores.*

Su tercera ley fue fruto de numerosas observaciones en las que constató una “aparentemente extraña” relación entre el periodo de revolución  $\tau$  de cada planeta y el semieje mayor  $a$  de la elipse recorrida por él. No lo demostró matemáticamente. Ese fue el gran mérito personal de I. Newton.

<sup>4</sup>Kepler fue ayudante de Tycho Brahe llegando a ser nombrado astrónomo imperial años después. Fue un copernicano convencido desde su juventud, lo que no era bien visto para la época, pese a ser sacerdote. Hasta ese momento el pensamiento ptolemaico, incluso el copernicano, establecía para los planetas órbitas circulares y con velocidad uniforme, lo que era admitido por científicos consagrados como Galileo y Descartes. Las dos primeras leyes publicadas en su *Astronomia Nova* (1609), representan una innovación radical con esas ideas. Su tercera ley, que apareció en *Harmonices Mundi* en 1619, tiene un aspecto cuantitativo.

[ver Figura con representaciones puntuales sugiriendo una recta]

Una vez más, aquí ofrecemos una demostración alternativa utilizando un lenguaje más actual.

**Teorema** (Tercera ley de Kepler). *Sea un campo de fuerzas conservativo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y atractivo, es decir  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3}\mathbf{r}$  con  $k < 0$ . Supongamos que  $E_0 \in [\frac{mk}{2L_0^2}, 0)$ . Entonces, el cuadrado del periodo de revolución  $\tau$  es proporcional al cubo del semieje mayor  $a$  de las elipses recorridas, es decir*

$$\tau^2 = \mu a^3 \tag{25}$$

para una cierta constante positiva  $\mu$  independiente de los datos iniciales (y por tanto de  $L_0$  y  $E_0$ ). *Demostración.* Sea  $\tau$  el periodo. El area de la elipse<sup>5</sup>  $\pi ab$  (con  $b$  el semieje menor) ha de coincidir con la obtenida por la fórmula de la velocidad del area barrida

$$A(\tau) = \frac{L_0\tau}{2m}.$$

Por el teorema de Pitágoras se tiene que  $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$ , y así, sustituyendo las expresiones  $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2E_0L_0^2}{mk^2}$  y  $a = \left| \frac{k}{2E_0} \right|$ , obtenidas en la sección anterior, concluimos que

$$b^2 = \frac{L_0^2}{2m(-E_0)}.$$

Por tanto

$$\tau = \frac{2mA(\tau)}{L_0} = \frac{2\pi mab}{L_0}$$

y así, como

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^2 b^2 \frac{m^2}{L_0^2}$$

llegamos a la fórmula (25) con

$$\mu = \frac{4m\pi^2}{(-k)}. \blacksquare$$

**Observaciones. 1.** En el caso concreto en el que  $k = -GM_0m$  ( $M_0$  masa de la partícula supuesta en el origen, supuesta tal que  $M_0 \gg m$ ) llegamos a que

$$\mu = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$

que, de hecho, es independiente también de la masa  $m$  de la partícula (p.e. un planeta) en movimiento elíptico .

**2.** Interpretación del resultado en una familia de elipses con el mismo semieje mayor  $a$  y diferente excentricidad (Ver figura). El periodo es el mismo (sin pretender presentar aquí los detalles) y por

---

<sup>5</sup>El área de una elipse y en mayor grado su longitud son de esas "incómodas fórmulas" que pese a que tienen una sencilla apariencia (en menor grado la de la longitud) su obtención no es tan sencilla como se podría pensar inicialmente. Véanse algunos textos de integrales múltiples o de curvas y superficies.

tanto la norma de su velocidad será la longitud de la elipse dividida entre el periodo (que es el mismo para todas ellas), lo que muestra que la norma de su velocidad está relacionada con la excentricidad de la elipse en la misma manera que lo está su longitud con la excentricidad (es decir, mediante una integral elíptica de segunda especie).

**3.** Argumentos más sofisticados pero relativos al mismo tema fueron empleados por Urbain Le Verrier (1811-1877) y James Adams (1819-1892) para descubrir, con papel y lápiz, la existencia del planeta Neptuno (más tarde divisado por Johan Galle en 1846).

**4.** Una rápida justificación de la "aparentemente extraña" relación entre los exponentes involucrados en la tercera ley de Kepler se puede obtener<sup>6</sup> por argumentos de Análisis Dimensional. En efecto, la segunda ley de Newton para este problema

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \frac{k}{r^3} \mathbf{r}$$

permite identificar la ecuación dimensional del coeficiente  $k$

$$[k] = \frac{[m \ddot{\mathbf{r}}]}{[\frac{1}{r^3} \mathbf{r}]} = ML^3T^{-2}.$$

Si inicialmente esperamos obtener una relación del periodo en función de los datos, más concretamente, una relación del tipo

$$\tau = f(a, k, m) \tag{26}$$

para una cierta función  $f$  desconocida a priori, dado que la magnitud

$$\Pi := \frac{\tau}{\sqrt{\frac{ma^3}{k}}}$$

es adimensional ( $[\Pi] = 1$ ), el Teorema Pi nos muestra que la relación (26) equivale a

$$\frac{\tau}{\sqrt{\frac{ma^3}{k}}} = \text{constante} := \lambda$$

lo que conduce a

$$\tau^2 = \mu a^3$$

con  $\mu = \frac{\lambda m}{k}$ . A posteriori, por los argumentos mucho más finos y precisos mostrados en este capítulo, se ha concluido que si  $k = -GM_0m$  entonces  $\mu = \frac{4\pi^2}{GM_0}$ , es decir que la constante  $\lambda$  en realidad vale  $\lambda = \frac{4\pi^2 k}{GM_0}$ .

**El vector de posición  $r(t)$  como función del tiempo. Ecuación de Kepler.**

Como hemos visto a lo largo del curso, la Mecánica Clásica ha sido el motor inicial de numerosas ramas de la Matemática: el Cálculo Diferencial, el Cálculo Integral, la Teoría de Curvas y Superficies

---

<sup>6</sup>Lo que aquí se presenta es la versión del autor (que no coincide exactamente con lo que se puede encontrar en otros textos: véase, por ejemplo el de T. Szirtes y P. Rózsa, Applied dimensional analysis and modeling, Elsevier, New York, 2007, pags. 308-311.



y por supuesto la teoría de las Ecuaciones Diferenciales. En esta sección vamos a comprobar que también lo fue del Análisis Numérico.

Con el Teorema de Newton hemos llegado a caracterizar la órbita en un campo central por medio del estudio de la función  $r(\theta)$ , pero apenas hemos dicho nada sobre como calcular el vector de posición  $\mathbf{r}$  como función del tiempo  $t$ .

Verémos que Kepler, que era mucho más que un mero "observador excepcional". Era también un gran matemático en una época previa al cálculo diferencial y que dominaba a la perfección las herramientas matemáticas de su tiempo. Kepler ideó todo un programa consistente en varias etapas bastante sofisticadas para poder determinar la función  $r(t)$ . Lo hizo en 1619, es decir, 68 años antes de que Newton publicara sus *Principia*.

Dado que ya sabía como "estimar" la función  $r(\theta)$ , su objetivo primordial fue el de calcular la función  $\theta(t)$  (que recibe el nombre de *anomalía verdadera*). Su programa constaba de cuatro pasos: *Primera etapa*: cálculo de la "anomalía media" [ $M(t) = \frac{2\pi t}{\tau}$ ]. *Segunda etapa*: cálculo de la "anomalía excéntrica" [ $\psi(t)$  por lo cual introdujo la ecuación que hoy día lleva su nombre].

*Tercera etapa*: cálculo de la "anomalía verdadera" [ $\theta(t)$  mediante  $\tan \frac{\theta(t)}{2} = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan \left( \frac{\psi(t)}{2} \right)$ ].

*Cuarta etapa*: cálculo de  $r(t)$  "distancia heliocéntrica" [mediante la fórmula de Newton  $r(t) = r(\theta(t)) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cos \theta(t)}$ ].

### Primera etapa: cálculo de la "anomalía media"

Se traza una circunferencia de radio  $a$  y centro  $\tilde{O}$ . Sea  $A(t)$  el área descrita por  $\mathbf{r}(t)$  (de extremo el punto  $P(t)$ ) al variar desde el afelio ( $r_-$ , de extremo el punto  $A$ ). El sector de la elipse  $\angle AFP(t)$  define también un cierto sector circular  $\angle A\tilde{O}P^*(t)$  con el mismo área de extremo un cierto punto  $P^*(t)$  de la anterior circunferencia  $\angle A\tilde{O}P^*(t)$ . Ambas áreas coincidentes varían con el tiempo mediante la relación  $A(t) = \frac{\pi t}{\tau}$  que se obtiene a partir del área del sector circular. Esto define así un cierto ángulo  $M(t) := \frac{2\pi t}{\tau}$  que se denomina "anomalía media".

Aunque ya podríamos pasar a la siguiente etapa, comentaremos a continuación una posible argumentación para el resto de las etapas (que como veremos no es la que seguiremos nosotros en estas notas). Sabemos que el vector de posición,  $\mathbf{r}(t)$ , necesita un período,  $\tau$ , para barrer todo el área de la elipse,  $\pi ab$ . Vimos que la velocidad areolar es una constante del movimiento (por ser un campo central, lo que constituyó la 2ª Ley de Kepler). De hecho se tiene el valor cuantitativo

$$\frac{d}{dt}A(s, s+t) = \frac{L_0}{2m}.$$

Aquí,  $A(s, s+t)$  representa el área barrida por el radio vector  $\mathbf{r}(t)$  empezando a contar en el instante  $s$  (fijo pero arbitrario) y transcurridas  $t$  unidades de tiempo. Por tanto, utilizando el área de la elipse y la velocidad areolar constante, el área barrida en ese periodo será  $(\frac{\pi ab}{\tau})t$  pues

$$\left(\frac{\pi ab}{\tau}\right)t = \int_s^{s+t} dA.$$

Si suponemos que para  $s = 0$  el ángulo es  $\theta(0) = 0$ , utilizando  $\theta = \theta(t)$  como variable muda se llega a que

$$\left(\frac{\pi ab}{\tau}\right)t = \frac{1}{2} \int_0^{\theta(t)} r^2(\theta) d\theta. \quad (27)$$

Recordando el lema técnico previo a la 2<sup>o</sup> ley de Kepler por el que

$$\frac{dA}{dT}(s, s+T) = \frac{1}{2}r(s+T)^2 \left| \dot{\theta}(s+T) \right|$$

obtenemos que en términos de diferenciales se tiene que

$$dA = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta \quad \forall s \geq 0 \text{ y } \forall T.$$

Aplicando el Teorema de Newton

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \text{ con } p = a(1 - \epsilon^2),$$

obtenemos que

$$\frac{\pi ab}{\tau}t = \frac{p^2}{2} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2}.$$

La anterior integral puede ser calculada (aunque aquí no ofreceremos los detalles) llegando a que

$$\frac{\pi ab}{\tau}t = \frac{p^2}{2(1 - \epsilon^2)} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \left( \frac{(1 - \epsilon) \tan(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) - \epsilon \frac{\text{sen} \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \right].$$

Por otra parte, se tiene que

$$ab = p^2(1 - \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}}$$

pues  $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$ , es decir,  $ab = a^2\sqrt{1 - \epsilon^2} = a^2(1 - \epsilon^2)^2 \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}}$ . Por tanto

$$\frac{2\pi t}{\tau} = \arctan \left( \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \text{sen} \theta}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

que es una expresión "formidable" pero muy incómoda para trabajar con ella. De hecho lo que nos interesa calcular<sup>7</sup> es  $\theta(t)$  y no  $t(\theta)$ .

Por tanto, interesa buscar otras ideas diferentes más cómodas de implementar y que se presentan a continuación.

### Segunda etapa. Cálculo de la "anomalía excéntrica" $\psi$ .

La ecuación de la elipse orbital en cartesianas (pero poniendo el origen en el foco  $F$  y no en el "centro de simetría"  $\tilde{O}$ ) es

$$\frac{(x + \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si proyectamos el punto de la elipse  $P(t)$ , sobre la circunferencia de radio  $a$  y centro  $\tilde{O}$  obtenemos un punto que llamaremos  $Q(t)$  y que define un ángulo denominado "anomalía excéntrica"  $\psi(t)$ . Por tanto se tiene, por proporcionalidad, que

$$\begin{cases} \cos \psi = \frac{\epsilon a + x}{a} \\ \text{sen} \psi = \frac{y}{b} \end{cases}$$

<sup>7</sup>Para invertir esa función se puede hacer un desarrollo en serie en términos de  $\epsilon$   $\theta(t) = \frac{2\pi t}{\tau} + 2\epsilon \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \dots$ . Pero en algunos casos  $\epsilon$  no es pequeño si no del orden de la unidad, como sucede en muchos cometas, lo cual es una dificultad adicional.

pues en las elipses se cumple que si denotamos por  $R(t)$  al punto de la recta absidal ( $\tilde{OF}$ ) sobre el que se proyectan los puntos  $P(t)$  y  $Q(t)$  entonces  $\frac{PR}{QR} = \frac{b}{a}$  con lo que  $QR = \frac{y}{b}a$  y así  $\text{sen}\psi = \frac{QR}{QO} = \frac{QR}{a} = \frac{y}{b}$ . Despejando  $x$  e  $y$  obtenemos que

$$\begin{cases} x = a(\cos \psi - \epsilon) \\ y = b\text{sen}\psi = a\sqrt{1 - \epsilon^2}\text{sen}\psi. \end{cases}$$

El módulo del vector de posición  $r(\theta)$  es por tanto

$$r^2(\theta) = x^2 + y^2 = a^2(1 - \epsilon \cos \psi)^2$$

y por tanto podemos expresar  $r(\theta)$  en términos de la "anomalía excéntrica" mediante la fórmula

$$r(\theta) = a(1 - \epsilon \cos \psi). \quad (28)$$

### Tercera etapa: cálculo de la "anomalía verdadera"

Se tiene

**Lema.** *La anomalía verdadera y la anomalía excéntrica están relacionadas mediante la fórmula*

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \tan \frac{\psi}{2}. \quad (29)$$

*Demostración.* La relación de Newton  $r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}$  se puede escribir como  $\epsilon r \cos \theta = a(1 - \epsilon^2) - r$ . Sumando  $\epsilon r$  a ambos lados, obtenemos

$$\epsilon r(1 + \cos \theta) = (1 - \epsilon)[a(1 + \epsilon) - r]$$

Sustituyendo  $r$  dado en la fórmula (28) resulta

$$\epsilon r(1 + \cos \theta) = (1 - \epsilon)[a(1 + \epsilon) - a(1 - \epsilon \cos \psi)],$$

es decir,

$$r(1 + \cos \theta) = a(1 - \epsilon)(1 + \cos \psi). \quad (30)$$

Restando  $\epsilon r$  a ambos lados y simplificando llegamos a

$$(r - \cos \theta) = a(1 + \epsilon)(1 - \cos \psi). \quad (31)$$

Dividiendo (31) entre (30) se obtiene

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{(1 + \epsilon)(1 - \cos \psi)}{(1 - \epsilon)(1 + \cos \psi)}.$$

Finalmente, recordando la fórmula de la tangente del ángulo mitad, se obtiene exactamente lo que buscábamos. ■

Ya estamos en condiciones de obtener la llamada *ecuación de Kepler* que caracteriza a  $\psi(t)$ .

**Teorema** (Kepler, 1619) *La anomalía media y la anomalía excéntrica están relacionadas mediante la llamada ecuación de Kepler (en  $\psi$ )*

$$\frac{2\pi t}{\tau} = M(t) = \psi - \epsilon \operatorname{sen} \psi. \quad (32)$$

*Demostración.* La idea principal es utilizar la fórmula (27) pero cambiando  $d\theta$  por  $d\psi$ . Derivando en la fórmula (29) respecto de  $\theta$  y recordando que  $\frac{d}{d\alpha}(\tan \alpha) = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$  y utilizando que  $\psi = \psi(\theta)$  (es decir que existe una biyección entre  $\theta$  y  $\psi$ ) se obtiene que

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \frac{1}{\cos^2(\frac{\psi}{2})}$$

es decir,

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\epsilon \cos^2(\frac{\theta}{2})}{1-\epsilon \cos^2(\frac{\psi}{2})}}$$

lo que implica que

$$\frac{\cos^2(\frac{\psi}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \frac{d\psi}{d\theta}.$$

Además, de la fórmula (30) sale que

$$r = a(1-\epsilon) \frac{(1+\cos \psi)}{(1+\cos \theta)} = a(1-\epsilon) \frac{\cos^2(\frac{\psi}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} = a(1-\epsilon) \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \frac{d\psi}{d\theta},$$

con lo que

$$\frac{\pi abt}{\tau} = \frac{1}{2} \int_0^{\theta(t)} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\psi(t)} r^2(\theta(\psi)) \frac{d\theta}{d\psi} d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{\psi(t)} r^2(\theta(\psi)) \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\psi}{2})} d\psi.$$

Pero de la fórmula (30) deducimos que

$$r = a(1-\epsilon) \frac{(1+\cos \psi)}{(1+\cos \theta)} = a(1-\epsilon) \frac{\cos^2(\frac{\psi}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\pi abt}{\tau} &= \frac{1}{2} \int_0^{\psi(t)} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} a(1-\epsilon) r(\theta(\psi)) d\psi \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{1-\epsilon} \sqrt{1-\epsilon} a(1-\epsilon) a \int_0^{\psi(t)} (1-\epsilon \cos \psi) d\psi = \frac{1}{2} \sqrt{1+\epsilon^2} a^2 [\psi(t) - \epsilon \sin \psi(t)] \end{aligned}$$

lo que conduce a la ecuación de Kepler (32).

**Observación.** La ecuación de Kepler es trascendente, es decir no admite solución mediante polinomios o sus inversos. Hay que resolverla por métodos numéricos que dan un valor aproximado de la solución. Existen varios métodos iterativos, como por ejemplo el de Newton-Raphson, que da el algoritmo

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \left( \frac{\frac{2\pi t}{\tau} - \psi_n + \epsilon \sin \psi_n}{1 - \epsilon \cos \psi_n} \right).$$

Se puede ofrecer un argumento riguroso, aunque no cuantitativo, afirmando la solvabilidad de la ecuación de Kepler.

**Proposición.** Dado  $M(t) = \frac{2\pi t}{\tau}$  existe una única  $\psi(t)$  solución de la ecuación de Kepler (32). Además  $\psi(t)$  es una función estrictamente creciente con  $t$ . De hecho,

$$0 < \frac{2\pi}{\tau(1+\epsilon)} \leq \frac{d\psi(t)}{dt} \leq \frac{2\pi}{\tau(1-\tau)}. \blacksquare \quad (33)$$

*Demostración.* Basta explotar la representación de la función<sup>89</sup>  $f(\psi) := \psi - \epsilon \operatorname{sen} \psi$  y observar que es una función estrictamente creciente y que por lo tanto se puede invertir. De hecho, se tiene la fórmula

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{d\psi(t)}{dt} [1 - \epsilon \cos \psi(t)]$$

lo que conduce a la estimación (33).  $\blacksquare$

### Cuarta etapa: cálculo de $r(t)$ "distancia heliocéntrica"

Ya comentada anteriormente (véase, por ejemplo, la primera etapa).

---

<sup>8</sup>Curiosamente no se suele ofrecer el dibujo de  $f(\Psi)$  en los libros de texto de Mecánica Clásica.

<sup>9</sup>Los efectos de la convexidad y la concavidad de la función  $f(\Psi)$  son los siguientes: la convexidad aleja las soluciones correspondientes a datos que varían de manera uniforme, mientras que la concavidad las acerca.

## 1.A.5. Sistema de N-partículas.

### 1.A.5. i) Cinemática. Problemas directos de la Mecánica Clásica de un sistema de partículas. Centro de masas.

Extenderemos ahora el estudio del movimiento de una partícula al caso de un sistema con un número finito de ellas. Por tanto, nos ocupamos aquí de un sistema con  $N$  partículas de masas  $m_i$  y vector de posición  $\mathbf{r}^i(t) = \sum_{k=1}^3 x_k^i(t)\mathbf{e}_k$  respecto de un sistema de referencia inercial  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Para la partícula  $i$ -ésima, la Segunda Ley de Newton determina su movimiento mediante la expresión

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}^i(t) = \mathbf{f}^i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}^{ij}(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{f}^i(t)$  es la **fuerza externa (total)** que actúa sobre esa partícula y  $\mathbf{f}^{ij}$  es la **fuerza de interacción** que cada una de las otras partículas ejerce sobre ella. Recordemos que por la Tercera Ley de Newton,  $\mathbf{f}^{ij}$  tiene la misma dirección que la posición relativa  $\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j$  y que  $\mathbf{f}^{ij} = -\mathbf{f}^{ji}$ . Por tanto

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}^{ij} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

**Definición.** Se dice que el sistema de partículas es un **sistema cerrado** si  $\mathbf{f}^i(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$  y para todo  $i = 1, \dots, N$ .

En particular  $\mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0}$ , siendo  $\mathbf{f}^{ext}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{f}^i(t)$ . Este es el caso típico de los sistemas de la Mecánica Celeste.

Es útil introducir varias nociones cinemáticas relativas a un sistema. Empezaremos por la noción global de **vector posición del sistema** definido mediante

$$\mathbf{r}(t) := (\mathbf{r}^1(t), \dots, \mathbf{r}^N(t)) \in \mathbb{E}^{3N} \text{ para cada } t \geq t_0.$$

Recuerdese que en este curso todos los vectores se suponen vectores columna (e.d.  $\mathbf{r}(t)$  se puede interpretar, una vez fijado el sistema de referencia, como una matriz de  $\mathcal{M}_{3N \times 1}$ ). Obsérvese también que, en realidad, todas las fuerzas anteriores pueden depender de  $t$ , de  $\mathbf{r}(t)$  y de  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ . Los **problemas directos** de la Mecánica Clásica de un sistema de partículas se enuncian ahora tras haber sido explicitado un conjunto de datos. i) **La fuerza total**  $\mathbf{f}_T: D(\mathbf{f}_T) \rightarrow \mathbb{E}^{3N}$  (con  $D(\mathbf{f}_T)$  un abierto de  $\mathbb{E}^{3N}$ ), dada mediante

$$\mathbf{f}_T := (\mathbf{f}_T^1, \dots, \mathbf{f}_T^N) \text{ siendo } \mathbf{f}_T^i := \mathbf{f}^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}^{ij}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Supondremos siempre que  $\mathbf{f} \in C^1(D(\mathbf{f}_T); \mathbb{R}^{3N})$ . Nótese que la Segunda Ley sobre la partícula  $i$ -ésima se puede formular también como

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}^i(t) = \mathbf{f}_T^i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{en } \mathbb{E}^3, \forall i = 1, \dots, N.$$

ii) **Los datos iniciales** de cada una de las  $N$  partículas, dados mediante las condiciones

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \in \mathbb{E}^{3N} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \in \mathbb{E}^{3N}.$$

Se obtiene así el Problema de Cauchy, ahora con valores en  $\mathbb{E}^{3N}$ , dado por

$$(PC)_N \begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}_T(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

donde  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{3N \times 3N}$  es la matriz cuadrada dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{I} & & & \\ & m_2 \mathbf{I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

con  $\mathbf{I} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$  la matriz identidad tridimensional.

Como en el caso de una sólo partícula, los **problemas inversos** de la Mecánica Clásica de un sistema de partículas son aquellos en los que se trata de hallar alguno de los datos de manera que la solución  $\mathbf{r}(t)$  del  $(PC)_N$  correspondiente verifique una cierta propiedad adicional deseada.

Continuemos con unas definiciones cinemáticas y algunas consideraciones elementales. El **vector momento lineal total** se define mediante

$$\mathbf{p}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{p}^i(t) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}^i(t), \text{ en } \mathbb{E}^3.$$

El **vector momento angular total** es el dado mediante

$$\mathbf{L}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{L}^i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{p}^i(t), \text{ en } \mathbb{E}^3.$$

La **masa total del sistema** es el escalar

$$M := \sum_{i=1}^N m_i.$$

Se define a continuación el **centro de masas** mediante el punto  $C(t)$  de  $\mathbb{A}^3$  tal que su vector de posición respecto de  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ,  $\mathbf{R}(t) := \overrightarrow{OC(t)}$  viene dado por

$$\mathbf{R}(t) := \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}^i(t)}{M}, \text{ en } \mathbb{E}^3.$$

**Observación.** En el caso de dos partículas el centro de masas se encuentra en el segmento (o intervalo) determinado por sus vectores de posición

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}^1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}^2(t),$$

o si se prefiere

$$\mathbf{R}(t) = \lambda \mathbf{r}^1(t) + (1 - \lambda) \mathbf{r}^2(t), \text{ siendo } \lambda = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \in (0, 1).$$

En general, si  $N \geq 2$ , el centro de masas se encuentra en la *envoltura convexa* del conjunto definido por los extremos finales de los radios vectores  $\mathbf{r}^i(t)$  (e.d. el menor conjunto convexo que los contiene) pues

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{r}^i(t), \text{ con } \lambda_i := \frac{m_i}{M} \text{ y por tanto tales que } \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1.$$

Se define el **sistema de referencia baricéntrico asociado a  $\mathcal{R}$**  como el dado por  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t) = \{C(t); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , lo que define, para cada una de las partículas, un nuevo vector de posición relativa (respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t)$ ) dado por

$$\widehat{\mathbf{r}}^i(t) := \mathbf{r}^i(t) - \mathbf{R}(t).$$

Utilizaremos repetidas veces el siguiente sencillo resultado:

**Lema.** *El centro de masas de los vectores de posiciones relativas respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t)$  tiene de vector de posición relativa respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t)$  el vector nulo.*

*Demostración.* Basta observar que

$$\sum_{i=1}^N m_i \widehat{\mathbf{r}}^i(t) = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}^i(t) - \mathbf{R}(t)) = \mathbf{0}. \blacksquare$$

El siguiente resultado colecta fáciles conclusiones y que a veces son denominadas "ecuaciones cardinales de la Mecánica de sistemas".

**Proposición.** 1. *La razón de cambio del momento lineal total viene dada por la suma de las fuerzas externas.*

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = M \ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{f}^{ext}(t), \quad (3)$$

siendo  $\mathbf{f}^{ext}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{f}^i(t)$ . En particular, no depende de las fuerzas de interacción y, así, en un sistema cerrado el momento lineal total es constante en el tiempo.

2. *El vector momento angular total cumple que,*

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_C(t) + \widehat{\mathbf{L}}(t),$$

donde  $\mathbf{L}_C$  es el momento angular del centro de masas y  $\widehat{\mathbf{L}}$  el del sistema respecto de  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t)$ . Además

$$\dot{\widehat{\mathbf{L}}}(t) = \mathbf{N}^{ext}(t),$$

donde  $\mathbf{N}^{ext}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{f}^i(t)$ . Además,

$$\mathbf{N}^{ext} := \mathbf{N}_{\mathbf{R}}^{ext} + \widehat{\mathbf{N}}^{ext},$$

siendo  $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}^{ext}(t) := \mathbf{R}(t) \times \mathbf{f}^{ext}(t)$  y  $\widehat{\mathbf{N}}^{ext} := \sum_{i=1}^N \widehat{\mathbf{r}}^i(t) \times \mathbf{f}^i(t)$ , ambos en  $\mathbb{E}^3$ . En particular, no depende de las fuerzas de interacción y, así, si el sistema es cerrado entonces el vector momento angular total es constante en el tiempo.



*Demostración.* 1. Cálculos directos llevan a

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}^i(t) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}^i(t) \right) = M \dot{\mathbf{R}}(t),$$

con lo que derivando obtenemos (3), en virtud de (2).

2. Aplicando la descomposición  $\mathbf{r}^i(t) = \mathbf{R}(t) + \widehat{\mathbf{r}}^i(t)$  a la definición

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}^i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}^i(t)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{R}(t) + \widehat{\mathbf{r}}^i(t)) \times m_i (\dot{\mathbf{R}}(t) + \dot{\widehat{\mathbf{r}}}^i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left( \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{R}(t) \times \dot{\widehat{\mathbf{r}}}^i(t) + \widehat{\mathbf{r}}^i(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) + \widehat{\mathbf{r}}^i(t) \times \dot{\widehat{\mathbf{r}}}^i(t) \right). \end{aligned}$$

La anulación del segundo y tercer sumado del lado derecho implican que

$$\mathbf{L}(t) = M \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) + \sum_{i=1}^N \widehat{\mathbf{r}}^i(t) \times m_i \dot{\widehat{\mathbf{r}}}^i(t).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}(t) &= \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}^i(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}^i(t) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}^i(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}^i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}^i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times \left( \mathbf{f}^i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}^{ij}(t) \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{f}^i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{f}^{ij}(t). \end{aligned}$$

Nótese que los términos de interacciones internas se cancelan dos a dos pues

$$\mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{f}^{ij}(t) + \mathbf{r}^j(t) \times \mathbf{f}^{ji}(t) = (\mathbf{r}^i(t) - \mathbf{r}^j(t)) \times \mathbf{f}^{ij}(t) = \mathbf{0},$$

por ser vectores paralelos. Por tanto

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{f}^i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}^i(t) = \mathbf{N}^{ext}(t).$$

Por último, se tiene también que

$$\mathbf{N}^{ext}(t) := \sum_{i=1}^N \mathbf{N}^i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i(t) \times \mathbf{f}^i(t) = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{R}(t) + \widehat{\mathbf{r}}^i(t) \right) \times \mathbf{f}^i(t) = \mathbf{N}_{\mathbf{R}}^{ext}(t) + \widehat{\mathbf{N}}^{ext}(t). \blacksquare$$

**Corolario.** *En un sistem cerrado el centro de masas se mueve rectilínea y uniformemente respecto del sistema de referencia inercial  $\mathcal{R}$ . En particular, en ese caso,  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t)$  es también un sistema de referencia inercial.*

## 1.A.5 ii) Energías y fuerzas conservativas.

Para cada partícula de masa  $m_i$  la energía cinética correspondiente, en el instante  $t$ , se define por el escalar

$$\mathcal{K}^i(t) := \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}^i(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}^i(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

y, así, la **energía cinética total del sistema**, en el instante  $t$ , por

$$\mathcal{K}_T(t) := \sum_{i=1}^N \mathcal{K}^i(t).$$

La noción de fuerza conservativa sobre un sistema de partículas requiere reformular todas las fuerzas en el mismo espacio del vector posición global del sistema,  $\mathbb{E}^{3N}$ . Recordemos que supuesto dado el sistema de referencial inercial  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  podemos identificar  $\mathbb{E}^3$  con  $\mathbb{R}^3$  y por tanto  $\mathbb{E}^{3N}$  con  $\mathbb{R}^{3N}$ .

**Definición.** Se dice que el sistema de  $N$ -partículas está sometido a un **campo total conservativo de fuerzas** si  $\mathbf{f}_T$  es posicional,  $\mathbf{f}_T = \mathbf{f}_T(\mathbf{r})$ , y existe una función escalar  $V_T : D(V_T) \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $D(\mathbf{f}_T) \subset D(V_T) \subset \mathbb{R}^{3N}$ ), de clase  $C^1$ , tal que

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{r}) = -\nabla V_T(\mathbf{r}) \text{ en } \mathbb{R}^{3N}, \text{ para todo } \mathbf{r} \in D(V_T).$$

En tal caso, a la función  $\mathbf{r} \mapsto V_T(\mathbf{r})$  se le denomina **función potencial total**. Además, si  $\mathbf{r}(t)$  es el vector de posición global del sistema de partículas, a la función  $t \mapsto V_T(\mathbf{r}(t))$  se le denomina **energía potencial total del sistema**.

Obsérvese, una vez más,  $V_T(\mathbf{r})$  está determinada salvo una constante aditiva y que ahora estamos siguiendo una notación en la que el vector de posición global del sistema  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$  tiene en cuenta los vectores de posición de cada el partícula mediante los subvectores  $\mathbf{r}^i(t) \in \mathbb{R}^3$  indicados en su superíndice:  $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}^1(t), \dots, \mathbf{r}^N(t)) \in \mathbb{R}^{3N}$  para cada  $t \geq t_0$ . Así, la anterior definición equivale a que

$$\mathbf{f}_T^i(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial(r_1^i, r_2^i, r_3^i)} V_T(\mathbf{r}) = -D_{(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{r}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0})} V_T(\mathbf{r}) \text{ en } \mathbb{R}^3, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \mathbf{r} = (\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N) \in D(V_T) \subset \mathbb{R}^{3N},$$

lo que también se puede expresar sobre cada componente escalar de la función vectorial  $\mathbf{f}_T^i(\mathbf{r})$  (a valores en  $\mathbb{R}^3$ ) mediante

$$(\mathbf{f}_T^i)_j(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_j^i} V_T(\mathbf{r}) \text{ en } \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall j = 1, 2, 3 \text{ y para todo } \mathbf{r} \in D(V_T) \subset \mathbb{R}^{3N}.$$

Como en el caso de una partícula, podemos definir ahora **la energía total del sistema** (si el campo total es conservativo) mediante

$$E_T(t) := \mathcal{K}_T(t) + V_T(\mathbf{r}(t)).$$

**Proposición** (Conservación de la energía total del sistema). Sea  $\mathbf{r}(t)$  el vector de posición de un sistema de  $N$ -partículas de masas  $m_i$  en movimiento originado por un campo vectorial total

conservativo  $\mathbf{f}_T(\mathbf{r})$  de potencial  $V_T(\mathbf{r})$ . Entonces la energía total del sistema  $E_T(t)$  es constante en  $t$ . En particular se tiene que

$$E_T(t) = \frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + V_T(\mathbf{r}_0) := E_0 \text{ para todo } t \geq t_0. \quad (4)$$

*Demostración.* Es similar a la ofrecida para una sólo partícula. Multiplicamos (escalarmente en  $\mathbb{E}^{3N}$ ) por  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  a ambos lados del la ecuación del Problema de Cauchy  $(PC)_N$  y obtenemos que

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V_T(\mathbf{r}(t)) \bullet \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Utilizamos que

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) \mathbf{M} \bullet \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{K}_T(t)$$

(compruébese), y de la regla de la cadena concluimos que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{K}_T(t) + V_T(\mathbf{r}(t))) = 0.$$

Integrando entre  $t_0$  y  $t$  se obtiene la conclusión. ■

Un criterio útil para conocer cuando el sistema de partículas está sometido a un campo total conservativo es el siguiente.

**Teorema.** *Supongamos que la fuerza total externa total  $\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{r})$  deriva de un potencial  $V^{ext}(\mathbf{r})$ . Supongamos que la amplitud de las fuerzas de interacción  $\mathbf{f}^{ij}$  depende sólo de la distancia relativa ( $d_{i,j} := \|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j\|$ ) entre las partículas  $i$  y  $j$ . Entonces el sistema de partículas está sometido a un campo total conservativo.*

*Demostración.* Por la Tercera Ley de Newton, si suponemos que  $d_{i,j} > 0$  podemos escribir

$$\mathbf{f}^{ij}(\mathbf{r}) = f^{ij}(\|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j\|) \mathbf{e}^{i,j}, \text{ con } f^{ij} : D(f^{ij}) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } D(f^{ij}) \text{ un abierto de } [0, +\infty),$$

siendo  $\mathbf{e}^{i,j} := \frac{\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j}{\|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j\|}$  el vector unitario en la dirección marcada por el vector  $\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j$  (apunta a la posición de la partícula  $i$ -ésima y con origen en la partícula  $j$ -ésima). Utilizando coordenadas esféricas (véase alternativamente el capítulo sobre campos centrales de fuerzas) la condición de gradiente (en ese sistema de coordenadas) para el potencial correspondiente nos permite comprobar que podemos definir

$$V^{ij}(\mathbf{r}) = V^{ij}(\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N) := - \int_0^{\|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j\|} f^{ij}(s) ds, \quad \forall \mathbf{r} = (\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N) \in D(f^{ij}) \subset \mathbb{R}^{3N}.$$

(Aquí se está suponiendo que  $0 \in D(f^{ij})$  pero podría tomarse cualquier otro valor  $s_0 \in D(f^{ij})$ ). Por otra parte, por hipótesis suponemos que  $\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{r})$  deriva de un potencial  $V^{ext}(\mathbf{r})$ , lo que (en cada conjunto de tri-coordenadas) significa que

$$\mathbf{f}^i(\mathbf{r}) = - \frac{\partial}{\partial(r_1^i, r_2^i, r_3^i)} V^{ext}(\mathbf{r}) \text{ en } \mathbb{R}^3, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \mathbf{r} = (\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N) \in D(V^{ext}) \subset \mathbb{R}^{3N}.$$

Finalmente, basta tomar la función escalar

$$V_T(\mathbf{r}) := V^{ext}(\mathbf{r}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N V^{ij}(\|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^j\|),$$

y se comprueba fácilmente (hágase como ejercicio) que se cumple la condición de sistema sometido a una fuerza total conservativa. ■

### 1.A.5 iii). El problema de los dos cuerpos

Uno de los sistemas más sencillos de la Mecánica Celeste es el llamado problema de los dos cuerpos: e.d. cuando  $N = 2$ . Referidos a un sistema inercial  $R = \{O : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , sus posiciones vienen dadas por

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}^1(t) = \mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^{12}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}^2(t) = \mathbf{f}^2 + \mathbf{f}^{21}. \end{cases}$$

Recordemos que  $\mathbf{f}^{12} = -\mathbf{f}^{21}$ . Como ya se dijo, el centro de masas se encuentra en el segmento (o intervalo) determinado por sus vectores de posición

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}^1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}^2(t),$$

o si se prefiere

$$\mathbf{R}(t) = \lambda \mathbf{r}^1(t) + (1 - \lambda) \mathbf{r}^2(t), \text{ siendo } \lambda = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \in (0, 1).$$

En el caso de  $N = 2$  surge otra definición peculiar a este caso y es llamado **vector de posición relativa de una partícula respecto de la otra**: por ejemplo de la partícula  $P_1(t)$  respecto de la  $P_2(t)$  y que se define (obviamente) mediante

$$\mathbf{y}(t) := \mathbf{r}^1(t) - \mathbf{r}^2(t) = \overrightarrow{P_2(t)P_1(t)}.$$

Es muy sencillo comprobar (hágase como ejercicio) que los vectores  $\mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  determinan completamente las posiciones de las dos partículas:

**Lema.** *Se tiene*

$$\begin{cases} \mathbf{r}^1(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{y}(t), \\ \mathbf{r}^2(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (5)$$

Por otra parte, si  $\widehat{\mathcal{R}}_C(t) = \{C(t); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  es el sistema baricéntrico, y si  $\widehat{\mathbf{r}}^i(t) := \mathbf{r}^i(t) - \mathbf{R}(t)$  entonces

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{r}}^1(t) = \frac{m_2}{M} \mathbf{y}(t), \\ \widehat{\mathbf{r}}^2(t) = -\frac{m_1}{M} \mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (6)$$

**Observación.** La propiedad de anti-reflexión (6) posee un claro significado geométrico que se explotará más adelante en el caso de un sistema cerrado y con fuerzas de interacción dadas por la ley de gravitación universal de Newton.

Con respecto a la dinámica de  $\mathbf{R}(t)$  ya sabemos que el centro de masas describe un movimiento dado unicamente por la fuerza externa total

$$M\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2.$$

El siguiente resultado nos indica como varia con  $t$  el vector de posición relativa  $\mathbf{y}(t)$ .

**Proposición.** *Supongamos que*

$$\frac{\mathbf{f}^1}{m_1} = \frac{\mathbf{f}^2}{m_2}. \quad (7)$$

Entonces si se define la **masa reducida** por el escalar

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

se tiene que

$$\mu \ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}^{1,2}.$$

En particular, si la amplitud de las fuerza de interacción  $\mathbf{f}^{1,2}$  depende sólo de la distancia relativa ( $d_{1,2} := \|\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^2\| = \|\mathbf{y}\| = y$ ) entre las partículas  $P_1$  y  $P_2$  entonces el vector  $\mathbf{y}(t)$  se mueve como lo haría una partícula de masa ficticia  $\mu$ , de vector de posición  $\mathbf{y}(t)$  y sometida a un campo central conservativo de fuerzas  $\mathbf{f}^{1,2} = -\nabla V^{1,2}(\|\mathbf{y}\|)$ .

*Demostración.* De la segunda ley deducimos que

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}^1(t) = \frac{\mathbf{f}^1}{m_1} + \frac{\mathbf{f}^{1,2}}{m_1}, \\ \ddot{\mathbf{r}}^2(t) = \frac{\mathbf{f}^2}{m_2} + \frac{\mathbf{f}^{2,1}}{m_2}. \end{cases}$$

Por tanto, gracias a la hipótesis (7) y a que  $\mathbf{f}^{1,2} = -\mathbf{f}^{2,1}$ , se tiene que

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}^1(t) - \ddot{\mathbf{r}}^2(t) = \frac{\mathbf{f}^{1,2}}{m_1} - \frac{\mathbf{f}^{2,1}}{m_2} = \mathbf{f}^{1,2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \mathbf{f}^{1,2} \frac{1}{\mu}.$$

Por tanto, basta aplicar el Teorema de la subsección anterior para concluir el resultado. ■

**Observación.** Si el sistema es cerrado se cumple obviamente la hipótesis (7). También se puede suponer que se cumple (con un pequeñísimo error) si se trata de un sistema de 3 partículas en las que una de ellas, digamos que la tercera de ellas, (por ejemplo el Sol) tiene una masa mucho mayor que las otras dos, digamos que las dos primeras (por ejemplo la Tierra y la Luna), lo que hace que la posición de esa partícula (la tercera) esté prácticamente inamovible por la interacción de las otras dos y que se pueda tomar por tanto como origen de coordenadas. En ese caso, las fuerzas de interacción  $\mathbf{f}^{1,3}$  y  $\mathbf{f}^{2,3}$  se pueden considerar como "fuerzas externas" ( $\mathbf{f}^1$  y  $\mathbf{f}^2$  respectivamente) y si se trata de la fuerza de atracción Newtoniana

$$\frac{\mathbf{f}^1}{m_1} = -\frac{Gm_3}{(r^1)^3} \mathbf{r}^1 \text{ y } \frac{\mathbf{f}^2}{m_2} = -\frac{Gm_3}{(r^2)^3} \mathbf{r}^2.$$

Finalmente, si las dos primeras partículas "se mantienen a una gran distancia de la tercera partícula" entonces los vectores unitarios  $\frac{\mathbf{r}^1}{r^1}$  y  $\frac{\mathbf{r}^2}{r^2}$  son prácticamente paralelos y por tanto, "salvo un pequeño error", se puede suponer la hipótesis (7).

Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema** (de J. Kœning (1712-1757))

i) La energía cinética total se puede escribir como

$$\mathcal{K}_T(t) = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}^1(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}^1(t) + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}^2(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}^2(t) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}(t) \bullet \dot{\mathbf{R}}(t) + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{y}}(t) \bullet \dot{\mathbf{y}}(t).$$

ii) El vector momento angular se puede escribir como

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}^i(t) \times m_i\dot{\mathbf{r}}^i(t) = \mathbf{R}(t) \times M\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{y}(t) \times \mu\dot{\mathbf{y}}(t).$$

iii) Sin embargo, el vector momento lineal se puede escribir como

$$\mathbf{p}(t) = m_1\dot{\mathbf{r}}^1(t) + m_2\dot{\mathbf{r}}^2(t) = M\dot{\mathbf{R}}(t).$$

*Demostración.* Basta aplicar la descomposición

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}^1(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{y}}(t), \\ \dot{\mathbf{r}}^2(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{y}}(t), \end{cases} \quad (8)$$

que es fruto de la descomposición (5) vista anteriormente. ■

## 1.A.5. iv) Colisiones. Fuerzas impulsivas (La Delta de Dirac. Distribuciones).

\* Ver previamente algún texto elemental. Por ejemplo, P. A. Tipler y G. Mosca: "Física para la ciencia y la tecnología. Vol.1, Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica", 5ª ed., Reverté, Barcelona, 2007 (de la página 217 a la 230).

\*Señalemos el importante desarrollo histórico de estos temas:

i) Trabajos pioneros en 1668 (como repuesta al premio convocado por la Royal Society de ese año "para la consideración de los matemáticos") por John Wallis (1616-1703), Sir Christopher Wren (1632 -1723) y Christian Huyghens (1629 – 1695). De hecho el tema ya había sido abordado, en 1644, por René Descartes en sus *Principes de philosophie* y más tarde corregido y desarrollado, en 1652, por Christian Huyghens (aunque no lo publicó hasta 1669). Motivación: bolas de billar. Más tarde, el tema sería tratado por la práctica totalidad de los grandes creadores de la Mecánica: de Newton a Einstein.

ii) Necesidad de revisión de los principios fundamentales de la Mecánica: a la ley de conservación de los momentos (lineal y angular) se han de añadir la ley de "conservación de la energía" y la ley de "conservación de la masa" que hasta ahora, en este curso de Mecánica, sólo habían aparecido como corolarios de la "ley de conservación de los momentos" (e.d. de las leyes de Newton).

iii) Trabajos pioneros de E. Rutherford (1871–1937: Premio Nóbel en Química, en 1908) y otros muchos sobre el bombardeo de partículas sub-atómicas. Fue exactamente por la teoría de colisiones como se produjo el descubrimiento del neutrón. Rutherford logró la primera transmutación artificial de elementos químicos (en 1919) mediante el bombardeo de un átomo de nitrógeno con partículas alfa. Las transmutaciones se deben a la capacidad de transformarse que tiene un átomo sometido a bombardeo con partículas capaces de penetrar en su núcleo.

Además, aunque no es nada usual en este contexto (al menos en ninguno de los textos de Mecánica Clásica que conozco), a juicio de este autor el tema puede ser abordado mediante:

iv) Justificación "rigurosa" por medio de la Teoría de Distribuciones de L. Schwartz (1915-2002) evitando ofrecer alternativas a la Segunda Ley de Newton, como se suele hacer en la práctica totalidad de los textos de Mecánica Clásica.

## Fuerzas impulsivas. La Delta de Dirac. Distribuciones

Tal y como se señala por ejemplo en el texto de Tipler y Mosca (2007) (página 217) [véase también la exposición del texto Synge y Griffith (1959), pág. 228], las "fuerzas impulsivas" que se aplican sobre una partícula, de masa  $m$ , son aquellas causantes de cambios bruscos en la velocidad  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ , en un instante puntual del tiempo, que en lo que sigue denominaremos  $t^*$ , y que hacen que dicho vector deje de ser una función continua en  $t = t^*$ . En concreto, si se denotan los límites direccionales por

$$\mathbf{v}_-(t^*) := \lim_{t \nearrow t^*} \mathbf{v}(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_+(t^*) := \lim_{t \searrow t^*} \mathbf{v}(t),$$

tales "fuerzas impulsivas" (o "impulsos instantáneos") son las responsables de que se tenga

$$\mathbf{v}_-(t^*) \neq \mathbf{v}_+(t^*) \text{ en } \mathbb{E}^3.$$

Podemos imaginar pues que el movimiento  $\mathbf{r}(t)$ , antes de recibir ese impulso (e.d. si  $t \leq t^*$ ) venía originado por una fuerza que obedece a lo expuesto en apartados anteriores y que ahora vamos a denotar esquemáticamente por  $\mathbf{f}_r(t)$  (la parte "regular" de la fuerza total, que es al menos una función continua de  $t$  y que a su vez podría depender de  $t$  y de la posición  $\mathbf{r}(t)$ , para todo  $t$ ) y que podemos suponer que sigue actuando en tiempos posteriores ( $t \geq t^*$ ). A esa fuerza se añade otra muy peculiar, que vamos a denotar por  $\mathbf{f}_s(t)$  (la parte "singular" de la fuerza total), y que tiene su soporte (e.d. es únicamente no nula) en el instante  $t = t^*$ . Tal "fuerza impulsiva" se puede definir como el límite, cuando  $\varepsilon \searrow 0$  de unas fuerzas regularizadas  $\mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t)$  cuyo soporte es el intervalo  $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$  (por tanto nulas para otros instantes  $t$ ) y tales que

$$\int_{t^* - \varepsilon}^{t^* + \varepsilon} \mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t) dt = \mathbf{I}, \text{ en } \mathbb{E}^3, \text{ para todo } \varepsilon > 0. \quad (9)$$

Coordenada a coordenada, por ejemplo la  $i$ -ésima, lo que se aprecia es que como  $\mathbf{I}$  es independiente de  $\varepsilon$ , la única posibilidad de que se verifique (9), o más concretamente,

$$\int_{t^* - \varepsilon}^{t^* + \varepsilon} (\mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t))_i dt = I_i, \text{ en } \mathbb{R}, \text{ para todo } \varepsilon > 0, i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

es que el  $\max_{t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]} |(\mathbf{f}_{\varepsilon, s}(t))_i| \nearrow +\infty$  si  $\varepsilon \searrow 0$ . Esto es lo que sucede si

$$(\mathbf{f}_{\varepsilon, s}(t))_i \rightarrow I_i \delta_{\{t^*\}}(t) \text{ cuando } \varepsilon \searrow 0,$$

con  $\delta_{\{t^*\}}(t)$  la llamada "Delta de Dirac" concentrada en el instante  $t = t^*$  (que aunque porta el nombre del físico teórico Paul Dirac (1902 - 1984) había sido utilizado mucho antes que él por numerosos matemáticos y físicos: Cauchy, Heaviside y muchos otros: véase el texto de J. Lutzen, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, New York, 1982).

Se tiene pues que

$$\begin{cases} \delta_{\{t^*\}}(t) = 0 & \text{si } t \neq t^*, \text{ pero} \\ \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \delta_{\{t^*\}}(t) dt = 1, \text{ en } \mathbb{R}, & \text{para todo } \alpha > 0. \end{cases}$$

Obviamente esas dos propiedades son imposibles en el marco de las funciones usuales (localmente integrables) pero L. Schwartz logró darle un perfecto sentido matemático como "funcionales" o elementos del espacio dual  $\mathcal{D}'(t^* - \alpha, t^* + \alpha)$  del espacio  $\mathcal{D}(t^* - \alpha, t^* + \alpha) := C_c^\infty(t^* - \alpha, t^* + \alpha)$  (funciones de clase infinito y con soporte compacto en  $(t^* - \alpha, t^* + \alpha)$ ) cuando se le dota de una cierta topología. Cómo se ha comentado, la Delta de Dirac había sido utilizada profúsamente en muchos otros contextos (por ejemplo, se suele tratar mediante la "transformada de Laplace" en cursos elementales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias), pero el tratamiento de Schwartz fue mucho más consistente y completamente riguroso, extendiéndolo también a una clase más general de funcionales. La profundidad y originalidad de su contribución fueron reconocidas con la *Medalla Fields* que le fue otorgada en 1950. Es la *Teoría de Distribuciones* cuyo exposición sobrepasa el nivel de este curso pero de la que podemos utilizar alguno de sus recursos más elementales.

En todo caso, podemos ahora precisar que si hay una "fuerza impulsiva", originando un cambio brusco en el vector velocidad  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ , en un instante puntual  $t = t^*$ , como la que se ha descrito antes, será porque la fuerza total es de la forma

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_r(t) + \mathbf{I} \delta_{\{t^*\}}(t), \text{ para algún } \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3.$$

Por tanto la Segunda Ley de Newton ahora se puede escribir, en un *sentido generalizado*, como

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}_r(t) + \mathbf{I} \delta_{\{t^*\}}(t) \text{ en } \mathcal{D}'(t^* - \alpha, t^* + \alpha)^3. \quad (11)$$

Obviamente, la segunda derivada  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  hay que definirla de otra manera (derivada débil o en sentido de distribuciones) pues sabemos que  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  es una función discontinua en  $t = t^*$  y que la derivada (tradicional) no puede ser definida para funciones discontinuas. Es uno de los grandes méritos de la *Teoría de Distribuciones* de Schwartz. Aunque no es difícil realizar una presentación ilustrativa de este concepto, aquí nos limitaremos (por limitaciones de extensión) a indicar una fácil consecuencia:

**Teorema A.** *Si  $\mathbf{r}(t)$  verifica (11) entonces  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$  es una función continua excepto en  $t = t^*$ . Además*

a) *Para todo  $\alpha > 0$ , se tiene el siguiente balance para los vectores momentos lineal inicial y final*

$$m\mathbf{v}(t^* + \alpha) - m\mathbf{v}(t^* - \alpha) = \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{f}_r(t) dt + \mathbf{I}, \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (12)$$



b) En particular,

$$m\mathbf{v}_+(t^*) - m\mathbf{v}_-(t^*) = \mathbf{I} \text{ en } \mathbb{E}^3.$$

**Observación.** 1. La idea de la demostración es la siguiente: si denotamos por  $\mathbf{r}_\varepsilon(t)$  a la función que resulta de la aproximación de la Delta de Dirac, e.d. tal que

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\varepsilon(t) = \mathbf{f}_r(t) + \mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t), \text{ para todo } t \in (t^* - \alpha, t^* + \alpha), \text{ en } \mathbb{E}^3, \quad (13)$$

entonces podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para concluir que

$$m\mathbf{v}_\varepsilon(t^* + \alpha) - m\mathbf{v}_\varepsilon(t^* - \alpha) = \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{f}_r(t)dt + \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t)dt, \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (14)$$

Haciendo  $\varepsilon \searrow 0$  se comprueba (y eso es la parte más técnica) que  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{v}_\varepsilon(t) = \mathbf{v}(t)$  para todo  $t \neq t^*$  y que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{v}_\varepsilon(t^* + \varepsilon) = \mathbf{v}_+(t^*), \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{v}_\varepsilon(t^* - \varepsilon) = \mathbf{v}_-(t^*), \text{ en } \mathbb{E}^3.$$

(de hecho, primero se demuestra que  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{v}_\varepsilon(t) = \mathbf{v}(t)$  "casi para todo"  $t$ , es decir excluyendo conjuntos de medida de Lebesgue nula, y luego se utiliza que el soporte de  $\mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t)$  converge a  $\{t^*\}$  para mostrar que  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$  es una función continua excepto en  $t = t^*$ ). De la construcción de  $\mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t)$  (verificando (9) y con soporte en  $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$ ) se deduce a) al pasar al límite, cuando  $\varepsilon \searrow 0$ , en la identidad (14). Finalmente, como como

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{f}_r(t)dt = \mathbf{0} \text{ en } \mathbb{E}^3,$$

pues  $\mathbf{f}_r(t)$  es una función continua, se llega a la conclusión b).

2. En muchos textos de Mecánica Clásica se toma la propiedad (12) como un axioma del que se dice que "no puede obtenerse de la Segunda Ley de Newton". El Teorema A anterior muestra que esto no es estrictamente así si se extiende la Segunda Ley de Newton a fuerzas que puedan ser singulares (e.d. distribuciones en vez de funciones localmente integrables).

3. En la práctica no es nada sencillo conocer a priori el valor de  $\mathbf{I}$ , aunque a posteriori pueda ser calculado a través de los efectos de la "fuerza impulsiva" (recuérdense los ejemplos del karateka, del accidente de un coche o del golpe sobre una pelota de golf detallados en Tipler y Mosca (2007)).

4. Nótese que el concepto de "fuerza media" (sobre un subintervalo  $[t_i, t_f]$  conteniendo al instante  $t^*$ ) asociado a una "fuerza impulsiva" introducido en Tipler y Mosca (2007) (pág. 217) permanece invariante para las fuerzas aproximantes  $\mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t)$  si  $\varepsilon > 0$  se supone suficientemente pequeño. Así, podemos definir

$$(\mathbf{f}_s)_m := \frac{\mathbf{I}}{(t_f - t_i)} = \frac{1}{(t_f - t_i)} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t)dt, \text{ si } \varepsilon > 0 \text{ es suficientemente pequeño.}$$

De manera paralela a la conservación del vector momento lineal (ante la presencia de "fuerzas impulsivas") se tiene también la conservación del vector momento angular en ese mismo caso:

**Teorema B.** Si  $\mathbf{r}(t)$  verifica (11) entonces  $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t)$  es una función continua excepto en  $t = t^*$ . Además

a) Para todo  $\alpha > 0$ , se tiene el siguiente balance para los vectores momentos angulares inicial y final

$$\mathbf{L}(t^* + \alpha) - \mathbf{L}(t^* - \alpha) = \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{f}_r(t) dt + \mathbf{r}(t^*) \times \mathbf{I}, \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (15)$$

b) En particular,

$$\mathbf{L}_+(t^*) - \mathbf{L}_-(t^*) = \mathbf{r}(t^*) \times \mathbf{I} \text{ en } \mathbb{E}^3,$$

siendo  $\mathbf{L}_+(t^*) := \lim_{t \nearrow t^*} \mathbf{L}(t)$  y  $\mathbf{L}_-(t^*) := \lim_{t \searrow t^*} \mathbf{L}(t)$ .

*Idea de la demostración.* Como en la Observación 1 anterior, aproximando la "fuerza impulsiva" concluimos que

$$\mathbf{L}_\varepsilon(t^* + \alpha) - \mathbf{L}_\varepsilon(t^* - \alpha) = \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{r}_\varepsilon(t) \times \mathbf{f}_r(t) dt + \int_{t^* - \alpha}^{t^* + \alpha} \mathbf{r}_\varepsilon(t) \times \mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t) dt, \text{ en } \mathbb{E}^3,$$

siendo  $\mathbf{L}_\varepsilon(t) := \mathbf{r}_\varepsilon(t) \times m \dot{\mathbf{r}}_\varepsilon(t)$ . Ahora basta pasar al límite, cuando  $\varepsilon \searrow 0$  y utilizar que  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{r}_\varepsilon(t) = \mathbf{r}(t)$  para todo  $t$  y que de hecho, (como  $\mathbf{r}(t)$  es una función continua en  $t = t^*$  aunque su derivada no lo sea [de hecho es fácil ver que  $\mathbf{r}(t)$  es una función lipschitziana: Dautray-Lions (1984) Vol.1, pag. 336 por el mero hecho de que  $\delta_{\{t^*\}}$  es una medida acotada]) se tiene que

$$(\mathbf{r}_\varepsilon(t) \times \mathbf{f}_{\varepsilon,s}(t))_i \rightarrow (\mathbf{r}(t^*) \times \mathbf{I})_i \delta_{\{t^*\}}(t) \text{ cuando } \varepsilon \searrow 0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

## Colisiones (en un sistema cerrado de partículas)

En esta sección supondremos un sistema cerrado (e.d. aislado) de dos partículas ( $N = 2$ ) con lo que la ausencia de fuerzas exteriores limita las fuerzas existentes a las de interacción mútua:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{f}^{1,2}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{f}^{2,1}. \end{cases}$$

Nos interesamos ahora por el caso en el que hay colisión entre las dos partículas, con lo que es natural que las fuerzas internas presenten una "componente impulsiva" (como las del apartado anterior) y que sea la responsable del cambio brusco de velocidades tras la colisión.

Comenzaremos analizando el caso en el que la colisión no origina ninguna "deformación de la distribución de masa": es decir, que después de la colisión las dos partículas conservan su propia masa  $m_j$ ,  $j = 1, 2$ , aunque sufran cambios bruscos en sus trayectorias y velocidades. Más tarde nos ocuparemos también de ese otro caso.

Conviene recordar que, por ejemplo, las fuerzas gravitatorias de atracción newtoniana (y las coulumbianas del electromagnetismo) son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia mútua. Por tanto, cuando esa distancia mútua se hace cero esas fuerzas presentan una singularidad (su amplitud se hace infinita). Por tanto es natural suponer que

$$\mathbf{f}^{1,2} = \mathbf{f}_r^{1,2}(t) + \mathbf{I}^{1,2} \delta_{\{t^*\}}(t), \text{ para algún } \mathbf{I}^{1,2} \in \mathbb{R}^3, \quad (16)$$

donde  $\mathbf{f}_r^{1,2}(t)$  representa la parte regular de esa fuerza. La presencia de la parte impulsiva  $\mathbf{I}^{1,2} \delta_{\{t^*\}}(t)$  es la responsable de que cada vector velocidad  $\mathbf{v}^j(t) = \dot{\mathbf{r}}^j(t)$ , para  $j = 1, 2$ , presente una discontinuidad en  $t = t^*$ . Por la Tercera Ley sabemos que  $\mathbf{f}^{2,1} = -\mathbf{f}^{1,2}$  de lo que, del Teorema A anterior, deducimos inmediatamente el siguiente

**Corolario. 1.** *Sea un sistema cerrado de dos partículas sometido a una fuerza de interacción satisfaciendo (16). Entonces,*

a) *Para todo  $\alpha > 0$ , se tiene el siguiente balance para los vectores momentos lineal inicial y final*

$$m_1 \mathbf{v}^1(t^* + \alpha) + m_2 \mathbf{v}^2(t^* + \alpha) = m_1 \mathbf{v}^1(t^* - \alpha) + m_2 \mathbf{v}^2(t^* - \alpha), \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (17)$$

*En particular, los límites direccionales de las velocidades satisfacen la propiedad*

$$m_1 \mathbf{v}_+^1(t^*) + m_2 \mathbf{v}_+^2(t^*) = m_1 \mathbf{v}_-^1(t^*) + m_2 \mathbf{v}_-^2(t^*) \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (18)$$

b) *Análogamente,  $\mathbf{L}^j(t) = \mathbf{r}^j(t) \times m \dot{\mathbf{r}}^j(t)$  es una función discontinua en  $t = t^*$ ,  $j = 1, 2$ . Además, para todo  $\alpha > 0$ , se tiene el siguiente balance para los vectores momentos angulares inicial y final*

$$\mathbf{L}^1(t^* + \alpha) + \mathbf{L}^2(t^* + \alpha) = \mathbf{L}^1(t^* - \alpha) + \mathbf{L}^2(t^* - \alpha), \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (19)$$

*En particular,*

$$\mathbf{L}_+^1(t^*) + \mathbf{L}_+^2(t^*) = \mathbf{L}_-^1(t^*) + \mathbf{L}_-^2(t^*) \text{ en } \mathbb{E}^3. \quad (20)$$

*Demostración.* Basta observar que

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}^1(t) + m_2 \ddot{\mathbf{r}}^2(t) = \mathbf{0} \text{ en } \mathcal{D}'(t^* - \alpha, t^* + \alpha)^3, \quad (21)$$

(pese a que cada vector velocidad  $\mathbf{v}^j(t) = \dot{\mathbf{r}}^j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , presente una discontinuidad en  $t = t^*$ ). El resto es una repetición de los argumentos de los Teoremas A y B. ■

Nuestro objetivo ahora es intentar identificar los valores de las velocidades de salida de la colisión,  $\mathbf{v}_+^1(t^*)$  y  $\mathbf{v}_+^2(t^*)$ , en términos de las velocidades de entrada antes de la colisión,  $\mathbf{v}_-^1(t^*)$  y  $\mathbf{v}_-^2(t^*)$  y de las masas respectivas,  $m_1$  y  $m_2$ . De esta manera podremos identificar también el "impulso de interacción"  $\mathbf{I}^{1,2}$  que como se ha indicado es casi imposible de conocer a priori y que, curiosamente, no aparece en la razón del cambio del momento total dada por (21).

No es nada difícil observar que incluso en el caso de movimientos unidireccionales la conclusión (18) no basta para obtener la identificación deseada (incluso utilizando el balance entre momentos angulares (20)).

Se necesita otra información adicional y que hasta este momento no habíamos necesitado a lo largo de este curso de Mecánica: se trata de la "*ley (o axioma) de conservación de la energía interna total*".

Comencemos recordando que en el caso de un sistema de partículas definíamos la "energía cinética total" mediante la expresión

$$\mathcal{K}_T(t) = \mathcal{K}^1(t) + \mathcal{K}^2(t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}^1(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}^1(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}^2(t) \bullet \dot{\mathbf{r}}^2(t).$$

Veíamos que si las fuerzas de interacción eran conservativas en un sistema aislado (cosa que vimos que sucedía cuando su amplitud dependía únicamente de la distancia relativa) entonces lo que en su día definimos como "energía (mecánica) total" permanecía constante en el tiempo:

$$E_T(t) := \mathcal{K}_T(t) + V_T(\mathbf{r}(t)) = E_T(t_0) \text{ para todo } t,$$

con  $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}^1(t), \mathbf{r}^2(t))$ . Pero la presencia de colisiones (e.d. de una posible "fuerza impulsiva"  $\mathbf{I}^{1,2}\delta_{\{t^*\}}(t)$ ) lleva consigo necesariamente un cambio brusco de la energía cinética de cada partícula (pues las velocidades tiene cambios bruscos). De hecho, la energía (mecánica) total puede llegar a tener también un cambio brusco pues la energía cinética total puede tenerlo y sin embargo la energía potencial total no cambia tras la colisión pues los vectores de posición de ambas partículas son funciones continuas para todo  $t$  (incluido  $t = t^*$ ).

Por tanto, una colisión puede hacer intervenir otro tipo de energía (la llamada "energía interna" de cada partícula) que tiene en cuenta aspectos no mecánicos como puede ser, por ejemplo, la variación de temperatura (o de la carga eléctrica o magnética) de esas partículas. En ese caso se necesita aplicar la llamada "*ley (o axioma) de conservación de la energía interna total*", junto a una "*ley constitutiva*" que nos informe de que tipo de energía interna se está generando o disipando.

Ese tipo de planteamientos son absolutamente imprescindibles en Mecánica de Medios Continuos (Mecánica de Fluidos y Elasticidad) y en Termodinámica. Aquí nos limitaremos a suponer una versión muy particular de ese planteamiento pero que, como mostraremos, es suficiente para lograr la identificación de las velocidades finales tras la colisión:

**Axioma:** *Se supone que la energía cinética total tras la colisión del instante  $t^*$  sufre un cambio dado por*

$$\mathcal{K}_{T^+}(t^*) - \mathcal{K}_{T^-}(t^*) = Q$$

para una cierta constante escalar conocida  $Q \in \mathbb{R}$ .

El axioma anterior conduce a la clasificación de las posibles colisiones (sin deformación de masa) en los siguientes tipos.

- i)  $Q = 0$ : colisiones elásticas,
- ii)  $Q < 0$ : colisiones endo-energéticas,
- iii)  $Q > 0$ : colisiones exo-energéticas.

Yendo de fácil a difícil en la exposición, comenzaremos por abordar el caso de:

## Colisiones unidireccionales.

Comenzaremos suponiendo que se trata de una colisión muy especial (pero que se da con alguna frecuencia) en la que las velocidades de ambas partículas antes y después de la colisión de las partículas mantienen la misma dirección (aunque podrían cambiar de sentido).

**a) Colisiones unidireccionales elásticas:  $Q \equiv 0$ . Teorema.** *Se tiene que*

$$\begin{cases} v_+^1(t^*) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_-^1(t^*) + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_-^2(t^*), \\ v_+^2(t^*) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_-^1(t^*) - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_-^2(t^*). \end{cases} \quad (22)$$

En particular,

$$\begin{cases} I^{1,2} = m_1(v_+^1(t^*) - v_-^1(t^*)) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(-v_-^1(t^*) + v_-^2(t^*)), \\ m_2(v_+^2(t^*) - v_-^2(t^*)) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_-^1(t^*) - v_-^2(t^*)) = -I^{1,2}, \end{cases} \quad (23)$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{K}_+^1(t^*) - \mathcal{K}_-^1(t^*) = -2\frac{(m_1)^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (v_-^1(t^*))^2 + 2\frac{m_1 m_2 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_-^1(t^*) v_-^2(t^*) + 2\frac{m_1 (m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} (v_-^2(t^*))^2 \\ \mathcal{K}_+^2(t^*) - \mathcal{K}_-^2(t^*) = -(\mathcal{K}_+^1(t^*) - \mathcal{K}_-^1(t^*)). \end{cases} \quad (24)$$

*Demostración.* Del balance del momento lineal total (18) se tiene que

$$m_1 v_+^1(t^*) + m_2 v_+^2(t^*) = m_1 v_-^1(t^*) + m_2 v_-^2(t^*) \text{ en } \mathbb{R},$$

y del axioma sobre el balance de energía cinética deducimos que

$$\frac{m_1}{2} (v_+^1(t^*))^2 + \frac{m_2}{2} (v_+^2(t^*))^2 = \frac{m_1}{2} (v_-^1(t^*))^2 + \frac{m_2}{2} (v_-^2(t^*))^2 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Por tanto

$$\begin{cases} m_1 (v_+^1(t^*) - v_-^1(t^*)) = m_2 (v_+^2(t^*) - v_-^2(t^*)), \\ m_1 \left( (v_+^1(t^*))^2 - (v_-^1(t^*))^2 \right) = m_2 \left( (v_+^2(t^*))^2 - (v_-^2(t^*))^2 \right), \end{cases}$$

con lo que, utilizando que  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , concluimos que

$$v_+^1(t^*) + v_-^1(t^*) = v_+^2(t^*) + v_-^2(t^*), \quad (25)$$

lo que se puede interpretar como una "conservación del balance global de velocidades para cada partícula antes y después de la colisión". Equivalentemente

$$v_+^2(t^*) - v_+^1(t^*) = -(v_-^2(t^*) - v_-^1(t^*)),$$

es decir: "la velocidad relativa de una partícula respecto de la otra sólo cambia de signo tras la colisión". Sustituyendo estas relaciones en el balance del momento lineal total (18) se obtienen las relaciones (22) tras una obvia reordenación algebraica. De la misma manera, las relaciones (23) y (24) se obtienen de (22) por sustitución directa. ■

**Observaciones.** 1. En particular se tiene que:

- a) si  $m_1 = m_2$  entonces  $v_+^1(t^*) = v_-^2(t^*)$  y  $v_+^2(t^*) = v_-^1(t^*)$ , es decir, "hay un intercambio total de velocidades".
- b) si  $m_1 \ll m_2$  entonces

$$v_+^1(t^*) \approx -v_-^1(t^*) + 2v_-^2(t^*) \text{ y } v_+^2(t^*) \approx v_-^2(t^*).$$

- 2. Una situación interesante aparece cuando una de las partículas está inicialmente en reposo: supongamos, por ejemplo, que  $v_-^2(t^*) = 0$ . Entonces

$$\begin{cases} v_+^1(t^*) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_-^1(t^*), \\ v_+^2(t^*) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_-^1(t^*). \end{cases}$$

Así, resultan los siguientes subcasos:

- a) si  $m_2 > m_1$  entonces la colisión mueve ambas masas, haciendo retroceder a la partícula  $P_1$ .
- b) si  $m_2 < m_1$  entonces la colisión mueve ambas masas, manteniendo la partícula  $P_1$  su dirección.
- c) si  $m_2 = m_1$  la colisión promueve el intercambio de velocidades y así la partícula  $P_1$  permanece en reposo tras  $t^*$ :  $v_+^1(t^*) = 0$ .