ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada

Master Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Primer Curso (1er Semestre)

Samuel García Lorente

MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 1. REVISIÓN DE ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

1. Fluido como medio continuo

En un fluido la materia no está repartida de forma continua cuando se observa con una escala del orden del tamaño de las moléculas.

En Mecánica de Fluidos: $\begin{cases} l_c \gg \lambda_m \text{ (camino libre medio de las moléculas)} \\ t_c \gg t_m \text{ (tiempo entre colisiones de las moléculas)} \end{cases}$

→ Condiciones de fluido como medio continuo:

$$\begin{cases} \bullet \ \dfrac{\lambda_m}{l_c} = \underbrace{Kn}_{\text{número de Knudsen}} \ll 1 \\ \bullet \ \dfrac{t_m}{t_c} = \dfrac{\lambda_m}{v_m} \cdot \dfrac{v_c}{l_c} = \dfrac{\lambda_m}{l_c} \cdot \dfrac{v_c}{v_m} \sim Kn \cdot M_c \ll 1 \leftrightarrow Kn \cdot \text{máx}(1, M_c) \ll 1 \end{cases}$$

* Hipótesis fundamental: la materia y las propiedades fluidas asociadas a la misma están dispersas de forma continua.

- Escala de promediado como medio continuo: l^*

$$\frac{l^*}{l_c} \ll 1, \quad \frac{l^*}{\lambda_m} \gg 1$$

- En el espacio fluido hay una serie de propiedades fluidas que son función de la posición del punto al que están asociadas (vector posición $\vec{x}$) y del tiempo y ~~que~~ son funciones continuas. Las propiedades en dos puntos muy próximos difieren en tan poco como se quiera (equilibrio termodinámico local).

- Magnitudes promediadas en mesoescala l^* centrada en $\vec{x}$:
  - Densidad: $\rho(\vec{x},t) = \dfrac{1}{l^{*3}} \sum_\alpha m_\alpha = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$
  - Velocidad macroscópica: $\rho \vec{v} = \dfrac{1}{l^3} \sum_\alpha m_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha \ ; \ \vec{v} = \dfrac{\rho \vec{v}}{\rho} = \dfrac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\sum m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\Delta m}$
  - Energía interna: $e_t = \underset{\smile}{e} + \dfrac{1}{2} v^2 = \dfrac{1}{l^{*3}} \sum_{i \in l^{*3}} m_i \left(\sum_j \dfrac{1}{2} v_{ij} v_{ij} \right)_i$

Ciertas propiedades del continuo son independientes del sistema de referencia en que son evaluadas → VARIABLES DE ESTADO TERMODINÁMICO:

$$\rho,\ e = e_t - \vec{v}\cdot\vec{v}/2,\ T = \frac{e}{c_v},\ p = \left(\lim_{dA\to 0} \frac{\vec{F}(dA,\vec{n})}{dA}\right)_{\vec{v}=\vec{0}};\ h = e + \frac{p}{\rho}$$

El conjunto de variables termodinámicas (estado termodinámico) queda completamente definido por dos variables de estado independientes (en condiciones de casi-equilibrio termodinámico, para una substancia de composición uniforme)

ANÁLISIS DE FLUIDOS COMO MEDIO CONTINUO

- <u>Volumen fluido</u>: conjunto de partículas fluidas. Su masa es invariante con el tiempo, pero experimenta intercambio de cantidad de movimiento y energía con su entorno.

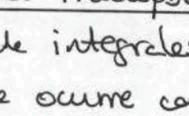
→ Descripción cinemática de fluidos como medios continuos:

- <u>Lagrangiana</u>: analizamos la evolución temporal de la posición de cada partícula (trayectoria).
- <u>Euleriana</u>: analizamos la evolución temporal de propiedades cinemáticas ($\vec{v}$) para cada partícula fluida que pasa por puntos fijos $\vec{x}$ en distintos instantes de tiempo.

- <u>Teorema del transporte de Reynolds</u>: permite evaluar la variación temporal de integrales extendidas a un volumen fluido a través de lo que ocurre con un volumen arbitrario que en el instante "t" coincide con el volumen fluido →

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \phi\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \phi\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \phi\,(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\underline{\underline{\vec{n}}}\, dA$$

*Recordar: $\vec{n}$ es exterior al Volumen de Control V_c



⇒ Resultante: Fuerzas, presiones, ... exteriores ejercen al volumen de control

2. Principios de CONSERVACIÓN + Ecuaciones de NAVIER-STOKES

- Teorema de Noether: cada simetría continua de un sistema físico aislado tiene asociada una ley de conservación.

  - Simetría respecto al tiempo: conservación de masa y energía.
  - Simetría respecto a traslaciones: conservación de cantidad de movimiento.
  - Simetría respecto a rotaciones: conservación del momento cinético.

→ CONSERVACIÓN DE MASA:

- Formulación integral:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho(\vec{v}-\vec{v}_c)\vec{n}\, dA = 0$$

- Formulación diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{v} \qquad \frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla(\ )$$

→ CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

- Formulación integral:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\vec{v}\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho\vec{v}(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\, dA = -\int_{\Sigma_c(t)} p\vec{n}\, dA + \int_{V_c(t)} \rho\vec{f}_m\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \bar{\bar{\tau}}_\mu\cdot\vec{n}\, dA$$

- Formulación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \rho\vec{f}_m + \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}_\mu$$

$$\hookrightarrow \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{f}_m + \nabla\bar{\bar{\tau}}_\mu$$

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}/2) - \vec{v}\times\vec{\omega} \ ; \ \vec{\omega} = \nabla\times\vec{v}$$

→ CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA:

- Formulación integral:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho e_t\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho e_t(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\, dA = -\int_{\Sigma_c(t)} (p\vec{v})\vec{n}\, dA + \int_{V_c(t)} \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v}\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} (\bar{\bar{\tau}}_\mu\cdot\vec{v})\cdot\vec{n}\, dA - \int_{\Sigma_c(t)} \vec{q}\cdot\vec{n}\, dA + \int_{V_c(t)} q_v\, dV$$

- Formulación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \nabla\cdot(\rho\vec{v}e_t) = -\nabla\cdot(p\vec{v}) + \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}_\mu\cdot\vec{v}) + \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v} - \nabla\vec{q} + q_v$$

- Leyes de transporte molecular para fluido isótropo, newtoniano:

→ Tensor de esfuerzos:

$$\bar{\bar{\tau}}_\mu = 2\mu \bar{\bar{S}} + \left(\underset{\text{volumétrico}}{\mu_v} - \frac{2}{3}\mu\right)\underbrace{(\nabla\cdot\vec{v})}_{\text{en líquidos}}\bar{\bar{I}} \;; \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

vale cero (por ec. continuidad), en gases raramente aparece porque $Re \gg 1$

→ Flujo de calor:

$$\vec{q} = -K\nabla T$$

- Ecuaciones de estado termodinámico:

  - Líquido caloríficamente perfecto:

$$\rho = \text{constante} \;;\; e - e_0 = c(T - T_0) \;;\; h - h_0 = c(T - T_0) + \frac{1}{\rho}(p - p_0) \;;\; s - s_0 = c \cdot \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

  - Gas caloríficamente perfecto:

$$\frac{p}{\rho} = R_g T \;;\; e - e_0 = c_v(T - T_0) \;;\; h - h_0 = c_p(T - T_0) \;;\; s - s_0 = c_v \cdot \ln\left(\frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma}\right)$$

→ FORMAS ALTERNATIVAS DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{v}\cdot\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\ldots)\cdot\vec{v} \rightarrow \rho\frac{D(v^2/2)}{Dt} \\ &\rho\frac{D(e + \frac{1}{2}v^2)}{Dt} = (\ldots) \end{aligned}\right\} \ominus \rightarrow \rho\frac{De}{Dt}$$

$$\rightarrow \rho\frac{De}{Dt} = -p\nabla\vec{v} + \phi_\mu + \nabla\cdot(K\nabla T) + q_v \;; \quad \phi_\mu = 2\mu S_{ij}S_{ij} + \left(\mu_v - \tfrac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\vec{v})^2 \geq 0$$

[...]

$$\rho\frac{D(h + \vec{v}\cdot\vec{v}/2)}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}_\mu\cdot\vec{v}) + \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v} + \nabla\cdot(K\nabla T) + q_v$$

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \phi_\mu + \nabla\cdot(K\nabla T) + q_v$$

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \phi_\mu + \nabla\cdot(K\nabla T) + q_v$$

CASO INCOMPRESIBLE:

K, μ: ctes

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \vec{f}_m - \nu\nabla\times\vec{\omega} \;, \quad \nu = \mu/\rho$$

$$\rho c\frac{DT}{Dt} = \phi_\mu + \nabla\cdot(K\nabla T) + q_v \;, \text{ con } \phi_\mu = 2\mu S_{ij}S_{ij} \geq 0$$

SIMPLIFICACIÓN DE ECUACIÓN DE CONTINUIDAD en FLUJO 2D :

Flujo 2D incompresible ó 2D estacionario compresible → ecuación de continuidad
↳ 2 términos →

→ puede verificarse idénticamente introduciendo una función de corriente asociada al campo de velocidad

a) 2D x-y incompresible: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Leftrightarrow u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\ ;\ v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$

b) 2D x-r incompresible: $\frac{\partial}{\partial x}(r v_x)+\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)=0 \Leftrightarrow r v_r=\frac{\partial \psi}{\partial x}\ ;\ r v_x=-\frac{\partial \psi}{\partial r}$

c) 2D x-y estacionario y compresible: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0$

$\rho u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\ ;\ \rho v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$

3. Flujo de Euler

Se obtiene al anular los coeficientes de transporte molecular, $\mu=\mu_v=0$, $k=0$

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt}=-\rho\nabla\cdot\vec{v} \\ \dfrac{D\vec{v}}{Dt}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla p+\vec{f}_m \\ \dfrac{Ds}{Dt}=\dfrac{q_v}{\rho T} \end{cases}$$

→ para $q_v=0$: la partícula fluida conserva su entropía :
- Líquido : conserva su temperatura
- Gas: conserva p/ρ^γ ↳ calóricamente perfectos

*Además en gases, si flujo casi-estacionario → $\vec{v}\cdot\nabla s=0 \Leftrightarrow \partial s/\partial l=0$ a lo largo de las líneas de corriente. Si gas calóricamente perfecto:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}=\frac{\partial h}{\partial l}$$

→ Si $\vec{f}_m=-\nabla U_m$, al proyectar la ecuación de cantidad de movimiento a lo largo de las líneas de corriente se obtiene :

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(h+\vec{v}\cdot\vec{v}/2+U_m\right)=0$$

Cuando además $\Delta U_m/|\vec{v}|^2 \ll 1$ (efectos de fuerzas másicas despreciables) :

$$\frac{\partial}{\partial l}(h+\vec{v}\cdot\vec{v}/2)=0 \Leftrightarrow h+\vec{v}\cdot\vec{v}/2=h_{t,l}(t)$$

$$\frac{\partial s}{\partial l}=0 \longrightarrow s=s_l(t)$$

↳ Flujo exhibe dos invariantes en cada línea de corriente: la entropía y la entalpía total → se conservan las magnitudes de remanso a lo largo de las líneas de corriente :

$$\frac{T_t}{T}=\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}M^2\right)\ ;\ \frac{p_t}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\ ;\ \frac{\rho_t}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

↪ En cada punto de la línea de corriente el estado fluido viene determinado por dos propiedades de remanso y el número de Mach

$$\frac{T}{T_t} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} M^2\right)^{-1} \qquad \frac{p}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

→ Fijadas las condiciones de remanso, el conocimiento del M en cada punto de la línea de corriente determina el estado termodinámico.

CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

→ Condiciones iniciales para problemas no-estacionarios:
$$\begin{cases} \circ\ \underline{\text{Gases}}: \rho(\vec{x},0);\ \vec{v}(\vec{x},0);\ T(\vec{x},0) \\ \circ\ \underline{\text{Líquidos}}: \vec{v}(\vec{x},0);\ T(\vec{x},0) \quad (\nabla\cdot\vec{v}(\vec{x},0) = 0) \end{cases}$$

→ Condiciones de contorno:

- Campo lejano, $|\vec{x}| \to \infty$: $\rho \to \rho_\infty$; $\vec{v} \to \vec{v}_\infty$; $T \to T_\infty$
- Superficie sólida, $\vec{x} \in \Sigma_S$: $(\vec{v} - \vec{v}_S) = \vec{0}$, $(T - T_S) = 0$
- Entrada/salida de flujo: condiciones compatibles con propagación de información.

4. Adimensionalización. Semejanza física.

Problema: $\phi_0 = f(\underbrace{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k}_{k \text{ variables dimensionalmente independientes}}, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)$ → n variables

$$\xrightarrow{\text{Teorema } \Pi} \Pi_0 = \frac{\phi_0}{\varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \varphi_k^{\alpha_k}} \Rightarrow \Pi_0 = F(\Pi_{k+1}, \dots, \Pi_m) \rightarrow (n-k) \text{ variables}$$

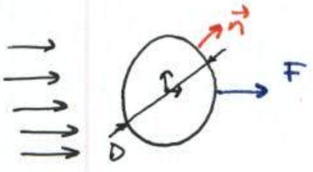
* Procedimiento a seguir:

1º) Obtener ϕ_0 del problema

2º) Determinar cuáles son las k variables dimensionalmente independientes

3º) Obtener variables adimensionales

Ejemplo: FUERZA QUE EL FLUIDO EJERCE SOBRE LA ESFERA



U_∞, p_∞
(no hay fuerzas másicas)

Líquido:

$$\nabla\cdot\vec{v}=0$$

$$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla p+\underbrace{\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}'}_{\mu\Delta\vec{v}}$$

$$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla p+\mu\cdot\Delta\vec{v}\rightarrow\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla(p-p_\infty)+\mu\Delta\vec{v}$$

C.C.: $|\vec{x}|\rightarrow\infty$ (r,θ): $\begin{cases}\vec{v}=U_\infty\vec{i}\\ p=p_\infty\rightarrow p-p_\infty=0\end{cases}$

$r=D/2$: $\vec{v}=0$

$$\vec{v}=\vec{f}_1(\underset{(r,\theta)}{\vec{x}},\rho,\mu,U_\infty,D)$$ → no entra p_∞ porque ahora está dentro de la incógnita.

$$p-p_\infty=f_2(\vec{x},\rho,\mu,U_\infty,D)$$

$$\vec{F}=-\int_{\text{esfera}}(p-p_\infty)\vec{n}\,d\sigma+\int_{\text{esfera}}\vec{n}\cdot\bar{\bar{\tau}}'d\sigma=\vec{G}(\rho,\mu,U_\infty,D)$$ → desaparece $\vec{x}$ por la integración

↳ al solo interesarnos el eje x quitamos el vector:

$F=G(\rho,\mu,U_\infty,D)\rightarrow$ busco $[M],[L],[T]$

$\rho=[ML^{-3}]$, $D=[L]$, $U_\infty=[LT^{-1}]$

$\mu\Rightarrow\frac{\rho D U_\infty}{\mu}=Re$

$F\Rightarrow\frac{F}{\rho U_\infty^2D^2}$

$$\boxed{\frac{F}{\rho U_\infty^2 D^2}=\varphi(Re)}$$

- PARÁMETROS ADIMENSIONALES:

- Número de Strouhal (St): $St=l_c/v_ct_c$. Si $St\ll1\rightarrow$ flujo casi-estacionario

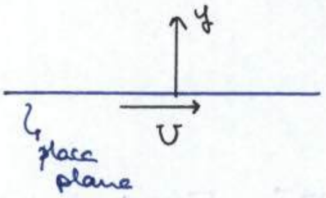
- Número de Euler (Eu): $Eu=p_c/\rho v_c^2$ $\begin{cases}\text{Flujo incompresible: } p_c=\rho v_c^2\rightarrow Eu=1\\ \text{Flujo compresible: } M_c=O(1): p_c=\rho_cR_gT_c\rightarrow Eu=\frac{1}{\gamma M_c^2}\end{cases}$

- Número de Froude (Fr): $Fr=\frac{v_c^2}{f_{mc}l_c}$. Si $Fr\gg1\rightarrow$ fuerzas másicas despreciables.

- Número de Reynolds (Re): $Re=\frac{\rho l_cv_c}{\mu}$. Si $Re\gg1\rightarrow$ efectos viscosos despreciables (en casi todo el flujo!! → El término viscoso impone condición de contorno en Σ_s)

- Número de Prandtl (Pr): $Pr=\frac{\mu}{Kc}$. Si $Pr\cdot Re\gg1\rightarrow$ efectos de conducción de calor despreciables (en casi todo el flujo!! → El término de conducción de calor impone condición de contorno en Σ_s)

Ejemplo: PROBLEMA DE RAYLEIGH



$$* \ \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

CI: $t=0$, $u=0$

C.C.: $t>0$, $\begin{cases} \text{en } y=0 : u=U \\ \text{en } y\to\infty : u=0 \end{cases}$

~~$u = f(\rho, \mu, t, y, U)$~~

$$* \ \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial(\nu t)} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\quad \text{CI}: \nu t = 0 : u=0;\quad \text{CC}: \nu t>0, \begin{cases} y=0: u=U \\ y\to\infty : u=0\end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial(u/U)}{\partial(\nu t)} = \frac{\partial^2(u/U)}{\partial y^2};\quad \text{C.I.}: \nu t=0 : u/U = 0;\quad \text{C.C.}: \nu t>0, \begin{cases} y=0 : u/U = 0 \\ y=\infty : u/U=0\end{cases}$$

$$\left.\frac{u}{U} = f(\underset{\substack{[\nu \cdot L \cdot T] \\ \| \\ [L^2]}}{\nu t}, \underset{[L]}{y})\right\} \Rightarrow \frac{u}{U} = f(y/\sqrt{\nu t}) \quad \Bigg\} \boxed{\frac{u}{U} = f(\eta)}$$

$$y/\sqrt{\nu t} = \eta$$

$$\hookrightarrow \frac{d\eta}{\eta} = \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\frac{d(\nu t)}{\nu t}$$

$$\left(d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial(\nu t)} \cdot d(\nu t)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u/U)}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{df}{d\eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{\nu t}}\cdot\dfrac{df}{d\eta} \\[2ex] \dfrac{\partial^2(u/U)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial(u/U)}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\nu t}}\cdot\dfrac{df}{d\eta}\right) = \dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\nu t}}\cdot\dfrac{df}{d\eta}\right)\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{1}{\nu t}\cdot\dfrac{d^2 f}{d\eta^2} \\[2ex] \dfrac{\partial(u/U)}{\partial(\nu t)} = \dfrac{\partial f}{\partial(\nu t)} = \dfrac{df}{d\eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial(\nu t)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(y/\sqrt{\nu t})}{\nu t}\dfrac{df}{d\eta} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\eta}{\nu t}\cdot\dfrac{df}{d\eta}\end{cases}$$

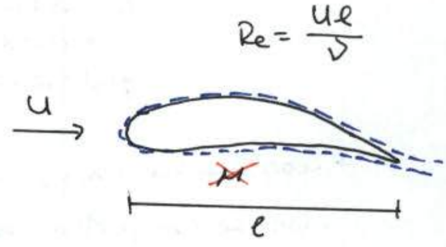
$$-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\cancel{\nu t}}\cdot\frac{df}{d\eta} = \frac{1}{\cancel{\nu t}}\frac{d^2 f}{d\eta^2} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta\frac{df}{d\eta} = 0;\quad \text{CI}: \eta\to\infty : f\to 0;\quad \text{C.C}: \begin{cases}\eta=0 : f=1 \\ \cancel{\eta\to\infty : f=0}\end{cases}}$$

MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 2. FLUJOS LAMINARES A ALTOS NÚMEROS DE REYNOLDS

INTRODUCCIÓN

$Re = \frac{Ul}{\nu}$



Movimientos a altos números de Reynolds ($Re \gg 1$)

↳ efectos viscosos despreciables en la ecuación de cantidad de movimiento

Además, efectos de conducción en ec. de energía despreciables si el producto Reynolds por Prandtl es grande → despreciar los términos de mayor orden en las derivadas de velocidad y temperatura.

↳ Ecuaciones de Euler en flujo compresible:

- Continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

- Cantidad de movimiento: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{f}_m + \cancel{\mu \bar{\bar{\tau}}'}^{\to 0}$

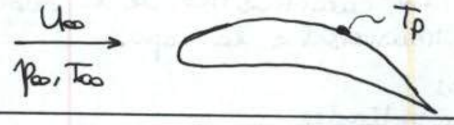
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Entropía: } \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho T \vec{v} (\nabla S) = \cancel{Q_v} + \cancel{\nabla (K \nabla T)} + \dot{q} \\ \text{Energía: } \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla e = -p \nabla \vec{v} + \cancel{Q_v} + \cancel{\nabla (K \nabla T)} + \dot{q} \end{array} \right.$

$\frac{Re}{M^2} \gg 1$ $\quad Re \cdot Pr \gg 1$

+ Condiciones iniciales + Condiciones de contorno

↳ Flujo incompresible: $\rho \equiv cte$, $Re \gg 1$, $Re \cdot Pr \gg 1$, $\dot{q} = 0$, $\vec{f}_m = 0$, ESTACIONARIO, $M^2 \gg 1$

Ecuaciones de Euler: $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \vec{v} = 0 \\ \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p \to \underbrace{p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho_\infty U^2}_{\Delta_e p \sim \rho U_\infty^2} \end{array} \right.$



C.C.: $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{x}| \gg l \to \vec{v} = U_\infty \vec{i}, \ p - p_\infty = 0 \\ \vec{x} \in \text{perfil} \to \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right.$ → velocidad tangente a la pared (sup. es una línea de corriente)

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{ext} \\ p_{ext} \end{array} \right.$ $\quad \rho \vec{v} \nabla e = 0$

C.C.: $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{x}| \gg l \to T = T_\infty \\ \vec{x} \in \text{perfil} \end{array} \right.$ → la temperatura del fluido debe coincidir con la temperatura de la pared (si a través de dicha pared no hay paso de masa, y en la superficie no hay reacción química ni evaporación)

↳ NO PODEMOS IMPONER NADA → para poder imponer todas las cond. de contorno, es necesario que los términos viscosos y de conducción de calor sean tan importantes como los convectivos

↳ U y T sufren variaciones del orden de ella misma en $\delta \ll l$

↓

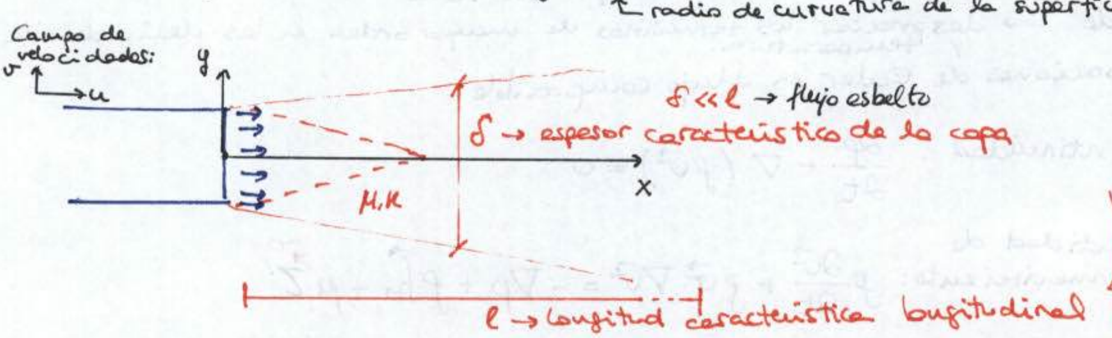
CAPA LÍMITE

↳ Solución ecuación de la energía : $T \simeq T_\infty$

Obtención de las ecuaciones para flujos a altos números de Reynolds

- Flujo bidimensional e incompresible (por simplicidad)
- Región esbelta: zona dimensional transversal pequeña comparada con su dimensión longitudinal
- Sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (coordenadas de capa límite):
  - x: distancia medida sobre la superficie del cuerpo desde su borde de ataque o desde el punto de remanso anterior
  - y: distancia normal al cuerpo

* Coordenadas (x, y) no son cartesianas, excepto si superficie del cuerpo es plana.
↳ Pero se comportan como tales si $y \ll R \sim \ell$
(R: radio de curvatura de la superficie)



(del orden de la longitud que es necesario recorrer a lo largo del chorro, estela o capa de mezcla, para que δ sufra variaciones del orden de ella misma o longitud característica del cuerpo en capa lím)

- **ANÁLISIS DE LOS ÓRDENES DE MAGNITUD**
  - Ecuación de la continuidad (caso general):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^j u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^j v\right) = 0, \text{ con } \begin{cases} j=0: \text{para el caso bidimensional} \\ j=1: \text{para el caso axilsimétrico} \end{cases}$$

$\boxed{2D}$ $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U}{\ell} \sim \frac{v_c}{\delta} \rightarrow v_c \sim U\underbrace{\left(\frac{\delta}{\ell}\right)}_{\ll 1} \ll U$$

$u \sim U$: velocidad de deslizamiento, u, es del orden de la velocidad U de la corriente libre.
v_c: valor característico de la velocidad transversal a la capa

↳ velocidades transversales a la capa son muy pequeñas comparadas con las longitudinales

- Ecuación de cantidad de movimiento según x:

$\boxed{2D}$ $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$U\cdot\frac{U}{\ell} \qquad v_c\cdot\frac{U}{\delta} \qquad \frac{\Delta_x p}{\rho \ell} \qquad \underbrace{\nu\frac{U}{\ell^2} \ll \nu\frac{U}{\delta^2}}$$

$$v_c\cdot\frac{U}{\delta} \rightarrow U^2\frac{\cancel{\delta}}{\cancel{\delta}\,\ell}$$

$$\frac{U^2}{\ell} \sim \frac{U^2}{\ell} \qquad\qquad \nu\frac{U}{\delta^2}$$

→ la difusión de cantidad de movimiento por efectos viscosos a lo largo de la capa es despreciable frente a la difusión transversal a la misma.

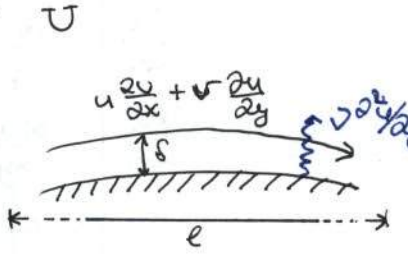
↳ En la capa los efectos viscosos deben ser tan importantes como el que más.

El orden de magnitud del espesor de la capa debe ser:

$$\frac{U^2}{\ell} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \rightarrow \delta^2 \sim \nu \cdot \frac{\cancel{U}\ell}{U^{\cancel{2}}} \rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu \ell}{U}}$$

$$\delta \sim \ell \sqrt{\frac{\nu}{U \cdot \ell}} \sim \frac{\ell}{\sqrt{Re}} \ll \ell$$

$\uparrow$ $Re \gg 1$



Término de las fuerzas de presión:

$$\frac{\Delta_x p}{\rho \ell} \sim \frac{U^2}{\ell} \rightarrow \Delta_x p \sim \rho U^2$$ → las fuerzas de presión juegan un papel importante en el movimiento del fluido tanto en la capa como fuera de ella.

- Ecuación de cantidad de movimiento según y:
  - ↳ para determinar el orden de magnitud de las variaciones de presión transversales a la capa.

$\boxed{2D}$ $$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{U}{\ell}\cdot v_c \quad \frac{v_c^2}{\delta}$$

$$\frac{U^2}{\ell}\cdot\frac{\delta}{\ell} \qquad \frac{U^2}{\cancel{\delta}}\cdot\frac{\delta^{\cancel{2}}}{\ell^2}$$

$$\underbrace{\frac{U^2}{\ell^2}\delta \sim \frac{U^2}{\ell^2}\cdot\delta}$$

$$\underbrace{\frac{U^2}{\ell^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{\ell}\sqrt{\frac{\nu}{U\ell}} \sim \sqrt{\frac{\nu U^3}{\ell^3}}}_{\text{términos convectivos}}$$

$$\frac{\Delta_\delta p}{\rho\delta}$$

$$\underbrace{\nu\frac{v_c}{\ell^2} \ll \nu\frac{v_c}{\delta^2}}$$

$$\nu\frac{v_c}{\delta^2} \sim \frac{U\cancel{\delta}}{\ell}\cdot\frac{\nu}{\delta^{\cancel{2}}}$$

$$\nu\cdot\frac{U}{\ell\delta} \sim \frac{\nu\cdot U}{\ell}\cdot\sqrt{\frac{\ell\cdot U}{\nu}}\cdot\frac{1}{\ell}$$

$$\sqrt{\frac{\nu U^3}{\ell^3}}$$ → término de difusión viscosa transversal

Comparando el término de presiones: $$\frac{\Delta_\delta p}{\rho\delta} \sim \frac{U^2}{\ell^2}\cdot\delta \rightarrow \Delta_\delta p \sim \underbrace{\rho U^2}_{\sim\Delta_\ell p}\cdot\underbrace{\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2}_{\ll 1}$$

$$\Delta_\delta p \sim \Delta_\ell p\cdot\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2 \ll \Delta_\ell p$$

↳ la presión en la capa no varía transversalmente a la misma y es, por tanto, igual a la presión impuesta por la corriente exterior de Euler

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p(x,y) = p_{ext}(x)$$ → simplifica bastante el problema a resolver, ya que la presión deja de ser una incógnita en el estudio de la evolución de la capa.

$\uparrow$ CONOCIDO

* Resumiendo: $\delta \ll l$, $v_c \ll U$, $\Delta_\delta p \ll \Delta_e p \rightarrow p(x,y) = p_{ext}(x)$ (DATO)

Ecuaciones de Euler en flujo bidimensional e incompresible:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_{ext}(x)}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ \text{C.C.} \end{aligned}\right\} \rightarrow u, v$$

Corrientes libres → presión exterior, p_{ext}, uniforme (NO HAY PARED) $(dp_{ext}/dx = 0)$

↳ chorros de líquido en el seno del mismo líquido, estela de cuerpos en el seno de una corriente de líquidos, capa de mezcla bidimensional de dos líquidos.

Ecuaciones GENERALES:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial (y^j u)}{\partial x} + \frac{\partial (y^j v)}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial (y^j u\cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (y^j u v)}{\partial y} = \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(y^j\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right.$$

donde:
- $j=0$: simetría plana (2D)
- $j=1$: simetría cilíndrica (axilsimétrica)

Solución → utilizar función de corriente ψ:

$$y^j u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ ;\quad y^j v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Continuidad: $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 0$
- Cantidad de movimiento en x: $\dfrac{1}{y^j}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \dfrac{1}{y^j}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$

→ Antes de realizar el análisis dimensional para buscar la SOLUCIÓN DE SEMEJANZA → eliminar la dependencia de la viscosidad cinemática ν

↳ cambio de variable: $\left\{\begin{aligned} &\text{variable independiente: } y' = y/\sqrt{\nu} \\ &\text{variable dependiente: } \nu' = \nu/\sqrt{\nu} \end{aligned}\right.$

consecuencia ↳ $\psi' = \dfrac{\psi}{(\sqrt{\nu'})^{j+1}}$

↳ Con las nuevas variables:

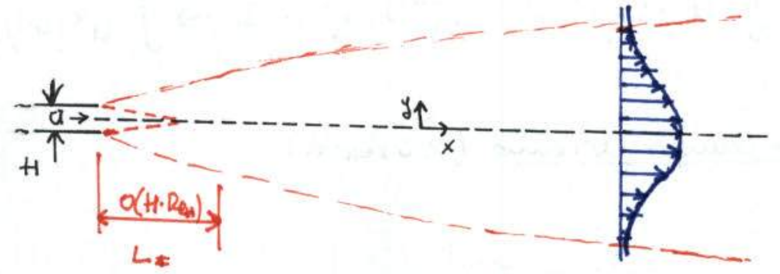
- Continuidad: $\dfrac{\cancel{(\sqrt{\nu})^{j+1}}}{\cancel{(\sqrt{\nu})}}\cdot\dfrac{\partial\psi'}{\partial x\partial y'} - \dfrac{\cancel{(\sqrt{\nu})^{j+1}}}{\cancel{(\sqrt{\nu})}}\cdot\dfrac{\partial\psi'}{\partial y'\partial x} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial\psi'}{\partial x\partial y'} - \dfrac{\partial\psi'}{\partial y'\partial x} = 0$
- Cantidad de movimiento en x: [...] → $\dfrac{1}{y'^j}\left[\dfrac{\partial\psi'}{\partial y'}\cdot\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial x\partial y'} - \dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2}\right] = \dfrac{\partial^3\psi'}{\partial y'^3}$

· CHORROS

Geometría del chorro:

→ U: velocidad en la sección de salida

→ $\left(\frac{\pi H}{4}\right)^j H$: sección de salida



→ L_I: longitud en el que el chorro tiene un núcleo central no viscoso
↳ limitado por una capa de mezcla que va incorporando al chorro el líquido exterior.

$$\rho U \cdot \frac{U}{L_I} \sim \mu \frac{U}{H^2} \rightarrow L_I \sim H \cdot Re_H \gg H$$

término convectivo — término viscoso

◦ Ecuación de cantidad de movimiento según el eje x:

$$\frac{\partial(y^j uu)}{\partial x} + \frac{\partial(y^j u \cdot v)}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(y^j \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

↳ Multiplicándola por dy e integrándola transversalmente al chorro:

$$\int_0^\infty \frac{\partial(y^j uu)}{\partial x} dy + \int_0^\infty \frac{\partial(y^j u \cdot v)}{\partial y} dy = \int_0^\infty \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(y^j \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty y^j u^2 dy - \left(y^j u \cdot v\right)\Big|_0^\infty = \left(\nu \cdot y^j \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_0^\infty$$

$(u \cdot v)_{y=0} = 0$ (porque v es cero en el eje) → chorro recto y simétrico

$(u \cdot v)_{y \to \infty} = 0$ (estoy fuera del chorro y la atmósfera está en calma)

$\left(\nu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ (es simétrico)

$\left(\nu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y \to \infty} = 0$ (solución exterior)

en la salida: $\int_0^{H/2} U^2 (y^j) dy$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u^2 (y^j) dy = 0 \rightarrow \int_0^\infty u^2 (y^j) dy = \text{constante} = I = U^2 \left(\frac{H}{4}\right)^j \cdot \frac{H}{2}, \ \forall x$$

↳ cantidad de movimiento por unidad de masa → IMPULSO

* Distancias $x \sim L_I \sim Re_H \cdot H \sim UH^2/\nu$:
en esta región intervienen tanto la velocidad U como la longitud H por separado
↳ no existe solución de semejanza → se dispone de una longitud y una velocidad para adimensionalizar las ecuaciones.

* Distancias $x \gg UH^2/\nu$ → efectos viscosos ya afectan a todo el chorro, se pierde el detalle de lo que ocurre en esa primera región.

$\int_0^\infty u^2(y^j) dy = I$ se sigue cumpliendo (válido para todo x) → lo único que interviene en la solución del campo lejano
↓
pero no U y H por separado

↳ En campo lejano: región inicial del chorro se ve como una fuente de cantidad de movimiento.

Haciendo el cambio de variable en: $\int_0^\infty u^2(y^j)dy = I$

$$\int_0^\infty u^2(\sqrt{\nu})^j (y'^j)\cdot(\sqrt{\nu})\,dy' = I \rightarrow \int_0^\infty u^2(y'^j)\,dy' = \frac{I}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} = I'$$

∘ Campo lejano $(x \gg Re_H \cdot H)$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \psi'}{\partial x \partial y'} - \dfrac{\partial \psi'}{\partial y' \partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{1}{y'^j}\left[\dfrac{\partial \psi'}{\partial y'}\cdot\dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y'} - \dfrac{\partial \psi'}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2}\right] = \dfrac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} \\[2ex]
y' = 0 : \underbrace{\dfrac{\partial \psi'}{\partial x}}_{v} = 0 \quad + \underbrace{\dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2}}_{\partial u/\partial y'} = 0 \hookrightarrow \text{perfil de velocidades simétrico} \\[2ex]
y' \to \infty : \underbrace{\dfrac{\partial \psi'}{\partial y'}}_{u} = 0 \\[2ex]
\hookrightarrow \text{Debe cumplirse, además: } \displaystyle\int_0^\infty u^2(y'^j)\,dy' = I' = \dfrac{U^2\left(\frac{H}{2}\right)^j \cdot \frac{H}{2}}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} \\
x = x_{origen} \sim L_I
\end{array}\right\} \psi' = F'(x, y', I')$$

↳ ANÁLISIS DIMENSIONAL:

$$\frac{\psi}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} = f\left(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, \frac{I}{(\sqrt{\nu})^{j+1}}\right)$$

$\frac{\psi}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} \downarrow \left[V^{(1-j)/2} \times L^{(j+1)/2}\right]$; $x \downarrow [L]$; $\frac{y}{\sqrt{\nu}} \downarrow \left[V^{-1/2} \times L^{1/2}\right]$; $\frac{I}{(\sqrt{\nu})^{j+1}} \hookrightarrow \left[V^{(3-j)/2} \times L^{(j+1)/2}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} L = [x] \\ V = \left[\dfrac{I}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\right]^{2/(3-j)} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\psi}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\cdot\left[\frac{I}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\right]^{(j-1)/(3-j)} = f\left\{\frac{y}{\sqrt{x\nu}}\left[\frac{I}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\right]^{1/(3-j)}\right\}$$

Si $\eta = \frac{y}{\sqrt{x\nu}}\left[\frac{I}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\right]^{1/(3-j)}$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\psi}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\cdot\left[\frac{I}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}}\right]^{(j-1)/(3-j)} = f\{\eta\}}$$

- Campo cercano ($x \sim Re_H \cdot H$)

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial y' \partial x} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{y'^j}\left[\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial^2\psi'}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2}\right] = \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} \\ &y'=0 : \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = 0 \\ &y' \to \infty : \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 0 \\ &y' \in \left[-\frac{H}{2(\sqrt{\nu})}, \frac{H}{2(\sqrt{\nu})}\right]_{x=0} : \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = U \end{aligned}\right\} \psi' = F\left(x, y', \frac{H}{\sqrt{\nu}}, U\right)$$

$$\underbrace{\frac{\psi}{(\sqrt{\nu})^{j+1}}}_{[V^{(1-j)/2} \times L^{(j+1)/2}]} = f\left(\underbrace{x}_{[L]}, \underbrace{\frac{y}{\sqrt{\nu}}}_{[V^{-1/2} \times L^{1/2}]}, \frac{H}{\sqrt{\nu}}, \underbrace{U}_{[V]}\right) \qquad \begin{cases} L = [x] \\ V = [U] \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\psi \cdot U^{2/(1-j)}}{(\sqrt{x\nu})^{j+1}} = f\left\{\frac{y \cdot \sqrt{U}}{\sqrt{x\nu}}, \frac{H \cdot \sqrt{U}}{\sqrt{x\nu}}\right\}}$$

- Chorro PLANO ($j=0$)

→ Función de corriente (en campo lejano):

$$\frac{\psi}{(\sqrt{x\nu})^{0+1}} \cdot \left[\frac{I}{(\sqrt{x\nu})^{0+1}}\right]^{(0-1)/(3-0)} = f(\eta)$$

$$\frac{\psi \cdot (\sqrt{x\nu})^{1/3}}{\sqrt{x\nu}\, I^{1/3}} = \frac{\psi}{(x\nu I)^{1/3}} = f(\eta) \quad \text{con } \eta = y \cdot \frac{I^{1/3}}{3 \cdot (\nu x)^{2/3}}$$

$\hookrightarrow \boxed{\psi = (x\nu I)^{1/3} \cdot f(\eta)}$ ↑ se introduce por conveniencia

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \eta}}_{\frac{df}{d\eta}\cdot (x\nu I)^{1/3}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{I^{2/3}}{3(\nu x)^{1/3}} \cdot \frac{df}{d\eta}$$

$$\to \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial}\left[\overbrace{(x\nu I)^{1/3}}^{g(x)} \cdot f(\eta)\right] = -\left[g'(x)\cdot f(\eta) + g(x)\cdot f'(\eta)\right] =$$

$$= -\left[\frac{(\nu I)^{1/3}}{3x^{2/3}} \cdot f(\eta) + (x\nu I)^{1/3} \cdot \underbrace{y\frac{I^{1/3}}{3(\nu x)^{2/3}}}_{\eta} \cdot \frac{(-2/3)}{x}\right] \Rightarrow$$

$$v = -\frac{1}{3}\frac{(\nu I)^{1/3}}{x^{2/3}}\left(f(\eta) - 2\eta \frac{df}{d\eta}\right)$$

[...]

• La ecuación de cantidad de movimiento según el eje x:

$$\frac{d^3f}{d\eta^3}+f\frac{d^2f}{d\eta^2}+\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2=0 \Rightarrow \frac{d}{d\eta}\left[\frac{d^2f}{d\eta^2}+\underbrace{f\frac{df}{d\eta}}\right]=0$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[f\frac{df}{d\eta}\right]=\frac{df}{d\eta}\cdot\frac{df}{d\eta}+f\cdot\frac{d^2f}{d\eta^2}$$

• Condiciones de contorno:

$$\begin{cases}(y=0,\ v=0)\rightarrow \eta=0:\ f(0)=0\\ \left(y=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\right)\rightarrow \eta=0:\ f''(0)=0\\ (y\to\infty,\ u=0)\rightarrow \eta\to\infty:\ f'(\infty)=0\end{cases}$$

→ Solución analítica: $f(\eta)$

Integrando → $f''+f\cdot f'=0$ (ya que $f''(0)=f(0)=0$)

Integrando → $f(\eta)=2\alpha\,\dfrac{e^{2\alpha\eta}-1}{e^{2\alpha\eta}+1}=2\alpha\tanh(\alpha\eta)$

$$\frac{df}{d\eta}=2\alpha^2\,\mathrm{sech}^2(\alpha\eta)$$

• Relación integral:

$$\int_0^\infty\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta = 3$$

$$\int_0^\infty u^2dy=\int_0^\infty\frac{I^{4/3}}{3^2(\nu x)^{4/3}}\cdot\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\cdot\frac{\cancel{3}(\nu x)^{2/3}}{I^{1/3}}\,d\eta=\cancel{I}$$

↳ Integral: $\displaystyle\int_0^\infty\left(2\alpha^2\mathrm{sech}^2(\alpha\eta)\right)^2d\eta=4\alpha^4\int_0^\infty\mathrm{sech}^4(\alpha\eta)\,d\eta=3 \rightarrow \alpha=\frac{1}{2}9^{1/3}$

$$\boxed{f(\eta)=9^{1/3}\cdot\tanh\left(\frac{\eta}{2}9^{1/3}\right)}\quad;\ \frac{df}{d\eta}=\frac{1}{2}\cdot9^{2/3}\cdot\mathrm{sech}^2\left(\frac{\eta}{2}9^{1/3}\right)$$

La velocidad en el centro del chorro:

$$u_{max}=u(x,0)=\frac{I^{2/3}}{3(\nu x)^{1/3}}\cdot\underbrace{\left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0}}_{\frac{1}{2}\cdot9^{2/3}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{(9I)^{2/3}}{(\nu x)^{1/3}}\simeq0{,}7211\cdot\frac{I^{2/3}}{(\nu x)^{1/3}}$$

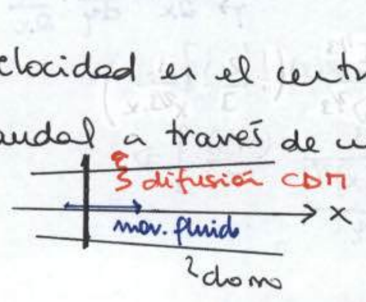
y el gasto volumétrico a través de una sección del chorro:

$$q=2\int_0^\infty u\,dy=2\cdot\int_0^\infty\left(\frac{I^{2/3}}{\cancel{3}(\nu x)^{1/3}}\right)\cdot\frac{df}{\cancel{d\eta}}\cdot\frac{\cancel{3}(\nu x)^{2/3}}{I^{1/3}}\,\cancel{d\eta}=2\cdot(\nu xI)^{1/3}\cdot\int_0^\infty df=$$

$$=2\cdot(\nu xI)^{1/3}\cdot\left(9^{1/3}\cdot\tanh\left(\frac{\eta}{2}9^{1/3}\right)\right)\Big|_0^\infty=2\cdot(9\nu xI)^{1/3}$$

$$q\simeq4{,}1602(\nu Ix)^{1/3}$$

* Velocidad en el centro del chorro disminuye con x
* Caudal a través de una sección del chorro aumenta con x → hay arrastre



- Chorro AXILSIMÉTRICO ($j=1$)

→ Cambiando variable y por r:

$$\psi = x\nu f(\eta)\ ,\quad \text{con } \eta = r\frac{\sqrt{I}}{\nu x}$$

- Velocidades:

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{r}\cancel{x\nu}\cdot\frac{df}{d\eta}\cdot\frac{\sqrt{I}}{\cancel{\nu x}} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{I}}{\eta\nu x}\cdot\sqrt{I}\cdot\frac{df}{d\eta} = \left(\frac{I}{\nu x}\right)\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\frac{df}{d\eta}$$

$$r = \frac{\eta\nu x}{\sqrt{I}}$$

$$v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{dx} = +\frac{1}{\cancel{r}}\cancel{x\nu}\frac{df}{d\eta}\cdot\left(+\cancel{r}\frac{\sqrt{I}}{\cancel{\nu}x^{\cancel{2}}}\right) - \frac{1}{r}\nu\cdot f = \frac{\sqrt{I}}{x}\frac{df}{d\eta} - \frac{1}{r}\nu f =$$

$$= \frac{\sqrt{I}}{x}\frac{df}{d\eta} - \frac{\sqrt{I}}{\eta\cancel{\nu}x}\cancel{\nu}\cdot f = \frac{\sqrt{I}}{x}\left(\frac{df}{d\eta} - \frac{f}{\eta}\right)$$

[...]

- La ecuación de cantidad de movimiento según el eje x:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{df}{d\eta}\right) = \frac{1}{\eta^2}\left[f\frac{df}{d\eta} - \eta\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 - \eta f\frac{d^2f}{d\eta^2}\right]$$

- Condiciones de contorno:

$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) = 0$$

Solución: $$f(\eta) = \frac{4(\alpha\eta)^2}{1+(\alpha\eta)^2}$$

- Relación integral: $$\int_0^\infty \frac{\cancel{I^2}}{\cancel{\nu x^2}}\cdot\frac{1}{\eta^{\cancel{2}}}\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\cdot\cancel{\eta}\left(\frac{\sqrt{I}}{\nu x}\right)^{\cancel{2}}d\eta = \cancel{I} \rightarrow \int_0^\infty\frac{1}{\eta}\cdot\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 d\eta = 1$$

que en función de α: $$1 = 64\alpha^2\int_0^\infty\frac{(\alpha\eta)\,d(\alpha\eta)}{[1+(\alpha\eta)^2]^4} = \frac{32\alpha^2}{3} \rightarrow \alpha = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{f(\eta) = \frac{12\eta^2}{32+3\eta^2}}$$

$$u = \frac{I}{\nu x}\frac{1}{\eta}\frac{df}{d\eta} = \frac{768}{\nu x}\cdot I\,(32+3\eta^2)^{-2}$$

* $u_{máx} = u(x,0) = \frac{3}{4}\cdot\frac{I}{\nu x}$ → Disminuye más rápido que en 2D con x *

* $$Q = 2\pi\int_0^\infty u r\,dr = 2\pi\int_0^\infty\frac{I}{\nu x}\cdot\frac{\cancel{\eta}}{\cancel{\eta}}\left(\frac{df}{\cancel{d\eta}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{I}}{\nu x}\right)^2\cancel{d\eta} = \frac{2\pi I^2}{(\nu x)^2}\int_0^\infty df = 8\pi\nu x$$

Aumenta más rápido que en 2D con x *

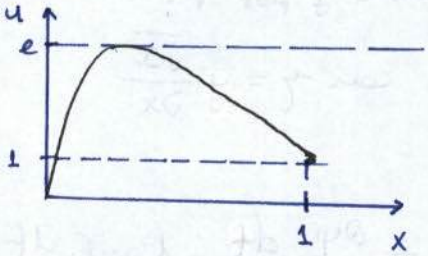
* Más superficie de contacto en axilsimétrico que en 2D

Desarrollo Asintótico Acoplado

$\varepsilon u'' + u \cdot u' + u^2 = 0$

con $\varepsilon \ll 1$; $x=0 : u=0$

$x=1 : u=1$



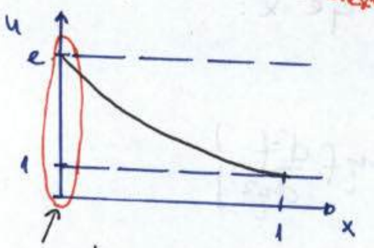
Despreciando términos $O(\varepsilon)$:

$$u \cdot u' + u^2 = 0 \rightarrow u \cdot [u' + u] = 0 \begin{cases} \cancel{u=0} \rightarrow \text{solución trivial} \\ u' + u = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = -u \rightarrow \frac{du}{u} = -dx \rightarrow u = C \cdot e^{-x}$$

$$\left.\begin{aligned} &x=1 : u=1 \\ &1 = C \cdot e^{-1} \rightarrow C = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = e^{(1-x)}$$

$u(x) = e^{(1-x)}$ $= U_{ext}(x) \Rightarrow$ SOLUCIÓN EXTERIOR



zona de la pared

→ La velocidad no va a cero en la pared porque se ha quitado esa C.C.

• Solución Interior

→ Nueva variable independiente : $\xi = \frac{x}{\delta}$ → $\xi \sim 1$

escala de la región interior

$x \ll 1 \Rightarrow \delta \ll 1$ → pero no se sabe aún cómo va con ε

→ Cambio de variable:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{du}{d\xi} \\ &\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2u}{d\xi^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2u}{d\xi^2}}_{\sim \frac{\varepsilon}{\delta^2}} + \underbrace{\frac{u}{\delta}\frac{du}{d\xi}}_{\sim \frac{1}{\delta}} + \underbrace{u^2}_{\sim 1} = 0$$

Para retener u'' → $\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \frac{1}{\delta} \rightarrow \varepsilon \sim \delta \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = \delta}}$

$$\underbrace{\frac{1}{\delta}\frac{d^2u}{d\xi^2}}_{\sim 1/\delta \;\gg 1} + \underbrace{\frac{u}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}}_{\sim 1/\delta \;\gg 1} + \underbrace{u^2}_{\sim 1} = 0$$

Ecuación diferencial a resolver:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+u\frac{du}{d\xi}=0 \quad ; \text{ c.c.} \begin{cases} \xi=0 : u=0 \\ \xi \gg 1 : \text{SOLUCIÓN INTERIOR} \rightarrow \text{SOLUCIÓN EXTERIOR} \end{cases}$$

$$q=\frac{du}{d\xi} \rightarrow \frac{d^2u}{d\xi} = \frac{dq}{d\xi} = \frac{dq}{du}\cdot\frac{du}{d\xi} = q\frac{dq}{du}$$

$$q\frac{dq}{du}+u\cdot q=0 \rightarrow q\left[\frac{dq}{du}+u\right]=0 \begin{cases} q=0 \rightarrow \text{solución trivial} \\ \frac{dq}{du}+u=0 \end{cases}$$

$$dq=-u\,du \rightarrow q=-\frac{u^2}{2}+A \rightarrow \frac{du}{d\xi}=A\left[1-\left(\frac{u}{\sqrt{2A}}\right)^2\right] \rightarrow \varphi=\frac{u}{\sqrt{2A}}$$

· Cambio de variable:

$$du=\sqrt{2A}\,d\varphi$$

$$\sqrt{2A}\cdot\frac{d\varphi}{d\xi}=A\left[1-\varphi^2\right] \rightarrow \frac{d\varphi}{1-\varphi^2}=\sqrt{\frac{A}{2}}\,d\xi=\left[\frac{d\varphi}{1+\varphi}+\frac{d\varphi}{1-\varphi}\right]\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+\varphi}{1-\varphi}=B\cdot\exp\left(2\sqrt{\frac{A}{2}}\,\xi\right) \;;\; \xi=0 : \varphi=0\ (u=0) \rightarrow B=1$$

$$\frac{1+\varphi}{1-\varphi}=\exp\left(2\sqrt{\frac{A}{2}}\,\xi\right)=\exp\left(\sqrt{2A}\,\xi\right)$$

· Acoplamiento: $\xi \gg 1 \rightarrow (\xi\rightarrow\infty) : \varphi\rightarrow 1 \Rightarrow \varphi=1=\frac{u}{\sqrt{2A}}$

para que $\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\rightarrow\infty$ también

$$\left.\begin{cases} u_{int}\big|_{\xi\rightarrow\infty}\rightarrow\sqrt{2A} \\ u_{ext}\big|_{x\rightarrow 0}\rightarrow e \end{cases}\right\} \sqrt{2A}=e \Rightarrow A=e^2/2$$

MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 3. CAPA LÍMITE LAMINAR

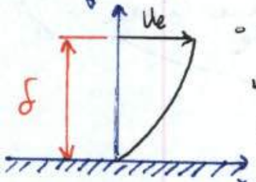
→ ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE BIDIMENSIONAL INCOMPRESIBLE

◦ Sistema de ecuaciones parabólico *

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2mm] u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp_e}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

→ al aparecer sólo este término derivado respecto a "y" la información no puede ir hacia atrás. En una sección cualquiera sólo se ve lo que ocurre aguas abajo. *

→ la presión exterior $p_e(x)$ que actúa sobre la capa límite está relacionada con la velocidad de deslizamiento a través de la ecuación de cantidad de movimiento según la pared: $U_e \dfrac{dU_e}{dx} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp_e}{dx}$



◦ Condiciones de Contorno:

↳ $y=0$: $u=v=0$ (sin soplamiento ni succión)
(pared) ↳ condición de no deslizamiento sobre la pared

↳ $y \to \infty$: $u \to U_e(x) \sim U$ → acoplamiento con la solución exterior no viscosa

↳ fuera de la capa límite no se puede asegurar que se cumpla $v=0$, tendrá un valor cualquiera pero $v_c \ll U$

◦ Condición inicial

↳ $x=0$: $u=U_0(y)$ → condición inicial en el origen de la capa límite que proporciona el perfil inicial de velocidades

→ PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE

* Problema definido es parabólico porque la presión ha dejado de ser una incógnita y porque la difusión viscosa a lo largo de la capa límite se ha despreciado frente a la difusión transversal ⇒ coordenada longitudinal ≅ pseudo-tiempo : información únicamente puede propagarse hacia valores crecientes de x. *

→ Capa límite : sus soluciones no dependen del número de Reynolds → ADIMENSIONALIZAR

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \ ; \ \tilde{v} = \frac{v}{v_c} \ ; \ \tilde{x} = \frac{x}{\ell} \ ; \ \tilde{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y\sqrt{Re}}{\ell} \ ; \ \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$\frac{\delta}{\ell} = 1/\sqrt{Re}$$

Ecuación continuidad adimensionalizada:

$$\underbrace{\frac{U}{\ell}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}}_{\sim U} + \underbrace{\frac{v_c}{\ell}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}\cdot\sqrt{Re}}_{\sim v_c\sqrt{Re}} = 0 \quad \to \quad v_c \approx U/\sqrt{Re} \quad \to \quad \tilde{v} = \frac{v\sqrt{Re}}{U}$$

◦ Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\[2mm] \tilde{u}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\cdot\cancel{\dfrac{U^2}{\ell}} + \tilde{v}\cdot\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\cdot\dfrac{U^2\cancel{\sqrt{Re}}}{\cancel{\sqrt{Re}}\cdot\ell} = -\dfrac{d\tilde{p}_e}{d\tilde{x}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\rho}}\cdot\dfrac{\cancel{\rho}U^2}{\cancel{\ell}} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\,U\cdot\dfrac{\overbrace{Re}^{\ell U}}{\ell^2}\cdot\dfrac{\mu}{\rho} \end{cases}$$

◦ Condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \tilde{y}=0 : \tilde{u}=\tilde{v}=0 \\ \tilde{y}\to\infty : \tilde{u}=\tilde{u}_e(\tilde{x}) \\ \tilde{x}=0 : \tilde{u}=\tilde{u}_0(\tilde{y}) \end{cases}$$

El problema no depende de la viscosidad del fluido, únicamente de la forma del cuerpo en torno a la cual se forma la capa límite
↳ se manifiesta indirectamente a través de la velocidad de deslizamiento adimensional $\tilde{u}_e(\tilde{x})$

• El sistema de ecuaciones puede reducirse a una única ecuación diferencial mediante la introducción de la función de corriente ψ

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Se cumple automáticamente la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \underline{\underline{0=0}} \text{ ya que } \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}$$

*Recordatorio: ψ es función de corriente porque $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot dy = -v\,dx + u\,dy$

A lo largo de una superficie bidimensional (línea): $\psi = cte \Rightarrow d\psi = 0$

Entonces: $u\,dy = v\,dx \rightarrow \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}}$ → ecuación de una línea de corriente

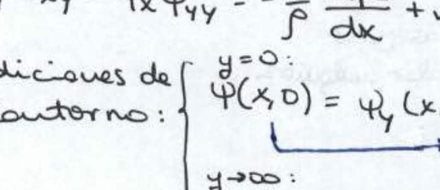
La ecuación de cantidad de movimiento queda entonces:

$$\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} + \nu\psi_{yyy}$$

- Condiciones de contorno:
  - $y=0$: $\psi(x,0) = \psi_y(x,0) = 0$ → eje x: línea de corriente que vale cero
  - $y \to \infty$: $\psi_y(x,\infty) = u_e(x)$
  - $x=0$: $\psi_y = u_0(y)$

↳ La resolución de esta ecuación con las condiciones de contorno proporciona las características más importantes de la solución:

- PERFIL DE VELOCIDADES: $u = \psi_y(x,y)$
- COEFICIENTE DE ROZAMIENTO EN LA PARED: $\tau_p = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0} = \mu\psi_{yy}(x,0)$
- ESPESOR DE LA CAPA LÍMITE; δ



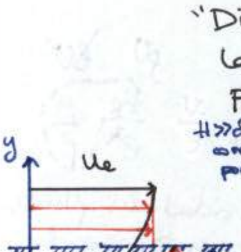
La región exterior se alcanza de un modo asintótico → arbitrariedad intrínseca en la definición del espesor de la capa límite.

↳ Eliminar arbitrariedad → buscar definición con trasfondo físico.

↗ Bibliografía también como δ^*

• Espesor de DESPLAZAMIENTO: δ_1 (CONTINUIDAD)

"Distancia δ_1 que habría que desplazar la pared sólida hacia el interior de la capa límite para que, supuesto que el fluido se mueve con la velocidad exterior, pase por la sección disponible el mismo gasto que pasa por la capa límite original:"



$H \gg \delta$, no es correcto poner ∞

pero sí, en la solución es igual a cero.

$$\int_0^H \rho u\,dy = \int_{\delta_1}^H \rho_e u_e\,dy \rightarrow \int_0^H \rho u\,dy = \int_0^H \rho_e u_e\,dy - \int_0^{\delta_1}\rho_e u_e\,dy \rightarrow \int_0^{\delta_1}\rho_e u_e\,dy = \int_0^\infty(\rho_e u_e - \rho u)\,dy \rightarrow$$

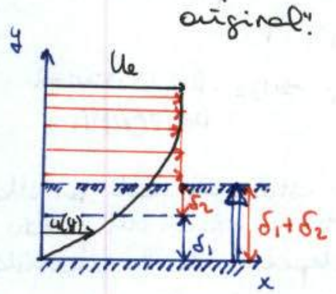
$$\rightarrow \rho_e u_e\delta_1 = \int_0^\infty(\rho_e u_e - \rho u)\,dy \rightarrow \boxed{\delta_1 = \int_0^\infty\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right)dy}$$

→ en líquidos: $\rho = \rho_e \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta_{1,liq} = \int_0^\infty\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)dy$$

• Espesor de CANTIDAD DE MOVIMIENTO: δ_2 → bibliografía también como δ^{**} ó θ

"Distancia $\delta_1+\delta_2$ que debe desplazarse la pared hacia el interior del fluido para que, supuesto que se mueve con la velocidad exterior u_e, pase por la sección disponible un flujo de cantidad de movimiento igual al que pasa por la capa límite original"



$$\int_0^H \rho u^2 dy = \int_{\delta_1+\delta_2}^H \rho_e u_e^2 dy \rightarrow \int_0^H \rho u^2 dy = \int_0^H \rho_e u_e dy - \int_0^{\delta_1+\delta_2} \rho_e u_e dy \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_e u_e^2(\delta_1+\delta_2) = \int_0^\infty (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy \rightarrow \delta_1+\delta_2 = \int_0^\infty \left(1-\frac{\rho u^2}{\rho_e u_e^2}\right) dy \rightarrow$$

$$\rightarrow \delta_2 = \int_0^\infty \left(\cancel{1}-\frac{\rho u^2}{\rho_e u_e^2}\right) dy - \int_0^\infty \left(\cancel{1}-\frac{\rho u}{\rho u_e}\right) dy \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_2 = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho u_e}\left(1-\frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy}$$

→ en líquidos $\rho=\rho_e \Rightarrow \delta_{2,liq} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right) dy$

↳ tiene que ver con la resistencia total del cuerpo

• δ_t vendría de la ecuación de la energía → más adelante.

→ SEPARACIÓN DE LA CAPA LÍMITE. RESISTENCIA DE FRICCIÓN Y FORMA.

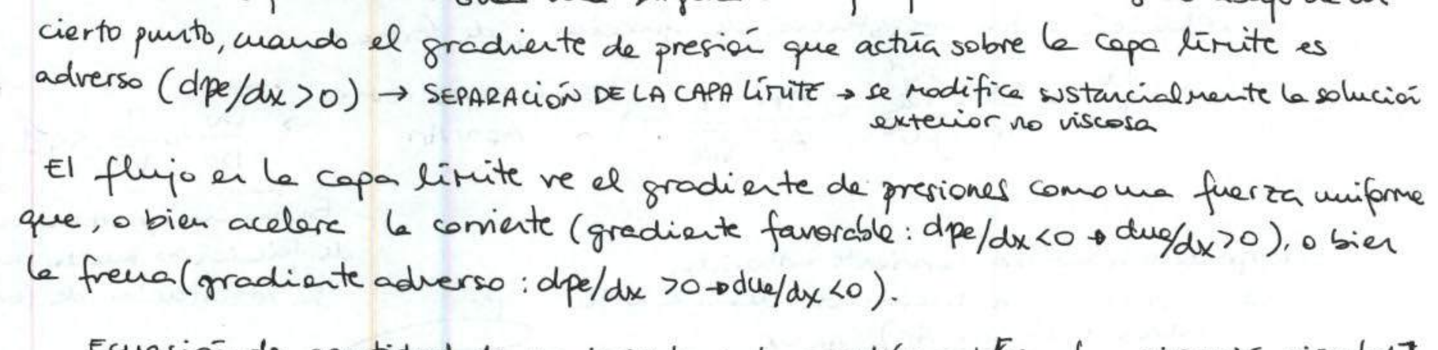
La solución del problema determina la distribución de velocidad en la capa límite. Esta solución puede desarrollar una singularidad y dejar de existir aguas abajo de un cierto punto, cuando el gradiente de presión que actúa sobre la capa límite es adverso ($dp_e/dx>0$) → SEPARACIÓN DE LA CAPA LÍMITE → se modifica sustancialmente la solución exterior no viscosa

El flujo en la capa límite ve el gradiente de presiones como una fuerza uniforme que, o bien acelera la corriente (gradiente favorable: $dp_e/dx<0 \rightarrow du_e/dx>0$), o bien la frena (gradiente adverso: $dp_e/dx>0 \rightarrow du_e/dx<0$).

Ecuación de cantidad de movimiento en la pared ($y=0$): [si no hay ni succión ni soplado]

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu}\frac{dp_e}{dx}$$

→ si gradiente de presiones nulo: punto de inflexión (PI) en la pared.



→ Gradiente favorable: $dp_e/dx<0$, $du_e/dx>0$ ↓ Ejemplo en turbina

→ Gradiente nulo: $dp_e/dx=0$, $du_e/dx=0$

→ Gradiente adverso débil: $dp_e/dx>0$, $du_e/dx<0$

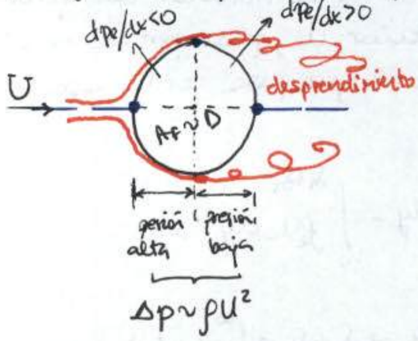
→ Gradiente adverso crítico ↓ pendiente nula en la pared

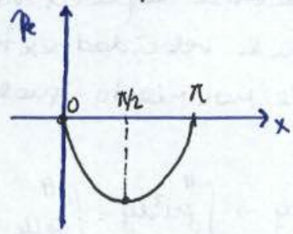
→ Gradiente adverso excesivo

Con $\frac{dp_e}{dx}>0$ el signo de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ debe cambiar en algún punto de inflexión en el interior del fluido. → capa límite inestable + tiempo prolongado → $\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ punto de separación o desprendimiento de la capa límite

La posición del punto de separación es independiente del número de Reynolds (si capa límite se mantiene laminar) y únicamente depende de la FORMA DEL CUERPO

Cuando la capa límite se desprende la diferencia de presiones entre aguas arriba y aguas abajo del cuerpo (zona desprendida) es del orden de ρU^2:





La fuerza de resistencia del cuerpo es del orden de esta diferencia de presiones por el área frontal del cuerpo, A_F:

$$D_F \sim \Delta p \cdot A_F \sim \rho U^2 A_F \sim D_F$$: RESISTENCIA DE FORMA

↳ no depende de la viscosidad, pero está originada por ella ya que la determinación del punto de separación depende de la viscosidad

Los efectos viscosos también tienen una contribución directa a la fuerza de resistencia → al ser los efectos viscosos importantes en la capa límite, ejercerán un esfuerzo de fricción sobre la pared → contribución a la resistencia

⇓

RESISTENCIA DE FRICCIÓN, D_V

$$D_V \sim \tau_p \cdot \underbrace{A_M}_{\text{Área mojada por el fluido}}$$

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow \tau_p \sim \mu \frac{U}{\delta} \sim \mu \cdot \frac{U \cdot \ell}{\delta \cdot \ell} \underset{\uparrow}{\sim} \mu \cdot \frac{U}{\ell}\sqrt{Re} \cdot \frac{\rho}{U \cdot \rho} \underset{\uparrow}{\sim} \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re}}$$

$\frac{\ell}{\delta} \sim \sqrt{Re}$ $\qquad \frac{\mu}{\rho U \ell} \sim \frac{1}{Re}$

$$\tau_p \sim \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re}}$$

Entonces la fuerza de fricción: $D_V \sim \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re}} \cdot A_M$

La relación entre resistencia de fricción y de forma:

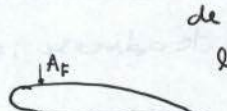
$$\frac{D_V}{D_F} \sim \frac{A_M}{A_F} \cdot \frac{\cancel{\rho U^2}/\sqrt{Re}}{\cancel{\rho U^2}} \sim \frac{A_M}{A_F} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re}} \rightarrow$$

• En cuerpos romos $A_F \sim A_M$ $\rightarrow \boxed{\frac{D_V}{D_F} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} << 1}$

En un cuerpo romo la resistencia de fricción es mucho menor que la resistencia de forma.

• Cuerpo aerodinámico: corriente adherida

↳ resistencia prácticamente debida a la viscosidad ($A_M >> A_F$), $A_M \sim c$



Comparando D_{perfil} con $D_{F,hilo}$ para ver como tendría que ser A_{F_L} para que $D_F \sim D_V$

$$\frac{\rho U^2 c}{\sqrt{Re_c}} \sim \cancel{\rho U^2} A_{F_L} \rightarrow \frac{A_{F_L}}{c} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_c}} >> 1$$ → no ocurre en perfil ; $\left\{ Re_c = \frac{\rho U c}{\mu} \right\}$

→ EFECTO DE LA SUCCIÓN Y SOPLADO EN EL DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LÍMITE

Manera eficaz de evitar (o al menos retrasar) el desprendimiento de la capa límite:

Succionar a través de la pared la capa límite más próxima a ella, en la que las velocidades son bajas y son más sensibles al gradiente de presión adverso.

↳ Si en la pared hay una velocidad normal v_s distinta de cero (por succión o soplado) la ecuación de cantidad de movimiento particularizada en la pared ($y=0$) es:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{dp_e}{dx} + \rho v_s \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Si $v_s > 0$: hace mismo efecto que gradiente adverso de presiones (SOPLADO)

Si $v_s < 0$: hace mismo efecto que gradiente favorable de presiones (SUCCIÓN)

↳ * Si se tiene un gradiente adverso de presiones y una VELOCIDAD DE SUCCIÓN adecuada puede conseguirse que la capa límite no se desprenda

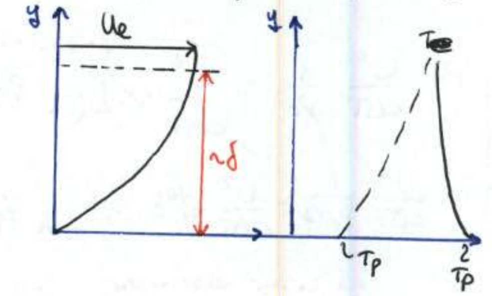
Capa límite térmica

Ecuación de la energía para flujo bidimensional e incompresible:

$$\underbrace{\rho c}_{\text{calor específico del líquido}} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \underbrace{k}_{\text{conductividad térmica}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \underbrace{\Phi_v}_{\text{disipación viscosa}}$$

↳ Hay que imponer la condición de que la temperatura de la pared y del fluido coinciden → no es posible si no cuentan los efectos de la conductividad térmica

↳ los efectos de conducción quedan relegados a una capa denominada CAPA LÍMITE TÉRMICA de espesor $\delta_T << l$ si $Pr \cdot Re >> 1$



→ ORDEN DE MAGNITUD DE LA CAPA LÍMITE TÉRMICA

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c v \frac{\partial T}{\partial y} = \underbrace{\cancel{k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}}_{\text{despreciable } (l >> \delta_T)} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \Phi_v$$

$$\sim \frac{\rho c U \Delta T}{l} \qquad \sim \frac{\rho c v_c \Delta T}{\delta_T} \qquad \sim k \frac{\Delta T}{l^2} << \sim \frac{k \Delta T}{\delta_T^2} \qquad \sim \mu \left(\frac{U}{\delta} \right)^2$$

Ec. continuidad: $\frac{U}{l} \sim \frac{v_c}{\delta} \to v_c \sim U \left(\frac{\delta}{l} \right)$

$$\sim \frac{\rho c U \Delta T}{l} \left(\frac{\delta}{\delta_T} \right) \qquad \sim \frac{k \Delta T}{\delta_T^2}$$

¡Ojo! Es δ, no δ_T: porque escala velocidades. Si se utiliza δ_T, se estima que los gradientes de velocidad son más pequeños de lo que en realidad son

→ Si $\delta \sim \delta_T$: términos convectivos del mismo orden

→ Si $\delta / \delta_T << 1$: orden de magnitud de los términos convectivos: orden primer miembro

en cualquier caso:

$$\frac{\rho c U \cancel{\Delta T} \cdot l}{l \cdot l} \sim \frac{k \cancel{\Delta T}}{\delta_T^2} \to \left(\frac{\delta_T}{l} \right)^2 \sim \frac{k}{\mu c} \cdot \frac{\mu}{\rho U l} \to$$

$$\to \left(\frac{\delta_T}{l} \right)^2 \sim \frac{1}{Pr} \cdot \frac{1}{Re} \Rightarrow \boxed{\frac{\delta_T}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr \cdot Re}}}$$

número de Peclet: $Pe = Pr \cdot Re$

$$\frac{\delta_T / \cancel{l}}{\delta / \cancel{l}} \sim \frac{1/\sqrt{Pr \cdot \cancel{Re}}}{1/\sqrt{\cancel{Re}}} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}} \to \frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}$$

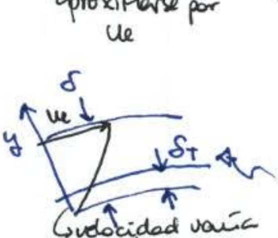
- Si $Pr \sim 1$ (gases): $\delta \sim \delta_T$
- Si $Pr >> 1$ (aceites): $\delta >> \delta_T$ → viscosidad cinemática ν mucho mayor que difusividad térmica α. Físicamente: $\nu >> \alpha$ → → La capacidad del fluido para transportar cantidad de movimiento es mucho mayor que para transportar calor → efectos viscosos penetran en el fluido una distancia mucho mayor que los térmicos (ambos por presencia de pared)
- Si $Pr << 1$ (líquidos metálicos): $\delta << \delta_T$ → velocidad puede aproximarse por Ue

↳ Flujo de calor en la pared:

$$q_p = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$q_p \sim \frac{k \Delta T}{\delta_T} \sim \frac{k \Delta T}{\delta_T \cdot l} \cdot l \sim \frac{k \Delta T}{l} \left(\frac{l}{\delta_T} \right)$$

$$\frac{q_p \cdot l}{k \Delta T} \sim \sqrt{Re \cdot Pr} \sim Nu \text{ (número de Nusselt)}$$



velocidad varía linealmente poco en la zona térmica

→ Si $\delta/\delta_T \gg 1$: orden de magnitud de los términos convectivos: orden del segundo miembro $\Big\{$ por lo tanto: $\ell^3 \cdot \rho c \dfrac{U\cancel{\Delta T}}{\ell}\dfrac{\delta_T}{\delta} \sim k\dfrac{\cancel{\Delta T}}{\delta_T^2}\cdot \ell^3$ →

$$\rightarrow \left(\frac{\delta_T}{\ell}\right)^3 \sim \underbrace{\frac{k}{\mu \cdot c}}_{1/Pr}\cdot\underbrace{\frac{\delta}{\ell}}_{1/\sqrt{Re}}\cdot\underbrace{\frac{\mu}{\rho U \ell}}_{1/Re} \sim \frac{1}{Pr\cdot Re^{3/2}} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_T}{\ell}\sim\frac{1}{Pr^{1/3}\cdot Re^{1/2}}}$$

$$\hookrightarrow \frac{\delta_T/\ell}{\delta/\ell}\sim\frac{1/(Pr^{1/3}\cdot \cancel{Re^{1/2}})}{\ell/\cancel{\sqrt{Re}}}\sim\frac{1}{Pr^{1/3}}$$

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow q_p \sim \frac{k\Delta T}{\delta_T} \sim \frac{k\Delta T}{\ell}\cdot\left(\frac{\ell}{\delta_T}\right) \Rightarrow Nu \sim Pr^{1/3}\cdot Re^{1/2}$$

- Disipación viscosa:

$$\Phi_v \sim \mu\left(\frac{U}{\delta}\right)^2 \rightarrow \text{se compara con el término de conducción}$$

$$\frac{\mu\left(\frac{U}{\delta}\right)^2}{k\,\frac{\Delta T}{\delta_T^2}} \sim \underbrace{\frac{c\mu}{k}}_{Pr}\cdot\frac{U^2}{c\Delta T}\cdot\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2 \sim \begin{cases} \cancel{Pr}\cdot\dfrac{U^2}{c\Delta T}\cdot\dfrac{1}{\cancel{Pr}} \sim \dfrac{U^2}{c\Delta T} \ll 1 \ (\text{si } Pr \ll 1 \text{ ó } Pr\sim 1) \\ Pr\cdot\dfrac{U^2}{c\Delta T}\cdot\dfrac{1}{Pr^{2/3}} \sim \dfrac{U^2}{c\Delta T}\cdot Pr^{1/3} \ll 1 \ (\text{si } Pr \gg 1) \end{cases}$$

→ en líquidos

al estar elevado a 1/3 aunque $Pr \gg 1$ no estan grande como $U^2/c\Delta T$ de pequeño (Pr tendría que ser del orden de 10^9 para que no fuera $\Phi \ll q$)

- En resumen:

→ $Pr \ll 1$ → $Pr \sim 1$: $\dfrac{\delta_T}{\ell} \sim Pr^{-1/2}\cdot Re^{-1/2}$

→ $Pr \gg 1$: $\dfrac{\delta_T}{\ell} \sim Pr^{-1/3}\cdot Re^{-1/2}$

$$Nu \sim \begin{cases} (Pr\cdot Re)^{1/2} & \text{si } Pr\sim 1 \text{ ó } Pr \ll 1 \\ Pr^{1/3}\cdot Re^{1/2} & \text{si } Pr \gg 1 \end{cases}$$

- ECUACIÓN DE LA ENERGÍA en líquidos queda entonces:

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y=0: T=T_p \rightarrow \text{si la pared aislada térmicamente se sustituye por } \partial T/\partial y = 0 \\ y\rightarrow\infty: T=T_e \\ x=0: T=T_i(y) \Rightarrow \text{ecuación parabólica} \end{cases}$$

↳ ADIMENSIONALIZACIÓN: Variable adimensional: $\Theta = \dfrac{T-T_e}{T_p-T_e}$

$$\rho c\left(u\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) = k\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} u\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} \\ y=0: \Theta=1 \\ y\rightarrow\infty: \Theta=0 \\ x=0: \Theta=\Theta_0(0,y) \end{gathered}}$$

Difusitividad térmica: $\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c} = \frac{\mu c}{k}$$

ECUACIÓN INTEGRAL DE KARMAN (PARA LÍQUIDOS)

- Ecuación de la continuidad: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

- Ecuación de la cantidad de mov: $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp_e}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

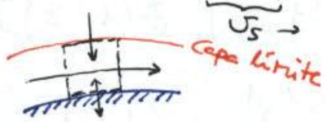
$$\hookrightarrow \frac{\partial(u\cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(u\cdot v)}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

→ Si se multiplica la ecuación de la continuidad por dy y se integra transversalmente →

$$\rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dy + \int_0^\infty \frac{\partial v}{\cancel{\partial y}}\, \cancel{dy} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,dy - v(\infty) - \underbrace{v(0)}_{v_s} = 0$$

v_s → velocidad de succión o soplado

$$\hookrightarrow v_\infty(x) = v_s - \frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,dy$$



↳ Haciendo lo mismo con la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\cdot u\cdot dy + \underbrace{(u\cdot v)_\infty}_{u_e\cdot v_\infty(x) = u_e\cdot v_s - u_e\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,dy} - \cancel{(u\cdot v)_0} = \int_0^\infty u_e\frac{du_e}{dx}\cdot dy + \cancel{\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\infty} - \underbrace{\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0}_{\tau_p/\rho}$$

0 $(u(0)=0)$

0 (valor fuera de la capa límite donde no hay esfuerzos viscosos)

↑ introduciendo el valor $v_\infty(x)$

$\rightarrow \tau_p = \mu\left(\dfrac{du}{dy}\right)_{y=0}$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\cdot u\cdot dy + u_e\cdot v_s - \underbrace{u_e\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\cdot dy} = \int_0^\infty u_e\frac{du_e}{dx}\cdot dy - \frac{\tau_p}{\rho} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty u\cdot u\cdot dy + u_e v_s - \frac{d}{dx}\int_0^\infty u_e\cdot u\,dy + \int_0^\infty u\frac{du_e}{dx}dy$$

$$u_e\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,dy \Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{u_e\int_0^\infty u\,dy\right\} = \underbrace{u_e\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,dy} + \frac{du_e}{dx}\cdot\int_0^\infty u\,dy$$

$$u_e\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,dy = -\frac{du_e}{dx}\int_0^\infty u\,dy + \frac{d}{dx}\left\{\int_0^\infty u_e\cdot u\,dy\right\}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\cdot(u-u_e)\,dy} = \underbrace{\int_0^\infty (u_e-u)\frac{du_e}{dx}\cdot dy} - \frac{\tau_p}{\rho} - v_s\cdot u_e$$

$$u_e^2\cdot\int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(\frac{u}{u_e}-1\right)dy = -u_e^2\delta_2 \qquad u_e\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy = u_e\cdot\delta_1$$

$$+\frac{d}{dx}(u_e^2\delta_2) + \delta_1 u_e\frac{du_e}{dx} = +\frac{\tau_p}{\rho} + v_s u_e$$

$$u_e^2\frac{d\delta_2}{dx} + 2u_e\delta_2\frac{du_e}{dx} + \delta_1 u_e\frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho} + v_s u_e$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx} + \frac{\delta_1}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{u_e^2\rho} + \frac{v_s}{u_e} \rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} + \Big(2 + \underbrace{\frac{\delta_1}{\delta_2}}_{H_{12}}\Big)\frac{\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{2}C_f + \frac{v_s}{u_e}$$

$C_f = 2\tau_p/(\rho u_e^2)$

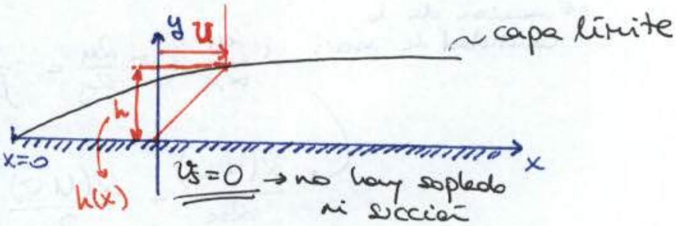
H_{12}: factor de forma

→ Se va a suponer/admitir un perfil de velocidades que cumple las condiciones de contorno → Polinomio de grado n

∘ SOLUCIÓN CON PERFIL LINEAL

→ Perfil más sencillo que cumple las condiciones de contorno: perfil lineal

$$\begin{cases} \dfrac{u}{U} = \dfrac{y}{h} : y \le h \\ \dfrac{u}{U} = 1 : y > h \rightarrow u_e = U \rightarrow \underline{\underline{\dfrac{du_e}{dx} = 0}} \end{cases}$$



Entonces: $\dfrac{d\delta_2}{dx} = \dfrac{1}{2} C_f$ → obtengo δ_2 y C_f:

$$\delta_2 = \int_0^{h \rightarrow \text{de } h \text{ a } \infty \text{ da cero}} \frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy = \int_0^h \frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = h\int_0^1 (y/h)(1-y/h)\,d(y/h) = h\int_0^1 \xi(1-\xi)\,d\xi =$$

$$= h\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_0^1 = h\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{h}{6} = \delta_2}$$

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2}; \quad \tau_p = \mu\Big(\underbrace{\partial u/\partial y}_{U/h}\Big)_{y=0} = \mu\cdot\left(\frac{U}{h}\right) \Rightarrow C_f = \frac{2\mu U/h}{\rho U^2} = \frac{2\mu}{h\rho U} = \boxed{\frac{2\nu}{hU} = C_f}$$

La ecuación diferencial queda: $\dfrac{1}{6}\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{\nu}{hU}$ →

$$\rightarrow h\,dh = \frac{6\nu}{U}dx \rightarrow \frac{h^2}{2} = \frac{6\nu}{U}x + \cancel{C} \nearrow 0 \;(\text{en } x=0: h=0)$$

$$\hookrightarrow h(x) = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \rightarrow \frac{h(x)}{x} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\frac{\delta_2/\cancel{h}}{x/\cancel{h}} = \frac{1/6}{(1/2\sqrt{3})\sqrt{Re_x}} = \frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{Re_x}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{Re_x}} = \frac{\delta_2}{x}}$$

$$C_f = \frac{2\nu}{\left(\frac{h}{x}\right)U\cdot x} = \frac{\cancel{2}}{Re_x\,2\sqrt{3}/\sqrt{Re_x}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \boxed{C_f = \frac{\delta_2}{x}}$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \underset{\uparrow}{=} h\int_0^1 (1-\xi)\,d\xi = h\left[\xi - \frac{\xi^2}{2}\right]_0^1 = \frac{h}{2} \rightarrow \frac{\delta_1}{x} = \frac{1}{2}\frac{h}{x} \rightarrow$$

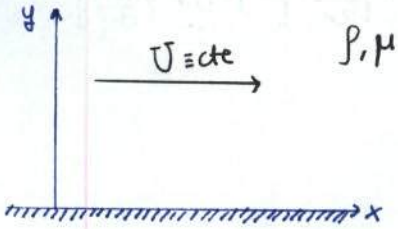
$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} = \xi$

$$\rightarrow \frac{\delta_1}{x} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{Re_x}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Re_x}} = \frac{\delta_1}{x}}$$

↳ Comparación con SOLUCIÓN EXACTA
- δ_2: en lugar de $\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58$ aparece 0,66 ⇒ Error del 12%
- δ_1: en lugar de $\sqrt{3} \cong 1{,}71$ aparece 1,72 ⇒ Error del 0,6%

Capa límite sobre una placa plana. Solución de BLASIUS.

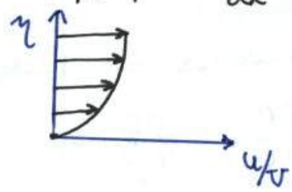
Ejemplo más sencillo de capa límite laminar: capa que se forma sobre una placa plana semiinfinita de espesor nulo alineada con una corriente uniforme de valor U.



$\rho, \mu = ctes$ → Solución: flujo exterior no resulta afectado por la presencia de la placa:

$$u_e = U,\ v_e = 0,\ p_e = p_\infty \rightarrow \frac{du_e}{dx} = 0,\ \frac{dp_e}{dx} = 0$$

Para la solución de la capa límite se va a buscar una solución de semejanza:



→ Ecuaciones del problema general para la capa límite:

- Continuidad: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$
- cantidad de movimiento según x: $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

- Condiciones de contorno:
  - $y=0$: $v=0$, $u=0$
  - $y\to\infty$: $u=U$
  - $x=0$: $u = u_0(y)$ → Se busca una que cumpla o pueda cumplir la solución de semejanza: $x=0$: $u=U$ (por ejemplo)

Se realiza el cambio de variable con la función de corriente: $\begin{cases} u = \partial\psi/\partial y \\ v = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$

y utilizando "$\psi/\sqrt{\nu}$" e "$y/\sqrt{\nu}$" en lugar de "ψ" e "y", respectivamente.

- Ecuación de cantidad de movimiento según x:

$$\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}\cdot\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x\,\partial(y/\sqrt{\nu})} - \frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})^2} = \frac{\partial^3(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})^3}$$

- Condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y/\sqrt{\nu} = 0:\ \dfrac{v}{\sqrt{\nu}} = \dfrac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x} = 0,\ u = \dfrac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})} = 0\ ;\ y/\sqrt{\nu}\to\infty:\ u = \dfrac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})} = U\ ; \\ x = 0:\ u = \dfrac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})} = U \end{cases}$$

→ La solución es de la forma: $\psi/\sqrt{\nu} = f\left(x, \dfrac{y}{\sqrt{\nu}}, U\right)$

ANÁLISIS DIMENSIONAL:

	M	L	T
$y/\sqrt{\nu}$	0	0	1/2
x	0	1	0
U	0	1	-1

3 variables − 2 variables dimensionalmente independientes

↳ es un parámetro: hay que elegir parámetros antes que variables independientes

↳ no me queda más remedio que escoger una variable independiente, escojo esta porque quiero ver una coordenada vertical adimensional

- Función de corriente:

$$[\psi] = [L^2/T]$$
$$[\sqrt{\nu}] = [L/T^{1/2}] \rightarrow [\sqrt{xU}] = [L\cdot T^{-1/2}]$$
$$[\sqrt{\nu x U}] = [L^2/T]$$

$$\psi' = \frac{\psi}{\sqrt{2\nu U x}}$$ → se introduce por conveniencia

- Coordenada y:

$$\left.\begin{aligned}[y/\sqrt{\nu}] &= T^{1/2} \\ [\sqrt{x/U}] &= T^{1/2}\end{aligned}\right\}\quad \eta = \frac{y}{\sqrt{2\dfrac{\nu x}{U}}}$$

El análisis dimensional resulta entonces:

$$\frac{\psi}{\sqrt{2\nu U x}} = f(\eta)$$

Y por tanto:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{2\nu Ux}\,f(\eta)\right]=\sqrt{2\nu Ux}\;\frac{df}{d\eta}\cdot\underbrace{\frac{d\eta}{dy}}_{\frac{1}{\sqrt{2\nu x/U}}}=U\cdot\frac{df}{d\eta}$$

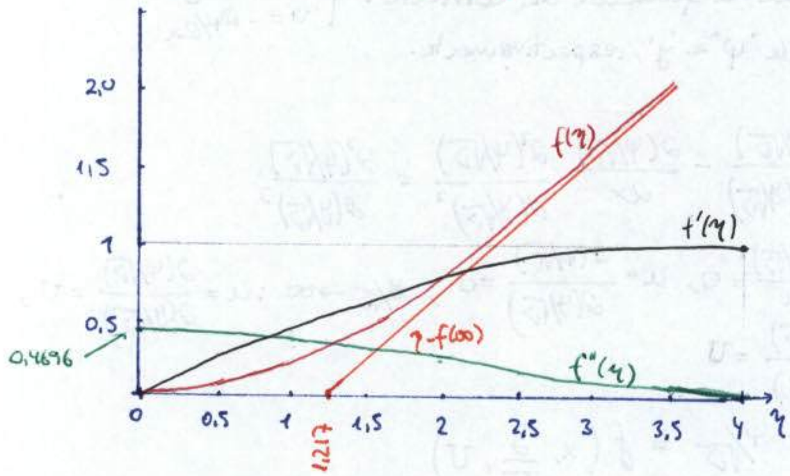
$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{2\nu Ux}\,f(\eta)\right]=-\sqrt{2U\nu}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,f(\eta)-\sqrt{2\nu Ux}\cdot\frac{df}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dx}=\sqrt{\frac{\nu U}{2x}}\left[-f(\eta)+\eta\frac{df}{d\eta}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=U\frac{d^2f}{d\eta^2}\cdot\frac{\eta}{2x}\;;\quad\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{d^2f}{d\eta^2}\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}\;;\quad\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=U\cdot\frac{U}{2\nu x}\,\frac{d^3f}{d\eta^3}$$

↳ Aplicando los resultados a la ecuación diferencial:

- $\dfrac{d^3f}{d\eta^3}+f\dfrac{d^2f}{d\eta^2}=0$
- Condiciones de contorno: $\begin{cases}\eta=0: & f'(0)=0\;;\;f(0)=0\\ \eta\to\infty: & f'(\infty)=1\\ \eta\to\infty: & f'(\infty)=1\end{cases}$ son iguales, la convectiva ha colapsado

→ De este sistema se obtiene f numéricamente: este problema es universal dado que ni en la ecuación ni en las condiciones de contorno aparece parámetro alguno (Blasius, 1908)



- Valores importantes: $f''(0)=0{,}4696$

$$\lim_{\eta\to\infty}\left[\eta-f(\eta)\right]=1{,}217$$

- El efecto es que:

Conocida esta solución, se puede determinar el espesor de desplazamiento (δ_1):

$$\delta_1=\int_0^{y\to\infty}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\int_0^{\eta\to\infty}\sqrt{\frac{2\nu x}{U}}\left(1-\frac{df}{d\eta}\right)d\eta=\sqrt{\frac{2\nu x}{U}}\left[\eta-f\right]_{\eta\to\infty}=\frac{1{,}721\cdot x}{\sqrt{Re_x}}\;;\;Re_x=Ux/\nu$$

$$\boxed{\frac{\delta_1}{x}=\frac{1{,}721}{\sqrt{Re_x}}}$$

y también el espesor de cantidad de movimiento (δ_2):

$$\delta_2=\int_0^{y\to\infty}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\int_0^{\eta\to\infty}\sqrt{\frac{2\nu x}{U}}\cdot\frac{df}{d\eta}\left(1-\frac{df}{d\eta}\right)d\eta=\frac{0{,}664\,x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\boxed{\frac{\delta_2}{x}=\frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}}$$

Se puede comprobar que el aumento de δ_2 con x se debe al coeficiente de fricción con la pared (El esfuerzo de fricción que el fluido ejerce sobre la placa es el único responsable de la fuerza sobre el cuerpo).

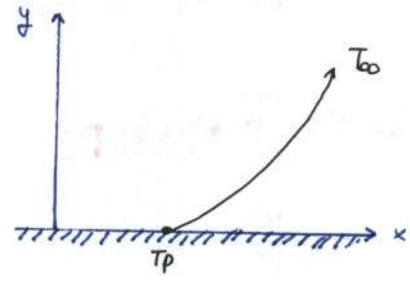
$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu U\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = \frac{0{,}4696}{\sqrt{2}}\cdot\mu U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{0{,}332\rho U^2}{\sqrt{Re_x}} = \tau_p$$

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{\delta_2}{x}$$ El esfuerzo de fricción va disminuyendo según aumenta x ($\tau_p \sim 1/\sqrt{x}$) debido a que aumenta el espesor de la capa límite.

PROBLEMA TÉRMICO

Una vez resuelto el perfil de velocidades, es posible tratar el problema térmico:

$$\left.\begin{aligned} &\rho c u\frac{\partial T}{\partial x} + \rho c v\frac{\partial T}{\partial y} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\\ &y=0: T=T_p\\ &y\to\infty: T=T_\infty\\ &x=0: T=T_0(y) \end{aligned}\right\}$$



Al igual que ocurría antes se necesita una ecuación en x=0 que permita una solución de semejanza → $x=0: T=T_\infty$

Ya que esta ecuación sí que es lineal en la temperatura, se puede realizar el siguiente cambio de variable: $\theta = \frac{T-T_\infty}{T_p-T_\infty}$ → $\rho c u\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho c v\frac{\partial\theta}{\partial y} = k\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$ con $Pr = \frac{\mu c}{k}$

$$\begin{cases} y=0: \theta=1\\ y\to\infty: \theta=0\\ x=0: \theta=0 \end{cases}$$

↳ Debería ser posible obtenerse $\theta = \theta(\eta, Pr)$

→ Por ANÁLISIS DIMENSIONAL se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\cdot f(\eta)\dfrac{d\theta}{d\eta} = 0\\ \eta=0: \theta=1\\ \eta\to\infty: \theta=0\\ \eta\to\infty: \theta=0 \end{cases}$$ son la misma

con $\eta = y\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}$

Esta ecuación se puede integrar una vez para dar: $\frac{d\theta}{d\eta} = C\exp\left[-Pr\int_0^\eta f(\eta)d\eta\right]$

Integrando otra vez: $\theta = 1 + C\int_0^\eta\left\{\exp\left[-Pr\int_0^\eta f(\eta)d\eta\right]\right\}d\eta$ (ya se ha impuesto C.C. $\theta(0)=1$)

Con $\theta(\infty)=0$ → $C = -1/\left(\int_0^\infty\{\exp[-Pr\int_0^\eta f(\eta)d\eta]\}d\eta\right)$

Entonces: $\theta = \frac{\int_\eta^\infty\{\exp(-Pr\int_0^\eta f d\eta)\}d\eta}{\int_0^\infty\{\exp(-Pr\int_0^\eta f d\eta)\}d\eta}$ → gradiente adimensional de temperaturas: $\frac{d\theta}{d\eta} = -\frac{\exp[-Pr\int_0^\eta f(\eta)d\eta]}{\int_0^\infty\{\exp[-Pr\int_0^\eta f(\eta)d\eta]\}d\eta}$

Particularizado en la pared:

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_0 = -\left\{\left[\int_0^\infty\exp\left(-Pr\int_0^\eta f d\eta\right)\right]d\eta\right\}^{-1}$$

Con esto se puede determinar el flujo de calor en la placa:

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k(T_p - T_\infty)\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}\;\underbrace{\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}}_{\text{Función de Pr únicamente (*)}}$$

→ A mayor x, menor flujo de calor ($q_p \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$)

En forma adimensional esto es el número de Nusselt:

$$Nu = \frac{q_p \cdot x}{k(T_p - T_\infty)} = -\sqrt{\frac{Re_x}{2}}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}$$

(*) En el rango de valores de $0{,}1 \le Pr \le 10000$ el número de Nusselt puede aproximarse por la relación: $Nu = 0{,}332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$

ANALOGÍA DE REYNOLDS

Cuando $Pr \equiv 1 = \frac{\mu c}{k}$

→ Considerando $\Theta = 1 - u/U$, la ecuación de cantidad de movimiento en x con sus condiciones de contorno quedan:

$$u\frac{\partial \Theta}{\partial x} + v\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}; \qquad y=0:\ \Theta = 1;\quad y\to\infty:\ \Theta = 0;\quad x=0:\ \Theta = 0$$

→ Y por otro lado, considerando $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$, la ecuación de la energía con sus condiciones de contorno quedan:

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \underbrace{\frac{k}{\rho c}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}; \qquad y=0:\ \theta = 1;\quad y\to\infty:\ \theta = 0;\quad x=0:\ \theta = 0$$

$$Pr = \frac{\mu c}{k} = \frac{\mu/\rho \cdot \rho c}{k} = \nu \cdot \frac{\rho c}{k} = 1 \rightarrow \nu = \frac{k}{\rho c}$$

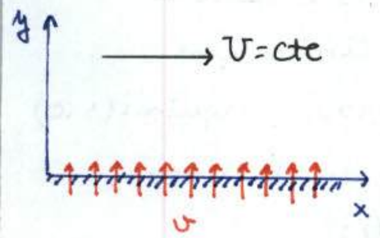
Ambas son la misma ecuación y, por tanto, tienen la misma solución.

Para este caso, entonces: $\tau_p \propto q_p$ porque $\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right|_{y=0}$

Por lo tanto: $\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U^2} = \frac{q_p}{\rho c U (T_p - T_\infty)} \equiv St$: número de Stanton

Con Pr cercano a 1, conocer el C_f permite conocer la transferencia de calor (si el flujo no está desprendido).

Solución de Blasius con succión/soplado



Capa límite de una placa plana con succión o soplado:

- Ecuaciones:
  - Continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \psi$
  - Cant. mov. según eje x: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- Condiciones de contorno:
  - $y=0$: $u=0$; $v = v_m^* \cdot U \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}}_{\text{así no añado parámetros}}$ (ADIM)
  - $y \to \infty$: $u = U$ *
  - $x=0$: $u=U$

necesarias estas condiciones para que exista solución de semejanza

v_m^*: parámetro adimensional de succión/soplado cte

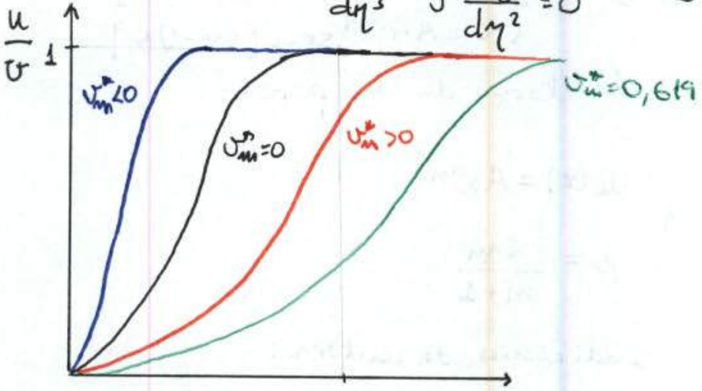
* no puedo imponer $v(x,\infty)=0$ porque es como decir que la capa límite no crece

$$\hookrightarrow \begin{cases} \psi' = \psi/\sqrt{\nu} \\ y' = y/\sqrt{\nu} \end{cases} \rightarrow \psi' = f(x, y; U) \Rightarrow$$

ANÁLISIS DIMENSIONAL: $\psi = \sqrt{2\nu U x} \cdot f(\eta)$; $\eta = y\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}$

$$u = U \cdot \frac{df}{d\eta} \; ; \; v = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}}\left[\eta \frac{df}{d\eta} - f\right]$$

$$[\dots] \Rightarrow \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$



Condiciones de contorno:

- $\eta = 0$: $f'(0) = 0$; $f(0) = -\sqrt{2}\, v_m^*$
- $\eta \to \infty$: $f'(\infty) = 1$

* En el caso de succión/soplado hay un parámetro libre (v_m^*).
  - Para valores $v_m^* = 0$: solución de Blasius sin succión/soplado
  - Para valores $v_m^* < 0$: succión → gradiente favorable de presiones
    - ↳ Capa límite: más delgada, más robusta frente al fenómeno de separación, pero aumenta τ_p (esfuerzo de fricción sobre la pared por ser mayor el gradiente de velocidad.

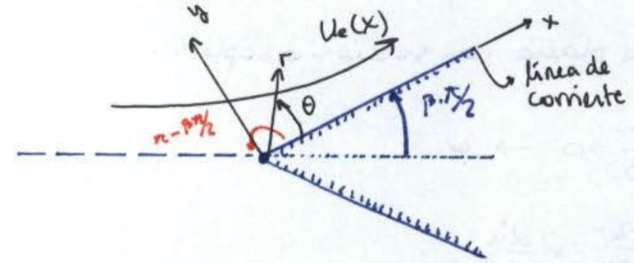
- Para valores $v_m^* > 0$: soplado → gradiente adverso de presión.
  - ↳ Capa límite: más gruesa y aparece un punto de inflexión en el perfil de velocidades longitudinales u → capa límite menos robusta frente a la transición a la turbulencia. Al reducirse los gradientes de velocidades, los esfuerzos de fricción en la pared disminuyen

  * Uso: refrigerar elemento

- $v_m^* = 0{,}619$: soplado suficientemente fuerte e intenso como para anular el valor de τ_p → separación de capa límite.

$$\tau_p(v_m^* = 0{,}619) = 0$$

SOLUCIONES DE FALKNER-SKAN



Soluciones de semejanza de las ecuaciones de la capa límite → capas límites que se forman sobre rincones ($\beta > 0$) y esquinas ($\beta < 0$).

→ Flujo potencial alrededor de un rincón (o esquina) de ángulo $\beta \pi/2$:

$$W(Z) = \frac{A}{n} \cdot Z^n \quad \text{(Potencial complejo)}$$

$$Z = x + iY = re^{i\theta}$$

$$W(Z) = \varphi + i\psi \quad \begin{cases} \varphi = \frac{A}{n} r^n \cos(n\theta) \\ \psi = \frac{A}{n} r^n \operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

→ Condiciones:

- $y \equiv 0$ → línea de corriente ($\psi = cte$)

  $\theta = 0 \rightarrow \psi = 0$ ↳ no puede haber velocidad perpendicular en una línea de corriente

- EJE DE SIMETRÍA → línea de corriente ($\psi = cte$)

  $n \cdot \theta = \pi$ (para que $\operatorname{sen}(n\theta)$ valga cero)

$$\theta_{\substack{eje\\sim}} = \pi - \beta\pi/2 \longrightarrow \cancel{\pi} = n\left[\cancel{\pi} - \beta \frac{\cancel{\pi}}{2}\right] \rightarrow 1 = n\left(1 - \beta/2\right) \rightarrow \beta = 2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Para obtener las velocidades: $\frac{dW}{dZ} = u - iv = A \cdot Z^{n-1}$ $\begin{cases} u = A \cdot r^{n-1} \cdot \cos\left[(n-1)\theta\right] \\ v = A \cdot r^{n-1} \operatorname{sen}\left[(n-1)\theta\right] \end{cases}$

Distribución de velocidades de deslizamiento a lo largo de la pared:

$$\left.\begin{matrix} \theta \equiv 0 \\ r \equiv x \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \left(\frac{dW}{dZ}\right)_{y=0} = U_e(x) = A \cdot r^{n-1} \underset{n-1=m}{\overset{r \equiv x}{=}} A \cdot x^m \qquad \begin{cases} U_e(x) = A x^m \\ \beta = \dfrac{2m}{m+1} \end{cases}$$

- Ecuaciones:

  - Continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \psi$

  - Cant. mov. según x: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

- Condiciones de contorno:

  $y = 0: u = 0; v = 0$

  $y \to \infty: u = U_e(x)$

  $\cancel{(x = 0: \quad \ldots)}$ → condición de arranque asociada al término convectivo

$$\begin{cases} \psi' = \psi/\sqrt{\nu} \\ y' = y/\sqrt{\nu} \end{cases}$$

→ • Ecuación de cant. mov. según x: $\psi'_{y'} \cdot \psi'_{xy'} - \psi'_x \psi'_{y'y'} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \psi'_{y'y'y'}$

• Condiciones de contorno:

$y' = 0: \psi'_{y'} = 0; \psi'_x = 0$

$y \to \infty: \psi'_{y'} = U_e(x)$

$\cancel{(x = 0: \ldots)}$

ANÁLISIS DIMENSIONAL

$$\psi' = \frac{\psi}{\sqrt{\nu}} = F(x, y/\sqrt{\nu}, \overbrace{A, m}^{U_e}) \rightarrow$$

$[m] = [\text{adimensional}]$

$[A] = [L^{1-m} \cdot t^{-1}]$

	L	t
x	1	0
$y/\sqrt{\nu}$	0	1/2
A	1-m	-1
m	0	0

$$\Rightarrow \frac{\psi}{\sqrt{(2-\beta) x \nu \frac{U_e}{A \cdot x^m}}}$$

$$\psi = \sqrt{(2-\beta)\nu x U_e} \cdot f(\eta) = \sqrt{\frac{2\nu A x^{m+1}}{m+1}} \cdot f(\eta) \; ; \; \eta = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{U_e x}{\nu}\left(\frac{1}{2-\beta}\right)} = y\sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{A x^{m-1}}{\nu}}$$

$$u = U_e(x) \cdot \frac{df}{d\eta} \; ; \; v = \sqrt{\frac{\nu U_e(x)}{(2-\beta) x}}\left[(1-\beta)\eta \frac{df}{d\eta} - f\right]$$

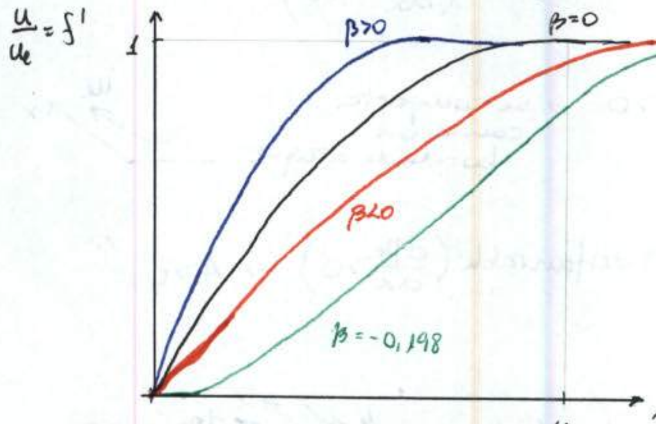
Tras realizar el cambio de variable: [...]

$$\frac{d^3f}{d\eta} + f\,\frac{d^2f}{d\eta^2} + \beta\left[1-\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\right] = 0$$

- Condiciones de contorno:
  - $\eta = 0 : f'(0) = 0$
  - $\eta = 0 : f(0) = 0$
  - $\eta \to \infty : f'(\infty) = 1$

Problema muy similar al obtenido por Blasius para el caso de una capa límite sobre una placa plana (se reduce a este problema con $\beta = 0$)

↳ Ha de obtenerse numéricamente (no hay solución analítica), habrá que calcular toda una familia de soluciones en función del parámetro β.



- $\beta > 0$: gradientes de presión favorables, hacen que la capa límite se vuelva más delgada y dan lugar a perfiles de velocidades carentes de puntos de inflexión
- $\beta < 0$: gradientes de presión adversos, hacen que la capa límite se vuelve más gruesa y hacen que el perfil de velocidades longitudinales u presente un punto de inflexión → capa límite más susceptible a volverse inestable.
- $\beta = 0$: solución de Blasius.
- $\beta = -0,198$: esfuerzo de fricción nulo en cualquier punto de la pared.
  ↳ la solución deja de valer

- Esfuerzo de la pared (τ_p):

$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \rho u_e^2(x)\cdot\sqrt{\frac{m+1}{2\,Re_x}}\cdot\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \quad ; \; Re_x = \frac{x\,u_e(x)}{\nu}$$

- Coeficiente de fricción (C_f):

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_e^2(x)} = \sqrt{\frac{2(m+1)}{Re_x}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = \frac{2\left(d^2f/d\eta^2\right)_{\eta=0}}{\sqrt{(2-\beta)\,Re_x}}$$

- Espesor de desplazamiento (δ_1):

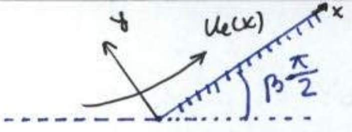
$$\delta_1 = \int_0^\infty\left(1-\frac{u}{u_e(x)}\right)dy = A\cdot\int_0^\infty\left(1-\frac{df}{d\eta}\right)d\eta = \underbrace{x\sqrt{\frac{2-\beta}{Re_x}}}_{A}\cdot\underbrace{\left\{\lim_{\eta\to\infty}\left[\eta - f(\eta)\right]\right\}}_{\sim 1}$$

$$\frac{\delta_1}{x} = \sqrt{\frac{2-\beta}{Re_x}}\left\{\lim_{\eta\to\infty}\left[\eta - f(\eta)\right]\right\}$$

- Espesor de cantidad de movimiento (δ_2):

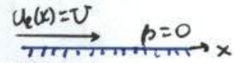
$$\delta_2 = \int_0^\infty\frac{u}{u_e(x)}\left(1-\frac{u}{u_e(x)}\right) = A\int_0^\infty\frac{df}{d\eta}\left(1-\frac{df}{d\eta}\right)d\eta = x\sqrt{\frac{2-\beta}{Re_x}}\underbrace{\left\{\frac{\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} - \beta\lim_{\eta\to\infty}\left[\eta - f(\eta)\right]}{1+\beta}\right\}}_{\sim 1}$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \sqrt{\frac{2-\beta}{Re_x}}\left\{\frac{\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} - \beta\cdot\lim\left[\eta - f(\eta)\right]}{1+\beta}\right\}$$

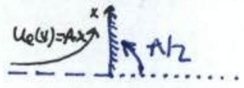


$$u_e(x) = A\cdot x^m$$
$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

- $m=0$ ($\beta=0$): $u_e(x) = U = cte$ → corriente exterior a una placa plana



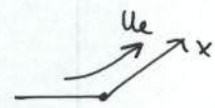
- $m=1$ ($\beta=1$): $u_e(x) = A\cdot x$ → corriente entorno a un punto de remanso



Gradiente de presiones dado por: $\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} = -u_e\frac{du_e}{dx} = -m\frac{u_e^2}{x} = -mA^2x^{2m-1}$

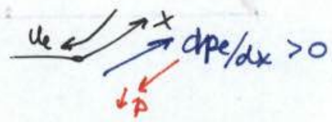
- $0 \le m \le +\infty$ ($0 \le \beta \le 2$): gradiente de presiones favorable $\left(\frac{dp_e}{dx} < 0\right)$

↳ $\frac{\psi}{\sqrt{\frac{2\nu A x^{m+1}}{m+1}}} \in \mathbb{R} \to \frac{2\nu A x^{m+1}}{m+1} > 0 \to A > 0$ → se comporta como un borde de ataque



- $-1 \le m \le 0$ ($-\infty \le \beta \le 0$): gradiente de presiones desfavorable $\left(\frac{dp_e}{dx} > 0\right)$ → $A > 0$
{$\beta > -0{,}1988$}

- $m < -1 \Rightarrow A < 0$ → se comporta como un borde de salida



* Como $dp_e/dx > 0$ sería gradiente de presiones desfavorable pero como el flujo va en sentido contrario ($A<0$), el gradiente de presiones entonces es favorable.

Métodos integrales en la capa límite

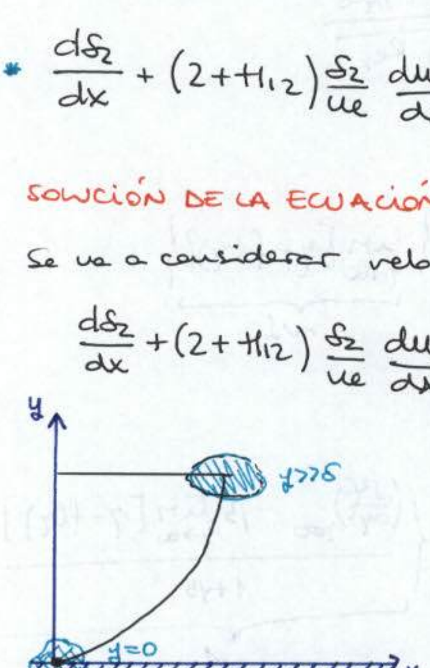
Rescatando la ECUACIÓN INTEGRAL DE KARMAN de la página 27:

* $$\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H_{12})\frac{\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{2}C_f + \frac{v_s}{u_e}\quad ,\quad H_{12} = \delta_1/\delta_2$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE KARMAN:

Se va a considerar velocidad de soplado (o succión) nula: $v_s = 0$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H_{12})\frac{\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{2}C_f$$



Para determinar los espesores y el coeficiente de fricción → necesario suponer perfiles de velocidades que no son arbitrarios (deben cumplir una serie de condiciones obtenidas de las de contorno y de las ecuaciones diferenciales particularizadas en la pared y en el borde exterior de la capa límite.

* La expresión completa es: $\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H_{12}-M_e^2)\frac{\delta_2}{u_e}\cdot\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{2}C_f + \frac{T_e v_s}{T_p u_e}$

$y=0: u(x,0)=0$

Ecuación de cantidad de movimiento según x: $\left(\rho \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\rho v\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{y=0} = \left(\rho u_e \frac{du_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}$

$v(0)=0$ (no hay succión/soplado)

$u(0)=0$

$$\hookrightarrow \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -u_e\frac{du_e}{dx}$$

Derivando sucesivamente con respecto a y la ecuación de cantidad de movimiento y particularizándola en $y=0$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho u_e\frac{du_e}{dx} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$\left(\rho\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \rho u\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \rho v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \mu\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$

$$\hookrightarrow \left(\rho\frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{0\,(\text{ec. cont.})} + \rho \underbrace{\cancel{u\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}}}_{u(0)=0} + \rho \underbrace{\cancel{v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{v(0)=0}\right)_{y=0} = \mu\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \quad [\ldots]$$

En el borde de la capa límite: $y=h(x) >> \delta$

$$u(x,h)=u_e\ ;\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=h} = \ldots = \left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_{y=h} = 0$$

El perfil de velocidades se elige de la forma: $u(x,y) = \begin{cases} u_e(x)\cdot f(\eta) & \text{para } y\le h(x) \\ u_e(x) & \text{para } y>h(x)\end{cases}$

donde $\eta = y/h(x)$

Método de Pohlhausen

Se elige una cuártica para $\boxed{f(\eta)=u/u_e}$: $f(\eta)=a\eta+b\eta^2+c\eta^3+d\eta^4+\cancel{e}^{\,0}$ ($\eta=0: f=0$)

$f'(\eta) = a+2b\eta+3c\eta^2+4d\eta^3 \quad (\eta=y/h)$

$f''(\eta) = 2b+6c\eta+12d\eta^2$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\cancel{u_e}\frac{du_e}{dx} = \nu\frac{\cancel{u_e}}{h^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} \rightarrow f''(0) = -\frac{h^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = -\Lambda$$

$f(1)=1\ ;\ f'(1)=0\ ;\ f''(1)=0$

$f''(0)=-\Lambda \rightarrow 2b=-\Lambda \Rightarrow \boxed{b=-\Lambda/2}$

$f(1)=1 \rightarrow a+b+c+d=1 \rightarrow a+(-\Lambda/2)+c+d=1$

$f'(1)=0 \rightarrow a+2b+3c+4d=0 \rightarrow a\mp\Lambda+3c+4d=0$

$f''(1)=0 \rightarrow 2b+6c+12d=0 \qquad -\Lambda+6c+12d=0 \rightarrow c=-(2d\mp\frac{\Lambda}{6})$

$\hookrightarrow \ominus\left(\frac{-\Lambda}{2}\right)+2c+3d=-1\mp\left(\frac{3\Lambda}{6}\right)-4d\mp\frac{2\Lambda}{6}+3d = -1$

$\boxed{d=\frac{-\Lambda}{6}+1}$

$c=-\left(\frac{-2\Lambda}{6}\mp\frac{\Lambda}{6}+2\right)$

$\boxed{c=+\frac{1}{2}\Lambda-2}$

$a=1-c-d+\Lambda/2$

$a=\cancel{1}-\frac{1}{2}\Lambda+2+\frac{\Lambda}{6}-\cancel{1}+\frac{\Lambda}{2}$

$\boxed{a=2-\Lambda/6}$

$$f(\eta)=\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\eta-\frac{\Lambda}{2}\eta^2+\left(\frac{\Lambda}{2}-2\right)\eta^3+\left(-\frac{\Lambda}{6}+1\right)\eta^4$$

$$f(\eta)=2\eta-2\eta^3+\eta^4+\frac{\Lambda}{6}\eta\underbrace{\left[1-3\eta+3\eta^2-\eta^3\right]}_{\xi}$$

$$\xi=-\eta^3+3\eta^2-3\eta+1 \;\rightarrow\; \text{Ruffini:}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & & -1 & +2 & -1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & \boxed{0} \\ 1 & & -1 & 1 & \\ \hline & -1 & 1 & \boxed{0} & \\ 1 & & -1 & & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$$\xi=(\eta-1)^3\cdot(-1)=(1-\eta)^3$$

$$\begin{cases} f(\eta)=f_1(\eta)+\Lambda f_2(\eta) \\ f_1(\eta)=2\eta-2\eta^3+\eta^4 \\ f_2(\eta)=\dfrac{\eta}{6}(1-\eta)^3 \end{cases}$$

Con esta distribución se pueden determinar los espesores de desplazamiento y cantidad de movimiento:

$$\frac{\delta_1}{h}=\int_0^1(1-f_1-\Lambda f_2)\,d\eta=\int_0^1(1-2\eta+2\eta^3-\eta^4)\,d\eta-\frac{\Lambda}{6}\int_0^1\eta(1-\eta)^3\,d\eta=$$

$$=\left[\eta-\eta^2+\frac{\eta^4}{2}-\frac{\eta^5}{5}\right]_0^1-\frac{\Lambda}{6}\left[-\frac{\eta^5}{5}+\frac{3\eta^4}{4}-\cancel{\frac{3}{3}}\eta^3+\frac{\eta^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{\Lambda}{6}\left[-\frac{1}{5}+\frac{3}{4}-1+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{3}{10}-\frac{\Lambda}{6}\left(-\frac{4}{20}+\frac{15}{20}-\frac{20}{20}+\frac{10}{20}\right)$$

$$\boxed{\frac{\delta_1}{h}=\frac{3}{10}-\frac{\Lambda}{120}}$$

$$\frac{\delta_2}{h}=\int_0^1(f_1+\Lambda f_2)(1-f_1-\Lambda f_2)\,d\eta=[\dots]\Rightarrow\boxed{\frac{\delta_2}{h}=\frac{1}{63}\left(\frac{37}{5}-\frac{\Lambda}{15}-\frac{\Lambda^2}{144}\right)}$$

El factor de forma está dado por:

$$H_{12}=\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{\frac{63}{10}\left(3-\frac{\Lambda}{12}\right)}{\frac{37}{5}-\frac{\Lambda}{15}-\frac{\Lambda^2}{144}}$$

Y el coeficiente de fricción en la capa límite es:

$$\frac{1}{2}C_f=\frac{\tau_p}{\rho U_e^2}=\frac{\nu}{U_e h}\left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{2\nu}{U_e h}\left(1+\frac{\Lambda}{12}\right)\rightarrow\boxed{C_f=\frac{4\nu}{U_e h}\left(1+\frac{\Lambda}{12}\right)}$$

El esfuerzo en la pared es nulo cuando $\Lambda=-12\rightarrow$ desprendimiento

Se tiene δ_1, δ_2, H_{12} y C_f como funciones de U_e y de $h(x)$. Sustituyendo estos valores se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para determinar $h(x)$.

- CASO I: No hay gradiente de presiones ($u_e = U$)

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta) = f_1(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad (\Lambda = 0)$$

$$\delta_1 = \frac{3}{10} h \ ; \ \delta_2 = \frac{37}{315} h \ ; \ C_f = \frac{4\nu}{Uh}$$

- <u>Ecuación de Karman</u>: $\frac{37}{315}\frac{dh}{dx} = \frac{2\nu}{Uh} \rightarrow h\,dh = \frac{315\cdot 2}{37}\frac{\nu}{U}dx$

$$\frac{1}{2}h^2 = \frac{315\cdot 2}{37}\cdot\frac{\nu}{U}x + \cancel{C}^{\,0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{h}{x}\right)^2 = \frac{315\cdot 4}{37}\cdot\frac{\nu}{Ux} \rightarrow \frac{h}{x} = \sqrt{\frac{315\cdot 4}{37}}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow \begin{cases} \delta_2/x = 2\cdot\sqrt{\frac{37}{315}}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} \cong 0{,}685\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} \\ \delta_1/x = \frac{3}{10}\cdot\sqrt{\frac{315\cdot 4}{37}}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} \cong 1{,}751\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} \end{cases}$$

$$C_f = \frac{4}{Re_x}\cdot\sqrt{\frac{37}{315\cdot 4}}\cdot\sqrt{Re_x} \cong 0{,}685\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

El error que se comete con respecto a la solución de Blasius es del 1,7% en δ_1 y un 3,2% en δ_2 y C_f.

- CASO II: Hay gradiente de presiones

Reescribir ecuación de Karman multiplicándola por $u_e\delta_2/\nu$:

$$\frac{u_e\delta_2}{\nu}\frac{d\delta_2}{dx} + \underbrace{\frac{\delta_2^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}}_{\lambda}(2+H_{12}) = \frac{1}{2}C_f\frac{u_e\delta_2}{\nu} = 2\frac{\delta_2}{h}\left(1+\frac{\Lambda}{12}\right) \qquad \frac{1}{2}C_f = \frac{2\nu}{u_e h}\left(1+\frac{\Lambda}{12}\right)$$

$$\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = \left(\frac{\delta_2}{h}\right)^2\underbrace{\frac{h^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}}_{\Lambda} = \boxed{\Lambda\left(\frac{\delta_2}{h}\right)^2 = \lambda(\Lambda)}$$

$$u_e\frac{d[\lambda/(du_e/dx)]}{dx} = F(\lambda) \qquad \begin{cases} F(\lambda) = 2[T(\lambda) - \lambda(2+H_{12})] \\ T(\lambda) = \frac{u_e\delta_2 C_f}{2\nu} = 2\frac{\delta_2}{h}\left(1+\frac{\Lambda}{12}\right) = 2\left(1+\frac{\Lambda}{12}\right)\left(\frac{37}{315}-\frac{\Lambda}{945}-\frac{\Lambda^2}{9072}\right) \end{cases}$$

↳ necesita una condición inicial

Si hay un punto de remanso, $u_e = 0$, donde du_e/dx sea finita, para que la ecuación nos indica que para tener derivada finita de δ_2 en este punto → $\rightarrow F(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0{,}077$ ($\Lambda = 7{,}052$) → El espesor de cantidad de movimiento en el punto de remanso es: $\delta_2(u_e = 0) = \sqrt{\frac{0{,}077\nu}{(du_e/dx)_0}}$

↳ $u_e = A\cdot x = \left(\frac{du_e}{dx}\right)_0\cdot x$

$$\left(\frac{C_f u_e\delta_2}{2\nu}\right)_{u_e=0} = 0{,}3320$$

↳ $\tau_p = \frac{1}{2}C_f\rho u_e^2 = 1{,}1965\,x\,\rho\sqrt{\nu}\left(\frac{du_e}{dx}\right)_0^{3/2}$

Método de Thwaites-Loitsianskii

La función $F(\lambda)$ es sólo función del parámetro λ, pero esto depende del grado elegido en el polinomio que determine el perfil de velocidades, si se elige un polinomio de mayor orden aparecería una dependencia adicional con x.

Thwaites representó el valor de F en función de λ para todas las soluciones exactas de las ecuaciones de la capa límite. Encontró que todos los puntos conocidos caían muy aproximadamente en la misma curva (aproximadamente una recta):

$$F(\lambda) = a - b\lambda \quad \begin{cases} a = 0{,}45 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$u_e \frac{d[\lambda/(du_e/dx)]}{dx} = a - b\lambda$$

$$\left(\frac{\lambda}{du_e/dx}\right) = \delta_2^2/\nu \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(u_e^b \cdot \frac{\delta_2^2}{\nu}\right) = u_e^{b-1} \cdot a \rightarrow \frac{d}{dx}(u_e^b \delta_2^2) = a\nu u_e^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda u_e^b}{du_e/dx}\right] = u_e^b \frac{d}{dx}\left(\lambda/(du_e/dx)\right) + b\lambda u_e^{b-1} = u_e^{b-1}\left[u_e \frac{d}{dx}\left(\lambda/(du_e/dx)\right) + b\lambda\right] = u_e^{b-1} \cdot a$$

$$\int a u_e^{b-1} dx = \int d\left[\frac{\lambda u_e^b}{du_e/dx}\right] \Rightarrow \lambda = a \frac{du_e}{dx} u_e^{-b}\left(\int_{x_0}^{x} u_e^{b-1} dx + C_1\right)$$

$$\delta_2^2 = \frac{\lambda\nu}{du_e/dx} = \frac{a\nu}{u_e^b}\left(\int_{x_0}^{x} u_e^{b-1} dx + C_1\right) = a\nu\left(\frac{1}{u_e^b}\int_{x_0}^{x} u_e^{b-1} dx + \frac{C_1}{u_e^b}\right)$$

$C_1 \rightarrow \delta_2 = \delta_2(x_0) \Rightarrow C_1 = \dfrac{\delta_2^2(x_0)}{a\nu} u_e^b(x_0)$ que se anula cuando $\delta_2(x_0) = 0$ y cuando $u_e(x_0) = 0$ (punto de remanso)

$$\frac{\delta_2^2(x)}{a\nu} = \frac{\delta_2^2(x_0)}{a\nu}\left[\frac{u_e(x_0)}{u_e(x)}\right]^b + \frac{1}{u_e^b}\int_{x_0}^{x} u_e^{b-1} dx$$

$$\rightarrow \delta_2^2(x) = \delta_2^2(x_0)\left[\frac{u_e(x_0)}{u_e(x)}\right]^6 + \frac{0{,}45\nu}{u_e^6}\int_{x_0}^{x} u_e^5 dx$$

$\rightarrow C_f = \dfrac{2\nu}{u_e \delta_2} \cdot T(\lambda)$, buena aproximación: $T(\lambda) = (\lambda + 0{,}09)^{0{,}62}$

$\hookrightarrow$ desprendimiento: $\lambda = -0{,}09$

$F(\lambda) = 0{,}45 - 6\lambda$

Loitsianskii por un método diferente encontró que λ puede escribirse:

$$\lambda = 0{,}44 \frac{du_e}{dx} u_e^{-5{,}5}\left(\int_{x_0}^{x} u_e^{4{,}5} dx + C_1\right) \quad ; F(\lambda) = 0{,}44 - 5{,}5\lambda$$

$T(\lambda) = 7{,}55(0{,}3326 - \lambda)(\lambda + 0{,}088)$

Desprendimiento $\rightarrow \lambda = -0{,}088$

ECUACIONES INTEGRALES PARA UNA CAPA LÍMITE BIDIMENSIONAL ESTACIONARIA Y COMPRESIBLE

- Ecuación de la continuidad:

$$(1)\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento (según el eje x):

$$(2)\quad \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- Ecuación de la energía:

$$(3)\quad \frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{disipación viscosa}} \; ; \; h_0 = \overset{c_pT}{h} + \frac{1}{2}(u^2+v^2)$$

↳ entalpía de remanso

$h_{0e} = h_e + \frac{1}{2}u_e^2 = cte$

↳ para líquidos no tiene mucho sentido, pero en gases sí.

– Condiciones de contorno:

$y=0: \; u(x,0)=0 \; ; \; v(x,0) = v_p(x) \; ; \; T(x,0) = T_p(x)$

$y\to\infty: \; u(x,\infty) = u_e(x) \; ; \; T(x,\infty) = T_e(x)$

$x=0: \; u(0,y) = u_i(y) \; ; \; T(0,y) = T_i(y)$

- Orden de magnitud:

(gases) $\dfrac{\mu u_e^2/\delta^2}{k\Delta T/\delta^2} \sim \dfrac{\mu c_p}{k}\cdot\dfrac{u_e^2}{c_p\Delta T} \sim \underset{1}{Pr}\cdot\overbrace{\dfrac{u_e^2}{c_pT_e}}^{M_e^2}\cdot\dfrac{T_e}{\Delta T} \sim 1 \rightarrow \dfrac{\Delta T}{T_e} \sim M_e^2$

(líquidos) $\dfrac{\mu u_e^2/\delta^2}{k\Delta T/\delta^2} \sim \dfrac{\mu c}{k}\cdot\dfrac{u_e^2}{c\Delta T} \sim Pr\cdot\underbrace{\dfrac{u_e^2}{c\Delta T}}_{\text{normalmente muy pequeño}}$

• ECUACIÓN DE KARMAN:

→ Multiplicando la ecuación (1) por dy e integrando transversalmente:

$$\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\, dy + \int_0^h d(\rho v) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\, dy + (\rho v)_h - \underbrace{(\rho v)_0}_{=\rho_p v_p \; (\rho(x,0)=\rho_p)} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{(\rho v)_h = \rho_p v_p - \frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\, dy}$$

→ Haciendo lo mismo con (2):

$$\frac{d}{dx}\int_0^h \rho uu\, dy + \underbrace{\int_0^h d(\rho uv)}_{u_e(\rho v)_h - \underset{u(x,0)=0}{0} \,=\, u_e\cdot\rho_p v_p - u_e\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\, dy} = \int_0^h \rho_e u_e \frac{du_e}{dx}\, dy + \int_0^h d\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\int_0^h d\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \rightarrow \left(\mu \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{\,0}\right)_h - \underbrace{\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0}_{\tau_p}$$

* $$\frac{d}{dx}\int_0^h u_e \rho u\, dy = u_e\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\, dy + \int_0^h \rho u \frac{du_e}{dx}\, dy \rightarrow u_e\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\, dy = \frac{d}{dx}\int_0^h u_e \rho u\, dy - \int_0^h \rho u \frac{du_e}{dx}\, dy$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^h \rho uu\, dy + u_e\rho_p v_p - \frac{d}{dx}\int_0^h u_e\rho u\, dy + \int_0^h \rho u \frac{du_e}{dx} = \int_0^h \rho_e u_e \frac{du_e}{dx}\, dy - \tau_p$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} (u-u_e)\rho u\, dy + \int_0^{\infty} (\rho u - \rho_e u_e)\frac{du_e}{dx}\, dy = -u_e\rho_p v_p - \tau_p$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty (\rho u - \rho_e u_e)\, dy = \rho_e u_e \int_0^\infty \left(\frac{\rho u}{\rho_e u_e} - 1\right) dy = -\rho_e u_e \delta_1 \\ \int_0^\infty \rho u (u - u_e)\, dy = \rho_e u_e^2 \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(\frac{u}{u_e}-1\right) dy = -\rho_e u_e^2 \delta_2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\rho_e u_e^2\delta_2\right) - \rho_e u_e \delta_1 \frac{du_e}{dx} = -\rho_p v_p u_e - \tau_p$$

$$\rho_e u_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \cdot \frac{d(\rho_e u_e^2)}{dx} + \rho_e u_e \delta_1 \frac{du_e}{dx} = \tau_p + \rho_p v_p \cdot u_e$$

$$\rho_e u_e^2\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \cdot \rho_e \cdot 2u_e \frac{du_e}{dx} + \delta_2 u_e^2 \frac{d\rho_e}{dx} + \rho_e u_e \delta_1 \frac{du_e}{dx} = \tau_p + \rho_p v_p \cdot u_e$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{2}{u_e}\frac{du_e}{dx} + \delta_2 \cdot \frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dx} + \frac{\delta_1}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} + \frac{\rho_p}{\rho_e}\cdot\frac{v_p}{u_e} \qquad \frac{\rho_p}{\rho_e} = \begin{cases} T_e/T_p \text{ (en gases)} \\ 1 \text{ (en líquidos)}\end{cases}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\left(2\delta_2+\delta_1\right) + \delta_2 \cdot \underline{\frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dx}} = \frac12 C_f + \frac{\rho_p}{\rho_e}\cdot\frac{v_p}{u_e}$$

$$\frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dx} = \frac{1}{\rho_e}\left(\frac{d}{d}\right)\left(\frac{d\rho_e}{dp_e}\right) = \frac{1}{\cancel{\rho_e}}\left(-u_e\cancel{\rho_e}\frac{du_e}{dx}\right)\left(\frac{1}{a_e^2}\right) = -\left(\frac{u_e^2}{a_e^2}\right)\cdot\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx} = -M_e^2\cdot\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\left(2\delta_2+\delta_1-\delta_2 M_e^2\right) = \frac12 C_f + \frac{\rho_p}{\rho_e}\frac{v_p}{u_e}$$

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} + \left(2 + H_{12} - M_e^2\right)\frac{\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac12 C_f + \frac{\rho_p}{\rho_e}\cdot\frac{v_p}{u_e}}$$

- **FORMA INTEGRAL DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA:**

Integrando transversalmente la ecuación de la energía:

$$\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u h_0\, dy + (\rho v)_h \cdot h_{0e} - \rho_p v_p \cdot \underbrace{h_p}_{\approx h_{0p} \text{ porque } v_p \ll u_e} = \cancelto{0}{\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)_h} - \underbrace{\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0}_{q_p} + \cancelto{0}{\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_h} - \cancelto{0}{\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_0}$$

se puede meter dentro porque no depende de x

$$\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u h_0\, dy + \rho_p v_p\left(h_{0e}-h_p\right) - \frac{d}{dx}\int_0^h \rho u h_{0e}\, dy = q_p \rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^\infty \rho u\left(h_0 - h_{0e}\right) dy + \rho_p v_p\left(h_{0e}-h_p\right) = q_p$$

$$* \int_0^\infty \rho u\left(h_0-h_{0e}\right) dy = \rho_e u_e\left(h_p - h_{0e}\right)\cdot\int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\cdot\frac{(h_0-h_{0e})}{(h_p-h_{0e})}\cdot dy = \rho_e u_e\left(h_p-h_{0e}\right)\cdot\delta_3$$

- Espesor de energía, δ_3:

$$\boxed{\delta_3 = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\cdot\frac{(h_0-h_{0e})}{(h_p-h_{0e})}\, dy}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\rho_e U_e (h_p - h_{oe})\delta_3\right] = q_p + \rho_p v_p (h_p - h_{oe})$$

$$\rho_e U_e (h_p - h_{oe})\frac{d\delta_3}{dx} + \rho_e U_e \delta_3 \frac{d(h_p - \cancelto{cte}{h_{oe}})}{dx} + \rho_e (h_p - h_{oe})\delta_3 \frac{dU_e}{dx} + (h_p - h_{oe})\delta_3 \frac{d\rho_e}{dx} = q_p + \rho_p v_p (h_p - h_{oe})$$

$$\hookrightarrow \frac{d\delta_3}{dx} + \frac{dh_p/dx}{h_p - h_{oe}}\cdot\delta_3 + \frac{\delta_3}{U_e}\cdot\frac{dU_e}{dx} + \delta_3\cdot\underbrace{\frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dx}}_{-\frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}M_e^2} = \underbrace{\frac{q_p}{\rho_e U_e (h_p - h_{oe})}}_{} + \overbrace{\frac{\rho_p}{\rho_e}}^{\equiv T_e/T_p \text{ (en gases)}}\cdot\frac{v_p}{U_e}$$

$St \equiv$ Stanton $\Rightarrow St = \dfrac{q_p}{\rho_e U_e (h_p - h_{oe})}$

$$\boxed{\frac{d\delta_3}{dx} + \left[\frac{dh_p/dx}{h_p - h_{oe}} + \frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\left(1 - M_e^2\right)\right]\cdot\delta_3 = St + \frac{T_e v_p}{T_p U_e}}$$

- Flujo de calor: $q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial (c_p T)}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(h_o - \frac{1}{2}u^2\right)\right]_{y=0} =$

$$= -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)_{y=0} + \frac{k}{c_p}\left(\cancelto{0}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow \underline{q_p = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)_{y=0}}$$

- Número de Nusselt: $Nu_{l_c} = \dfrac{q_p \cdot l_c}{\frac{k}{c_p}(h_p - h_{oe})} = S_t \cdot \dfrac{\rho_e U_e \cancel{(h_p - h_{oe})}}{\frac{k}{c_p}\cancel{(h_p - h_{oe})}}\cdot l_c = S_t \cdot \dfrac{\mu c_p}{k}\cdot\dfrac{\rho_e U_e l_c}{\mu}$

$$\underline{Nu_{l_c} = S_t \cdot P_r \cdot Re_{l_c}}$$

Capa límite a bajas velocidades y temperatura constante.

- Efectos de compresibilidad despreciables.
- Sin efecto de succión o soplado ($v_p = 0$)
- Viscosidad puede considerarse constante

$\Rightarrow$ Ecuación de la energía desacoplada de la de cantidad de movimiento y puede resolverse una vez que se ha resuelto la de cantidad de mov.

- Número de Mach de la corriente exterior: $M_e \ll 1$
- Temperatura de la pared constante

$\hookrightarrow$ Ecuación de la energía:

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \left[\cancelto{0\ (h_p = c_p T_p = cte)}{\frac{dh_p/dx}{h_p - h_{oe}}} + \frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\left(1 - \cancelto{\text{despreciable}}{M_e^2}\right)\right]\cdot\delta_3 = S_t + \cancelto{0}{\frac{T_e \cdot v_p}{T_p \cdot U_e}}$$

- Espesor de energía:

$$\hookrightarrow \frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{U_e}\cdot\frac{dU_e}{dx} = St \quad ; \quad \delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(\frac{\cancel{c_p}}{\cancel{c_p}}\cdot\frac{T - T_p}{T_e - T_p}\right)dy \rightarrow \delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\cdot\theta\, dy$$

$$\left(\begin{array}{l} h_o = c_p T + \cancel{\tfrac{1}{2}u^2} \\ h_{oe} = c_p T_e + \cancel{\tfrac{1}{2}U_e^2} \end{array}\right) ; \quad \theta = \frac{h_o - h_{oe}}{h_p - h_{oe}} = \frac{T - T_e}{T_p - T_e}$$

• Número de Stanton:

$$S_t = \frac{q_p}{\rho_e u_e c_p (T_p - T_e)}$$ $\left\{ \begin{array}{l} T_p : \text{temperatura constante en la pared} \\ T_e : \text{temperatura exterior a la capa límite} \\ \quad \text{(también constante)} \end{array} \right.$

• Método de Pohlhausen: $u/u_e = f(\eta)$, $\eta = y/h \rightarrow \Theta(\eta_t) = \dfrac{T - T_p}{T_e - T_p}$, $\eta_t = y/h_t$

$$\delta_3 = \int_0^{h_t} \frac{u}{u_e}\left(\frac{T-T_p}{T_e-T_p}\right) dy = \int_0^{h_t} f(\eta)\cdot\Theta(\eta_t)\,dy \quad \text{si } h_t \le h$$

$$= \int_0^{h} f(\eta)\cdot\Theta(\eta_t)\,dy + \int_h^{h_t}\Theta(\eta_t)\,dy \quad \text{si } h_t > h$$

$$\delta_3 = h_t \int_0^1 f\left(\eta_t \cdot \frac{h_t}{h}\right)\cdot\Theta(\eta_t)\,d\eta_t \rightarrow \frac{\delta_3}{h_t} = f\left(h_t/h\right)$$ → la función será diferente dependiendo de que h_t/h sea mayor o menor que la unidad

PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO TEDIOSO ←

$$2\frac{u_e\delta_3}{\nu}\frac{d\delta_3}{dx} + 2\frac{\cancel{u_e}\delta_3}{\nu}\frac{\delta_3}{\cancel{u_e}}\frac{du_e}{dx} = 2\frac{u_e\delta_3}{\nu}S_t$$

$$\frac{u_e}{\nu}\frac{d\delta_3^2}{dx} + 2\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = 2\frac{u_e\delta_3}{\nu}S_t \rightarrow \frac{u_e}{\nu}\frac{d\delta_3^2}{dx} = -2\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} + 2\frac{u_e\delta_3}{\nu}S_t \Rightarrow$$

⇒ resulta ser (al igual que en el método de Thwaites) una función de la forma: $\dfrac{u_e}{\nu}\dfrac{d\delta_3^2}{dx} = m - n\dfrac{\delta_3^2}{\nu}\dfrac{du_e}{dx}$; donde m y n son funciones del número de Prandtl.

$$2\frac{u_e\delta_3}{\nu}S_t = m - n\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} + 2\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = m + (2-n)\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}$$

$$S_t = \frac{\nu}{2u_e\delta_3}\left[m - (n-2)\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}\right]$$

↳ solución: $$\frac{d(\delta_3^2 \cdot u_e^n)}{dx} = m\cdot\nu u_e^{n-1} \rightarrow \delta_3^2 = \nu m u_e^{-n}\int_0^x u_e^{n-1}dx$$

$$S_t = \frac{\nu}{2u_e\sqrt{\nu m u_e^{-n}}}\cdot\frac{\left[m - (n-2) m u_e^{-n}\int_0^x u_e^{n-1}dx\left(\frac{du_e}{dx}\right)\right]}{\left(\int_0^x u_e^{n-1}dx\right)^{1/2}} = \frac{Nu_x}{P_r \cdot Re_x}$$

$$Nu_x = \frac{P_r\sqrt{m x Re_x \cdot u_e^{n-1}}\left[1 - (m-2)u_e^{-n}\left(\frac{du_e}{dx}\right)\int_0^x u_e^{n-1}dx\right]}{2\left[\int_0^x u_e^{n-1}dx\right]^{1/2}}$$

o PLACA PLANA

$u_e = cte = u_\infty \rightarrow \frac{du_e}{dx} = 0$

$$Nu_x = \frac{Pr\cdot\sqrt{m\cdot x\cdot Re_x\cdot u_e^{n-1}}\left[1-(n-2)u_e^{-n}\cancel{\left(\frac{du_e}{dx}\right)}^{0}\int_0^x u_e^{n-1}dx\right]}{2\left[\underbrace{\int_0^x u_e^{n-1}dx}_{(u_e^{n-1}\cdot x)}\right]^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2}Pr\sqrt{m Re_x} = Nu_x} = St\cdot Pr\cdot Re_x$$

$$\hookrightarrow St = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{m}{Re_x}}$$

• Punto de remanso

$u_e = A\cdot x \rightarrow \frac{du_e}{dx} = A$

$$Nu_x = \frac{Pr\sqrt{m x\cdot Re_x\cdot u_e^{n-1}}\left[1-(n-2)\overbrace{u_e^{-n}\left(\frac{du_e}{dx}\right)\int_0^x u_e^{n-1}dx}^{u_e^{-n}\cdot A\cdot u_e^{n}\cdot A^{-1}\cdot\frac{1}{n}}\right]}{2\left[\int_0^x u_e^{n-1}dx\right]^{1/2}} = \frac{Pr\sqrt{m\cancel{x}\cdot Re_x\cdot A^{n}\cancel{A}\cancel{x^{n-1}}}\left[1-(n-2)\cdot\frac{1}{n}\right]}{2\cdot\left(u_e^{n}\cdot\frac{1}{An}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{Pr\cdot\sqrt{m Re_x\cdot n}}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{n}-\cancel{n}+\cancel{2}}{n}\right] = \boxed{Pr\cdot\sqrt{\frac{m}{n}\cdot Re_x} = Nu_x} = St\cdot Pr\cdot Re_x$$

$$\hookrightarrow St = \sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

* Estas expresiones también se podrían haber obtenido de la ecuación diferencial:

$$\frac{u_e}{\nu}\frac{d\delta_3^2}{dx} = m - n\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}$$

o Placa plana: $\frac{u_e}{\nu}\int d\delta_3^2 = m\int dx$

$$\frac{1}{x^2}\frac{u_e}{\nu}\cdot\delta_3^2 = m\cdot\cancel{x}\frac{1}{x^{\cancel{2}}} \rightarrow \frac{\delta_3}{x} = \sqrt{\frac{m}{Re_x}}$$

o Punto de remanso: ($u_e = 0$)

debe ocurrir que $\rightarrow \left[m - n\frac{\delta_3^2}{\nu}\right]\underbrace{\frac{du_e}{dx}}_{A} = 0$

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{x^2}\frac{1}{A}}_{\frac{1}{u_e\cdot x}}\nu}^{Re_x^{-1}}\frac{m}{n} = \delta_3^2\cdot\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{\delta_3}{x} = \sqrt{\frac{m}{n\cdot Re_x}}$$

Los coeficientes m y n pueden aproximarse por:

$m \cong 0{,}436\cdot Pr^{-4/3}$

$n \cong 1{,}356\cdot Pr^{-0{,}07}$

$\Rightarrow$ CASO DEL AIRE ($Pr = 0{,}72$)

$m \cong 0{,}676$, $n \cong 1{,}388$ $\Rightarrow$

Valores exactos

- Placa plana: $Nu_x = 0{,}296\sqrt{Re_x}$ ($Nu_x = 0{,}298\sqrt{Re_x}$)
- Punto Remanso: $Nu_x = 0{,}503\sqrt{Re_x}$ ($Nu_x = 0{,}501\sqrt{Re_x}$)

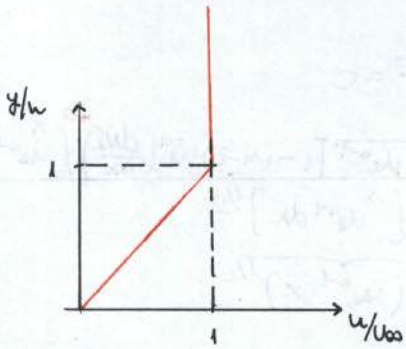
EJEMPLO DE PLACA PLANA

• PERFIL DE VELOCIDADES

$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{h} \quad 0 \le y \le h$

$\frac{u}{u_\infty} = 1 \quad y > h$

} perfil de velocidades más sencillo posible



Solución: [...]

$\frac{1}{2} C_f = \frac{\nu}{u_\infty h} = \frac{1}{Re_h}$

$\delta_2 = \frac{1}{6} h$

$\frac{1}{6}\frac{dh}{dx} = \frac{1}{Re_h} \rightarrow \frac{dh}{dx} = \frac{dRe_h}{dRe_x} = \frac{6}{Re_h} \rightarrow Re_h dRe_h = 6 dRe_x$

$\frac{Re_h^2}{2} = 6 Re_x \rightarrow Re_h = \sqrt{12 Re_x}$

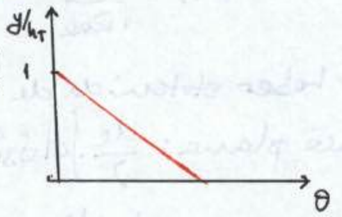
$\frac{\delta_2}{x} = C_f = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{12 Re_x}} = \frac{1}{\sqrt{3 Re_x}} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{Re_x}}$

$\cancel{2^2} \cdot 3$

• PERFIL DE TEMPERATURAS

$\theta = 1 - \frac{y}{h_T} \quad 0 \le y \le h_T$

$\theta = 0 \quad y > h_T$



• La solución depende de la relación h_T/h

$\boxed{h_T \le h}$ Perfil de velocidades no cambia (es todo el tiempo $\frac{u}{u_\infty} = y/h$)

$\delta_3 = \int_0^{h_T} \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h_T}\right) dy = \frac{y^2}{2h} - \frac{y^3}{3h_T h}\Big|_0^{h_T} = \frac{h_T^2}{2h} - \frac{h_T^2}{3h} = \frac{1}{6}\frac{h_T^2}{h} \quad ; \quad \frac{d\delta_3}{dx} = S_t \rightarrow$

$\rightarrow q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{-k(T_p - T_e)}{h_T} \underbrace{\left(\frac{\partial\theta}{\partial(y/h_T)}\right)_{y/h_T=0}}_{-1} \rightarrow q_p = \frac{k(T_p - T_e)}{h_T}$

$S_t = \frac{q_p}{\rho u_\infty(h_p - h_{ae})} = \frac{k\cancel{(T_p - T_e)}/h_T}{\rho u_\infty \cancel{(T_p - T_e)} \cdot c_p} = \frac{k}{\mu c_p} \cdot \frac{\mu}{\rho u_\infty h_T} = Pr^{-1} \cdot Re_{h_T}^{-1} = S_t$

$\frac{1}{6}\frac{d(h_T^2/h)}{dx} = \frac{1}{Pr \cdot Re_{h_T}} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{Re_{h_T}}{6} \cdot \frac{\mu}{\rho u_\infty} \cdot \frac{Re_{h_T}}{Re_h}\right) = \frac{d}{dRe_x}\left(\frac{Re_{h_T}}{6} \cdot \frac{Re_{h_T}}{Re_h}\right) = \frac{1}{Re_{h_T} \cdot Pr} \rightarrow$

$\frac{h_T}{h} = \frac{Re_{h_T}}{Re_h} = \frac{a\cancel{\sqrt{Re_x}}}{\sqrt{12}\cancel{\sqrt{Re_x}}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$

$\frac{u_\infty h_T}{\nu} = a\sqrt{Re_x}$

$\rightarrow \frac{d}{dRe_x}\left(\frac{a\sqrt{Re_x}}{6} \cdot \frac{a}{\sqrt{12}}\right) = \frac{d}{dRe_x}\left(\frac{a^2}{6\sqrt{12}} \cdot \sqrt{Re_x}\right) = \frac{1}{a\sqrt{Re_x} \cdot Pr}$

$\frac{a^2}{6\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{Re_x}}} = \frac{1}{a\cancel{\sqrt{Re_x}}\, Pr} \rightarrow \frac{a^3}{12\sqrt{12}} = \frac{1}{Pr} \rightarrow a = Pr^{-1/3} \cdot \sqrt{12}$

$\frac{u_e h_T}{\nu} = Pr^{-1/3} \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \sqrt{12} \, ; \quad \frac{h_T}{h} = \frac{Pr^{-1/3} \cdot \cancel{\sqrt{12}}}{\cancel{\sqrt{12}}} = Pr^{-1/3}$

$$\frac{u_e \delta_3}{\nu} = \frac{1}{6} Re_{h_T} \cdot \frac{Re_{h_T}}{Re_h} = \frac{Pr^{-1/3}}{6} \cdot \sqrt{12} \cdot Pr^{-1/3} \sqrt{Re_x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot Pr^{-2/3} \cdot \sqrt{Re_x}$$

$$Nu_x = S_t \cdot Re_x \cdot Pr = Pr \cdot \frac{Re_x}{\underbrace{Pr \cdot Pr^{-1/3} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{Re_x}}_{Re_{h_T}}} = \frac{Pr^{1/3}}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{Re_x} = \frac{\sqrt{3}}{6} Pr^{1/3} \cdot \sqrt{Re_x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$\boxed{h_T \geq h}$ Perfil de velocidades tiene dos tramos.

$$\delta_3 = \int_0^h \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h_T}\right) dy + \int_h^{h_T} \left(1 - \frac{y}{h_T}\right) dy = [\ldots] = \frac{h_T}{2}\left[1 - \frac{h}{h_T} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{h_T}\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{h_T}{2}\left[1 - \frac{h}{h_T} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{h_T}\right)^2\right]\right\} = \frac{1}{Re_{h_T} \cdot Pr} \rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\frac{\nu b \sqrt{Re_x}}{2 u_e}\left[1 - \frac{\sqrt{12}}{b} + \frac{1}{3}\frac{12}{b^2}\right]\right\} = \frac{1}{Pr \cdot b\sqrt{Re_x}}$$

$$\frac{u_e h_T}{\nu} = b \cdot \sqrt{Re_x}$$

$$\frac{h}{h_T} = \frac{Re_h}{Re_{h_T}} = \frac{\sqrt{12} \cdot \cancel{\sqrt{Re_x}}}{b \cancel{\sqrt{Re_x}}} = \frac{\sqrt{12}}{b}$$

$$\frac{h_T}{h} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{d}{dRe_x}\left\{\frac{b\sqrt{Re_x}}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{12}}{b} + \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{b^2}\right]\right\} = \frac{1}{Pr \cdot b \cdot \sqrt{Re_x}}$$

$$\frac{b}{4\cancel{\sqrt{Re_x}}}\left[1 - \frac{\sqrt{12}}{b} + \frac{4}{b^2}\right] = \frac{1}{Pr \cdot b \cdot \cancel{\sqrt{Re_x}}}$$

$$b = [\ldots] = \begin{cases} \cancel{-\ldots} \\ + \ldots \checkmark \end{cases}$$

$$b = \sqrt{3}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}\right] \; ; \begin{cases} \text{cuando } Pr = 1 : b = a \\ \text{cuando } Pr \ll 1 : b \to 2/\sqrt{Pr} \end{cases}$$

$$Nu_x = \frac{\sqrt{Re_x}}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + 4\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}} \; ; \text{ cuando } Pr \ll 1 : Nu_x = \frac{1}{2}\sqrt{Pr}\sqrt{Re_x}$$

(solución exacta 0,56)

Convección forzada. Temperatura de recuperación. (Adiabática)

Efectos de fuerzas másicas despreciables

■ Ecuación de la energía:

$$\rho u \frac{\partial h_o}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\underbrace{k\frac{\partial T}{\partial y} + \mu \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y}}_{\circledast}\right\}$$

$$h_o = h + \frac{1}{2}(u^2+v^2) \underset{\uparrow}{\simeq} c_p T + \frac{1}{2}u^2 \rightarrow \frac{u^2}{2} = h_o - c_p T$$

Ec. continuidad

$$\circledast \; k\frac{\partial T}{\partial y} + \mu \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} = \frac{k}{c_p}\cdot\frac{\partial (c_pT)}{\partial y} + \mu\frac{\partial h_o}{\partial y} - \mu\frac{\partial (c_pT)}{\partial y} = \left(\frac{k}{c_p} - \mu\right)\frac{\partial (c_pT)}{\partial y} + \mu\frac{\partial h_o}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial h_o}{\partial y} = \frac{\partial c_pT}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial h_o}{\partial y} - \frac{\partial c_pT}{\partial y}$$

$$= \mu\left(\underbrace{\frac{k}{c_p\mu}}_{Pr^{-1}} - 1\right)\frac{\partial (c_pT)}{\partial y} + \mu\frac{\partial h_o}{\partial y} = \mu\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\frac{\partial (c_pT)}{\partial y} + \mu\frac{\partial h_o}{\partial y} =$$

$$= \mu\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(h_o - \frac{u^2}{2}\right) + \mu\frac{\partial h_o}{\partial y} = \mu\left(\frac{1-Pr}{Pr}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(h_o - \frac{u^2}{2}\right) + \mu\frac{\partial h_o}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \rho u \frac{\partial h_o}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h_o}{\partial y}\right) + \left(\frac{1-Pr}{Pr}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(h_o - \frac{u^2}{2}\right)\right]$$

→ Cuando $Pr = 1$: $\rho u \frac{\partial h_o}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)$

→ Pared aislada térmicamente:

Condiciones de contorno:

$y \to \infty : h_o = h_{oe}$

$$y = 0 : q_p = 0 = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial (c_pT)}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial (h_o - u^2/2)}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)_{y=0} - \frac{k}{c_p}\left(\cancel{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

→ Solución: $h_o = h_{oe}$ ⇒ entalpía a la temperatura de la pared coincide con la entalpía de remanso de la corriente exterior.

Traducido a temperatura:

$$c_p(T - T_e) = \frac{1}{2}u_e^2 - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}u_e^2\left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right] \rightarrow \frac{T}{T_e} = 1 + \frac{u_e^2}{2c_p}\left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right] = \frac{\rho_e}{\rho}$$

$$\hookrightarrow \frac{\gamma-1}{2}\cdot\left(\frac{u_e}{a_e}\right)^2 = \frac{\gamma-1}{2}M_e^2$$

$T = T_p \rightarrow u = 0$

$$\boxed{\frac{T_p}{T_e} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_e^2}$$ ⇝ temperatura máxima

Número de Prandtl es un poco menor que la unidad (en aire y otros).

La temperatura de la pared va a ser un poco menor que la de remanso exterior:

$$\boxed{T_p = T_e\left(1 + \mathcal{R}_r \cdot \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_e^2\right)}$$

$\mathcal{R}_r$: factor de recuperación, función del número de Prandtl (menor que la unidad pero próximo a uno)

↳ medida del incremento de temperatura de la pared con respecto a la temperatura de la corriente exterior debido al término dinámico
$\left[T_p - T_e = \mathcal{R}_r\,(u_e^2/2c_p)\right]$

- Capa límite laminar sin gradiente de presiones: $\mathcal{R}_r \approx \sqrt{P_r}$ (y apenas varía con el número de Mach)
- Capa límite turbulenta: $\mathcal{R}_r \approx 1-66\,(1-P_r)\cdot C_f$

CONVECCIÓN FORZADA. ANALOGÍA DE REYNOLDS.

- Placa plana (u_e=cte), T_e=cte, p_e=cte ; $dp_e/dx=0$, h_{oe}=cte ; T_p = cte ($h_p = c_pT_p$), $P_r = 1$

- Ecuación de la energía: $\rho u \frac{\partial h_o}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_o}{\partial y}\right)$
  $y\to\infty : h_o = h_{oe}$
  $y = 0 : h_o = h_p$
  $h_o(0,y) = h_{oe}$
  $\theta = \frac{h_o - h_p}{h_{oe}-h_p} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)$ (*)
$y\to\infty : \theta = 1$
$y = 0 : \theta = 0$
$x = 0 : \theta = 1$

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial c_pT}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)_{y=0} - \frac{k}{c_p}\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial h_o}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$q_p = -\frac{k}{c_p}(h_{oe}-h_p)\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{c_p}{k}\cdot\frac{q_p}{(h_p - h_{oe})}}$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento: $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$
  $y = 0 : u = 0$
  $y\to\infty : u = u_e$
  $\varphi = u/u_e$

$$\rho u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \quad (*)$$

$y \to \infty: \psi = 1$

$y = 0: \psi = 0$

$x = 0: \psi = 1$

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu u_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2} C_f \frac{\rho_e u_e}{\mu}}$$

Soluciones para Θ y ψ tienen que ser exactamente iguales.

Igualando: $\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{c_p}{k} \cdot \frac{q_p}{(h_p - h_{ae})} = \frac{1}{2} C_f \cdot \frac{\rho_e u_e}{\mu} \Rightarrow \frac{1}{2} C_f = \underbrace{\frac{\mu c_p}{k}}_{P_r = 1} \cdot \underbrace{\frac{q_p}{\rho_e u_e (h_p - h_{ae})}}_{St}$$

$\boxed{S_t = \frac{1}{2} C_f}$ → La analogía de Reynolds indica que el número de Stanton es igual a la mitad del coeficiente de fricción.

El flujo de calor en la pared toma la forma:

$$\frac{c_p}{k} \cdot \frac{q_p}{(h_p - h_{ae})} = \frac{1}{2} C_f \frac{\rho_e u_e}{\mu} \rightarrow q_p = \frac{1}{2} C_f \cdot \underbrace{\frac{k}{\mu c_p}}_{P_r^{-1} = 1} \cdot \rho_e u_e (h_p - h_{ae})$$

$$\boxed{q_p = \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e \left(h_p - h_e - \frac{1}{2} u_e^2\right)}$$

CONVECCIÓN NATURAL (FLOTABILIDAD).

Los términos correspondientes a las fuerzas másicas f_m son importantes cuando se quiere estudiar la convección libre.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_{mx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_{my}$$

Se descompone la presión en dos sumandos:

$p = p_h + p_m$ → asociada al movimiento

→ debido al campo hidrostático ($\nabla p_h = \rho_\infty \vec{f}_m$): campo de presiones de un medio en reposo con densidad ρ_∞ cte.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_m}{\partial x} + \frac{\partial p_h}{\partial x} = \frac{\partial p_m}{\partial x} + \rho_\infty f_{mx}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_m}{\partial y} + \frac{\partial p_h}{\partial y} = \frac{\partial p_m}{\partial y} + \rho_\infty f_{my}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p_m}{\partial x} + (\rho - \rho_\infty) f_{mx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial p_m}{\partial y} + (\rho - \rho_\infty) f_{my}$$

$\Delta_y p_m \sim (\rho - \rho_\infty) f_{my} \cdot \delta$ ~ espesor de la capa límite

$\Delta_x p_m \sim (\rho - \rho_\infty) \cdot f_{mx} \cdot \ell$ $\Rightarrow \dfrac{\Delta_y p_m}{\Delta_x p_m} \sim \dfrac{\delta}{\ell} \ll 1$ ($f_{mx} \sim f_{my} \sim f_{mc}$) → peor de los casos

↳ la presión p_m no varía con y, de modo que $p_m = p_{me}(x)$.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_{me}}{dx} + (\rho - \rho_\infty) f_{mx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

C.C: $y = 0$: $u = 0$; $v = v_s$ (ó 0); $h_0 = h_p$ ó $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ si la pared está aislada; $y \to \infty$: $u = u_e$; $h_0 = h_{0e}$; $x = 0$: $u = u_i(y)$; $h_0 = h_{0i}$

La importancia relativa de las fuerzas de flotabilidad $(\rho - \rho_\infty) f_{mc}$ frente a los de inercia viene dada por:

$$\frac{(\rho - \rho_\infty) f_{mc}}{\rho u^2/\ell} \sim \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho \mu^2} f_{mc} \ell^3 \frac{\mu^2}{\rho^2 u_e^2 \ell^2} \cdot \frac{1}{Re^2} \sim \Bigg[\underbrace{\overbrace{\frac{(\rho - \rho_\infty)}{\rho}}^{-\beta \Delta T} \frac{f_{mc} \ell^3}{\nu^2}}_{\text{GRASHOF}}\Bigg] \cdot \frac{1}{Re^2} \sim \frac{Gr}{Re^2}$$

$\dfrac{Gr}{Re^2} =$
- $\ll 1$: fuerzas de flotabilidad son despreciables (convección forzada) → fuerzas másicas no juegan ningún papel
- ~ 1
- $\gg 1$: fuerzas de flotabilidad son dominantes → responsables del movimiento del fluido

Velocidad en la capa límite: $\rho \dfrac{u_{cn}^2}{\ell} \sim (\rho - \rho_\infty) f_{mc} \to$

↳ convección libre o natural

$\to u_{cn} \sim \sqrt{\left(\dfrac{\rho - \rho_\infty}{\rho}\right) f_{mc} \cdot \ell}$ → no es del orden de u_e

Para que exista capa límite es necesario que el Reynolds basado en la longitud característica ℓ sea alto.

$$Re \sim \frac{\ell \sqrt{(\rho - \rho_\infty) f_{mc} \cdot \ell / \rho_\infty}}{\nu} \sim \sqrt{\frac{[(\rho - \rho_\infty)/\rho_\infty] f_{mc} \ell^3}{\nu^2}} \sim \sqrt{Gr}$$

y el espesor de la capa límite: $\delta/\ell \sim Gr^{-1/4}$

POLITÉCNICA

etsiae UPM

Mecánica de Fluidos Avanzada

Metodos Aproximados de Capa Límite Laminar Compresible con $M_e \sim 1$

Benigno Lázaro Gómez

POLITÉCNICA

etsiae UPM

ECUACIONES Y CONDICIONES DE CONTORNO

Ecuaciones de la capa límite laminar compresible:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y}\right) + \frac{1-Pr}{Pr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

con:

$$h_0 = h + u^2/2 = c_p T + u^2/2\,; \quad \frac{p}{p_e} = 1; \quad \frac{\rho}{\rho_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{-1}$$

↳ se conserva a través de la capa límite

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/2} \frac{1 + T_{sh}/T_e}{T/T_e + T_{sh}/T_e}, \qquad T_{sh} = 110\,K \text{ (aire)}$$

ECUACIONES Y CONDICIONES DE CONTORNO

Para $T_e \sim 300\,K$:

↳ valor típico

$$\frac{\mu}{\mu_e} \approx \left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/4}$$

Ecuaciones del flujo exterior (l: coordenada a lo largo de línea de corriente):

$$\frac{\partial h_e}{\partial l} + u_e \frac{\partial (u_e)}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\Big(\underbrace{h_e + \frac{u_e^2}{2}}_{h_{0e}}\Big) = 0$$

$$u_e \frac{\partial (u_e)}{\partial l} = -\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial p_e}{\partial l} = -\frac{\partial h_e}{\partial l} \quad \leftrightarrow \frac{\partial h_{0e}}{\partial l} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial l} = 0$$

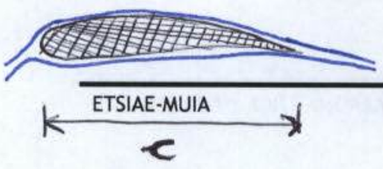
↳ $h_{0e} \equiv cte$

→ Flujo exterior con conservación de magnitudes de remanso

Para la línea de corriente que limita a la capa límite, con $l \approx x$:

$$u_e \frac{d(u_e)}{dx} = -\frac{1}{\rho_e}\frac{dp_e}{dx} = -\frac{dh_e}{dx} \qquad \rightarrow \qquad h_e + u_e^2/2 = h_{0e}$$

Independiente de x



ECUACIONES Y CONDICIONES DE CONTORNO

Condiciones de contorno:

a) $y = 0$:

$$u = 0, \qquad v = v_p$$

$$T = T_p \text{ ó } \underbrace{\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_p}{k}} \qquad \leftrightarrow \qquad h_0 = h_p \text{ ó } \quad \frac{\partial h_0}{\partial y} = -c_p \frac{q_p}{k}$$

pared aislada térmicamente cuando $q_p = 0$

b) $y \to \infty$:

$$u \to u_e; \qquad T \to T_e \leftrightarrow h_0 \to h_{0e}$$

c) $x = x_0$:

$$u(x_0, y) = u_0(y); \quad h_0(x_0, y) = h_{00}(y)$$

54

POLITÉCNICA

ECUACION DE KARMAN COMPRESIBLE

etsiae UPM

Integrando transversalmente la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12} - M_e^2)\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\delta_2 = \frac{c_f}{2} + \frac{h_e}{h_p}\cdot\frac{v_p}{u_e}$$

$$x = x_0, \qquad \delta_2 = \delta_{20}$$

POLITÉCNICA

SOLUCION PARA $Pr = 1,\ q_P = 0, v_P = 0$

etsiae UPM

Para $Pr = 1, q_p = 0$ (pared adiabática), la ecuación de la energía se escribe como:

$$\frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h_0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h_0}{\partial y}\right)$$

$$y = 0{:}\quad \frac{\partial h_0}{\partial y} = 0; \qquad y \to \infty{:} \qquad h_0 \to h_{0e}$$

$$x = 0{:} \quad h_0 = h_{0e}$$

cuya solución es:

$$\boxed{h_0 = h_{0e}}\ \forall(x,y) \rightsquigarrow \text{cte}$$

Entalpia total uniforme en la capa límite y en el flujo exterior.

SOLUCION PARA $Pr = 1,\ q_P = 0, v_P = 0$

En consecuencia:

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right] \quad \rightarrow \quad T_p = T_{0e}$$

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \left\{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right]\right\}^{-1}$$

$$\frac{\mu}{\mu_e} \approx \left\{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right]\right\}^{3/4} = \left\{\frac{T}{T_e}\right\}^{3/4}$$

$$\frac{\mu_{e0}}{\mu_e} = \left(\frac{T_{0e}}{T_e}\right)^{3/4} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{3/4}$$

$$\frac{\mu_p}{\mu_{e0}} = \frac{\mu_p}{\mu_e} \cdot \frac{\mu_e}{\mu_{e0}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{3/4} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{-3/4} = 1$$

$$\boxed{\mu_p = \mu_{0e}}$$

METODOS APROXIMADOS CON $Pr = 1,\ q_P = 0, v_P = 0$

Si se aproxima el perfil de velocidad por una ley conocida:

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta), \qquad \eta = \frac{y}{h(x)}$$

Debe cumplirse: $f(0) = 0; \quad f''(0) = -\lambda \cdot \tilde{\delta}_2^{\,-2}$ → tiene que ver con el gradiente de presiones

$f(\eta \to \infty) \to 1; \quad f'(\eta \to \infty) \to 0; \ldots$

↳ no hay efectos viscosos

siendo:

$$\lambda = \frac{\rho_e \delta_2^2}{\mu_{0e}} \frac{du_e}{dx}, \qquad \tilde{\delta}_2 = \frac{\delta_2}{h}$$

↳ Thwaites

↳ Cant. mov. en $y=0$:

$$0 = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$0 = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \mu_p \left(\frac{\partial^2 u_e \cdot f(\eta)}{\partial y^2}\right)_{y=0}$$

$$0 = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \mu_p \frac{u_e}{h^2} \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)_{y=0}$$

$$f''(0) = -\frac{\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}}{\mu_p\, u_e / h^2} = -\frac{\rho_e}{\mu_p} h^2 \frac{du_e}{dx}$$

con $\mu_{0e} = \mu(T_{0e}) = \mu_p$, que no cambia con x. Proponemos:

$$f(\eta) = f_1(\eta) + \lambda \cdot \tilde{\delta}_2^{\,-2} \cdot f_2(\eta)$$

Con $f(\eta)$ prescrito, se pueden evaluar las propiedades de la capa límite:

$$\tilde{\delta}_1\left(\lambda, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\frac{u}{u_e}\right)d\eta = \int_0^1 \left(1 - \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_e^2[1-f^2]\right\}^{-1} f\right)d\eta$$

$$\tilde{\delta}_2\left(\lambda, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_e}\frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)d\eta = \int_0^1 \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_e^2[1-f^2]\right\}^{-1} f(1-f)d\eta$$

$$H_{12} = \frac{\tilde{\delta}_1}{\tilde{\delta}_2} = H_{12}\left(\lambda, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)$$

$$\frac{1}{2}C_f \cdot \frac{\rho_e \delta_2 u_e}{\mu_{0e}} = \frac{\tau_p \delta_2}{\mu_{0e} u_e} = f'(0)\cdot\tilde{\delta}_2 = \underbrace{T}_{\text{Formulación de Pohlhausen}}\left(\lambda, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)$$

Multiplicando la ecuación de Karman por $\rho_e \delta_2 u_e / \mu_{0e}$ se obtiene:

$$\frac{\rho_e u_e}{\mu_{0e}}\frac{d}{dx}(\delta_2^2) = 2\left(T - (2+H_{12})\cdot\left(1 - \underbrace{\boxed{\frac{2}{(\gamma-1)\cdot(2+H_{12})}}}_{\sim 1}\underbrace{\frac{\gamma-1}{2}M_e^2}_{\text{cantidad pequeña}}\right)\cdot\lambda\right) = F\left(\lambda, \underbrace{\frac{\gamma-1}{2}M_e^2}_{\text{parámetro formalmente pequeño}}\right)$$

Siguiendo la propuesta de Thwaites:

$$F\left(\lambda, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) \approx a\left(\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) - b\left(\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)\cdot\lambda$$

En el límite $(\gamma-1)M_e^2/2 \ll 1$ proponemos:

$$a\left(\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) \approx a_0\cdot\left(1 + C_a\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)$$

$$b\left(\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) \approx b_0\cdot\left(1 + C_b\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)$$

~ (en incompresible)

Con $a_0 = 0.45$, $b_0 = 6$ siendo las constantes del método de Thwaites para $(\gamma-1)M_e^2/2 = 0$. Las constantes C_a, C_b se pueden estimar al resolver flujos tipo con $f(\eta)$ prescrito.

C_a puede obtenerse tras determinar $T\left(\lambda, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)$ en el flujo de placa plana ($\lambda = 0$) utilizando un perfil de velocidad prescrito:

$\epsilon \equiv \frac{\gamma-1}{2}M_e^2 \Rightarrow \tilde{\delta}_2$

$2T = F = a = a_0\left(1 + C_a \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)$

$$C_a \approx \frac{2}{(\gamma-1)M_e^2}\left(\frac{T\left(0, \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)}{T(0,0)} - 1\right)_{(\gamma-1)M_e^2/2 \to 0}$$

$(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$

Por ejemplo, para perfil lineal de velocidad resulta $T = \tilde{\delta}_2$, y se obtiene:

$$C_a \approx -0.7$$

De igual forma, C_b puede estimarse al analizar el flujo de punto de remanso en el límite $(\gamma-1)M_e^2/2 \to 0$.

Para $C_b \cdot (\gamma-1)M_e^2/2 \ll 1$, despreciando este término y multiplicando la ecuación de Karman por $u_e^{b_0-1}$:

$$\frac{\rho_e}{\mu_{0e}}\frac{d}{dx}\left(u_e^{b_0}\delta_2^2\right) \approx a_0 \cdot \left(1 + C_a\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) \cdot u_e^{b_0-1}$$

es decir:

$$\delta_2^2 \approx \delta_{20}^2\left(\frac{u_{e0}}{u_e}\right)^{b_0} + \frac{\mu_{0e}\cdot a_0}{\rho_{0e}u_e^{b_0}}\int_{x_0}^{x}\left(1 + C_a\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)\cdot\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)^{1/(\gamma-1)} u_e^{b_0-1}dx$$

que en el límite $(\gamma-1)M_e^2/2 \ll 1$ proporciona:

$$\delta_2^2 \approx \delta_{20}^2\left(\frac{u_{e0}}{u_e}\right)^{b_0} + \frac{\mu_{0e}\cdot a_0}{\rho_{0e}u_e^{b_0}}\int_{x_0}^{x}\left(1 + \frac{1 + (\gamma-1)\cdot C_a}{2}M_e^2\right)u_e^{b_0-1}dx$$

Con $C_a \approx -0.7$:

$$\delta_2^2 \approx \delta_{20}^2\left(\frac{u_{e0}}{u_e}\right)^{b_0} + \frac{\mu_{0e}\cdot a_0}{\rho_{0e}u_e^{b_0}}\int_{x_0}^{x}\left(1 + \frac{M_e^2}{3}\right)u_e^{b_0-1}dx$$

59

PARÁMETROS ADIMENSIONALES

Reynolds: $Re_{lc} = \frac{\rho U_e l_c}{\mu}$; $\nu = \rho/\mu$

Prandtl: $Pr = \mu c_p / k = \nu/\alpha$; $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$

Nusselt: $Nu_{lc} = \frac{q_p l_c}{k(T_p - T_e)}$; $Nu_{lc} = St \cdot Pr \cdot Re_{lc}$

Stanton: $St = \frac{q_p}{\rho U_e c_p (T_p - T_e)}$

Grashof: $Gr = -\beta \Delta T \frac{f_m c l^3}{\nu^2}$

POLITÉCNICA

ESPESORES DE LA CAPA LÍMITE

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{T - T_p}{T_e - T_p}\right) dy = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(\frac{T - T_e}{T_p - T_e}\right) dy$$

Ec. KARMAN

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \left(2 + H_{12} - M_e^2\right) \frac{1}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx} \cdot \delta_2 = \frac{C_f}{2} + \frac{h_e}{h_p} \cdot \frac{v_p}{u_e}$$

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \left[\frac{dh_p/dx}{h_p - h_{ae}} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx}\left(1 - M_e^2\right)\right] \cdot \delta_3 = St + \frac{h_e}{h_p} \cdot \frac{v_p}{u_e}$$

Método de POHLHAUSEN

$$u_e \frac{d\left[\lambda/(du_e/dx)\right]}{dx} = F(\lambda) \quad \begin{cases} F(\lambda) = 2\left[T(\lambda) - \lambda(2 + H_{12})\right] \\ T(\lambda) = u_e \delta_2 C_f / 2\nu = \dots = 2\left(1 + \frac{\Lambda}{12}\right)\left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right) \end{cases}$$

$$\left\{ \Lambda = \frac{h^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} \; ; \; \lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} \rightarrow \lambda = \Lambda\left(\delta_2/h\right)^2 \right\}$$

- $\lambda_R = 0{,}077 \rightarrow \Lambda = 7{,}052$
- $\lambda_S = -0{,}16 \rightarrow \Lambda = -12$

Método de THWAITES - LOITSIANSKII

$F(\lambda) = a - b\lambda$

$\hookrightarrow \frac{d}{dx}\left(u_e^b \cdot \delta_2^2\right) = a \nu u_e^{b-1}$; $\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}$, $\frac{1}{2} C_f = \frac{\nu}{u_e \delta_2} \cdot T(\lambda)$

$T(\lambda) = (0{,}09 + \lambda)^{0{,}62}$

$\boxed{\text{THWAITES} \begin{cases} a = 0{,}45 \\ b = 6 \end{cases}}$

LOITSIANSKII $\begin{cases} a = 0{,}44 \\ b = 5{,}5 \end{cases}$

- $\lambda_R = 0{,}075$ • $\lambda_S = -0{,}09$

- Capa límite térmica: $\frac{d\left(\delta_3^2 u_e^n\right)}{dx} = m \nu u_e^{n-1}$; m y n funciones del número de Prandtl.

IMPORTANTE: $\frac{\delta}{x} \sim \frac{C_1}{\sqrt{Re_x}}$; $Re_\delta \sim C_1' \sqrt{Re_x}$

CONVECCIÓN FORZADA

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y}\right) + \left(\frac{1-Pr}{Pr}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial}{\partial y}\left(h_0 - \frac{u^2}{2}\right)\right]$$

- Pared aislada térmicamente ($q_p=0$) y $Pr=1$: $T_p = T_e\left(1 + R_o \cdot \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \cdot M_e^2\right)$

  $h_0 = h_{0e}$ factor de recuperación

- Placa plana. Analogía de Reynolds: $St = \frac{1}{2} C_f \rightarrow q_p = \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e \left(h_p - h_e - \frac{1}{2} u_e^2\right)$

CONVECCIÓN NATURAL

Términos de fuerzas másicas importantes: $\frac{Gr}{Re^2}$ $\begin{cases} \ll 1: \text{convección forzada} \\ \sim 1 \\ \gg 1: \text{convección natural} \end{cases}$

$u_{cn} \sim \left[\left(\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho}\right) f_{m} \cdot l\right]^{1/2}$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Problema 04–11–2014**

La capa límite viscosa sobre una placa plana sometida a una corriente uniforme de un líquido de velocidad U_∞ esta dada por la solución de Blasius. Si la corriente uniforme está a una temperatura T_∞y la placa a una temperatura T_P constante, hay una capa límite térmica que responde a la ecuación

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

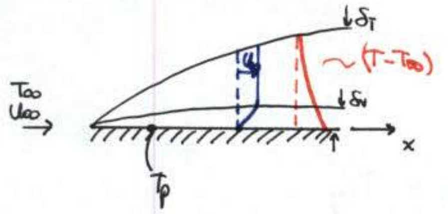
donde u y v son las componentes de la velocidad obtenidas con la solución de Blasius. La densidad del líquido es ρ, el calor específico es c y la conductividad térmica k. La difusitividad térmica $\alpha = k/\rho c$ tiene las mismas dimensiones que la viscosidad cinemática ν y su cociente es el número de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$. Cuando el número de Prandtl es pequeño, el espesor de la capa límite térmica es muy grande frente al de la capa viscosa, de modo que la velocidad del líquido en prácticamente toda la capa límite térmica es U_∞. Se pide:

1.- Simplifiquen la ecuación de la capa límite térmica para el caso considerado $Pr \ll 1$. Indiquen la condición inicial y condiciones de contorno para este problema.

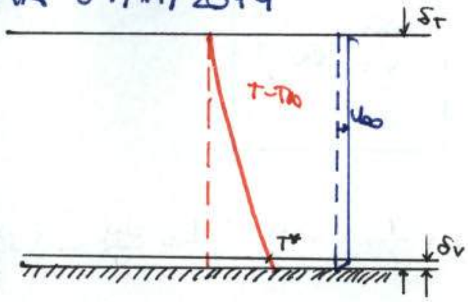
2.- Muestren que existe solución de semejanza del problema. Obtengan la variable de semejanza y la ecuación diferencial ordinaria que permite determinar la temperatura adimensional. Para obtener la solución, tengan en cuenta la similitud de este problema con el problema de Rayleigh.

3.- Obtengan el flujo de calor en la placa en forma del número de Nusselt Nu_x.

CAPA LÍMITE TÉRMICA. PROBLEMA 04/11/2014



$\Rightarrow$



$P_r \ll 1 : \delta_v \ll \delta_T$

$P_r = \frac{\nu}{\alpha} \ll 1 \rightarrow \alpha \gg 1$

velocidad del líquido prácticamente en toda la capa límite térmica:

$u = U_\infty$

Capa límite térmica responde a la ecuación:

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad ; \quad P_r = \frac{\mu \cdot c}{K} = \frac{\mu/\rho}{K/\rho c} = \frac{\nu}{\alpha} \quad ; \alpha = K/\rho c$$

1) Temperatura en las proximidades de la pared, T^*: $T^* = T_p - \frac{dT_p}{dy} \cdot y$; $\frac{dT_p}{dy} \sim \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T}$

$$T^* - T_p \sim \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T} \cdot \underbrace{\delta_v}_{\text{la "y" que se está evaluando es la de las proximidades de la pared } (y \approx \delta_v)}$$

$\hookrightarrow (T^* - T_p) \sim (T_p - T_\infty) \underbrace{\frac{\delta_v}{\delta_T}}_{\ll 1} \rightarrow (T^* - T_p) \ll (T_p - T_\infty)$

$\hookrightarrow$ diferencia entre T^* en δ_v y T_p es muy pequeña frente a diferencia entre T_p y T_∞

$u \sim U_\infty$

$v \sim ?$ $\rightarrow$ Ecuación de la continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{U_\infty}{x} \sim \frac{v}{\delta_v} \rightarrow v \sim U_\infty \left(\frac{\delta_v}{x} \right)$

$\downarrow$ velocidades solo tienen sentido en capa límite viscosa

Ecuación de la energía $\rightarrow$ comparación de términos convectivos:

$$\frac{v (\partial T / \partial y)}{u (\partial T / \partial x)} \sim \frac{\cancel{U_\infty} \frac{\delta_v}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{\Delta T}}{\delta_T}}{\cancel{U_\infty} \frac{\cancel{\Delta T}}{\cancel{x}}} \sim \frac{\delta_v}{\delta_T} \ll 1 \rightarrow \text{término convectivo en y es despreciable frente al término convectivo en x.}$$

Ecuación de la capa límite térmica queda entonces (energía):

$$\boxed{\rho c U_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \; ; \quad \begin{array}{l} \text{CI: } T(0,y) = T_\infty \\ \text{C.C.: } \begin{cases} T(x,0) = T_p \\ T(x,\infty) = T_\infty \end{cases} \end{array}}$$

2) Llamando $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \rightarrow \rho c U_\infty \frac{\partial \theta}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$; CI: $\theta(0,y) = 0$; C.C.: $\begin{cases} \theta(x,0) = 1 \\ \theta(x,\infty) = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \underbrace{\frac{K}{\rho c}}_{\alpha} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\alpha}{U_\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$ $\rightarrow$ agrupando la variable y : $y' = y \sqrt{U_\infty / \alpha}$

$\hookrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \left(y \sqrt{U_\infty/\alpha} \right)^2}$; CI: $\theta(0, y\sqrt{U_\infty/\alpha}) = 0$; C.C.: $\begin{cases} \theta(x,0) = 1 \\ \theta(x,\infty) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \theta = \theta(x, y\sqrt{U_\infty/\alpha})$

$x \; [=] \; L$

$y \sqrt{U_\infty/\alpha} \; [=] \; L \cdot \left(\frac{\cancel{\nu}}{\cancel{\nu} \cdot L} \right)^{1/2} = L^{1/2}$

ADIMENSIONALIZACIÓN : $\theta = \theta\left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha \cdot x}} \right) \rightarrow$ solución de semejanza

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}} \rightarrow \theta(\infty) = 0 ; \theta(0) = 1 ; \theta(\infty) = 0$ $\rightarrow$ colapsan

Solución de semejanza:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \theta=\theta(\eta) & \text{con} \\ \theta(\infty)=0 & \eta = y\sqrt{U_\infty/\alpha x} \\ \theta(0)=1 & \end{array}}$$

$$\ln\eta = \ln y + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{U_\infty}{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\ln x \rightarrow \frac{d\eta}{\eta} = \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\frac{dx}{x} \left\{ \begin{array}{l} \partial\eta/\partial y = \eta/y \\ \partial\eta/\partial x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{x}\right) \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{x}\right)\cdot\frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = \underbrace{\left(\frac{\eta}{y}\right)}_{=\sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}}\frac{d\theta}{d\eta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}\,\frac{d\theta}{d\eta}\right) = \sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{U_\infty}{\alpha x}\cdot\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía: $\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\alpha}{U_\infty}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \rightarrow$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{x}\right)\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\alpha}{U_\infty}\cdot\frac{U_\infty}{\alpha x}\frac{d^2\theta}{d\eta^2} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \\ \theta(0)=1 \\ \theta(\infty)=0 \end{array}}$$

→ verifica que existe solución de semejanza

Cambio de variable: $z = \frac{d\theta}{d\eta} \rightarrow \frac{dz}{d\eta} + \frac{1}{2}\eta z = 0 \rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\eta\, d\eta \rightarrow \ln z = -\frac{1}{4}\eta^2 + \ln C_1$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2/4} \rightarrow \theta = C_2 + C_1\int_0^\eta e^{-\eta^2/4}\,d\eta$$

$$\theta(0)=1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\theta(\infty)=0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2/4}\,d\eta} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{\theta = 1 - \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^2/4}\,d\eta}{\sqrt{\pi}} = 1 - \mathrm{erf}(\eta/2)}$$

3) $$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k\,(T_p - T_\infty)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} = -k\,(T_p-T_\infty)\sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}\underbrace{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}}_{=C_1 = -1/\sqrt{\pi}}$$

$$q_p = +k\,(T_p - T_\infty)\sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}\left(+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$$

$$Nu_x = \frac{q_p\cdot x}{k\,(T_p-T_\infty)} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\alpha x}}\cdot x\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \underbrace{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}}_{(Re_x)^{1/2}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}_{(Pr)^{1/2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(Re_x\cdot Pr\right)^{1/2} = Nu_x$$

$$\boxed{Nu_x \cong 0{,}564\,(Re_x\cdot Pr)^{1/2}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecanica de Fluidos Avanzada **Problema 10-11-2014**

La capa límite viscosa sobre una placa plana sometida a una corriente uniforme de un líquido de velocidad U_∞ esta dada por la solución de Blasius. Si la corriente uniforme está a una temperatura T_∞ y la placa a una temperatura T_P constante, hay una capa límite térmica que responde a la solución de semejanza dad por la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\, f(\eta)\, \frac{d\theta}{d\eta} = 0,$$

donde η es la variable de semejanza de la solución de Blasius

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}},$$

mientras que la temperatura adimensional es

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_P - T_\infty},$$

y $f(\eta)$ es la función de corriente de la solución de semejanza de Blasius que es conocida. En particular se tiene $f''(0)$=0.4696.

Cuando el número de Prandtl es grande ($Pr \gg 1$) la capa límite térmica es mucho más delgada que la viscosa, de modo que la velocidad del líquido en la capa límite térmica se puede aproximar por su valor cerca de la pared. Teniendo esto en cuenta se pide:

1.- Valor de la función $f(\eta)$ en las proximidades de la pared ($\eta \ll 1$)

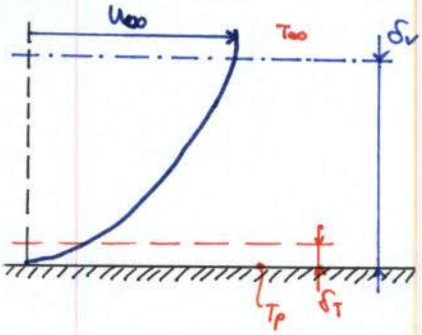
2.- Orden de magnitud de η dentro del espesor de la capa límite térmica.

3.- Flujo de calor en la placa en términos del número de Nusselt Nu_x[1]

[1] Tengan en cuenta que

$$\int_0^\infty exp\left(-\varsigma^3/3\right) d\varsigma \approx 1{,}2829.$$

CAPA LÍMITE TÉRMICA. PROBLEMA 10/11/2014



Capa límite térmica: $\dfrac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\, f(\eta)\dfrac{d\theta}{d\eta} = 0 \rightarrow \begin{cases}\theta(\infty) = 0\\ \theta(0) = 1\end{cases}$

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

$f(\eta)$: función de corriente de la solución de semejanza de Blasius (conocida)

$$f''(0) = 0{,}4696$$

$Pr \gg 1 \Rightarrow \underset{\eta \ll 1}{\delta_T} \ll \underset{\eta \sim 1}{\delta_v} \rightarrow$ velocidad del líquido en la capa térmica se puede aproximar por su valor cerca de la pared.

1) $f(\eta)$ para $\eta \ll 1$?

Como η es muy pequeño se puede hacer el desarrollo en serie de MacLaurin:

$$f(\eta) \cong \underbrace{\cancel{f(0)}} + \underbrace{\cancel{f'(0)}}\cdot\eta + \frac{1}{2}f''(0)\cdot\eta^2 + \dots \Rightarrow \boxed{f(\eta) \cong \frac{1}{2}f''(0)\,\eta^2}$$

condiciones de contorno del problema de Blasius $\Rightarrow f(0) = f'(0) = 0$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\cdot\frac{1}{2}f''(0)\cdot\eta^2\frac{d\theta}{d\eta} = 0$$

2) ∘ Equilibrar el orden de la ecuación: $\eta = \underset{\sim 1}{\xi}\cdot\overset{\ll 1}{\varepsilon} \ll 1$; $d\eta = \varepsilon\, d\xi$ → a determinar

$$\varepsilon^2 \times \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + Pr\frac{\cancel{\varepsilon^2}}{\cancel{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{2}f''(0)\cdot\xi^2\cdot\frac{d\theta}{d\xi} = 0\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \underbrace{\varepsilon^3\cdot\frac{1}{2}f''(0)\cdot Pr}_{\sim 1}\cdot\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad ; \quad \varepsilon^3\cdot\frac{1}{2}f''(0)\cdot Pr = 1 \rightarrow \varepsilon^3 = \frac{2}{f''(0)\cdot Pr} \rightarrow \varepsilon = \left(\frac{2}{f''(0)\cdot Pr}\right)^{1/3} \ll 1$$

↳ por comodidad se elige igual a la unidad

La ecuación a resolver se reduce entonces a:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \qquad \boxed{\eta \sim \varepsilon \sim Pr^{-1/3} \ll 1}$$

3) Para obtener Nu_x hay que resolver la ecuación: $\rightarrow z = d\theta/d\xi$

$$\frac{dz}{d\xi} + \xi^2 z = 0 \rightarrow \frac{dz}{z} = -\xi^2 d\xi \Rightarrow \ln z + \ln K = -\xi^3/3 \rightarrow z = K\, e^{-\xi^3/3} = \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\theta = C_1 + K\int_0^{\xi} e^{-\xi^3/3}\, d\xi \rightarrow \theta(0) = 1 : 1 = C_1 + K\cancel{\int_0^0 e^{-\xi^3/3} d\xi} \rightarrow C_1 = 1$$

$$\theta(\infty) = 0 \rightarrow 0 = 1 + K\int_0^{\infty} e^{-\xi^3/3} d\xi \rightarrow K = -\frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\xi^3/3} d\xi} \cong -\frac{1}{1{,}2829} = -0{,}7795$$

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k(T_p - T_\infty)\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = -k\underbrace{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}}_{K}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\xi}{\partial\eta}\right)}_{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)}_{\sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}}}(T_p - T_\infty)$$

$$Nu_x = \frac{q_p\cdot x}{k(T_p - T_\infty)} = -K\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{U_\infty\cdot x^{\cancel{2}}}{2\nu\cancel{x}}} = -\frac{K}{(2)^{1/3}}\cdot f''(0)^{1/3}\cdot Pr^{1/3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\, Re_x^{1/2} = 0{,}34\cdot Pr^{1/3}\cdot Re_x^{1/2}$$

$$\boxed{Nu_x = 0{,}34\cdot Re_x^{1/2}\cdot Pr^{1/3}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecanica de Fluidos Avanzada **Problema 17-11-2014**

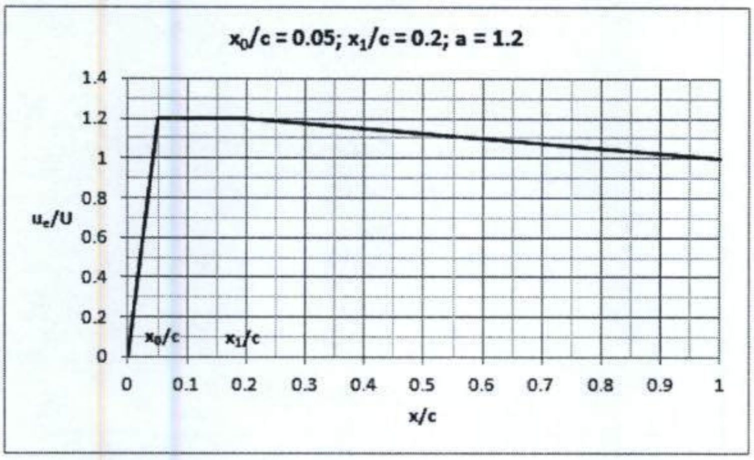
El perfil de velocidad exterior a la capa límite del extradós de un perfil, en algunos casos puede aproximarse por

$$0 \leq x \leq x_0 : \quad \frac{u_e}{U_\infty} = a\frac{x}{x_0},$$

$$x_0 \leq x \leq x_1 : \quad \frac{u_e}{U_\infty} = a,$$

$$x_1 \leq x \leq c : \quad \frac{u_e}{U_\infty} = a - (a-1)\frac{x - x_1}{c - x_1},$$

donde c es la cuerda del perfil conocida y $a > 1$ una constante también conocida. El perfil de velocidades anterior está dado en al figura adjunta para $a = 1{,}2$, $x_0/c = 0{,}05$ y $x_1/c = 0{,}2$. Consideren el flujo de un fluido incompresible.



Se pide:

1.- Determinar la distribución del coeficiente de presiones $c_p(x)$ definido como $2(p_e - p_\infty)/\rho U_\infty^2$.

2.- Determinar el c_p global del extradós.

3.- Determinar el cuadrado del espesor de cantidad de movimiento δ_2^2 utilizando el método de Thwaites, en cada uno de los diferentes tramos del perfil de velocidades. Utilicen los datos dados más arriba.

4.- Obtener el valor del parámetro adimensional $\lambda(x/c)$.

5.- Posición del punto de separación, x_s/c de acuerdo con el método de Thwaites.

SOLUCIÓN

El coeficiente de presiones es

$$c_p = \frac{2(p_e - p_\infty)}{\rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^2,$$

que para cada uno de los tramos toma la forma

$$0 \le x \le x_0: \quad c_p = 1 - a^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2,$$

$$x_0 \le x \le x_1: \quad c_p = 1 - a^2,$$

$$x_1 \le x \le c: \quad c_p = 1 - \left[a - (a-1)\frac{x - x_1}{c - x_1}\right]^2.$$

El valor medio del coeficiente de presiones está dado por

$$\bar{c}_p = \frac{1}{c}\int_0^c \left[1 - \left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^2\right] dx = 1 - \frac{1}{c}\int_0^c \left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^2 dx,$$

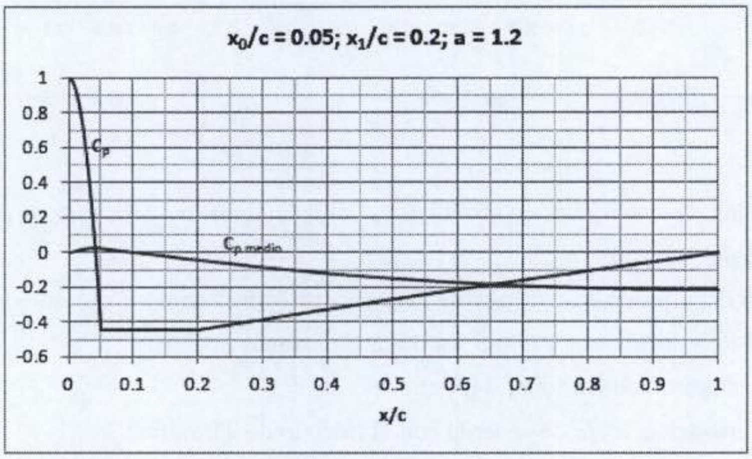
que puede escribirse como

$$\bar{c}_p = 1 - \frac{1}{c}\int_0^{x_0}\left(a\frac{x}{x_0}\right)^2 dx - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} a^2 dx - \frac{1}{c}\int_0^c \left[a - (a-1)\frac{x-x_1}{c-x_1}\right]^2 dx,$$

lo que proporciona

$$\bar{c}_p = 1 - a^2\left(\frac{x_1}{c} - \frac{2}{3}\frac{x_0}{c}\right) - \frac{1}{3}\left(1 + a + a^2\right)\left(1 - \frac{x_1}{c}\right).$$

La distribución de c_p y $\bar{c}_p$ se da en la figura siguiente, donde puede observarse que $\bar{c}_p = -0{,}21$.



El espesor de cantidad de movimiento está dado por

$$\delta_2^2 = \delta_2^2(x_i)\left[\frac{u_e(x_i)}{u_e(x)}\right]^6 + \frac{0{,}45\nu c}{U_\infty\left[u_e(x)/U_\infty\right]^6}\int_0^x \left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^5 d\left(\frac{x}{c}\right).$$

Para el pimer tramo $x_i = 0$ y $u_e(x_i) = u_e(0) = 0$, de modo que se tiene

$$0 \le x \le x_0: \quad \delta_2^2 = \frac{0{,}45\nu}{U_\infty}\left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^{-6}\int_0^x \left(a\frac{x}{x_0}\right)^5 dx = \frac{0{,}45}{6a}\frac{\nu c}{U_\infty}\frac{x_0}{c},$$

que es constante en todo el tramo. Para el tramo intermedio se tiene $x_i = x_0$ y $u_e(x_i) = u_e(x) = aU_\infty$ y, por lo tanto,

$$x_0 \le x \le x_1: \quad \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{6a}\frac{\nu c}{U_\infty}\frac{x_0}{c} + \frac{0{,}45\nu}{U_\infty}\frac{1}{a^6}\int_{x_0}^x a^5 dx = \frac{0{,}45}{a}\frac{\nu c}{U_\infty}\left(\frac{x}{c} - \frac{5x_0}{6c}\right),$$

ya que $u_e(x_i)/u_e(x) = 1$. En particular, en $x = x_1$ se tiene

$$\delta_2^2(x_1) = \frac{0{,}45}{a}\frac{\nu c}{U_\infty}\left(\frac{x_1}{c} - \frac{5x_0}{6c}\right).$$

Para el último tramo $x_1 \le x \le c$, se tiene

$$\delta_2^2 = \delta_2^2(x_1)\left[\frac{u_e(x_1)}{u_e(x)}\right]^6 + \frac{0{,}45\nu c}{U_\infty}\left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^{-6}\int_{x_1}^x \left[\frac{u_e(x)}{U_\infty}\right]^5 d\left(\frac{x}{c}\right),$$

y dado que

$$d\left[\frac{u_e(x)}{U_\infty}\right] = \frac{1-a}{1-(x_1/c)} d\left(\frac{x}{c}\right),$$

la integral

$$\int_{x_1}^{x}\left[\frac{u_e(x)}{U_\infty}\right]^5 d\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1-(x_1/c)}{1-a}\int_{x_1}^{x}\left[\frac{u_e(x)}{U_\infty}\right]^5 d\left[\frac{u_e(x)}{U_\infty}\right] = \frac{1-(x_1/c)}{6(1-a)}\left\{\left[\frac{u_e(x)}{U_\infty}\right]^6 - \left[\frac{u_e(x_1)}{U_\infty}\right]^6\right\},$$

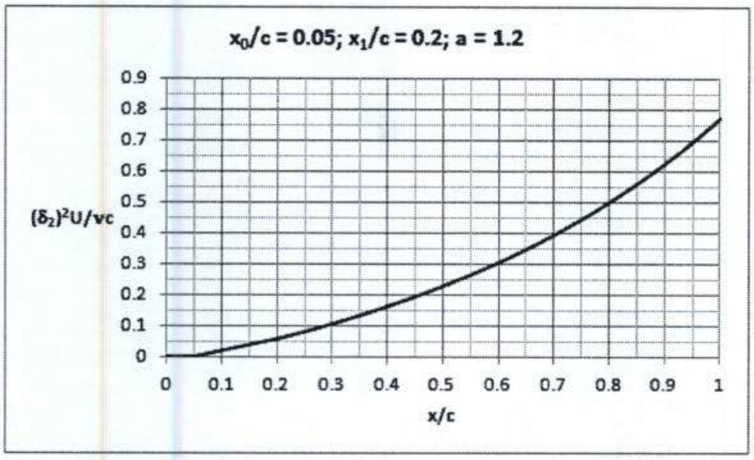
resultando

$$\delta_2^2 = \delta_2^2(x_1)\left[\frac{u_e(x_1)}{u_e(x)}\right]^6 + \frac{0{,}45\nu c\,[1-(x_1/c)]}{6U_\infty(1-a)}\left\{1-\left[\frac{u_e(x_1)}{u_e(x)}\right]^6\right\},$$

o bien

$$\frac{U_\infty \delta_2^2(x)}{\nu c} = \frac{0{,}45\,[1-(x_1/c)]}{6(1-a)} + 0{,}45\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{x_1}{c} - \frac{5x_0}{6c}\right) - \frac{[1-(x_1/c)]}{6(1-a)}\right\}\left[\frac{u_e(x_1)}{u_e(x)}\right]^6,$$

que para $x = x_1$ se recupera el valor de $\delta_2^2(x_1)$ y donde la variación con x entra a través del término u_e^{-6}. La representación gráfica de $\delta_2^2 U_\infty/\nu c$ se da en la figura siguiente.



El coeficiente adimensional λ está dado por

$$\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = \frac{U_\infty \delta_2^2}{\nu c}\frac{d(u_e/U\infty)}{d(x/c)},$$

que para cada uno de los tramos toma la forma

$$0 \le x \le x_0 : \quad \lambda = \frac{0{,}45c}{6aU_\infty}\frac{x_0}{c}\frac{U_\infty a}{x_0} = \frac{0{,}45}{6} = 0{,}075,$$

$$x_0 \le x \le x_1 : \quad \lambda = 0,$$

ya que en este tramo es $du_e/dx = 0$. Para el último tramo $x_1 \le x \le c$, con

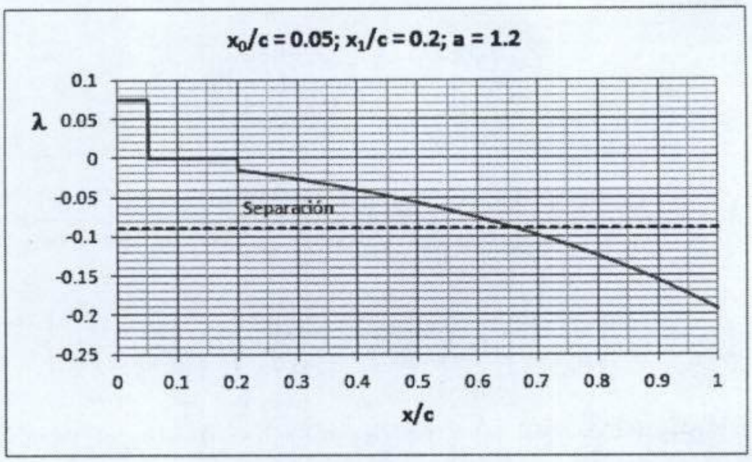
$$\frac{d(u_e/U_\infty)}{d(x/c)} = \frac{1-a}{1-(x_1/c)},$$

se tiene

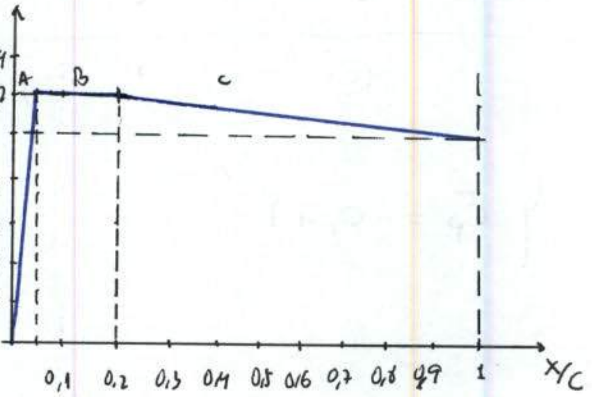
$$\lambda = \frac{0{,}45\,(1-a)}{1-(x_1/c)}\left\{\frac{[1-(x_1/c)]}{6(1-a)} + \left\{\frac{1}{a}\left(\frac{x_1}{c} - \frac{5x_0}{6c}\right) - \frac{[1-(x_1/c)]}{6(1-a)}\right\}\left[\frac{u_e(x_1)}{u_e(x)}\right]^6\right\}.$$

La separación se produce cuando $\lambda = -0{,}09$, que en este caso corresponde a $x/c = 0{,}663$, como puede observarse en la figura siguiente.

Eligiendo el parámetro $a = 1{,}116$ el desprendimiento se produce al final del perfil ($x = c$) y $\bar{c}_p = -0{,}104$.


$x_0/c = 0.05; x_1/c = 0.2; a = 1.2$
λ
x/c
Separación
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

CAPA LÍMITE - THWAITES. PROBLEMA 17/11/2014



* Perfil de velocidad exterior a la capa límite del extradós de un perfil:

$$0 \le x \le x_0 : \quad \frac{U_e}{U_\infty} = a \, \frac{x}{x_0}$$

$$x_0 \le x \le x_1 : \quad \frac{U_e}{U_\infty} = a$$

$$x_1 \le x \le c : \quad \frac{U_e}{U_\infty} = a - (a-1)\, \frac{x - x_1}{c - x_1}$$

c : cuerda del perfil
$a > 1$: constante
} conocidas: $a = 1,2$; $\frac{x_0}{c} = 0,05$; $x_1/c = 0,2$ | Flujo incompresible

$$\begin{cases} 0 \le x/c \le 0,05 : & \frac{U_e}{U_\infty} = 24\left(\frac{x}{c}\right) \\ 0,05 \le x/c \le 0,2 : & \frac{U_e}{U_\infty} = 1,2 \\ 0,2 \le x/c \le 1 : & \frac{U_e}{U_\infty} = 1,2 - 0,25\left[\left(\frac{x}{c}\right) - 0,2\right] \end{cases}$$

1)
2) $C_p(x) = \dfrac{2(p_e - p_\infty)}{\rho U_\infty^2}$; de la ecuación de Bernoulli: $p_e + \frac{1}{2}\rho U_e^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

$$p_e - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1 - \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow C_p(x) = 1 - \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^2$$

que para cada uno de los tramos:

Ⓐ $C_{pA}(x) = 1 - 576\left(\frac{x}{c}\right)^2$; $0 \le x/c \le 0,05$

Ⓑ $C_{pB}(x) = 1 - (1,2)^2 = -0,44$; $0,05 \le x/c \le 0,2$

Ⓒ $C_{pC}(x) = 1 - \left[1,2 - 0,25\left\{\left(\frac{x}{c}\right) - 0,2\right\}\right]^2$

$$= 1 - \left[1,44 + 0,0625\underbrace{\left\{\left(\frac{x}{c}\right) - 0,2\right\}^2}_{\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 0,04 - 0,4\,(x/c)} - 0,6\left\{(x/c) - 0,2\right\}\right]$$

$$= 1 - \left[1,44 + 2,5\cdot 10^{-3} + 0,12 - 0,625\,(x/c) + 0,0625\left(\frac{x}{c}\right)^2\right]$$

$$C_{pC}(x) = -0,5625 - 0,625\,(x/c) + 0,0625\,(x/c)^2 \; ; \quad 0,2 \le x/c \le 1$$

$$\overline{C_p} = \frac{1}{c}\int_0^c \left[1 - \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^2\right] dx = \int_0^1 C_p(x/c)\, d(x/c) = \int_0^{0,05}\left[1 - 576\left(\frac{x}{c}\right)^2\right] d(x/c) +$$

$$+ \int_{0,05}^{0,2}(-0,44)\, d(x/c) + \int_{0,2}^{1}\left[-0,5625 - 0,625\,(x/c) + 0,0625\,(x/c)^2\right] d(x/c)$$

$$\bar{C_p} = \underbrace{\left[\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{576}{3}\left(\frac{x}{c}\right)^3\right]_0^{0,05}}_{Ⓐ} - \underbrace{0,44\left(\frac{x}{c}\right)_{0,05}^{0,2}}_{Ⓑ} + \underbrace{\left[-0,5625\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{0,625}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \frac{0,0625}{3}\left(\frac{x}{c}\right)^3\right]_{0,2}^{1}}_{Ⓒ}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_{pⒶ} &= 0,026 \\ \bar{C}_{pⒷ} &= -0,066 \\ \bar{C}_{pⒸ} &= -0,8542 - (-0,1248) = -0,7294 \end{aligned}\right\} \bar{C}_p = -0,77$$

Haciéndolo sin meter valores: [...]

$$\bar{C}_p = 1 - \frac{1}{c}\int_0^c \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^2 dx \rightarrow \bar{C}_p = 1 - a^2\left(\frac{x_1}{c} - \frac{2}{3}\frac{x_0}{3}\right) - \frac{1}{3}(1+a+a^2)\left(1 - \frac{x_1}{c}\right)$$

Consejo: a la vista del jardín... mejor hacerlo sin sustituir números y luego ya los metes...

3) δ_2^2 utilizando Thwaites

$$\frac{d}{dx}\left(u_e^6 \cdot \delta_2^2\right) = 0,45\,\nu\,u_e^5$$

$$d(u_e^6 \cdot \delta_2^2) = 0,45 \cdot \nu\,u_e^5 \cdot dx$$

$$d\left[\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 \cdot \delta_2^2\right] = \frac{0,45 \cdot \nu}{u_\infty} \cdot \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^5 dx \rightarrow d\left[\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 \cdot \delta_2^2\right] = \frac{0,45\,\nu}{u_\infty} \cdot c\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^5 \cdot d(x/c)$$

Ⓐ $$\underbrace{\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6}_{\left(\frac{a}{\cancel{x_0/c}}\right)^6 \cancel{\left(\frac{x}{c}\right)^6}} \cdot \delta_2^2 = \frac{0,45\,\nu}{u_\infty}c\int\left[\frac{a}{(x_0/c)}\right]^5 \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^5 d(x/c) = \frac{0,45\,\nu}{6u_\infty} \cdot c\left[\cancel{\frac{a}{x_0/c}}\right]^{\cancel{5}} \cancel{\left(\frac{x}{c}\right)^6} + \cancel{C_A}^{\to 0}$$

$$C_1: \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ \delta_2 &= 0 \\ \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} C_A = 0 \rightarrow \delta_2^2 = \frac{0,45}{6a} \cdot \frac{\nu c}{u_\infty} \cdot \frac{x_0}{c}$$

$$\boxed{\delta_{2Ⓐ}^2 \simeq 3,125 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\nu c}{u_\infty}\right)}$$

Ⓑ $$\underbrace{\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6}_{a^6} \cdot \delta_2^2 = \frac{0,45\,\nu}{u_\infty} \cdot c\int a^5 \cdot d(x/c) = \frac{0,45 \cdot \nu \cdot c}{u_\infty} \cdot a^5\,\frac{x}{c} + C_B$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{c} &= \frac{x_0}{c} : \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right) = a \\ \delta_2^2 &= \frac{0,45}{6a} \cdot \frac{\nu c}{u_\infty} \cdot \frac{x_0}{c} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{0,45}{6\cancel{a}} \cdot \frac{\nu c}{u_\infty} \cdot \frac{x_0}{c} \cdot a^{\cancel{6}\,5} = 0,45 \cdot \frac{\nu c}{u_\infty} \cdot \frac{x_0}{c}a^5 + C_B \\ &C_B = 0,45 \cdot \frac{\nu c}{u_\infty}\,\frac{x_0}{c}a^5\,\underbrace{\left(\frac{1}{6} - 1\right)}_{-5/6} \end{aligned}$$

$$a^{\cancel{6}} \cdot \delta_2^2 = 0,45 \cdot \frac{\nu c}{u_\infty} \cdot \cancel{a^5}\left(\frac{x}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right) \rightarrow \delta_2^2 = \frac{0,45}{a} \cdot \frac{\nu c}{u_\infty}\left(\frac{x}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right)$$

$$\boxed{\delta_{2Ⓑ}^2 \simeq 0,375 \cdot \frac{\nu c}{u_\infty}\left(\frac{x}{c} - 0,042\right)}$$

CAPA LÍMITE – THWAITES. PROBLEMA 1/11/2014 (CONTINUACIÓN)

Ⓒ $\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 \cdot \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{u_\infty}\nu c \int \left[a-(a-1)\left(\frac{\cancel{x/c} - x_1/c}{1-x_1/c}\right)\right]^5 d(x/c)$ ⤳ complicado

$$\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 \cdot \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{u_\infty}\nu c \int \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^5 d(x/c) = \frac{0{,}45}{u_\infty}\nu c \cdot \left(\frac{1-x_1/c}{1-a}\right)\int \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^5 \cdot d\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)$$

$$d\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right) = \frac{1-a}{1-(x_1/c)} \cdot d(x/c)$$

$$\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 \cdot \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{6} \frac{\nu c}{u_\infty}\left(\frac{1-x_1/c}{1-a}\right)\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 + C_c$$

$\cancel{x/c} = x_1/c : \frac{u_e}{u_\infty} = a$

$$\left.\delta_2^2 = \frac{0{,}45}{a}\frac{\nu c}{u_\infty}\left[\frac{x_1}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right]\right\} \quad a^{\cancel{6}\,5} \cdot \frac{0{,}45}{\cancel{a}}\frac{\nu c}{u_\infty}\left[\frac{x_1}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right] = \frac{0{,}45}{6(1-a)}\frac{\nu c}{u_\infty}\left(1-\frac{x_1}{c}\right)a^6 + C_c$$

$$C_c = 0{,}45 \cdot \frac{\nu c}{u_\infty}\left\{a^5\left[\frac{x_1}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right] - \frac{a^6}{6(1-a)}\left[1-\frac{x_1}{c}\right]\right\}$$

$$\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{6}\frac{\nu c}{u_\infty}\left(\frac{1-x_1/c}{1-a}\right)\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^6 + 0{,}45\frac{\nu c}{u_\infty}\left\{a^5\left[\frac{x_1}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right] - \frac{a^6}{6(1-a)}\left[1-\frac{x_1}{c}\right]\right\}$$

$$\boxed{\delta_{2_{Ⓒ}}^2 = 0{,}45\frac{\nu c}{u_\infty}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1-x_1/c}{1-a}\right) + \left[a^5\left(\frac{x_1}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right) - \frac{a^6}{6(1-a)}\left(1-\frac{x_1}{c}\right)\right] \cdot \left\{a-(a-1)\frac{x/c - x_1/c}{1-x_1/c}\right\}^{-6}\right]}$$

4) $\lambda(x/c)$

$$\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = \frac{u_\infty \delta_2^2}{\nu c} \cdot \frac{d(u_e/u_\infty)}{d(x/c)}$$

Ⓐ $\frac{d(u_e/u_\infty)}{d(x/c)} = \frac{a}{(x_0/c)} \rightarrow \lambda = \frac{u_\infty\delta_2^2}{\nu c} \cdot \frac{a}{(x_0/c)} = \frac{0{,}45}{6\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{x_0}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{(x_0/c)}} \rightarrow \boxed{\lambda_{Ⓐ} = 0{,}075}$

Ⓑ $\frac{d(u_e/u_\infty)}{d(x/c)} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_{Ⓑ} = 0}$

Ⓒ $\frac{d(u_e/u_\infty)}{d(x/c)} = \frac{1-a}{1-(x_1/c)} \rightarrow \lambda = \frac{u_\infty\delta_2^2}{\nu c} \cdot \left(\frac{1-a}{1-(x_1/c)}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{\lambda_{Ⓒ} = 0{,}45\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1-x_1/c}{1-a}\right) + \left\{a^5\left(\frac{x_1}{c} - \frac{5}{6}\frac{x_0}{c}\right) - \frac{a^6}{6(1-a)}\left(1-\frac{x_1}{c}\right)\right\}\left\{a-(a-1)\frac{x/c - x_1/c}{1-x_1/c}\right\}^{-6}\right]\left(\frac{1-a}{1-x_1/c}\right)}$$

5) x_s/c → Punto de separación.

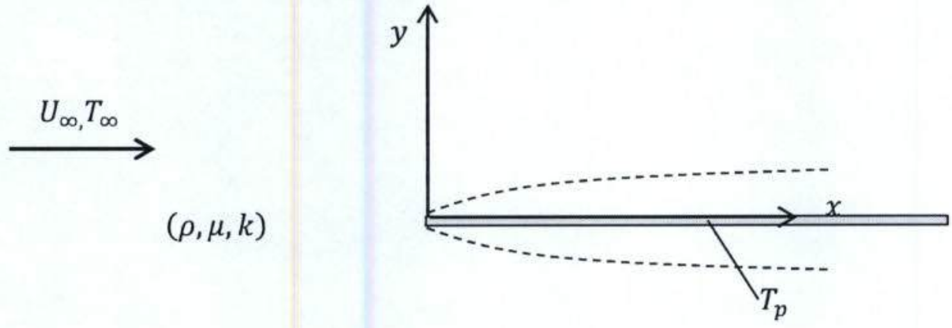
Tiene que ocurrir en el tramo C ya que gradiente de presiones desfavorable.

Se produce para: $\lambda_s = -0{,}09$ → Introduciendo este valor en la expresión λ_C → [...] ⇒ $\boxed{\frac{x_s}{c} = 0{,}663}$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada

Una placa plana mantenida a temperatura uniforme y constante T_p se expone a un flujo uniforme alineado con la placa de un fluido incompresible caracterizado por velocidad y temperatura U_∞, T_∞.



Las leyes que describen el campo de velocidad y temperatura en la capa límite que se forma sobre la placa plana se aproximan mediante leyes lineales:

$$\frac{u}{U_\infty} = \begin{cases} y/h & 0 \le y/h \le 1 \\ 1 & y/h > 1 \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} 1 - y/h_T & 0 \le y/h_T \le 1 \\ 0 & y/h_T > 1 \end{cases}$$

con $\theta = (T - T_\infty)/(T_p - T_\infty)$ y con h, h_T representando, respectivamente, los espesores totales del perfil de velocidad y temperatura en la capa límite.

Determinar, para distintos valores de $Pr = \mu c_p/k$, el valor de número de Reynolds $Re_{\delta_3} = \rho U_\infty \delta_3/\mu$ basado en el espesor de entalpía δ_3:

$$\delta_3 = \int_0^{h_T} \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}\right) dy = \int_0^{h_T} \frac{u}{U_\infty} \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} dy$$

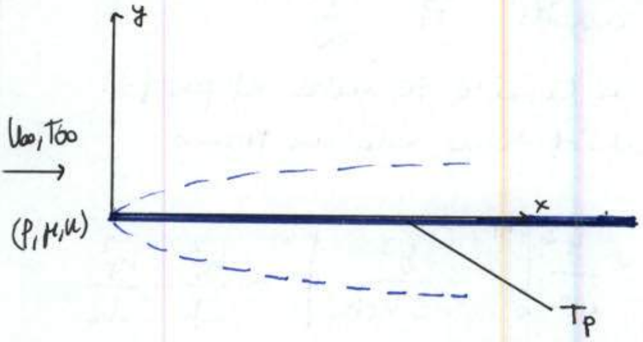
como función de Pr y del número de Reynolds $Re_x = \rho U_\infty x/\mu$.

Determinar asimismo, como función de Pr y de Re_x, el valor del número de Nusselt Nu_x:

$$Nu_x = \frac{q_p x}{k(T_p - T_\infty)}$$

con $q_p = -k(\partial T/\partial y)_{y=0}$.

PROBLEMA MÉTODO APROXIMADO DE CAPA LÍMITE TÉRMICA



→ Leyes del campo de velocidad y temperatura:

→ $\frac{u}{U_\infty} = \begin{cases} y/h & 0 \le y/h \le 1 \\ 1 & y/h \geq 1 \end{cases}$

→ $\theta = \begin{cases} 1 - y/h_T & 0 \le y/h_T \le 1 \\ 0 & y/h_T > 1 \end{cases}$

* Primero hay que resolver el campo de velocidad:

$y > h \rightarrow u_e = U_\infty$ ↗ $\frac{dU_e}{dx} = 0 \rightarrow$ Ec. de Karman: $\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{C_f}{2} \rightarrow$ obtengo δ_2 y C_f

$$\delta_2 = \int_0^h \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = h \int_0^1 \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) d\left(\frac{y}{h}\right) = h \int_0^1 \xi(1-\xi)\, d\xi = h\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\underline{\underline{\delta_2 = \frac{h}{6}}}$$

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{\mu \frac{\cancel{U_\infty}}{h}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^{\cancel{2}}} = \frac{2\nu}{U_\infty} = \underline{\underline{\frac{2}{Re_h} = C_f}}$$

$Re_h = \frac{h U_\infty}{\nu}$

$$\frac{d(h/6)}{dx} = \frac{1}{Re_h} \rightarrow \frac{1}{6}\frac{dh}{dx} = \frac{1}{Re_h} = \frac{\nu}{U_\infty h} \rightarrow \int_0^h h\, dh = \frac{6\nu}{U_\infty}\int_0^x dx$$

$$\frac{h^2}{2} = \frac{6\nu}{U_\infty}\frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{h}{x} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} \rightarrow \boxed{\frac{h(x)}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{Re_x}}}$$

$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{Re_h}{Re_x} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow \boxed{Re_h = \sqrt{12 Re_x}}$$ ⇝ $Re_\delta \sim A\sqrt{Re_x}$

$$\frac{\delta_2/h}{x/h} = \frac{1/6}{\sqrt{Re_x}(1/2\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{Re_x}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} = \delta_2}$$

* Resolución del campo de temperatura:

→ La solución depende del número de Prandtl : $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

⊛ $\boxed{Pr \gg 1}$ $(\nu \gg \alpha \rightarrow h \gg h_T)$: En la capa límite térmica el perfil de velocidad tiene sólo un tramo.

$$\delta_3 = \int_0^{h_T} \frac{u}{U_\infty}\underbrace{\left(\frac{T-T_\infty}{T_p-T_\infty}\right)}_{\theta} dy = \int_0^{h_T} \frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h_T}\right)dy = \left.\frac{y^2}{2h}\right|_0^{h_T} - \left.\frac{y^3}{3h_T h}\right|_0^{h_T} = \frac{h_T^2}{2h} - \frac{h_T^2}{3h}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{6}\frac{h_T^2}{h} \quad \rightarrow \quad \frac{d\delta_3}{dx} = St = \frac{q_p}{\rho c_p (T_p - T_\infty) U_\infty}$$

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k(T_p - T_\infty)\cdot\frac{1}{h_T}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\theta}{\partial(y/h_T)}\right)}_{-1} = \frac{k(T_p-T_\infty)}{h_T}$$

$$S_t = \frac{k\cancel{(T_p-T_\infty)}/h}{\rho c_p U_\infty \cancel{(T_p-T_\infty)}} = \underbrace{\frac{k}{\mu c_p}}_{Pr^{-1}}\cdot\underbrace{\frac{\mu}{\rho U_\infty h_T}}_{Re_{h_T}} = \left(Pr\cdot Re_{h_T}\right)^{-1} = St$$

$$\frac{1}{6}\frac{d\left(h_T^2/h\right)}{dx} = \frac{1}{Pr\cdot Re_{h_T}} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{Re_{h_T}}{6}\cdot\frac{Re_{h_T}}{Re_h}\cdot\frac{\mu}{\rho U_\infty}\right) = \frac{d}{dRe_x}\cdot\left(\frac{Re_{h_T}}{6}\cdot\frac{Re_{h_T}}{Re_h}\right) = \left(Pr\cdot Re_{h_T}\right)^{-1}$$

parámetro a determinar dependiente del Pr

$$\frac{h_T}{h} = \frac{Re_{h_T}}{Re_h} = \frac{a\cdot\cancel{\sqrt{Re_x}}}{\sqrt{12}\cancel{\sqrt{Re_x}}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dRe_x}\left(\frac{a\sqrt{Re_x}}{6}\cdot\frac{a}{\sqrt{12}}\right) = \frac{d}{dRe_x}\left(\frac{a^2}{6\sqrt{12}}\cdot\sqrt{Re_x}\right) = \frac{1}{a\sqrt{Re_x}\cdot Pr}$$

$$\hookrightarrow \frac{a^2}{6\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{Re_x}}} = \frac{1}{a\cancel{\sqrt{Re_x}}\cdot Pr} \rightarrow \frac{a^3}{12\sqrt{12}} = \frac{1}{Pr} \Rightarrow a = Pr^{-1/3}\cdot\sqrt{12}$$

$$Re_{h_T} = \frac{U_\infty h_T}{\nu} = Pr^{-1/3}\sqrt{12\,Re_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_T}{h} = Pr^{-1/3} = \frac{Re_{h_T}}{Re_h}$$

$$Re_{\delta_3} = \frac{U_\infty\delta_3}{\nu} = \underbrace{\frac{U_\infty h_T}{\nu}}_{Re_{h_T}}\cdot\frac{1}{6}\cdot\underbrace{\frac{h_T}{h}}_{Pr^{-1/3}} = Pr^{-1/3}\cdot\sqrt{12\,Re_x}\cdot\frac{1}{6}\cdot Pr^{-1/3} = \frac{\sqrt{12}}{6}\sqrt{Re_x}\cdot Pr^{-2/3}$$

$$\hookrightarrow \boxed{Re_{\delta_3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot Pr^{-2/3}\cdot Re_x^{1/2}}$$

$$Nu_x = \frac{q_p x}{k(T_p-T_\infty)} = \underbrace{\frac{q_p}{\rho U_\infty c_p (T_p-T_\infty)}}_{St}\cdot\underbrace{\frac{\rho U_\infty x}{\mu}}_{Re_x}\cdot\underbrace{\frac{\mu c_p}{k}}_{Pr} = \frac{1}{\cancel{Pr}\cdot Re_{h_T}}\cdot Re_x\cdot\cancel{Pr} = \frac{Re_x}{Pr^{-1/3}\sqrt{12\,Re_x}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\cdot Re_x^{1/2}\cdot Pr^{1/3}$$

$$\boxed{Nu_x = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot Pr^{1/3}\cdot Re^{1/2}}$$

PROBLEMA MÉTODO APROXIMADO DE CAPA LÍMITE TÉRMICA (CONTINUACIÓN)

⊛ $\boxed{Pr \ll 1}$ $(\nu \ll \alpha \rightarrow h \ll h_T)$: En la capa límite térmica el perfil de velocidades tiene dos tramos.

$$\delta_3 = \int_0^h \frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h_T}\right)dy + \int_h^{h_T}\left(1-\frac{y}{h_T}\right)dy = \frac{y^2}{2h}\Big|_0^h - \frac{y^3}{3hh_T}\Big|_0^h + y\Big|_h^{h_T} - \frac{y^2}{2h_T}\Big|_h^{h_T} =$$

$$= \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3h_T} + (h_T - h) - \left(\frac{h_T}{2} - \frac{h^2}{2h_T}\right) = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3h_T} + h_T - h - \frac{h_T}{2} + \frac{h^2}{2h_T} =$$

$$= -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{6h_T} + \frac{h_T}{2} = \frac{h_T}{2}\left[1 - \left(\frac{h}{h_T}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{h_T}\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{h_T}{2}\left[1 - \frac{h}{h_T} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{h_T}\right)^2\right]\right\} = \frac{1}{Re_{h_T} Pr} \; ; \quad \left\{\begin{array}{l} Re_{h_T} = b\sqrt{Re_x} \quad \rightarrow \text{Parámetro a determinar dependiente del Pr.} \\ \dfrac{h}{h_T} = \dfrac{\sqrt{12}\,\cancel{\sqrt{Re_x}}}{b\,\cancel{\sqrt{Re_x}}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{b} \\ Re_{h_T} = \dfrac{U_\infty h_T}{\nu} \rightarrow h_T = \dfrac{\nu}{U_\infty}\cdot Re_{h_T} \end{array}\right.$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\nu}{U_\infty}\cdot\frac{Re_{h_T}}{2}\left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{b} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{b}\right)^2\right]\right\} = \frac{1}{b\sqrt{Re_x}\cdot Pr}$$

$$\frac{d}{dRe_x}\left\{\frac{\sqrt{Re_x}\, b}{2}\left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{b} + \frac{4}{b^2}\right]\right\} = \frac{1}{2\cancel{\sqrt{Re_x}}}\,\frac{b}{2}\left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{b} + \frac{4}{b^2}\right] = \frac{1}{b\cancel{\sqrt{Re_x}}\,Pr}$$

$$\frac{b^2}{4}\left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{b} + \frac{4}{b^2}\right] = \frac{b^2}{4} - \frac{\sqrt{3}\cdot b}{2} + 1 = Pr^{-1} \rightarrow \frac{b^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}b + (1 - Pr^{-1}) = 0$$

$$b = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\dfrac{3}{4} - 4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(1 - Pr^{-1})}}{1/2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 4\left(Pr^{-1} - 1\right)} = \left\{\begin{array}{l} - \;✗ \\ + \cdots ✓ \end{array}\right.$$

$$b = \sqrt{3}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}\right] \quad \left\{\begin{array}{l} \text{cuando } Pr \gg 1: b \rightarrow a = Pr^{-1/3}\sqrt{12} \\ \text{cuando } Pr = 1: b = a = \sqrt{12} \\ \text{cuando } Pr \ll 1: b \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{Pr}} \end{array}\right.$$

$$Re_{\delta_3} = \frac{U_\infty \delta_3}{\nu} = \underbrace{\frac{U_\infty h_T}{\nu}}_{Re_{h_T}}\cdot\frac{1}{2}\left[1 - \frac{h}{h_T} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{h_T}\right)^2\right] = \frac{\overset{b\sqrt{Re_x}}{Re_{h_T}}}{2}\left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{b} + \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{4\cdot\cancel{3}}{b^2}\right]$$

$$Re_{\delta_3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}\right]\sqrt{Re_x}\left\{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}} + \frac{4/3}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}\right)^2}\right\}$$

• Cuando $Pr \ll 1$: $$\boxed{Re_{\delta_3} \rightarrow \frac{\sqrt{Re_x}}{\sqrt{Pr}}\left\{1 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{Pr} + 2\cdot Pr\right\}}$$

$$Nu_x = St\cdot Pr\cdot Re_x = \frac{Re_x}{\cancel{Pr}\cdot\sqrt{3}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)}\right]\sqrt{Re_x}}\cdot\cancel{Pr} = \frac{\sqrt{Re_x}/\sqrt{3}}{\left[1 + \sqrt{1 + 4/3\left(1/Pr - 1\right)}\right]} = Nu_x$$

• Cuando $Pr \ll 1$: $$\boxed{Nu_x \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{Pr}\cdot\sqrt{Re_x}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO. ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Parcial 12–11–2016**

En la capa límite laminar de un líquido (densidad ρ, viscosidad μ, calor específico c y conductividad térmica k), la corriente exterior es de valor $u_e(x)$ conocida (y de valor característico u_c) y la temperatura exterior es T_∞ constante y conocida. La pared tiene una longitud característica ℓ y su temperatura es T_P constante. Se sabe que el número de Prandtl, $\mu c/k$, es muy grande, de modo que el espesor de la capa límite viscosa, δ_v, es muy grande frente al espesor de la capa límite térmica, δ_T. Se pide:

1. Determinen el gradiente de presiones en función de $u_e(x)$. Indiquen como debe ser la variación de $u_e(x)$ para que el gradiente de presiones sea favorable.
2. Orden de magnitud de las velocidades longitudinal y transversal en la capa límite viscosa. Orden de magnitud del espesor δ_v de la capa límite viscosa.
3. Orden de magnitud del coeficiente de fricción definido como $C_f = 2\tau_p/\rho u_e^2$, siendo τ_p el esfuerzo en la pared.
4. Orden de magnitud de las velocidades longitudinal y transversal en la capa límite térmica. Orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica.
5. Orden de magnitud del flujo de calor en la pared en términos del número de Stanton: $St = q_p/\left[\rho u_e c\,(T_p - T_\infty)\right]$.

SOLUCIÓN

1.- El gradiente de presiones está dado por

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}.$$

Para que sea favorable, es necesario que $dp_e/dx < 0$, lo que implica $du_e/dx > 0$.

2.- En la capa límite viscosa la velocidad longitudinal es $u \sim u_e \sim u_c$, mientras que la velocidad transversal, de la ecuación de la continuidad se tiene

$$v \sim u_c \frac{\delta_v}{\ell} \ll u_c.$$

para obtener el orden de magnitud del espesor de la capa viscosa debe ocurrir que

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\rho u_c^2}{\ell} \sim \mu \frac{u_c}{\delta_v^2} \Rightarrow \frac{\delta_v}{\ell} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_c \ell}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

ya que $\rho v \partial u/\partial y \sim \rho u \partial u/\partial x$.

3.- El esfuerzo en la pared está dado por

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \mu \frac{u_c}{\delta_v} \sim \mu \frac{u_c}{\ell} \frac{\ell}{\delta_v} \sim \mu \frac{u_c}{\ell} \sqrt{Re},$$

de modo que, de la definición de C_f se tiene

$$C_f \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

4.- En la capa límite térmica, de espesor mucho menor que la viscosa, la velocidad longitudinal es, en primera aproximación,

$$u = \left(\frac{\tau_p}{\mu}\right) y \sim u_c \frac{\delta_T}{\delta_v} \ll u_c,$$

ya que $\delta_T/\delta_v \ll 1$. En definitiva se tiene

$$u \sim u_c \sqrt{Re} \frac{\delta_T}{\ell}.$$

De acuerdo con la ecuación de la continuidad se tiene

$$v \sim u \frac{\delta_T}{\ell} \sim u_c \sqrt{Re} \left(\frac{\delta_T}{\ell}\right)^2.$$

Para determinar el orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica, bastará con hacer que cualquiera de los términos convectivos (los dos son del mismo orden) sea del orden del término de conducción; esto es:

$$\rho u c \frac{\partial T}{\partial x} \sim k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\rho c (T_p - T_\infty)}{\ell} u_c \sqrt{Re} \frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{k (T_p - T_\infty)}{\delta_T^2} \Rightarrow \frac{\delta_T}{\ell} \sim Pr^{-1/3} \times Re^{1/2}.$$

5.- El flujo de calor en la pared está dado por

$$q_p = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \frac{k (T_p - T_\infty)}{\delta_T} \sim \frac{k (T_p - T_\infty)}{\ell} \frac{\ell}{\delta_T} \sim \frac{k (T_p - T_\infty)}{\ell} Pr^{1/3} Re^{1/2},$$

de modo que el número de Stanton queda

$$St \sim \frac{k (T_p - T_\infty) Pr^{1/3} Re^{1/2}}{\rho u_c \ell c (T_p - T_\infty)} \sim \frac{k}{\mu c} \frac{\mu}{\rho u_c \ell} Pr^{1/3} Re^{1/2} \sim Pr^{-2/3} \times Re^{-1/2}.$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Parcial 12.11.2016**

Se desea describir, de forma aproximada, la capa límite que se desarrolla sobre una placa plana expuesta a un flujo uniforme, compresible subsónico, caracterizado por un número de Mach sin perturbar M_e, en un gas caloríficamente perfecto que verifica:

$$Pr \approx 1, \qquad (\gamma-1)M_e^2/2 \ll 1$$

La placa plana está aislada térmicamente y la viscosidad del gas puede aproximarse mediante una ley simplificada:

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/4}$$

2 1) Determinar el campo de temperaturas T/T_e y de densidad ρ/ρ_e en la capa límite como función de $((\gamma-1)M_e^2/2\,, u/u_e)$. Siendo μ_P el valor de la viscosidad del fluido en $y=0$, determinar asimismo la relación μ_P/μ_e como función de $(\gamma-1)M_e^2/2$. Aproximar las relaciones resultantes por expresiones lineales en $(\gamma-1)M_e^2/2$.

2 2) Suponiendo un perfil lineal de velocidades en la capa límite:

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta), \qquad f(\eta) = \begin{cases} \eta & 0 \le \eta \le 1 \\ 1 & \eta > 1 \end{cases}$$

con $\eta = y/h(x)$, siendo $h(x)$ el espesor total de la capa límite en la estación x, determinar el valor de la relación $\delta_2/h(x)$ como función del parámetro $(\gamma-1)M_e^2/2$, aproximando la relación resultante por una expresión lineal en $(\gamma-1)M_e^2/2$. Determinar asimismo el valor del coeficiente de fricción $c_f = 2\tau_p/\rho_e u_e^2$ como función del número de Reynolds basado en δ_2, $\rho_e u_e \delta_2/\mu_e$, y del parámetro $(\gamma-1)M_e^2/2$, aproximando la relación resultante como función lineal de este último parámetro.

2 3) Utilizando la ecuación de Karman, determinar el valor de las relaciones δ_2/δ_{2i} y de c_f/c_{fi}, siendo δ_{2i} y c_{fi} respectivamente los valores del espesor de cantidad de movimiento y del coeficiente de fricción en el límite incompresible, obtenidos para el mismo valor de $Re = \rho_e u_e x/\mu_e$ cuando $M_e^2 \to 0$.

4 4) Se pretende estudiar dos capas límites sometidas a gradiente de presiones. La primera corresponde a una capa límite compresible subsónica, con $Pr = 1$, $(\gamma-1)M_{ec}^2/2 \ll 1$ y $2/\big((2+H_{12})(\gamma-1)\big) \sim 1$, siendo M_{ec} un valor característico del número de Mach de la corriente exterior. Esta capa límite se desarrolla a lo largo de una pared con coordenada $0 \le x \le l$ sobre la que el flujo exterior posee una distribución de velocidad $u_e(x)$, con condiciones de remanso dadas por la densidad y temperatura totales ρ_{0e}, T_{0e}.

La segunda capa límite se desarrolla con un flujo incompresible de densidad ρ y viscosidad μ constantes, a lo largo de una pared con coordenada $0 \le x_i \le l_i$ sobre la que el flujo exterior posee una distribución de velocidad $u_{ei}(x_i)$.

Escribir la ecuación de Karman que gobierna la evolución del espesor de cantidad de movimiento tanto para la capa límite compresible como para la incompresible, adimensionalizando el espesor y la coordenada de la capa límite con la longitud de cada placa, l y l_i, y las velocidades exteriores con las existentes al final de cada placa, $u_e(l)$ y $u_{ei}(l_i)$.

Determinar, razonándolo, las condiciones que deben cumplir las respectivas distribuciones de velocidad exterior adimensional $\tilde{u}_e(\tilde{x}), \tilde{u}_{ei}(\tilde{x}_i)$, y los respectivos números de Reynolds del problema compresible e incompresible:

$$Re = \frac{\rho_{0e} \cdot u_e(l) \cdot l}{\mu_{0e}} \quad , \quad Re_i = \frac{\rho \cdot u_{ei}(l_i) \cdot l_i}{\mu}$$

para que la evolución adimensional de los espesores de cantidad de movimiento en ambas capas límites, $\tilde{\delta}_2(\tilde{x})$ y $\tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)$, verifiquen:

$$\frac{|\tilde{\delta}_2(\tilde{x}) - \tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)|}{\tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)} \sim \frac{\gamma-1}{2} M_{ec}^2 \ll 1$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Parcial 12.11.2016**

Se desea describir, de forma aproximada, la capa límite que se desarrolla sobre una placa plana expuesta a un flujo uniforme, compresible subsónico, caracterizado por un número de Mach sin perturbar M_e, en un gas caloríficamente perfecto que verifica:

$$Pr \approx 1, \qquad (\gamma-1)M_e^2/2 \ll 1$$

La placa plana está aislada térmicamente y la viscosidad del gas puede aproximarse mediante una ley simplificada:

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/4}$$

1) Determinar el campo de temperaturas T/T_e y de densidad ρ/ρ_e en la capa límite como función de $((\gamma-1)M_e^2/2\,, u/u_e)$. Siendo μ_P el valor de la viscosidad del fluido en $y=0$, determinar asimismo la relación μ_P/μ_e como función de $(\gamma-1)M_e^2/2$. Aproximar las relaciones resultantes por expresiones lineales en $(\gamma-1)M_e^2/2$.

2) Suponiendo un perfil lineal de velocidades en la capa límite:

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta), \qquad f(\eta) = \begin{cases} \eta & 0 \le \eta \le 1 \\ 1 & \eta > 1 \end{cases}$$

con $\eta = y/h(x)$, siendo $h(x)$ el espesor total de la capa límite en la estación x, determinar el valor de la relación $\delta_2/h(x)$ como función del parámetro $(\gamma-1)M_e^2/2$, aproximando la relación resultante por una expresión lineal en $(\gamma-1)M_e^2/2$. Determinar asimismo el valor del coeficiente de fricción $c_f = 2\tau_p/\rho_e u_e^2$ como función del número de Reynolds basado en δ_2, $\rho_e u_e \delta_2/\mu_e$, y del parámetro $(\gamma-1)M_e^2/2$, aproximando la relación resultante como función lineal de este último parámetro.

3) Utilizando la ecuación de Karman, determinar el valor de las relaciones δ_2/δ_{2i} y de c_f/c_{fi}, siendo δ_{2i} y c_{fi} respectivamente los valores del espesor de cantidad de movimiento y del coeficiente de fricción en el límite incompresible, obtenidos para el mismo valor de $Re = \rho_e u_e x/\mu_e$ cuando $M_e^2 \to 0$.

4) Se pretende estudiar dos capas límites sometidas a gradiente de presiones. La primera corresponde a una capa límite compresible subsónica, con $Pr = 1$, $(\gamma-1)M_{ec}^2/2 \ll 1$ y $2/\big((2+H_{12})(\gamma-1)\big) \sim 1$, siendo M_{ec} un valor característico del número de Mach de la corriente exterior. Esta capa límite se desarrolla a lo largo de una pared con coordenada $0 \le x \le l$ sobre la que el flujo exterior posee una distribución de velocidad $u_e(x)$, con condiciones de remanso dadas por la densidad y temperatura totales ρ_{0e}, T_{0e}.

La segunda capa límite se desarrolla con un flujo incompresible de densidad ρ y viscosidad μ constantes, a lo largo de una pared con coordenada $0 \le x_i \le l_i$ sobre la que el flujo exterior posee una distribución de velocidad $u_{ei}(x_i)$.

Escribir la ecuación de Karman que gobierna la evolución del espesor de cantidad de movimiento tanto para la capa límite compresible como para la incompresible, adimensionalizando el espesor y la coordenada de la capa límite con la longitud de cada placa, l y l_i, y las velocidades exteriores con las existentes al final de cada placa, $u_e(l)$ y $u_{ei}(l_i)$.

Determinar, razonándolo, las condiciones que deben cumplir las respectivas distribuciones de velocidad exterior adimensional $\tilde{u}_e(\tilde{x}), \tilde{u}_{ei}(\tilde{x}_i)$, y los respectivos números de Reynolds del problema compresible e incompresible:

$$Re = \frac{\rho_{0e} \cdot u_e(l) \cdot l}{\mu_{0e}} \quad , \quad Re_i = \frac{\rho \cdot u_{ei}(l_i) \cdot l_i}{\mu}$$

para que la evolución adimensional de los espesores de cantidad de movimiento en ambas capas límites, $\tilde{\delta}_2(\tilde{x})$ y $\tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)$, verifiquen:

$$\frac{\left|\tilde{\delta}_2(\tilde{x}) - \tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)\right|}{\tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)} \sim \frac{\gamma-1}{2} M_{ec}^2 \ll 1$$

Solución

1) La ecuación de la energía para el flujo compresible en la capa límite con $Pr = 1$ es:

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x}(h_0) + \rho v \frac{\partial}{\partial y}(h_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y}\right) \tag{1}$$

Las condiciones de contorno para esta ecuación son:

$$y = 0: \ \frac{\partial h_0}{\partial y} = 0; \qquad y \to \infty: \ h_0 \to h_{0e} \tag{2a}$$

$$x = 0: \ h_0 = h_{0e} \quad \forall y \tag{2b}$$

La solución al sistema (1)-(2) proporciona:

$$h_0 = h_{0e} \tag{3}$$

o bien:

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right] \tag{4}$$

Además, dado que a través de la capa límite $p/p_e \approx 1$ y que $(\gamma - 1)M_e^2/2 \ll 1$, podemos escribir:

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \left\{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right]\right\}^{-1} \approx 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right] \tag{5}$$

La viscosidad en la pared toma la forma:

$$\frac{\mu_P}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)_{y=0}^{3/4} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)^{3/4} \approx 1 + \frac{3}{4}\frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \tag{6}$$

2) Introduciendo la ley de densidades obtenida anteriormente, y el perfil de velocidad proporcionado en el enunciado, el espesor de cantidad de movimiento resulta:

$$\frac{\delta_2}{h(x)} = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_e}\frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\left(\frac{y}{h}\right) \approx \int_0^1 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 (1 - \eta^2)\right] \eta(1 - \eta) d\eta \tag{7}$$

o bien:

$$\frac{\delta_2}{h(x)} \approx \frac{1}{6}\left(1 - 0.7\frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) \tag{8}$$

El coeficiente de fricción se expresa como:

$$c_f = \frac{2(\mu\, \partial u/\partial y)_{y=0}}{\rho_e u_e^2} = 2\left(\frac{\rho_e u_e \delta_2}{\mu_e}\right)^{-1} \frac{\mu_P}{\mu_e}\frac{\delta_2}{h} \tag{9}$$

Introduciendo los valores obtenidos anteriormente para μ_p/μ_e, δ_2/h, resulta:

$$c_f \approx \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_e u_e \delta_2}{\mu_e}\right)^{-1} \left(1 + 0.05\frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) \tag{10}$$

3) La ecuación de Karman para este flujo adopta la expresión:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{c_f}{2}; \quad x = 0: \delta_2 = 0 \tag{11}$$

Introduciendo la expresión (10), teniendo en cuenta $(\gamma - 1)M_e^2/2 \ll 1$ se obtiene:

$$\frac{\delta_2}{x} = c_f = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + 0.05\frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right)^{1/2} Re^{-1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + 0.025\frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right) Re^{-1/2} \tag{12}$$

Por tanto, asumiendo $\rho_e u_e x/\mu_e = \rho u_{ei} x/\mu$ con (ρ, μ, u_{ei}) siendo los valores de densidad, viscosidad y velocidad exterior que caracterizan al límite incompresible, resulta:

$$\frac{\delta_2}{\delta_{2i}} = \frac{c_f}{c_{fi}} \approx \left(1 + 0.025\frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right) \tag{13}$$

con δ_{2i}, c_{fi} siendo los valores del espesor de cantidad de movimiento y coeficiente de fricción correspondientes al límite incompresible. Para $M_e = 0.8$:

$$\frac{\delta_2}{\delta_{2i}} = \frac{c_f}{c_{fi}} \approx 1.0032 \tag{14}$$

Dentro de las aproximaciones consideradas, el resultado (14) implica que la evolución del espesor de cantidad de movimiento y del esfuerzo en la pared de una capa límite compresible subsónica sin gradiente de presión es prácticamente idéntico al de una incompresible siempre que $\rho_e u_e x/\mu_e = \rho u_{ei} x/\mu$.

4) La ecuación de Karman para el caso más general de flujo compresible con gradiente de presiones es:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12} - M_e^2)\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\delta_2 = \frac{c_f}{2}; \quad x = 0: \delta_2 = 0 \tag{15}$$

o bien, introduciendo la adimensionalizacion propuesta:

$$\frac{d\tilde{\delta}_2}{d\tilde{x}} + (2 + H_{12})\left(1 - \frac{2}{(2 + H_{12})(\gamma - 1)}\frac{(\gamma - 1)}{2}M_e^2\right)\frac{1}{\tilde{u}_e}\frac{d\tilde{u}_e}{d\tilde{x}}\tilde{\delta}_2 = Re^{-1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right)^{1/(\gamma-1)} \cdot \left(\frac{\delta_2}{h}f_0'\right)\frac{1}{\tilde{\delta}_2\tilde{u}_e} \tag{16}$$

siendo $f(\eta) = u/u_e$, con $\eta = y/h$ y $f'_0 = (df/d\eta)_{\eta=0}$ y donde el factor $2/((2 + H_{12})(\gamma - 1)) \sim 1$. Además:

$$\left(\frac{\delta_2}{h}f_0'\right) = g\left(\lambda, \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right), \quad H_{12} = H_{12}\left(\lambda, \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right) \tag{17}$$

donde la dependencia con $(\gamma - 1)M_e^2/2$ desaparece en el límite $(\gamma - 1)M_e^2/2 \to 0$, y siendo:

$$\lambda = \left(\frac{\delta_2}{h}\right)^2 f_0'' = \frac{\rho_e \delta_2^2\, du_e/dx}{\mu_p} = Re \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right)^{-1/(\gamma-1)} \tilde{\delta}_2^2 \frac{d\tilde{u}_e}{d\tilde{x}} \tag{18}$$

La ecuación de evolución de la capa limite incompresible viene dada por:

$$\frac{d\tilde{\delta}_{2i}}{d\tilde{x}_i} + \left(2 + H_{12,i}\right)\frac{1}{\tilde{u}_{ei}}\frac{d\tilde{u}_{ei}}{d\tilde{x}_i}\tilde{\delta}_{2i} = Re_i^{-1} \cdot \left(\frac{\delta_2}{h}f_0'\right)_i \frac{1}{\tilde{\delta}_{2i}\tilde{u}_{ei}} \tag{19}$$

donde:

$$\left(\frac{\delta_2}{h}f_0'\right)_i = g(\lambda_i), \quad H_{12} = H_{12}(\lambda_i) \tag{20}$$

con:

$$\lambda_i = \left(\frac{\delta_{2i}}{h_i}\right)^2 f_{i0}'' = \frac{\rho\delta_2^2\, du_e/dx}{\mu} = Re_i \cdot \tilde{\delta}_{2i}^2 \frac{d\tilde{u}_{ei}}{d\tilde{x}_i} \tag{21}$$

Haciendo:

$$Re_i = Re; \quad \tilde{u}_{ei}(\tilde{x}_i) = \tilde{u}_e(\tilde{x}) \tag{22}$$

las ecuaciones (15)-(18) y (19)-(21) que definen respectivamente el problema compresible e incompresible difieren en términos de orden $(\gamma - 1)M_e^2/2 \ll 1$. En consecuencia podemos escribir:

$$\frac{\left|\tilde{\delta}_2(\tilde{x}) - \tilde{\delta}_{2i}(\tilde{x}_i)\right|}{\tilde{\delta}_{2i}} \sim \frac{\gamma - 1}{2} M_{ec}^2 \ll 1 \tag{23}$$

Siendo M_{ec} un valor característico del número de Mach para el caso compresible.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 01-02-2016**

PRIMERA PREGUNTA

Las soluciones de Falkner-Skan describen las capas límites que se forman sobre cuñas. El flujo potencial alrededor de una cuña de ángulo $\pi\beta$ da lugar a una velocidad de deslizamiento a lo largo de la pared de la forma $u_e(x) = Ax^{\beta/(2-\beta)}$, donde A es una constante. La capa límite viscosa sobre la cuña admite solución de semejanza con la variable

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}},$$

siendo la función de corriente: $\psi = f(\eta)\sqrt{(2-\beta)\nu x u_e(x)}$; mientras que la velocidad está dada por $u = u_e(x)(df/d\eta)$. La ecuación de cantidad de movimiento se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, que permite determinar $f(\eta)$, que para valores pequeños de η se tiene $\lim\limits_{\eta\to 0} f(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}$, mientras que para valores muy grandes de η se obtiene $\lim\limits_{\eta\to\infty} f(\eta) = \eta$.

La ecuación de la energía, que permite determinar la distribución de temperaturas en la capa límite, también admite solución de semejanza y se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + Prf(\eta)\frac{d\theta}{d\eta} = 0,$$

donde $\theta = (T - T_\infty)/(T_p - T_\infty)$, siendo T_∞ la temperatura de la corriente exterior y T_p la temperatura de la pared, ambas constantes. El número de Prandtl es $Pr = \mu c/k$.

Utilizando la ecuación anterior y los datos proporcionados sobre la función $f(\eta)$, se trata de determinar el número de Nusselt (o su equivalente, el flujo de calor en la pared) cuando el número de Prandtl es muy pequeño ($Pr \ll 1$). Observen que para $Pr \ll 1$, la capa límite térmica es muy gruesa comparada con la viscosa[1].

SEGUNDA PREGUNTA

Refiriéndonos al problema anterior de la contracción en el que la velocidad exterior puede asimilarse a la velocidad media longitudinal a lo largo del eje de la contracción x_1, de modo que $\bar{u}_1(x_1 = 0) = U_0$ y $\bar{u}_1(x_1 = L) = CU_0$, la rejilla genera un flujo turbulento débil y uniforme al inicio de la contracción, caracterizado por un nivel de energía cinética turbulenta $k_0 \ll U_0^2$ y una escala integral turbulenta $\ell_{t0} \sim k_0^{3/2}/\varepsilon_0$, con ε_0 siendo el valor de la disipación turbulenta a la entrada de la contracción. Suponiendo $C \gg 1$, de forma que $k_0^{1/2}/(CU_0) \ll \ell_{t0}/L \ll 1$, y asumiendo que es posible despreciar las variaciones transversales de energía cinética turbulenta, se desea analizar su evolución a lo largo del eje de la contracción. Para ello, partiendo de la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta en turbulencia libre

$$\bar{u}_j\frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_t\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \varepsilon,$$

evaluar el orden de magnitud de los distintos términos que aparecen en la ecuación, simplificándola. Considerando asimismo que en el flujo casi-unidireccional en la dirección x_1 se verifica $\overline{u_1'^2} \approx \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}$ determinar la relación k_L/k_0, siendo k_L el nivel de energía cinética turbulenta a la salida de la contracción.

---

[1] Tengan en cuenta que

$$\int_0^\infty e^{-\varsigma^2}d\varsigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

SOLUCIÓN

PRIMERA PREGUNTA

Como la capa límite viscosa es muy delgada con respecto a la térmica cuando $Pr \ll 1$, la función $f(\eta)$ puede aproximarse por η, con lo que la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \eta Pr \frac{d\theta}{d\eta} = 0,$$

que puede integrarse una vez para dar

$$\frac{d\theta}{d\eta} = K \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right),$$

de esta ecuación se deduce que

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K,$$

integrando de nuevo se tiene

$$\theta = 1 + K \int_0^{\eta} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right)\right] d\eta,$$

donde se ha impuesto la condición de contorno $T = T_p$ en $y = 0$, lo que implica $\theta = 1$ en $\eta = 0$. Para determinar la constante K hay que imponer la condición de contorno $T = T_\infty$ en $y \to \infty$, lo que implica $\theta = 0$ en $\eta \to \infty$, mediante esta condición se obtiene

$$K = \frac{-1}{\int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right)\right] d\eta},$$

ecuación que con $\varsigma = \eta\sqrt{Pr/2}$, puede escribirse como

$$\int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right)\right] d\eta = \sqrt{\frac{2}{Pr}} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\varsigma^2\right)\right] d\varsigma = \sqrt{\frac{\pi}{2Pr}},$$

lo que proporciona

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K = -\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}.$$

El flujo de calor está dado por

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k\left(T_p - T_\infty\right)\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -k\left(T_p - T_\infty\right)\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} \sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}},$$

y sustituyendo el valor de $\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K = -\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}$ se obtiene

$$q_p = \frac{k\left(T_p - T_\infty\right)}{x} \sqrt{\frac{2Pr Re_x}{\pi(2-\beta)}},$$

siendo $Re_x = x u_e(x)/\nu$. El número de Nusselt es

$$Nu = \frac{q_p x}{k\left(T_p - T_\infty\right)} = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi(2-\beta)}}\right] \sqrt{Pr Re_x}.$$

SEGUNDA PREGUNTA

Si x_1 y x_2 representan la coordenada axial y transversal en el eje de la contracción, la ecuación de la energía cinética toma la forma

$$\bar{u}_1 \frac{\partial k}{\partial x_1} = -\overline{u_1'^2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon,$$

Asumiendo que $\overline{u_1'^2} \approx \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}$, resulta que $k = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right) \approx \frac{1}{2}\left(2\overline{u_1'^2}\right) = \overline{u_1'^2}$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{\partial\left(\bar{u}_1 k\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon.$$

El orden de magnitud de la viscosidad cinemática turbulenta es $\nu_t \sim \ell_{t0}\sqrt{k_0}$, el de la velocidad $u_e \sim CU_0$, el de la coordenada $x_1 \sim L$, el de la energía cinética turbulenta $k \sim k_0$ y el de la disipación $\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim k_0^{3/2}/\ell_{t0}$. Con estos órdenes de magnitud se tiene: $\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1} \sim CU_0 k_0/L$; $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) \sim \ell_{t0} k_0^{3/2}/L^2$; y $\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim k_0^{3/2}/\ell_{t0}$. Refiriendo los órdenes de magnitud de los dos términos del segundo miembro al orden de magnitud del primer miembro se tiene

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right)}{\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1}} \sim \frac{\ell_{t0}}{L}\frac{k_0^{1/2}}{CU_0} \ll 1,$$

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1}} \sim \frac{k_0^{1/2}}{CU_0}\frac{L}{\ell_{t0}} \ll 1,$$

ya que aunque $L/\ell_{t0} \gg 1$, el producto anterior todavía es pequeño, de acuerdo con lo citado en el enunciado. A la vista de esto, la ecuación de la energía cinética turbulenta se reduce a

$$\frac{\partial\left(\bar{u}_1 k\right)}{\partial x_1} = 0,$$

que puede integrarse para dar

$$\bar{u}_1 k = U_0 k_0,$$

que particularizada al final de la contracción, donde $\bar{u}_1 = CU_0$, proporciona la energía cinética turbulenta, k_L, en la salida de la contracción

$$\frac{k_L}{k_0} = \frac{U_0}{CU_0} = \frac{1}{C}.$$

EXAMEN FINAL 01/02/2016 (PRIMERA PREGUNTA)

FALKNER-SCAN

$u_e(x) = A x^{\beta/(2-\beta)}$

$A = cte$

Capa límite viscosa admite solución de semejanza

$$\frac{\psi}{\sqrt{(2-\beta)\nu x u_e(x)}} = f(\eta) \; ; \; \eta = y\sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}}$$

$$u = u_e(x)\cdot\left(\frac{df}{d\eta}\right) \; ; \quad \eta \to 0 : \lim_{\eta\to 0} f(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)\Big|_{\eta=0}$$

$$\eta \to \infty : \lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = \eta$$

Ecuación de la energía: $\dfrac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\cdot f(\eta)\dfrac{d\theta}{d\eta} = 0 \; ; \; \theta = \dfrac{T-T_\infty}{T_p - T_\infty} \; ; T_p, T_\infty = ctes$

$Pr = \dfrac{\mu c}{k}$

- Determinar el Número de Nusselt para $Pr \ll 1$
  $\hookrightarrow \delta_T \gg \delta_v$

Como $Pr \ll 1 \Rightarrow \eta \to \infty \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr\cdot\eta\dfrac{d\theta}{d\eta} = 0 \; ; \; Z_1 = \dfrac{d\theta}{d\eta}$

Se integra una vez: $\dfrac{dZ_1}{d\eta} + Pr\cdot\eta Z_1 = 0 \to \dfrac{dZ_1}{Z_1} = -Pr\,\eta\, d\eta$

$$\ln K + \ln Z_1 = -Pr\cdot\frac{\eta^2}{2} \Rightarrow Z_1 = K\exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right) = \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K$$

Integrando de nuevo: $\displaystyle\int_0^\theta d\theta = K\int_0^\eta \exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right)d\eta$

$\eta = 0 : \theta = 1$

$\eta \to \infty : \theta = 0$

$$\theta = K\int_0^\eta \exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right)d\eta + C_1$$

$$1 = K\int_0^0 \cancel{\exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right)}^{\,0} d\eta + C_1 \to \underline{C_1 = 1}$$

$$\theta = 1 + K\int_0^\eta \exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right)d\eta$$

$$\eta\to\infty : \theta = 0 \Rightarrow 0 = 1 + K\int_0^\infty \exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right)d\eta \to K = -\frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-Pr\frac{\eta^2}{2}\right)d\eta}$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \; ; \quad \xi = \sqrt{\frac{Pr}{2}}\cdot\eta \to d\xi = \sqrt{\frac{Pr}{2}}\,d\eta$$

$$d\eta = d\xi / \sqrt{\frac{Pr}{2}}$$

$$\to K = -\sqrt{\frac{Pr}{2}}\cdot\frac{1}{\int_0^\infty \exp(-\xi^2)d\xi} \to$$

$$\to K = -\sqrt{\frac{Pr}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}} = -\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}$$

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k(T_p - T_\infty)\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$= -k(T_p - T_\infty)\underbrace{\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}}_{\underbrace{K}_{-\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}}}\underbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)}_{\sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}}} = k(T_p - T_\infty)\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}}$$

$$Nu_x = \frac{q_p \cdot x}{k(T_p - T_\infty)} = \sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}}\cdot x \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{2\cdot Pr \cdot Re_x}{\pi(2-\beta)}}$$

$$Re_x = \frac{u_e(x)\cdot x}{\nu}$$

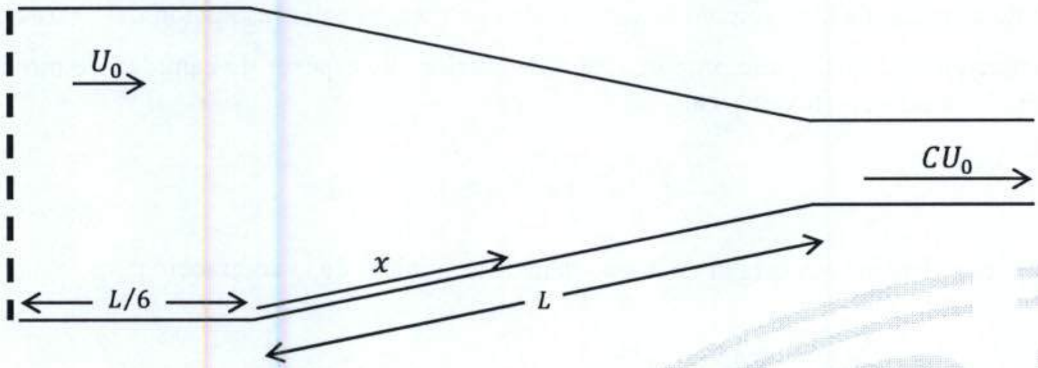
$$\boxed{Nu_x = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi(2-\beta)}}\right]\sqrt{Pr\cdot Re_x}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Final 01.02.2016**

Para acondicionar el flujo en la sección de ensayo de túneles aerodinámicos se utilizan contracciones de flujo, que son conductos con reducción de área de paso, caracterizados por su relación de contracción C, definida como la relación entre el área de entrada y de salida de la contracción. Además de mejorar la uniformidad del flujo y disminuir el posible nivel de fluctuación turbulenta, las contracciones también generan una reducción en el espesor de las capas límites en las paredes de los túneles aerodinámicos.

Se desea analizar el efecto de una contracción sobre la capa límite que se desarrolla en sus paredes, suponiendo que la capa límite es laminar. Consideraremos una contracción bidimensional (ver figura) construida aguas abajo de una rejilla de acondicionamiento de flujo, tras la que supondremos que la capa límite tiene espesor prácticamente nulo.



Entre el plano de la rejilla y la contracción se incluye un segmento inicial recto de longitud $L/6$ para garantizar la uniformización del flujo tras la rejilla. A continuación se dispone la contracción con una pared de longitud L y una relación de contracción C. Asumiremos que la evolución de la velocidad exterior a la capa límite puede describirse mediante una ley lineal:

$$\frac{u_e}{U_0} = 1 + (C-1)\frac{x}{L},$$

siendo x la distancia medida a lo largo de la pared de la contracción. Se desea determinar el espesor de la capa límite que se obtiene en el plano de salida de la contracción ($x = L$) como función de la relación de contracción C y del número de Reynolds a la entrada de la misma, $Re_0 = U_0 L/\nu$, comparándolo con el que se obtendría si el conducto de la contracción fuese totalmente recto (es decir si tuviese $C = 1$). Para ello:

1) Determinar el espesor de cantidad de movimiento δ_{20}/L que se obtiene al final del tramo recto de longitud $L/6$ como función del número de Reynolds a la entrada de la contracción Re_0. Determinar este espesor mediante la solución de Blasius y compararlo con el obtenido aplicando el método aproximado de Thwaites.

2) Utilizando el método aproximado de Thwaites, determinar el espesor de cantidad de movimiento que se obtiene a la salida de la contracción, δ_{2s}/L, como función de Re_0 y de la relación de contracción C:

$$\frac{\delta_{2s}}{L} = f(Re_0, C).$$

Obtener asimismo la relación entre el espesor de la capa límite a la salida de la contracción para una relación de contracción arbitraria C y el que obtendría para $C = 1$, es decir si el conducto de la contracción fuese recto.

3) Teniendo en cuenta que para $C \gg 1$ la velocidad exterior se puede aproximar mediante $u_e/U_0 \approx C\,x/L$, utilizar el análisis de Falkner-Skan para determinar en este límite el espesor de cantidad de movimiento a la salida de la contracción, comparando el resultado obtenido con el proporcionado en el apartado anterior.

Solución

1) En el tramo de longitud $L/6$ la capa límite se desarrolla sin gradiente de presión y por tanto, de acuerdo con la solución de Blasius:

$$\left(\frac{\delta_{20}}{L}\right)^2 = \frac{0.441}{Re_0}\frac{1}{6} \tag{1}$$

Si se utiliza el método aproximado de Thwaites, resulta:

$$\left(\frac{\delta_{20}}{L}\right)^2 \approx \frac{0.45}{Re_0}\frac{1}{6} \tag{2}$$

que es suficientemente aproximado al resultado de Blasius y que utilizaremos para evaluar el espesor de cantidad de movimiento al inicio de la contracción en la resolución del apartado 2).

2) La ecuación diferencial que proporciona la evolución del espesor de cantidad de movimiento dada por el método de Thwaites es:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_2^2}{\nu}u_e^6\right) = 0.45u_e^5 \tag{3}$$

Por tanto, estableciendo el origen de la coordenada x al inicio de la contracción:

$$\left(\frac{\delta_2}{L}\right)^2 = \frac{0.45}{Re_0}\left(\frac{u_e}{U_0}\right)^{-6}\left\{\frac{1}{6} + \int_0^{x/L} (u_e/U_0)^5 d(x/L)\right\} \tag{4}$$

O bien:

$$\left(\frac{\delta_2}{L}\right)^2 = \frac{0.45}{Re_0}\left\{\frac{1}{6}\left(1 + (C-1)\frac{x}{L}\right)^{-6} + \frac{1}{6(C-1)}\left[1 - \left(1 + (C-1)\frac{x}{L}\right)^{-6}\right]\right\} \tag{5}$$

Para $x/L = 1$ se obtiene el espesor de cantidad de movimiento a la salida de la contracción:

$$\left(\frac{\delta_{2s}}{L}\right)^2 = \frac{0.45}{6Re_0C^6}\left\{\frac{C^6 + C - 2}{C - 1}\right\} \tag{6}$$

La relación del espesor a la salida de la contracción referido al que se obtendría con el conducto recto, con $C = 1$, es:

$$\frac{\delta_{2s}}{\delta_{2s}(1)} = \frac{1}{C^3}\sqrt{\frac{C^6 + C - 2}{7(C-1)}} \tag{7}$$

La relación dada por la expresión (7) se representa en la figura 1. Obsérvese que para $C \gg 1$, se obtiene $\delta_{2s}/\delta_{2s}(1) \approx 1/\sqrt{7C}$.

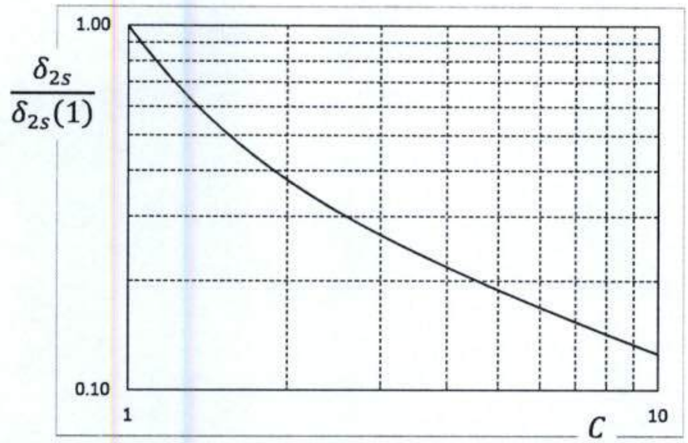


Figura 1: Relación entre el espesor de cantidad de movimiento al final de la contracción referido al obtenido con un conducto recto de igual longitud de pared, como función de la relación de contracción C.

3) Para $C \gg 1$ la expresión (6) proporciona, para $x = L$:

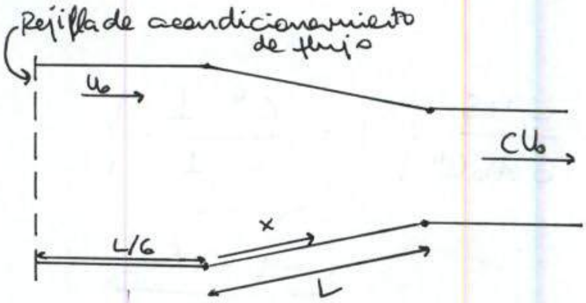
$$\left(\frac{\delta_{2s}}{L}\right)^2 = \frac{0.45}{6Re_0C} = \frac{0.075}{Re_0C} \tag{8}$$

Asumiendo la solución de Falkner-Skan con $m = 1$ se obtiene un espesor de cantidad de movimiento que es independiente de x:

$$\left(\frac{\delta_{2s}}{L}\right)^2 \approx \frac{0.085}{Re_0C} \tag{9}$$

Que es un 13% superior al espesor obtenido en el apartado anterior utilizando el método de Thwaites.

EXAMEN FINAL 01/02/2016



↳ tramo recto para garantizar uniformización del flujo tras la rejilla

Relación de contracción: C

$$\frac{u_e}{u_0} = 1 + (C-1)\frac{x}{L}$$

1) $\frac{\delta_{20}}{L}$ → Blasius y comparar con Thwaites.

La solución de Blasius da: $\frac{\delta_2}{x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}$; $x \Rightarrow L/6$, $Re_0 = \left(\frac{u_0 \cdot L}{\nu}\right)$

$\sqrt{Re_{L/6}} = \sqrt{Re_0}\left(\sqrt{6}\right)^{-1}$

$$\boxed{\left.\frac{\delta_{20}}{L}\right|_B = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Método de Thwaites: $\delta_{20}^2 = \frac{0{,}45 \cdot \nu}{u_0^6} \cdot \int_0^{L/6} u_0^5\, dx = \frac{0{,}45\,\nu}{u_0 \cdot 6} \cdot \cancel{L} \cdot \frac{1}{L^{\cancel{2}}} L^2 = \frac{0{,}45}{Re_0 \cdot 6} L^2$

$$\boxed{\left.\frac{\delta_{20}}{L}\right|_{Th} = \frac{0{,}671}{\sqrt{Re_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$\frac{\delta_{20}/L\,|_B}{\delta_{20}/L\,|_{Th}} = 0{,}9896$$ → aproxima muy bien el método de Thwaites.

2) $\frac{\delta_{2s}}{L} = f(Re_0, C)$

$\frac{d}{dx}\left(u_e^6 \delta_2^2\right) = a\nu u_e^{6-1} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(u_e^6 \delta_2^2\right) = 0{,}45\,\nu\, u_e^5$

$u_e^6 \cdot \delta_2^2 = 0{,}45\,\nu \int_0^x u_e^5\, dx \rightarrow \left(\frac{u_e}{u_0}\right)^6 \cdot u_0^{\cancel{6}} \cdot \delta_2^2 = 0{,}45 \cdot \nu\, \cancel{u_0^5} L \int_0^{x/L} \left(\frac{u_e}{u_0}\right) d(x/L)$

$$\left(\frac{u_e}{u_0}\right)^6 \frac{\delta_2^2}{L^2} = 0{,}45 \cdot \underbrace{\frac{\nu}{u_0 L}}_{Re_0^{-1}} \int_0^{x/L} \left(1 + (C-1)\frac{x}{L}\right)^5 d\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{0{,}45}{Re_0} \int \frac{\eta^5\, d\eta}{C-1} = \frac{0{,}45}{Re_0} \cdot \frac{1}{6(C-1)}\underbrace{\eta^6}_{\left(\frac{u_e}{u_0}\right)^6} + C_1$$

$\eta = 1 + (C-1)\frac{x}{L}$

$\frac{d\eta}{d(x/L)} = (C-1) \rightarrow d(x/L) = \frac{d\eta}{(C-1)}$

$\frac{x}{L} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_2^2}{L^2} = \frac{0{,}45}{Re_0} \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{u_e}{u_0} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 \rightarrow \frac{0{,}45}{Re_0} \cdot \frac{1}{6} = \frac{0{,}45}{Re_0} \cdot \frac{1}{6(C-1)} + C_1$

$$C_1 = \frac{0{,}45}{Re_0}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{6(C-1)}\right]$$

$$\left(\frac{\delta_2}{L}\right)^2 = \frac{0{,}45}{Re_0}\left[\frac{1}{6(C-1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{u_e}{u_0}\right)^{-6} - \frac{1}{6(C-1)}\left(\frac{u_e}{u_0}\right)^{-6}\right]$$

$$\boxed{\left(\frac{\delta_2}{L}\right)^2 = \frac{0{,}45}{Re_0}\left\{\frac{1}{6}\left[1 + (C-1)\frac{x}{L}\right]^{-6} + \frac{1}{6(C-1)}\left\{1 - \left[1 + (C-1)\frac{x}{L}\right]^{-6}\right\}\right\}}$$

$$\frac{\delta_{2s}}{L} \rightarrow \frac{x}{L}=1 \rightarrow \frac{u_e}{u_o}=C$$

$$\left(\frac{\delta_2}{L}\right)^2 = \frac{0{,}45}{6\,Re_o}\cdot\left\{ \frac{1}{C^6} + \underbrace{\frac{1}{(C-1)}\cdot\left[1-\frac{1}{C^6}\right]}_{\frac{C^6-1}{C^6(C-1)}} \right\} = \frac{0{,}45}{6\,Re_o C^6}\left\{ \underbrace{1+\frac{C^6-1}{C-1}}_{\frac{C-1+C^6-1}{C-1}} \right\}$$

$$\left(\frac{\delta_{2s}}{L}\right)^2 = \frac{0{,}45}{6\,Re_o C^6}\left\{\frac{C^6+C-2}{C-1}\right\} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_{2s}}{L} = \sqrt{\frac{0{,}45}{6Re_o}}\cdot\frac{1}{C^3}\left\{\frac{C^6+C-2}{C-1}\right\}^{1/2}}$$

Cuando $C\rightarrow 1$: $\frac{C^6+C-2}{C-1} \rightarrow \frac{0}{0}$

∘ Ruffini en numerador:

	1	0	0	0	0	1	-2
+1		1	1	1	1	1	2
	1	1	1	1	1	2	0

$\rightarrow C^6+C-2 = (C-1)\left(C^5+C^4+C^3+C^2+C+2\right)$

$$\frac{C^6+C-2}{C-1} = C^5+C^4+C^3+C^2+C+2$$

$$\left.\frac{C^6+C-2}{C-1}\right|_{C\rightarrow 1} = 7$$

$$\boxed{\left.\frac{\delta_{2s}}{L}\right|_{C\rightarrow 1} = \sqrt{\frac{0{,}45}{6\,Re_o}}\cdot\left\{7\right\}^{1/2}}$$

$$\boxed{\frac{\delta_{2s}}{\delta_{2s}|_{C\rightarrow 1}} = \frac{1}{C^3}\left\{\frac{C^6+C-2}{7(C-1)}\right\}^{1/2}}$$

3) $C\gg 1 \rightsquigarrow \frac{u_e}{u_o} \approx C\left(\frac{x}{L}\right) \rightarrow$ Falkner-Scan $\rightarrow \delta_{2s}|_{C\gg 1}$ y comparar con caso anterior

F-S: $u_e(x) = A x^m$

$$\left.\begin{matrix} A = u_o\cdot C/L \\ m=1\rightarrow\beta=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \delta_{2_{FS}} = x\,\frac{1}{\sqrt{Re_x}}\underbrace{\left\{\frac{f''(0) - \lim_{\eta\to\infty}[\eta - f(\eta)]}{2}\right\}}\ ;\ \beta=1:\ \begin{matrix} f''(0)=1{,}2326 \\ (\eta-f)_\infty = 0{,}6481\end{matrix}$$

$$Re_x = \frac{x\,u_e(x)}{\nu}$$

$$\delta_{2_{FS}} = \frac{x}{\sqrt{Re_x}}\cdot 0{,}29225 = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{\frac{\cancel{x}\cdot u_o\, C\left(\frac{x}{L}\right)}{\nu}}}\cdot 0{,}29225 \rightarrow \boxed{\frac{\delta_{2FS}}{L} = \frac{0{,}29225}{\sqrt{C}\cdot\sqrt{Re_o}}}$$

$$\frac{\delta_{2FS}^2}{L^2} = \frac{0{,}085}{Re_o\cdot C}$$

$C^{-3}\cdot C^{5/2} = C^{-1/2}$

$$\left(\frac{1}{C^3}\left\{\frac{C^6+C-2}{C-1}\right\}\right)_{C\gg 1} \rightarrow (C)^{-1/2}$$

$$\left.\frac{\delta_{2s}}{L}\right|_{C\gg 1} = \sqrt{\frac{0{,}45}{6\,Re_o}}\cdot\frac{1}{\sqrt{C}} \simeq \frac{0{,}27386}{\sqrt{C}\,\sqrt{Re_o}} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_{2FS}}{\delta_{2s}|_{C\gg 1}} = 1{,}067}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 04-07-2016**

PRIMERA PREGUNTA

Las ecuaciones que determinan la evolución de la estela bidimensional lejana de un cuerpo simétrico sometido a la corriente uniforme, U_∞, para un líquido de viscosidad cinemática ν, son

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

válidas tanto para régimen laminar ($-\overline{u'v'}=0$) como para régimen turbulento ($\nu\,(\partial u/\partial y)\approx 0$).

Se trata de determinar el orden de magnitud del espesor $\delta\,(x)$ de la estela lejana y el orden de magnitud del defecto de velocidades $\tilde{u}=u-U_\infty \ll U_\infty$ en los casos tanto laminar como turbulento. Para ello simplifiquen la ecuación de cantidad de movimiento adecuadamente y obtengan una relación integral entre el defecto de velocidades $\tilde{u}\ll U_\infty$ y la resistencia D por unidad de envergadura del cuerpo.

SEGUNDA PREGUNTA

Las ecuaciones que gobiernan la capa bidimensional de convección libre de un fluido en torno a un obstáculo (longitud característica ℓ), a temperatura T_P diferente de la del medio, y en ausencia de convección forzada, son

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\beta\,(T-T_\infty)\,f_{mx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \qquad u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

con la difusitividad térmica $\alpha=k/\rho c_p$ y $\theta=(T-T_\infty)/(T_P-T_\infty)$.

Denominando q al valor característico del flujo de calor en la pared del obstáculo, se pide determinar el orden de magnitud de la velocidad característica u_c y del número de Nusselt $Nu=q\ell/k\,(T_P-T_\infty)$ cuando el número de Prandtl ν/α es grande frente a la unidad y cuando es pequeño. Recuerden que el número de Grashof es $Gr=\beta\triangle T f_{mx}\ell^3/\nu^2$.

SOLUCIÓN

Primera pregunta

Como la velocidad $u = U_\infty + \tilde{u}$ la ecuación de la continuidad proporciona

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim \tilde{u}\frac{\delta}{x},$$

mientras que la de cantidad de movimiento se simplifica de la forma

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

ya que los términos $\tilde{u}\,(\partial \tilde{u}/\partial x)$ y $v\,(\partial \tilde{u}/\partial y)$ son muy pequeños comparados con $U_\infty\,(\partial \tilde{u}/\partial x)$. Multiplicando la ecuación anterior por dy e integrándola entre $+\infty$ y $-\infty$ se obtiene

$$U_\infty \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}dy = 0,$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}dy = -I = -\frac{D}{\rho U_\infty},$$

de esta ecuación se deduce

$$\tilde{u}\delta \sim I. \tag{2}$$

En el caso laminar $-\overline{u'v'} = 0$ y en la ecuación de cantidad de movimiento (1) se tiene $U_\infty\,(\partial \tilde{u}/\partial x) = \nu\,(\partial^2 \tilde{u}/\partial y^2)$ de modo que

$$\frac{U_\infty}{x} \sim \frac{\nu}{\delta^2}. \tag{3}$$

De (3) se obtiene

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}},$$

y llevando este valor de δ a la relación (2) se obtiene

$$\tilde{u} \sim \sqrt{\frac{I^2 U_\infty}{\nu x}} \sim \frac{D}{\rho U_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}.$$

En el caso turbulento, el término viscoso desaparece y además $-\overline{u'v'} \sim \tilde{u}^2$, de modo que de la ecuación de cantidad de movimiento (1) se obtiene $U_\infty\,(\partial \tilde{u}/\partial x) = \partial\left(-\overline{u'v'}\right)/\partial y \sim \tilde{u}^2/\delta$, lo que proporciona

$$\frac{U_\infty}{x} \sim \frac{\tilde{u}}{\delta}. \tag{4}$$

Las relaciones (2) y (4) permiten escribir

$$\delta \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}} \sim \sqrt{\frac{Dx}{\rho U_\infty^2}}; \quad y \quad \tilde{u} \sim \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}} \sim \sqrt{\frac{D}{\rho x}}.$$

Segunda pregunta

Si el número de Prandtl es grande, la capa térmica es muy delgada frente a la viscosa, pero los efectos de flotabilidad son sólo importantes en la capa térmica, que es donde tienen lugar los cambios de temperatura. En este caso el término de flotabilidad y el viscoso deben ser del mismo orden, este último evaluado en la capa térmica. Esto es:

$$\beta\,(T - T_\infty)\, f_{mx} \sim \frac{\nu u_c}{\delta_T^2} \quad \Rightarrow \quad u_c \sim \frac{\beta\,(T - T_\infty)\, f_{mx}\delta_T^2}{\nu},$$

y de la ecuación de la energía se obtiene

$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{RePr}},$$

de modo que la velocidad característica es

$$u_c \sim \sqrt{\frac{\beta \triangle T f_{mx} \ell}{Pr}},$$

y el número de Reynolds toma la forma

$$Re \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}} \sqrt{\frac{\beta \triangle T f_{mx} \ell^3}{\nu^2}} \sim \sqrt{\frac{Gr}{Pr}}.$$

Sustituyendo este valor del número de Reynolds en la expresión de δ_T se tiene

$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim (PrGr)^{-1/4}.$$

El flujo de calor esta dado por

$$q \sim k\frac{\triangle T}{\delta_T} \sim k\frac{\triangle T}{\ell}(PrGr)^{1/4},$$

y el número de Nusselt es

$$Nu \sim \frac{q\ell}{k\triangle T} \sim \sqrt[4]{PrGr}.$$

Cuando el número de Prandtl es pequeño la capa térmica es grande frente a la viscosa, de modo que la flotabilidad está actuando, en su mayor parte, fuera de la capa viscosa. En este caso el término convectivo y el de flotabilidad en la ecuación de cantidad de movimiento deben ser del mismo orden, lo que proporciona

$$u_c \sim \sqrt{\beta \triangle T f_m \ell},$$

mientras que el espesor de la capa térmica es, en este caso,

$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{RePr}} \sim Pr^{-1/2} Gr^{-1/4}.$$

El flujo de calor está dado por

$$q \sim k\frac{\triangle T}{\delta_T} \sim k\frac{\triangle T}{\ell}\left(Pr^{1/2} Gr^{1/4}\right),$$

lo que proporciona

$$Nu \sim \frac{q\ell}{k\triangle T} \sim Pr^{1/2} Gr^{1/4}.$$

EXAMEN FINAL 04/07/2016 (SEGUNDA PREGUNTA)

Capa bidimensional (de conv. libre) en torno a un obstáculo (ℓ), a temperatura T_p y en ausencia de convección forzada:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \; ; \; u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\beta(T-T_\infty) f_{mx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \; ; \; u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$\alpha = k/\rho c_p \; ; \; \theta = (T-T_\infty)/(T_p - T_\infty) \; ; \; Gr = \beta \Delta T f_{mx} \ell^3/\nu^2 \; ; \; Pr = \nu/\alpha$$

- Orden de magnitud cuando $Pr \gg 1$ y $Pr \ll 1$ de u_c y Nu_x

$\boxed{Pr \gg 1}$ → $\delta_T \ll \delta_V$ ⇒ efectos de flotabilidad son sólo importantes en la capa térmica

* Términos de flotabilidad y viscosos en ec. de cant. de mov. evaluados en la capa térmica serán del mismo orden:

$$\beta(T-T_\infty)\cdot f_{mx} \sim \nu\frac{u_c}{\delta_T^2} \Rightarrow u_c \sim \frac{\beta(T-T_\infty) f_{mx} \cdot \delta_T^2}{\nu}$$

* Ecuación de la energía: $u_c \cdot \frac{1}{\ell} \sim \alpha \cdot \frac{1}{\delta_T^2} \rightarrow \frac{\delta_T^2}{\ell^2} \sim \underbrace{\frac{\nu}{Pr}}_{\alpha} \cdot \frac{\ell}{u_c} \cdot \frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{Pr \cdot Re_\ell}$

$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_\ell \cdot Pr}} \Rightarrow u_c \sim \frac{\beta(T-T_\infty)\cdot \ell^2}{\nu \cdot Pr \cdot Re_\ell} \sim \frac{\beta(T-T_\infty)\cdot \ell^{\cancel{2}}}{\cancel{\nu}\cdot Pr \cdot \frac{u_c \cdot \cancel{\ell}}{\cancel{\nu}}}$$

$$Re_\ell = \frac{u_c \cdot \ell}{\nu}$$

$$u_c^2 \sim \frac{\beta(T-T_\infty)\cdot \ell}{Pr} \rightarrow \boxed{u_c \sim \sqrt{\frac{\beta(T-T_\infty)\cdot \ell}{Pr}}}$$

$$Re_\ell \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}} \cdot \sqrt{\frac{\beta(T-T_\infty)\ell^3}{\nu^2}} \sim \sqrt{\frac{Gr}{Pr}} \rightarrow \frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{(Pr \cdot Gr)^{1/4}}$$

$$q = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \sim k\frac{\Delta T}{\delta_T} \sim k\frac{\Delta T}{\ell}(Pr\cdot Gr)^{1/4} \rightarrow Nu \sim \frac{q\,\ell}{k\Delta T} \sim (Pr\,Gr)^{1/4}$$

$$\boxed{Nu \sim (Pr \cdot Gr)^{1/4}}$$

$\boxed{Pr \ll 1}$ $\rightarrow$ $\delta_T \gg \delta_V$ $\Rightarrow$ Flotabilidad está actuando, en su mayor parte, fuera de la capa viscosa

Término convectivo ~ Término de flotabilidad

$$\frac{u_c^2}{\ell} \sim \beta(T-T_\infty)\, f_m \rightarrow \boxed{u_c \sim \sqrt{\beta(T-T_\infty) f_m \ell}}$$

$$Re_\ell \sim \frac{u_c \cdot \ell}{\nu} \sim \sqrt{\frac{\beta(T-T_\infty) f_m \ell^3}{\nu^2}} \sim \sqrt{Gr}$$

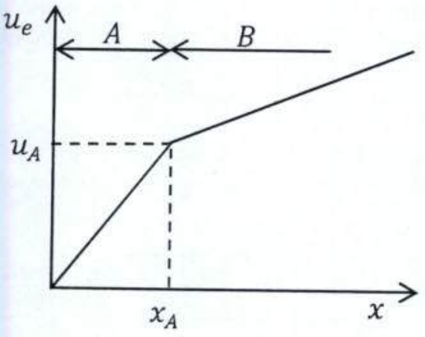
$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr \cdot Re}} \sim \frac{1}{(Pr)^{1/2} (Gr)^{1/4}}$$

$$q \sim \frac{k \Delta T}{\delta_T} \sim \frac{k \Delta T}{\ell} \cdot Pr^{1/2} \cdot Gr^{1/4} \rightarrow \boxed{Nu \sim Pr^{1/2} \cdot Gr^{1/4}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Extraordinario 04.07.2016**

La región cercana al borde de ataque de los perfiles aerodinámicos utilizados en ciertas aplicaciones se diseña de manera que la distribución de velocidad exterior a la capa límite puede aproximarse mediante dos tramos lineales, A y B en la figura adjunta, donde x representa la coordenada a lo largo de la pared del perfil, medida a partir del punto de remanso anterior.



El valor u_A de la velocidad exterior donde se produce el cambio del gradiente de velocidad proporciona una velocidad característica del flujo. Asimismo, el gradiente de velocidad en la zona de aceleración inicial define un tiempo característico $t_A = (du_e/dx)_A^{-1}$. El perfil de velocidad exterior adimensional $\tilde{u}_e = u_e/u_A$ puede representarse en función de la coordenada adimensional $\tilde{x} = x/(u_A t_A)$:

$$\tilde{u}_e = \begin{cases} \tilde{x} & 0 \leq \tilde{x} \leq 1 \\ 1 + m(\tilde{x} - 1) & \tilde{x} > 1 \end{cases}$$

siendo m la relación entre los gradientes de velocidad exterior en los dos tramos considerados:

$$m = \frac{(du_e/dx)_B}{(du_e/dx)_A}$$

Para una distribución lineal de velocidad exterior desde el punto de remanso, el método de Thwaites predice que la capa límite adopta un espesor constante. En consecuencia, para una distribución como la representada en la figura, se puede esperar que el espesor de cantidad de movimiento tenga un valor constante en la zona A, δ_{2A}, y tienda progresivamente a otro valor constante en la zona B, $\delta_{2B\infty}$, si dicha zona tiene una extensión x suficientemente grande.

Se pretende obtener información de la evolución de la capa límite laminar que se desarrolla con una velocidad exterior como la representada en la figura. Para ello:

1) Siendo $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/(u_A t_A)$, utilizar el método de Thwaites para demostrar que el espesor de cantidad de movimiento en la zona A, $\tilde{\delta}_{2A}$, adopta un valor uniforme, independiente de la coordenada $\tilde{x}$. Obtener asimismo el valor de $\tilde{\delta}_{2A}^2$, y de $\tilde{\delta}_{2B\infty}^2$ como función de $Re_A = u_A^2 t_A/\nu$ y del parámetro m.

2) Se desea analizar la evolución de $\tilde{\delta}_{2B}^2$ en el inicio de la región B, en el que el valor del espesor de cantidad de movimiento se relaja progresivamente desde el valor $\tilde{\delta}_{2A}^2$ hasta el valor $\tilde{\delta}_{2B\infty}^2$ obtenidos más arriba. Describir el proceso de relajación del espesor de la capa límite en la zona B, determinando la evolución de la variable de relajación:

$$\chi_{AB} = \frac{\left|\tilde{\delta}_{2B}^2 - \tilde{\delta}_{2B\infty}^2\right|}{\tilde{\delta}_{2B\infty}^2}$$

en función de la distancia $(\tilde{x} - 1)$ para $(\tilde{x} - 1) \geq 0$. Obsérvese que la variable de relajación debe tender a cero al crecer $(\tilde{x} - 1)$ y define la diferencia relativa entre el valor local del cuadrado del espesor de cantidad de movimiento y el que adopta tras el proceso de relajación, $\tilde{\delta}_{2B\infty}^2$. Demostrar que la relación $\chi_{AB}/|m-1|$ es tan solo función de la distancia modificada $m(\tilde{x} - 1)$.

3) De acuerdo con lo anterior, si m es de orden unidad la distancia de relajación escala con $u_e(du_e/dx)^{-1}$. Esta observación sugiere un método basado en una expresión algebraica, para el cálculo rápido del espesor de cantidad de movimiento en capas límites sometidas a gradientes favorables de presión arbitrarios. Asumiendo que el proceso de

relajación en estas capas límites es *instantáneo*, de manera que la capa límite se adapta en todo punto a las condiciones locales del flujo, proponer una expresión para la determinación explícita del espesor de cantidad de movimiento como función de la viscosidad y del valor local del gradiente de velocidad exterior du_e/dx:

$$\delta_2^2 = \delta_2^2\left(\nu, \frac{du_e}{dx}\right)$$

Como paso previo, utilizar el análisis dimensional para escribir la relación anterior de la forma más compacta posible.

4) Se desea comparar los resultados obtenidos mediante el método propuesto en el apartado 3) con los proporcionados por el método de Thwaites aplicados a la región cercana al punto de remanso anterior del flujo sobre un cilindro de radio R expuesto a un flujo uniforme de velocidad U_∞, en el que la velocidad exterior viene dada por:

$$u_e = 2U_\infty sen\left(\frac{x}{R}\right)$$

siendo x la distancia sobre la pared del cilindro, medida a partir del punto de remanso enfrentado a la corriente incidente. En particular el método de Thwaites proporciona los siguientes resultados en distintos puntos situados en el intervalo $0 \leq x/R \leq \pi/4$:

x/R	$Re \cdot \tilde{\delta}_2^2, Thwaites$
0	0.0375
$\pi/6$	0.0417
$\pi/4$	0.0478

con $Re = U_\infty R/\nu$. Comparar, para las posiciones x/R especificadas en la tabla anterior, los resultados proporcionados por el método de Thwaites con los obtenidos mediante el método propuesto en el apartado 3).

Solución

1) El método de Thwaites proporciona la evolución del espesor de desplazamiento resolviendo una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dx}(u_e^6\delta_2^2/\nu) = 0.45u_e^5 \tag{1}$$

O bien, en variables adimensionales:

$$\frac{d}{d\tilde{x}}\left(Re_A\tilde{u}_e^6\tilde{\delta}_2^2\right) = 0.45\tilde{u}_e^5 \tag{2}$$

Para la zona A, $\tilde{x} < 1$, se tiene:

$$Re_A\tilde{x}^6\tilde{\delta}_{2A}^2 = \frac{0.45}{6}\tilde{x}^6 \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\delta}_{2,A}^2 = \frac{0.075}{Re_A} \tag{3}$$

Que es uniforme, independiente de la coordenada $\tilde{x}$. En estaciones $\tilde{x} \gg 1$, suficientemente alejadas de la interfaz entre las zonas A y B, podemos esperar que la capa límite evolucione hacia un espesor también constante, igual al que adoptaría empezando desde el punto de remanso con una evolución de la velocidad exterior caracterizada por el gradiente de la zona B. En consecuencia:

$$Re_A(m\tilde{x})^6\tilde{\delta}_{2B\infty}^2 = \frac{0.45}{6m}(m\tilde{x})^6 \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\delta}_{2B\infty}^2 = \frac{1}{m}\frac{0.075}{Re_A} \tag{4}$$

y por tanto:

$$\frac{\tilde{\delta}_{2B\infty}^2}{\tilde{\delta}_{2,A}^2} = \frac{1}{m} \tag{5}$$

2) Teniendo en cuenta que, de acuerdo con (2), $Re_A\tilde{\delta}_{2A}^2 = 0.075$, en la región B ($\tilde{x} \geq 1$)se tiene:

$$\tilde{u}_e^6\frac{\tilde{\delta}_{2B}^2}{\tilde{\delta}_{2A}^2} - 1 = \int_1^{\tilde{x}} \tilde{u}_e^5 d\tilde{x} \tag{6}$$

o bien:

$$\frac{\tilde{\delta}_{2B}^2}{\tilde{\delta}_{2A}^2} = \frac{1}{m}\left\{1 + \frac{(m-1)}{\left(1 + m(\tilde{x}-1)\right)^6}\right\} \tag{7}$$

que, al igual que (4), proporciona:

$$\left(\frac{\tilde{\delta}_{2B}^2}{\tilde{\delta}_{2A}^2}\right)_{\tilde{x}\to\infty} = \frac{1}{m} = \frac{\tilde{\delta}_{2B\infty}^2}{\tilde{\delta}_{2A}^2} \tag{8}$$

El proceso de relajación, descrito por la variable χ_{AB}, viene dado por:

$$\chi_{AB} = \frac{\left|\tilde{\delta}_{2B}^2 - \tilde{\delta}_{2B\infty}^2\right|}{\tilde{\delta}_{2B\infty}^2} = \frac{|m-1|}{\left(1 + m(\tilde{x}-1)\right)^6} \tag{9}$$

La relación $\chi_{AB}/|m-1|$ como función de la distancia modificada $\xi = m(\tilde{x}-1)$ se representa en la figura 1.

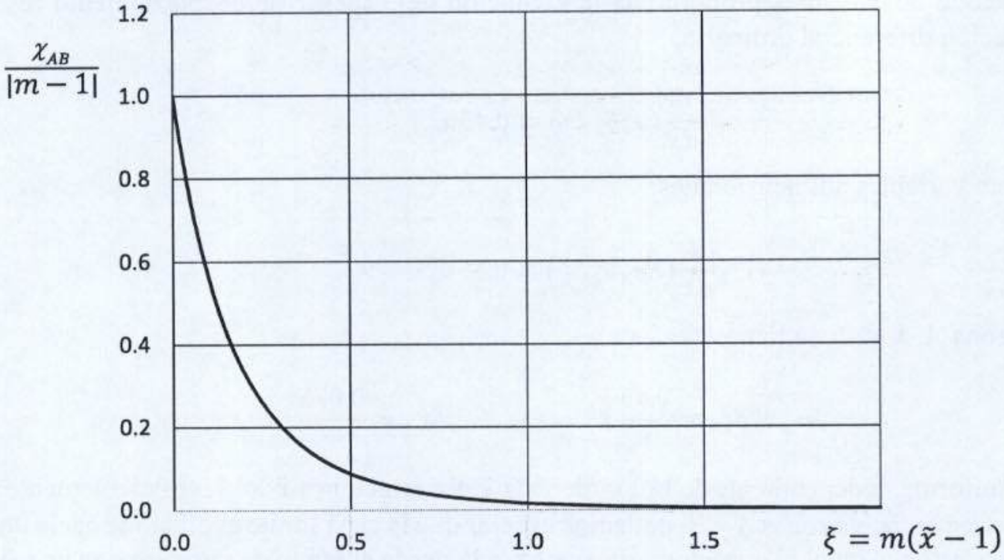


Figura 1. Relajación del espesor de cantidad de movimiento tras un salto en la pendiente de la velocidad exterior.

Obsérvese que las distancias de relajación aumentan al disminuir el parámetro m, de manera que para $m \to 0$ el proceso de relajación no se acaba de completar debido a que la capa límite crece de forma continua con x.

3) Con las magnitudes ν y du_e/dx es posible construir el cuadrado de una longitud característica, dado por $\nu/(du_e/dx)$. En consecuencia, la expresión propuesta en el enunciado es equivalente a la siguiente relación adimensional:

$$\frac{\delta_{2,A}^2}{\nu} \cdot \frac{du_e}{dx} = C \tag{10}$$

Por otra parte, asumiendo que la relajación es instantánea, el valor del espesor de cantidad de movimiento es el correspondiente a un flujo de punto de remanso con el valor local de la velocidad.

$$\tilde{\delta}_{2,A}^2 = \frac{0.075}{Re_A} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_2^2}{u_e^2/(du_e/dx)^2} = \frac{0.075}{u_e^2/[\nu(du_e/dx)]} \tag{11}$$

Es decir:

$$\delta_2^2 = \frac{0.075\,\nu}{\frac{du_e}{dx}} = \frac{0.075\,\nu}{du_e/dx} \tag{12}$$

De manera que la constante C en la expresión (10) adopta el valor $C = 0.075$.

Una variante interesante de este método permite introducir información sobre el historial de la evolución de la capa límite, sustituyendo el valor local del gradiente de velocidad por un valor intermedio entre el valor local y el promediado desde el punto de remanso:

$$\delta_2^2 = \frac{0.075\,\nu}{\left[a\frac{du_e}{dx} + b\frac{u_e}{x}\right]} \tag{13}$$

Con a, b siendo coeficientes adimensionales tales que $a + b = 1$. Para $a = 1, b = 0$, se recupera la expresión (12). Para $a = 5/6$, $b = 1/6$ la expresión (13) es capaz de reproducir los resultados del método de Thwaites tanto para el flujo de punto de remanso como sobre una placa plana sin gradiente de presiones.

4) Aplicando la expresión (12) al flujo sobre la región anterior del cilindro se obtiene:

$$\delta_2^2 = \frac{0.075\,\nu}{2\frac{U_\infty}{R}\cos\left(\frac{x}{R}\right)} \quad \leftrightarrow \quad Re\cdot\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = \frac{0.0375}{\cos\left(\frac{x}{R}\right)}, \qquad 0 \le \frac{x}{R} \le \frac{\pi}{4} \tag{14}$$

con $Re = U_\infty R/\nu$. Para los valores de x/R indicados en el enunciado se tiene:

x/R	$Re\cdot\delta_2^2, Thwaites$	$Re\cdot\delta_2^2, (14)$
0	0.0375	0.0375
$\pi/6$	0.0417	0.0433
$\pi/4$	0.0478	0.0530

Si se aplica la expresión (13) con $a = b = 1/2$ se obtiene:

$$Re\cdot\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = \frac{0.075}{\cos\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{sen\left(\frac{x}{R}\right)}{\frac{x}{R}}}, \qquad 0 \le \frac{x}{R} \le \frac{\pi}{4} \tag{15}$$

El método de Thwaites proporciona para el flujo sobre un cilindro:

$$\left(2U_\infty sen\left(\frac{x}{R}\right)\right)^6 \delta_2^2 = 0.45\,\nu(2U_\infty)^5 R\int_0^x sen^5\left(\frac{x'}{R}\right) d\left(\frac{x'}{R}\right), \quad 0 \le \frac{x}{R} \le \frac{\pi}{4} \tag{16}$$

o bien:

$$Re\cdot\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = \frac{0.45}{2}\left\{\frac{8}{15} - \cos\left(\frac{x}{R}\right)\left[1 - \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{1}{5}\cos^4\left(\frac{x}{R}\right)\right]\right\}, \qquad 0 \le \frac{x}{R} \le \frac{\pi}{4} \tag{17}$$

La figura 2 muestra la comparación entre las expresiones (14), (15) y (17).

Para $x/R = \pi/4$ el método de Thwaites proporciona $Re\cdot(\delta_2/R)^2 = 0.0478$. Por su parte, para la misma distancia sobre la pared del cilindro, los métodos algebraicos de la expresiones (14) y (15) proporcionan, respectivamente, $Re\cdot(\delta_2/R)^2 = 0.0530$ y $Re\cdot(\delta_2/R)^2 = 0.0467$.

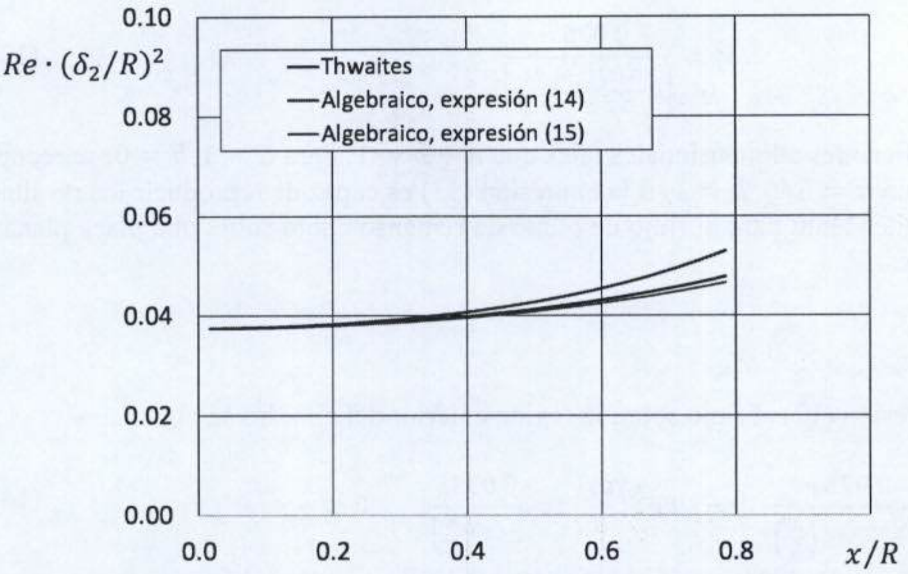
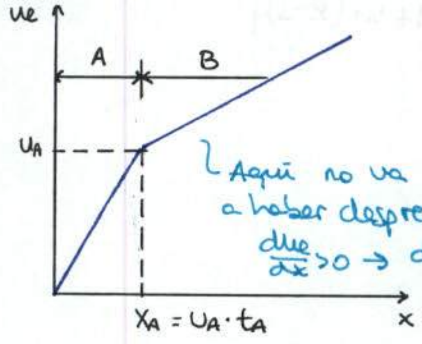


Figura 2. Evolución del espesor de cantidad de movimiento en la región anterior de un cilindro de radio R expuesto a flujo uniforme calculado mediante el método de Thwaites y con el procedimiento algebraico propuesto en el apartado 3).

EXAMEN EXTRAORDINARIO 04/07/2016

• Distribución de velocidad exterior a la capa límite:



Aquí no va a haber desprendimiento
$\frac{du_e}{dx} > 0 \rightarrow dp/dx < 0 \Rightarrow$ gradiente siempre favorable

• Perfil de velocidad exterior adimensional: $\tilde{u}_e = u_e/u_A = f(\tilde{x})$; $\tilde{x} = \frac{x}{u_A t_A} = \frac{x}{x_A}$

$$\tilde{u}_e = \begin{cases} \tilde{x} & 0 \le \tilde{x} \le 1 \\ 1 + m(\tilde{x}-1) & \tilde{x} > 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad m = \frac{(du_e/dx)_B}{(du_e/dx)_A}$$

1) $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/(U_A \cdot t_A)$; $Re_A = \frac{U_A^2 t_A}{\nu} = \frac{x_A \cdot U_A}{\nu}$

$\tilde{\delta}_A^2$?

$\tilde{\delta}_{B,\infty}^2$?

• Método de thwaites :

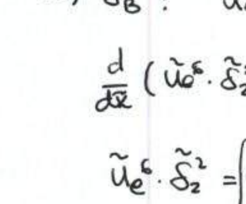
$$\frac{d}{dx}(u_e^6 \delta_2^2) = a \cdot \nu u_e^{6-1} \longrightarrow \frac{U_A^{\cancel{6}} \cdot x_A^{\cancel{2}}}{\cancel{x_A}} \cdot \frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{u}_e^6 \cdot \tilde{\delta}_2^2) = 0,45 \cdot \nu \cdot \cancel{U_A^5}\, \tilde{u}_e^5$$

$$\underbrace{\left(\frac{U_A x_A}{\nu}\right)}_{=Re_A} \cdot \frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{u}_e^6 \tilde{\delta}_2^2) = 0,45\, \tilde{u}_e^5 \rightarrow \frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{u}_e^6 \tilde{\delta}_2^2) = 0,45 \cdot Re_A^{-1}\, \underset{\tilde{x}^5\ (\text{en } A)}{\tilde{u}_e^5}$$

$$\int d(\tilde{u}_e^6 \cdot \tilde{\delta}_2^2) = \int 0,45 \cdot (Re_A)^{-1} \cdot \tilde{x}^5 d\tilde{x} =$$

$$\Rightarrow \cancel{\tilde{u}_e^6} \cdot \tilde{\delta}_{2A}^2 = \frac{0,45}{6} \frac{1}{Re_A} \cdot \cancel{\tilde{x}^6} + \cancel{C_1} \nearrow 0 \; (\tilde{x}=0 : \tilde{u}_e = 0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\tilde{\delta}_{2A}^2 = 0,075 \cdot \frac{1}{Re_A}}$$

Si $\tilde{x} \gg 1$



$$\tilde{x} \gg 1 : \tilde{u}_e \rightarrow m\tilde{x} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(m^6 \tilde{x}^6 \cdot \tilde{\delta}_2^2\right) = 0,45 \cdot Re_A^{-1} \cdot m^5 \tilde{x}^5$$

$$\cancel{m^6 \tilde{x}^6} \cdot \tilde{\delta}_{2B,\infty}^2 = \frac{0,45}{6} \cdot \frac{1}{Re_A} \cdot \cancel{m^5} \cdot \cancel{\tilde{x}^6} + \cancel{C_1} \nearrow 0 \rightarrow \boxed{\tilde{\delta}_{2B,\infty}^2 = 0,075 \cdot \frac{1}{m Re_A}}$$

2) $\tilde{\delta}_B^2$? $\quad \tilde{u}_e = 1 + m(\tilde{x}-1)$

$\frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{u}_e^6 \cdot \tilde{\delta}_2^2) = 0,45 \cdot \frac{1}{Re_A} \cdot \tilde{u}_e^5$ → utilizar como variable independiente $\tilde{u}_e$ en lugar de $\tilde{x}$ → $\tilde{u}_e = 1 + m(\tilde{x}-1)$; $d\tilde{u}_e = m \cdot d\tilde{x} \rightarrow d\tilde{x} = (1/m)\, d\tilde{u}_e$

$$\tilde{u}_e^6 \cdot \tilde{\delta}_2^2 = \int 0,45 \frac{1}{m Re_A} \cdot \tilde{u}_e^5 \cdot d\tilde{u}_e$$

$$\tilde{u}_e^6 \tilde{\delta}_2^2 = \frac{0,45}{6} \cdot \frac{1}{m Re_A} \cdot \tilde{u}_e^6 + C_1$$

en $\tilde{x} = 1$: $\tilde{u}_e = 1$

$$\tilde{\delta}_2^2 = \tilde{\delta}_{2A}^2 = \frac{0,075}{Re_A} \Big\} \quad \frac{0,075}{Re_A} = \frac{0,075}{m Re_A} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{0,075}{Re_A} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\tilde{u}_e \tilde{\delta}_{2B} = \frac{0,075}{Re_A}\left(\frac{\tilde{u}_e^6}{m} + 1 - \frac{1}{m}\right) \rightarrow \tilde{\delta}_{2B}^2 = \frac{0,075}{Re_A \cdot \tilde{u}_e^6}\left(\frac{\tilde{u}_e^6}{m} + 1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\boxed{\tilde{\delta}_{2B}^2 = \frac{0,075}{m Re_A} + \left\{ (1 - 1/m) \Big/ [1 + m(\tilde{x}-1)]^6 \right\} \cdot \frac{0,075}{Re_A}}$$

$$\chi_{AB} = \frac{|\tilde{\delta}_{2B}^2 - \tilde{\delta}_{B,\infty}^2|}{\tilde{\delta}_{2B,\infty}^2} = \frac{\left|\left(\frac{0{,}075}{\cancel{Re_A}}\right)(1-1/m)\right|}{\left(\frac{\cancel{0{,}075}}{m\cancel{Re_A}}\right)\left[1+m(\tilde{x}-1)\right]^6} = \frac{|m(1-1/m)|}{\left[1+\ (\tilde{x}-1)\right]^6} = \frac{|m-1|}{\left[1+m(\tilde{x}-1)\right]^6}$$

$$\boxed{\frac{\chi_{AB}}{|m-1|} = \left[1+m(\tilde{x}-1)\right]^6}$$

Si $\tilde{x} \to \infty : \chi_{AB} \to 0$

3) $\delta_2^2 = \delta_2^2\left(\nu, \frac{due}{dx}\right)$?

Adimensionalizar δ_2^2 :

$$\left.\begin{array}{l} \nu \,[=]\, V \cdot L \\ \frac{due}{dx} \,[=]\, \frac{V}{L} \end{array}\right\} \frac{\nu}{due/dx} [=] L^2 ; \tilde{\delta}_2^2 = \frac{\delta_2^2}{\nu} \cdot \frac{due}{dx} = C_1 \rightarrow \text{constante adimensional}$$

Como la relajación es instantánea tiene que: $\tilde{\delta}_2^2 = \tilde{\delta}_{2A}^2$ $\rightarrow$ $\frac{\delta_{2A}^2}{\cancel{x_A^2}} = \frac{0{,}075 \cdot \nu}{U_A \cdot \cancel{x_A}} \Rightarrow \frac{\delta_{2A}^2}{\nu} \cdot \left(\frac{U_A}{x_A}\right) = 0{,}075 \Rightarrow \frac{\delta_{2A}^2}{\nu}\left(\frac{due}{dx}\right)_A = 0{,}075$

Enunciado: $t_A = \left(due/dx\right)_A^{-1}$

$\frac{U_A}{x_A} = t_A^{-1} = \left(\frac{due}{dx}\right)_A$

$\underline{\underline{C = 0{,}075}}$

$$\frac{\delta_2^2}{\nu} \cdot \frac{due}{dx} = 0{,}075 \Rightarrow \boxed{\delta_2^2 = \frac{0{,}075\,\nu}{due/dx}}$$

$\rightsquigarrow$ variante $\delta_2^2 = \frac{0{,}075\,\nu}{\left[a\frac{due}{dx} + b\frac{u_e}{x}\right]}$; $a+b=1$

4) $u_e = 2U_\infty \operatorname{sen}(x/R)$; $\delta_2^2 = 0{,}075 \cdot \frac{\nu}{(due/dx)}$

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}075 \cdot \nu}{2U_\infty \frac{1}{R} \cdot \cos(x/R)} \rightarrow \frac{\delta_2^2}{R^2} = \frac{0{,}075}{2} \cdot \frac{1}{\cos(x/R)} \cdot \underbrace{\frac{\nu \cancel{R}}{U_\infty R^{\cancel{2}}}}_{Re = \frac{U_\infty R}{\nu}} \rightarrow \boxed{Re \cdot \tilde{\delta}_2^2 = \frac{0{,}0375}{\cos(x/R)} ,\ 0 \leq \frac{x}{R} \leq \frac{\pi}{4}}$$

(x/R)	$Re \cdot \tilde{\delta}_2^2$, Thwaites	$Re \cdot \tilde{\delta}_2^2$, (4)	Error
0	0,0375	0,0375	0%
$\pi/6$	0,0417	0,0433	4,17%
$\pi/4$	0,0478	0,0530	10,88%

ESCUELA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO. EIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen 17–12–2014**

Las ecuaciones que determinan la capa límite laminar incompresible sobre una placa plana, sometida a una corriente uniforme de velocidad U_∞ paralela a la placa y presión p_∞, son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

se pide:

1.- Condiciones de contorno que hay que imponer a las ecuaciones anteriores.

2.- Utilizar el análisis dimensional para obtener la dependencia de la función de corriente[1] $\psi(x,y)$ con el número mínimo de parámetros del problema.

3.- Obtenida la forma de $\psi(x,y)$, determinar $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

4.- Determinar, en función de x y demás parámetros del problema, el coeficiente de fricción en la placa. En la expresión del esfuerzo en la pared aparece una constante adimensional que no es necesario calcular, pero si deben indicar como se calcularía.

5.- Utilizando la formulación de Thwaites[2], determinar el espesor de cantidad de movimiento δ_2 y comparen la solución con la correspondiente a la solución de Blasius (cuya constante adimensional es 0.664).

---

[1] La función de corriente es tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,;\; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

[2] La formulación de Thwaites es

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{u_e^6}\int_0^x u_e^5\,dx.$$

SOLUCIÓN

1.- Las condiciones de contorno son: $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = 0$; $u(x,\infty) = U_\infty$ y $u(0,y) = U_\infty$.

2.- Si utilizamos como variable $y/\sqrt{\nu}$ en la ecuación de cantidad de movimiento es necesario escalar también la velocidad transversal v con $v/\sqrt{\nu}$. En esas condiciones las ecuaciones quedan

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (v/\sqrt{\nu})}{\partial (y/\sqrt{\nu})} = 0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{v}{\sqrt{\nu}}\right)\frac{\partial u}{\partial (y/\sqrt{\nu})} = \frac{\partial^2 u}{\partial (y/\sqrt{\nu})^2}.$$

Del mismo modo, la función de corriente también debe escalarse con $\sqrt{\nu}$ como se indica a continuación

$$u = \frac{\partial (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial (y/\sqrt{\nu})}; \quad \frac{v}{\sqrt{\nu}} = -\frac{\partial (\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x}.$$

Por lo tanto, tanto $\psi/\sqrt{\nu}$, como $v/\sqrt{\nu}$ y u son sólo funciones de x, $y/\sqrt{\nu}$ y U_∞. Las únicas dimensiones básicas son las de velocidad y longitud, de modo que el análisis dimensional proporciona

$$\frac{\psi}{\sqrt{\nu U_\infty x}} = f\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right).$$

3.- LLamando $\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu x}$, se tiene $\psi = \sqrt{\nu U_\infty x}\, f(\eta)$, de modo que la velocidad u es

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\nu U_\infty x}\frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \frac{df}{d\eta},$$

y la componente v de la velocidad es

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\left(f - \eta\frac{df}{d\eta}\right).$$

4.- El esfuerzo en la pared está dado por

$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu U_\infty \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}},$$

mientras que el coeficiente de fricción está dado por

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho U_\infty^2} = \frac{2}{\sqrt{Re_x}}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0},$$

donde $Re_x = U_\infty x/\nu$. La constante que hay que determinar es $f''(0)$, que se obtiene como parte de la solución del problema de Blasius. De la solución se obtiene $2f''(0) = 0{,}664$.

5.- De acuerdo con la formulación de Thwaites se tiene

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{u_e^6}\int_0^x u_e^5 dx = \frac{0{,}47\nu x}{U_\infty},$$

o bien

$$\frac{\delta_2}{x} = \sqrt{\frac{0{,}47}{U_\infty x/\nu}} = \frac{0{,}686}{\sqrt{Re_x}},$$

que comparado con la solución exacta (0.664) el error es del orden del 3 %.

EXAMEN 17/12/2014

- Capa límite laminar incompresible sobre placa plana
- Corriente uniforme U_∞ paralela a la corriente
- p_∞

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\ ;\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1)
$$\boxed{\begin{array}{l} y=0:\ u=v=0\\ y\to\infty:\ u=U_\infty\\ x=0:\ u=U_\infty\end{array}}$$

2)
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(v/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}=0\ ;\ u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{\sqrt{\nu}}\cdot\frac{\partial u}{\partial(y/\sqrt{\nu})}=\frac{\partial^2 u}{\partial(y/\sqrt{\nu})^2}$$

→ Hago desaparecer la dependencia directa del parámetro ν.

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ;\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$\downarrow$$
$$u=\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}\ ;\ \frac{v}{\sqrt{\nu}}=-\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x}$$

- Ec. continuidad:

$$\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x\,\partial(y/\sqrt{\nu})}-\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x\,\partial(y/\sqrt{\nu})}=0\ \checkmark$$

se autocumple

- Ec. cant. mov.:

$$\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}\cdot\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x\,\partial(y/\sqrt{\nu})}-\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})^2}=\frac{\partial^3(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})^3}$$

$$\frac{\psi}{\sqrt{\nu}}=f\left(x,\frac{y}{\sqrt{\nu}},U_\infty\right)$$

$$\boxed{\frac{\psi}{\sqrt{U_\infty\nu x}}=f\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{x\nu}}\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\,[=]\,L \qquad U_\infty\,[=]\,LT^{-1}\qquad \text{y}\ \sqrt{\dfrac{U_\infty}{x}}\,[=]\,T^{-1/2}\\ \dfrac{y}{\sqrt{\nu}}\,[=]\,\dfrac{\cancel{L}}{\sqrt{\cancel{L}\cdot\cancel{L}T^{-1}}}=T^{+1/2}\\ \dfrac{\psi}{\sqrt{\nu}}\,[=]\,\dfrac{L\cdot T^{-1}\cdot\cancel{L}}{\sqrt{L\cancel{L}T^{-1}}}=L\cdot T^{-1/2}\end{array}\right.$$

$$\sqrt{xU_\infty}\,[=]=LT^{-1/2}$$

3)
$$\psi=\sqrt{U_\infty\nu x}\,f(\eta)\ ;\ \eta=y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sqrt{\frac{U_\infty}{\cancel{\nu x}}}\cdot\sqrt{U_\infty\cancel{\nu x}}\cdot\frac{df}{d\eta}=U_\infty\frac{df}{d\eta}=u$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty\nu}{x}}f(\eta)-\sqrt{U_\infty\nu x}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty\nu}{x}}\cdot f(\eta)-\sqrt{U_\infty\nu x}\cdot\frac{df}{d\eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{-\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x^3}}}$$
$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty\nu}{x}}f(\eta)+\sqrt{\frac{U_\infty\nu x}{x^{\cancel{2}}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\,y\,\frac{df}{d\eta}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty\nu}{x}}\left(\eta\frac{df}{d\eta}-f(\eta)\right)$$

$$\boxed{u = U_\infty \frac{df}{d\eta}} \quad ; \quad \boxed{v = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\left(f(\eta) - \eta\frac{df}{d\eta}\right)}$$

4) $$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad ; \quad \tau_p = \mu\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu\cdot U_\infty\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}$$

$$C_f = \frac{\mu\,\cancel{U_\infty}\sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu x}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}}{\frac{1}{2}\rho\,U_\infty^{\cancel{2}}} = 2\underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty x}}}_{Re^{-1/2}}\cdot\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \rightarrow \boxed{C_f = \frac{2}{\sqrt{Re_x}}\cdot\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}}$$

La constante adimensional es $\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}$ que se obtiene como solución del problema de Blasius.

5) $$\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{u_e^6}\int_0^x u_e^5\,dx = \frac{0{,}47\nu}{U_\infty^6}\cdot U_\infty^5\int_0^x dx \rightarrow \boxed{\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu x}{U_\infty}}$$

$u_e = U_\infty$

$$\left(\frac{\delta_2}{x}\right)^2 = 0{,}47\cdot\frac{\nu}{U_\infty x} = 0{,}47\cdot\frac{1}{Re_x} \rightarrow \frac{\delta_2}{x} = \sqrt{0{,}47}\cdot\frac{1}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0{,}686}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\left.\frac{\delta_2}{x}\right|_{Blasius} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad \frac{\delta_2/x}{\left.\delta_2/x\right|_{Blas.}} = 1{,}033 \rightsquigarrow \boxed{\text{Error del orden del 3\%}}$$

ESCUELA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO. EIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen 17–12–2014**

Una corriente uniforme, velocidad U_∞ y presión p_∞, de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ se mueve, a altos números de Reynolds, alrededor de un cilindro circular. La velocidad u_e tangente a la pared del cilindro, de acuerdo con la teoría de Euler, está dada por

$$u_e = 2U_\infty sen\left(\frac{x}{R}\right),$$

donde R es el radio del cilindro y x es la coordenada a lo largo de la pared del cilindro, medida desde el punto de remanso situado aguas arriba.

Se pide:

1.- Determinar la distribución de presiones sobre la pared del cilindro.

2.- Utilizando el método de Thwaites, determinar el espesor de cantidad de movimiento, $\delta_2(x)$, y en particular su valor en el punto de remanso.

3.- Determinar el parámetro, $\lambda(x)$, y en particular su valor en el punto de remanso.

4.- Obtengan el coeficiente de fricción. Para ello utilicen la correlación $T(\lambda) = (0{,}09 + \lambda)^{0{,}62}$.

5.- Muestren la variación con x del esfuerzo de fricción en la pared en el entorno del punto de remanso.

6.- Determinar, de acuerdo con los resultados anteriores, el punto de desprendimiento de la capa límite.

SOLUCIÓN

La distribución de presiones está dada por

$$p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2,$$

de modo que el coeficiente de presiones está dado por

$$C_P = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^2 = 1 - 4sen^2\left(\frac{x}{R}\right).$$

Con el método de Thwaites, el espesor de cantidad de movimiento está dado por

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}45\nu}{u_e^6}\int_0^x u_e^5 dx = \frac{0{,}45\nu R}{2U_\infty}\frac{1}{sen^6\left(\frac{x}{R}\right)}\int_0^x sen^5\left(\frac{x}{R}\right)d\left(\frac{x}{R}\right).$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^x sen^5\left(\frac{x}{R}\right)d\left(\frac{x}{R}\right) = -\int_0^x sen^4\left(\frac{x}{R}\right)d\left[cos\left(\frac{x}{R}\right)\right] = -\int_0^x\left[1 - cos^2\left(\frac{x}{R}\right)\right]^2 d\left[cos\left(\frac{x}{R}\right)\right],$$

y llamando $\xi = cos\left(\frac{x}{R}\right)$, la integral anterior se reduce a

$$\int_0^x sen^5\left(\frac{x}{R}\right)d\left(\frac{x}{R}\right) = -\int_1^\xi\left(1-\xi^2\right)^2 d\xi = (1-\xi) - \frac{2}{3}\left(1-\xi^3\right) + \frac{1}{5}\left(1-\xi^5\right),$$

de modo que

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}45\nu R}{2U_\infty}\frac{\left[1 - cos\left(\frac{x}{R}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[1 - cos^3\left(\frac{x}{R}\right)\right] + \frac{1}{5}\left[1 - cos^5\left(\frac{x}{R}\right)\right]}{sen^6\left(\frac{x}{R}\right)}.$$

Obsérvese que en la expresión anterior, para $x = 0$, se tiene un cero partido por cero, pero en realidad el límite es finito. En efecto

$$\lim_{x\to 0}\left\{sen\left(\frac{x}{R}\right)\right\} = \frac{x}{R},$$

de modo que

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{sen^6\left(\frac{x}{R}\right)}\int_0^x sen5\!\left(\frac{x}{R}\right)d\left(\frac{x}{R}\right)\right\} \to \left(\frac{R}{x}\right)^6\int_0^x\left(\frac{x}{R}\right)^5 d\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{6}, \tag{1}$$

y, en particular,

$$\lim_{x\to 0}\left\{\int_0^x\left(\frac{x}{R}\right)^5 d\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{x}{R}\right)^6\right\} \tag{2}$$

Para determinar λ se tiene

$$\lambda = \frac{\delta_2^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = \frac{2\delta_2^2 U_\infty}{\nu R}cos\left(\frac{x}{R}\right),$$

de modo que

$$\lambda = 0{,}45\,cos\left(\frac{x}{R}\right)\frac{\left[1 - cos\left(\frac{x}{R}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[1 - cos^3\left(\frac{x}{R}\right)\right] + \frac{1}{5}\left[1 - cos^5\left(\frac{x}{R}\right)\right]}{sen^6\left(\frac{x}{R}\right)}. \tag{3}$$

El valor de λ en el punto de remanso se obtiene de la relación anterior, teniendo en cuenta (1) calculado más arriba. Este valor es

$$\lambda_{remanso} = \frac{0{,}45}{6} = 0{,}075.$$

El coeficiente de fricción está dado por

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho u_e^2} = \frac{2\nu}{u_e\delta_2}T(\lambda) = \sqrt{\frac{2\nu}{0{,}45U_\infty R}}\frac{T(\lambda)\,sen^2\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{\left[1 - cos\left(\frac{x}{R}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[1 - cos^3\left(\frac{x}{R}\right)\right] + \frac{1}{5}\left[1 - cos^5\left(\frac{x}{R}\right)\right]}},$$

de modo que

$$C_f = \frac{2{,}11}{\sqrt{Re}}\frac{(\lambda + 0{,}09)^{0{,}62}\,sen^2\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{\left[1 - cos\left(\frac{x}{R}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[1 - cos^3\left(\frac{x}{R}\right)\right] + \frac{1}{5}\left[1 - cos^5\left(\frac{x}{R}\right)\right]}},$$

siendo $Re = U_\infty R/\nu$ y $\lambda(x/R)$ está dado más arriba. En las proximidades del punto de remanso $\lambda \to 0{,}075$; $sen^2(x/R) \to (x/R)^2$; y el denominador es la raíz cuadrada del resultado dado en (2): $(x/R)^3/\sqrt{6}$, de modo que

$$C_f = \frac{1{,}69}{\sqrt{Re}}\left(\frac{x}{R}\right)^{-1},$$

que tiende a ∞ cuando x tiende a cero. Sin embargo, el esfuerzo en la pared es

$$\tau_p = \frac{1}{2}C_f\rho u_e^2 = \frac{0{,}845}{\sqrt{Re}}\left(\frac{R}{x}\right)\rho U_\infty^2\left[2sen\left(\frac{x}{R}\right)\right]^2 = \frac{3{,}38}{\sqrt{Re}}\rho U_\infty^2\frac{x}{R},$$

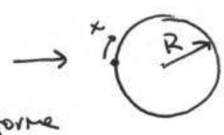
que varía linealmente con x, ya que $sen(x/R) \to x/R$ cuando $x/R \to 0$.

El punto de desprendimiento corresponde a $\lambda_{desp} = -0{,}09$. El valor de $(x/R)_{desp}$ se puede obtener de la ecuación (3) por iteración, así se tiene

$\left(\frac{x}{R}\right)$ *Grados*	$\left(\frac{x}{R}\right)$ *Radianes*	λ
95	1.658	-0.025
100	1.745	-0.060
105	1.833	-0.112

Interpolando con los dos últimos valores se obtiene $\lambda_{desp} = -0{,}09$ cuando $(x/R)_{desp} = 1{,}8\,rad = 103^o$.

EXAMEN 17/12/2014



U_∞ uniforme

p_∞, ρ, μ

$Re \gg 1$

Velocidad tangente a la pared del cilindro:

$$u_e = 2U_\infty \operatorname{sen}\left(\frac{x}{R}\right)$$

1) Ec. de Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^2\right] \rightarrow c_p(x) = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1-\left(\frac{u_e}{U_\infty}\right)^2$$

$$\boxed{c_p(x) = 1 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{R}\right)}$$

2)

$$\delta_2^2 = \frac{0,45\nu}{u_e^6}\int_0^x u_e^5\,dx = \frac{0,45\nu}{u_e^6} R \int_0^{x/R} (2U_\infty)^5 \operatorname{sen}^5\left(\frac{x}{R}\right) d\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$= \frac{0,45\nu R}{(2U_\infty)^6 \operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{R}\right)} \int_0^{x/R} \cancel{(2U_\infty)^5}\cdot \underbrace{\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{R}\right)}_{\left[1-\cos^2\left(\frac{x}{R}\right)\right]^2} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{R}\right) d\left(\frac{x}{R}\right)}_{d\left[-\cos\left(\frac{x}{R}\right)\right]} = \quad \xi = \cos\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$= -\frac{0,45\nu R}{2U_\infty}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{R}\right)}\cdot \underbrace{\int_1^{\xi}\left[1-\xi^2\right]^2 d\xi}_{\int_1^{\xi}(1+\xi^4-2\xi^2)d\xi \,=\, \xi + \frac{\xi^5}{5} - \frac{2}{3}\xi^3\Big|_1^{\xi} = (\xi-1)+\frac{1}{5}(\xi^5-1)-\frac{2}{3}(\xi^3-1)}$$

$$\boxed{\delta_2^2 = \frac{0,45\nu R}{2U_\infty}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{R}\right)}\cdot\left[1-\cos\left(\frac{x}{R}\right) - \frac{2}{3}\left(1-\cos^3\left(\frac{x}{R}\right)\right) + \frac{1}{5}\left(1-\cos^5\left(\frac{x}{R}\right)\right)\right]}$$

Punto de remanso (proximidades): $\frac{x}{R}\rightarrow 0$: $\lim_{x/R\to 0}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{R}\right)\right\} \simeq \frac{x}{R}$

$$\lim_{\frac{x}{R}\to 0}\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{R}\right)}\cdot\int_0^{x/R}\operatorname{sen}^5\left(\frac{x}{R}\right)d\left(\frac{x}{R}\right)\right\} \rightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^{-6}\int_0^{x/R}\left(\frac{x}{R}\right)^5 d\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\delta_2^2\Big|_{\frac{x}{R}\to 0} = \frac{0,45\nu R}{12U_\infty}}$$

3) $\lambda(x) = \frac{\delta_2^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}$

$$\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{R}\frac{du_e}{d(x/R)} = +\frac{2U_\infty}{R}\cos\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{0{,}45\,\cancel{\nu} R}{\cancel{2}\cancel{U_\infty}\cancel{\nu}}\cdot\frac{[1-\cos(x/R)]-\frac{2}{3}[1-\cos^3(x/R)]+\frac{1}{5}[1-\cos^5(x/R)]}{\text{sen}^6(x/R)}\cdot\frac{\cancel{2U_\infty}}{\cancel{R}}\cos\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\boxed{\lambda(x) = 0{,}45\cos\left(\frac{x}{R}\right)\frac{[1-\cos(x/R)]-\frac{2}{3}[1-\cos^3(x/R)]+\frac{1}{5}[1-\cos^5(x/R)]}{\text{sen}^6(x/R)}}$$

$$\left.\frac{du_e}{dx}\right|_{x/R\to 0} \simeq \frac{2U_\infty}{R}$$

$$\left.\delta_2^2\right|_{\frac{x}{R}\to 0} \simeq \frac{0{,}45\,\nu R}{12\,U_\infty}$$

$$\left.\lambda(x)\right|_{\frac{x}{R}\to 0} = \frac{0{,}45\,\nu R}{\cancel{12}_{6}\,\cancel{U_\infty}\cancel{\nu}}\cdot\frac{\cancel{2}\cancel{U_\infty}}{\cancel{R}} \rightarrow \boxed{\left.\lambda(x)\right|_{\frac{x}{R}\to 0} \simeq 0{,}075}$$

4) $$C_f = \frac{2\nu}{u_e\delta_2}\cdot T(\lambda) = \frac{\cancel{2}\,\nu\, T(\lambda)}{\cancel{2}U_\infty \text{sen}(\frac{x}{R})\cdot\delta_2} = \frac{\nu T(\lambda)}{U_\infty \text{sen}(\frac{x}{R})}\cdot\sqrt{\frac{2U_\infty \text{sen}^6(\frac{x}{R})}{0{,}45\cdot\nu\cdot R}}\cdot\frac{1}{\sqrt{[1-\cos(x/R)]-\frac{2}{3}[1-\cos^3(\frac{x}{R})]+\frac{1}{5}[1-\cos^5(\frac{x}{R})]}}$$

$$T(\lambda) = (0{,}09+\lambda)^{0{,}62}$$

$$\boxed{C_f = \sqrt{\frac{2\nu}{0{,}45\,\underbrace{U_\infty R}_{Re^{-1}}}}\cdot\frac{\text{sen}^2(\frac{x}{R})\cdot(0{,}09+\lambda)^{0{,}62}}{\sqrt{[1-\cos(\frac{x}{R})]-\frac{2}{3}[1-\cos^3(\frac{x}{R})]+\frac{1}{5}[1-\cos^5(\frac{x}{R})]}}}$$; con λ calculado en apartado (3)

En las proximidades del punto de remanso:

$$\left.\lambda\right|_{\frac{x}{R}\to 0} \simeq 0{,}075 \rightarrow T(\lambda) = (0{,}09+0{,}075)^{0{,}62} = 0{,}327$$

$$\left.u_e\right|_{\frac{x}{R}\to 0} \simeq 2U_\infty\cdot\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\left.\delta_2\right|_{\frac{x}{R}\to 0} \simeq \sqrt{\frac{0{,}45\,\nu R}{12\,U_\infty}}$$

$$C_f = \frac{\cancel{2}\cdot\nu\sqrt{12U_\infty}}{\cancel{2}U_\infty(\frac{x}{R})\sqrt{0{,}45\,\nu R}}\cdot 0{,}327 = 1{,}69\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty R}}}_{Re^{-1/2}}\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^{-1}$$

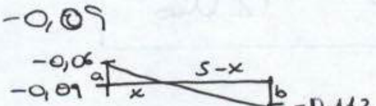
$$\boxed{C_f = \frac{1{,}69}{\sqrt{Re}}\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^{-1}}$$

5) $$\tau_p = \frac{1}{2}\rho u_e^2 C_f = \frac{0{,}844}{\sqrt{Re}}\cdot\left(\frac{R}{x}\right)\rho\left[2U_\infty\left(\frac{x}{R}\right)\right]^2 \Rightarrow \boxed{\tau_p = \frac{3{,}38}{\sqrt{Re}}\cdot\rho U_\infty^2\left(\frac{x}{R}\right)}$$

6) Iterar ecuación de (3) para que dé $\lambda(x_s) = -0{,}09$

$(\frac{x}{R})$ (Grados)	λ
95	$-0{,}025$
100	$-0{,}060$
105	$-0{,}112$

$\rightarrow \left(\frac{x}{R}\right)_s$ entre 100 y 105



$x = \frac{da}{a+b}$; $d = 5$, $a = 0{,}03$, $b = 0{,}022$ $\Big\} \rightarrow x = 2{,}88$

$$\boxed{\left(\frac{x}{R}\right)_s \simeq 102{,}88^\circ}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO. ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 05–02–2015**

Las ecuaciones que determinan la capa límite laminar incompresible sobre una placa, sometida a una corriente exterior a la capa límite de velocidad $U_e = ax$, son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$U_e\frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}.$$

se pide:

1.- Condiciones de contorno que hay que imponer a las ecuaciones anteriores.

2.- Utilizar el análisis dimensional para obtener la dependencia de la función de corriente[1] $\psi(x, y)$ con el número mínimo de parámetros del problema.

3.- Obtenida la forma adimensional de $\psi(x, y)$, que denominaremos como f, determinar $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en función de f y demás parámetros.

4.- Determinar, en función de x y demás parámetros del problema, el coeficiente de fricción en la placa. En la expresión del esfuerzo en la pared aparece una constante adimensional que no es necesario calcular.

5.- Determinen la ecuación diferencial y sus condiciones de contorno, cuya solución permitiría obtener la constante del apartado anterior.

6.- Utilizando la formulación de Thwaites[2], determinar el espesor de cantidad de movimiento δ_2.

[1] La función de corriente es tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,;\; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

[2] La formulación de Thwaites es

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{U_e^6}\int_0^x U_e^5\,dx.$$

SOLUCIÓN

1.- Las condiciones de contorno son: $u(x,0)=0$; $v(x,0)=0$; $u(x,\infty)=ax$ y $u(0,y)=0$.

2.- Si utilizamos como variable $y/\sqrt{\nu}$ en la ecuación de cantidad de movimiento es necesario escalar también la velocidad transversal v con $v/\sqrt{\nu}$. En esas condiciones las ecuaciones quedan

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\left(v/\sqrt{\nu}\right)}{\partial\left(y/\sqrt{\nu}\right)}=0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{v}{\sqrt{\nu}}\right)\frac{\partial u}{\partial\left(y/\sqrt{\nu}\right)}=a^2x+\frac{\partial^2 u}{\partial\left(y/\sqrt{\nu}\right)^2}.$$

Del mismo modo, la función de corriente también debe escalarse con $\sqrt{\nu}$ como se indica a continuación

$$u=\frac{\partial\left(\psi/\sqrt{\nu}\right)}{\partial\left(y/\sqrt{\nu}\right)};\quad \frac{v}{\sqrt{\nu}}=-\frac{\partial\left(\psi/\sqrt{\nu}\right)}{\partial x}.$$

Por lo tanto, tanto $\psi/\sqrt{\nu}$, como $v/\sqrt{\nu}$ y u son sólo funciones de x, $y/\sqrt{\nu}$ y a. Las únicas dimensiones básicas son las de velocidad y longitud, de modo que el análisis dimensional proporciona

$$\frac{\psi}{x\sqrt{\nu a}}=f\left(y\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right).$$

3.- LLamando $\eta=y\sqrt{a/\nu}$, se tiene $\psi=x\sqrt{\nu a}\,f(\eta)$, de modo que la velocidad u es

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=x\sqrt{\nu a}\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=ax\frac{df}{d\eta},$$

y la componente v de la velocidad es

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\sqrt{\nu a}\,f(\eta)-x\sqrt{\nu a}\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\sqrt{\nu a}\,f(\eta).$$

4.- El esfuerzo en la pared está dado por

$$\tau_p=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\mu ax\sqrt{\frac{a}{\nu}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0},$$

mientras que el coeficiente de fricción está dado por

$$C_f=\frac{2\tau_p}{\rho a^2x^2}=\frac{2}{x}\sqrt{\frac{\nu}{a}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}.$$

La constante que hay que determinar es $f''(0)$, que se obtiene como parte de la solución del problema que permite determinar $f(\eta)$.

5.- Dado que $\eta=y\sqrt{a/}$, $u=ax\,(df/d\eta)$ y $v=-\sqrt{\nu a}\,f(\eta)$, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{df}{d\eta};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-a\frac{df}{d\eta},$$

de modo que la ecuación de la continuidad se cumple automáticamente, como debe ser, ya que las velocidades u y v provienen de la función de corriente. Por otro lado se tiene

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=ax\frac{df}{dx}a\frac{df}{dx}=a^2x\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2,$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y}=-\sqrt{\nu a}\,f(\eta)\,ax\frac{d^2f}{d\eta^2}\sqrt{\frac{a}{\nu}}=-a^2x\,f\,\frac{d^2f}{d\eta^2},$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(ax\frac{d^2f}{d\eta^2}\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right)=\nu ax\frac{d^3f}{d\eta^3}\frac{a}{\nu}=a^2x\frac{d^3f}{d\eta^3},$$

de modo que la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$a^2 x\left[\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 - f\,\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right] = a^2 x\left(1 + \frac{d^3 f}{d\eta^3}\right),$$

resultando

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\,\frac{d^2 f}{d\eta^2} - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 + 1 = 0.$$

Esta ecuación hay que integrarla con las condiones de contorno

$$\eta = 0: \qquad f = 0; \quad df/d\eta = 0,$$

$$\eta \to \infty: \qquad df/d\eta \to 1.$$

La condición $u = 0$ en $x = 0$ se cumple automáticamente de la expresión de u. La solución de la ecuación anterior proporciona el valor de $f''(0)$, que en este caso es $f''(0)$=1.233.

6.- De acuerdo con la formulación de Thwaites se tiene

$$\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{U_e^6}\int_0^x U_e^5 dx = \frac{0{,}47\nu}{6a}.$$

EXAMEN FINAL 05/02/2015

- Capa límite laminar incompresible sobre una placa
- Corriente exterior: $U_e = ax \rightarrow \left.\begin{matrix} x[=]L \\ U_e[=]LT^{-1}\end{matrix}\right\} \rightarrow a[=]T^{-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\ ;\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ ;\ U_e\frac{dU_e}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}$$

1) $$\boxed{\begin{aligned} &y=0:\ u=v=0\\ &y\to\infty:\ u=U_e=ax\\ &x=0:\ u=U_e=ax|_{x=0}=0\end{aligned}}$$

2) $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ;\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \rightarrow y' \rightarrow y/\sqrt{\nu}$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(v/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}=0$

Se elimina la dependencia de ν ↑

$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial u}{\partial(y/\sqrt{\nu})}=\underbrace{U_e\frac{dU_e}{dx}}_{a^2x}+\frac{\partial^2 u}{\partial(y/\sqrt{\nu})^2}$

$u=\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}$

$\frac{v}{\sqrt{\nu}}=-\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x}$

$$\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})}\cdot\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x\,\partial(y/\sqrt{\nu})}-\frac{\partial(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})^2}=a^2x+\frac{\partial^3(\psi/\sqrt{\nu})}{\partial(y/\sqrt{\nu})^3}$$

$$\frac{\psi}{\sqrt{\nu}}=f(x, y/\sqrt{\nu}, a)\quad\left\{\begin{aligned} &x[=]L\\ &\frac{y}{\sqrt{\nu}}[=]\frac{\cancel{L}}{\sqrt{\cancel{L}\cdot L\cdot T^{-1}}}=T^{+1/2}\\ &a[=]T^{-1}\rightarrow\sqrt{a}[=]T^{-1/2}\\ &\frac{\psi}{\sqrt{\nu}}[=]\frac{\cancel{L}\cdot L\cdot T^{-1}}{\sqrt{\cancel{L}\cdot L\cdot T^{-1}}}=L\cdot T^{-1/2}\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\frac{\psi}{x\sqrt{\nu a}}=f\left(y\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right)}$$

3) Llamando $\eta=y\sqrt{\frac{a}{\nu}} \rightarrow \frac{\psi}{x\sqrt{\nu a}}=f(\eta)\rightarrow \psi=x\sqrt{\nu a}\cdot f(\eta)$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=x\sqrt{\nu a}\cdot\frac{df(\eta)}{d\eta}\cdot\sqrt{\frac{a}{\nu}}=\boxed{ax\cdot\frac{df(\eta)}{d\eta}=u}$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\sqrt{\nu a}\,f(\eta)-x\sqrt{\nu a}\cdot\frac{df}{d\eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{0}=\boxed{-\sqrt{\nu a}\cdot f(\eta)=v}$$

4) $$\tau_p=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\mu ax\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{df(\eta)}{d\eta}\right)\Big|_{\eta=0}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big|_{y=0}=\mu ax\sqrt{\frac{a}{\nu}}\cdot\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}$$

$$C_f=\frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}=\frac{2\mu\cancel{a}\cancel{x}\sqrt{\frac{a}{\nu}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}}{\rho a^2x^{\cancel{2}}}=\boxed{\frac{2}{x}\sqrt{\frac{\nu}{a}}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}=C_f}$$

5) $u = a x \dfrac{df(\eta)}{d\eta}$

$v = -\sqrt{a\nu} \cdot f(\eta)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = a x \sqrt{\dfrac{a}{\nu}} \cdot \dfrac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = a \dfrac{df(\eta)}{d\eta}$

$\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 x \dfrac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3}$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = a^2 x + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\cancel{a^2x}\left(\frac{df(\eta)}{d\eta}\right)^2 - \cancel{a^2x}\, f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = \overset{1}{\cancel{a^2x}} + \cancel{a^2x} \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + f(\eta) \dfrac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} - \left(\dfrac{df(\eta)}{d\eta}\right)^2 + 1 = 0 \\ \eta = 0 : \ f(0) = f'(0) = 0 \\ \eta \to \infty : \ f'(\infty) = 1 \end{array}}$$

(La condición en $x=0$: $u=0$ se cumple automáticamente según la definición de u)

6) $$\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{u_e^6} \int_0^x u_e^5 \, dx = \frac{0{,}47\nu}{a^{\cancel{6}} \cdot x^6} \cdot \int_0^x \cancel{a^5} \cdot x^5 \, dx = \frac{0{,}47\nu}{6a\cancel{x^6}} \cdot \cancel{x^6}$$

$$\boxed{\delta_2^2 = \frac{0{,}47\nu}{6a}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Final 05.02.2015**

Se desea analizar el flujo laminar sobre un conjunto infinito de aletas planas de refrigeración de longitud L (figura inferior izquierda) colocadas horizontalmente, con separación h en la dirección vertical, y sometidas a un flujo incompresible de velocidad U_∞ ($U_\infty L/\nu \gg 1$) en dirección alineada con las aletas,. Debido a la simetría de la configuración, basta analizar el flujo sobre una de ellas, en el espacio $0 \le y \le h/2$, donde y representa la coordenada normal a la aleta analizada (ver figura inferior derecha). Sobre cada cara de las aletas se desarrolla una capa límite en la dirección x cuyo espesor total denominaremos $\delta(x)$. Para maximizar la transferencia de calor, la relación L/h se diseña de forma que $2\delta(L)/h < 1$, de manera que los efectos viscosos en la línea de corriente $y = h/2$ son despreciables.

Se pide:

1) Establecer las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el flujo en el canal entre aletas, escribiendo el gradiente de presiones para la ecuación de cantidad de movimiento en dirección x en función de la velocidad en el centro del canal, $u_c(x)$. Dado que esta velocidad es desconocida, escribir asimismo la ecuación de continuidad integral en el canal, entre $x = 0$ y $x = x$, para incluir una relación de ligadura adicional que permita cerrar la descripción del problema.

2) Operando convenientemente sobre la ecuación de cantidad de movimiento en x, deducir para este flujo la ecuación de Karman que proporciona la evolución del espesor de cantidad de movimiento δ_2 de la capa límite,

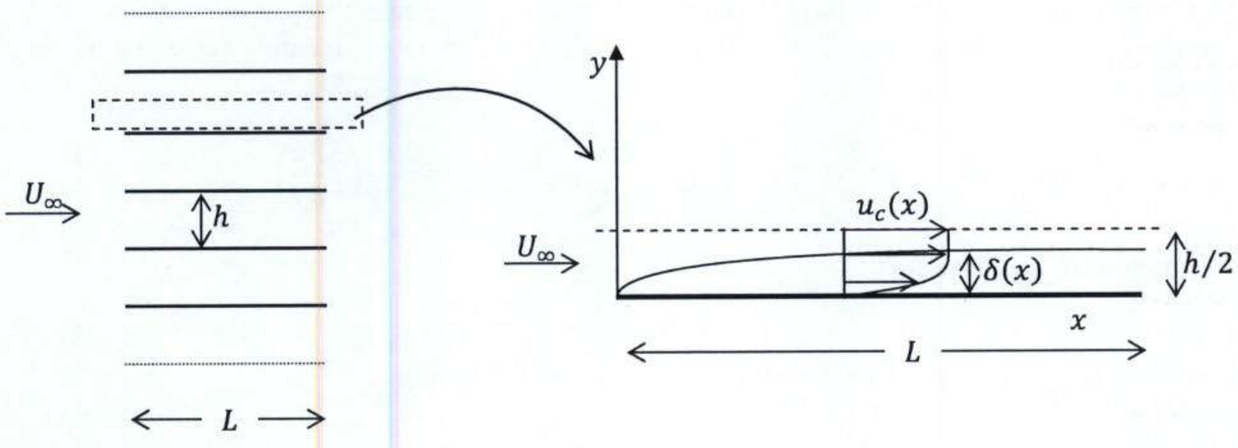
$$\delta_2 = \int_0^{h/2} \left(\frac{u}{u_c} \left(1 - \frac{u}{u_c} \right) \right) dy,$$

como función de x, de $u_c(x)$, del coeficiente de fricción $c_f(x) = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_c^2}$ y de los parámetros U_∞ y h.

3) Asumiendo que el perfil de la capa límite se aproxima mediante una ley lineal:

$$\frac{u}{u_c} = \begin{cases} \dfrac{y}{\delta} & 0 \le \dfrac{y}{\delta} \le 1 \\ 1 & 1 \le \dfrac{y}{\delta} \le \dfrac{h}{2\delta} \end{cases}$$

determinar la ecuación diferencial que proporciona la evolución del espesor $\delta(x)$. Integrar la ecuación diferencial y obtener una expresión que permita determinar la evolución a lo largo de la coordenada x del espesor de la capa límite $\delta(x)/h$, de la velocidad en el centro del canal $u_c(x)/U_\infty$, y del coeficiente de fricción $c_f(x)$. Proporcionar la evolución simplificada de estas magnitudes en la región en que $\delta(x)/h \ll 1$. Determinar el valor máximo de la relación entre la longitud de las aletas y su separación, $(L/h)_{max}$, para el que la descripción obtenida en los apartados 1) a 3) es válida.



Solución

1) El flujo es casi unidireccional con $v_c/u_c \sim \delta/L \sim (LU_\infty/\nu)^{-1/2} \ll 1$. Por tanto las variaciones transversales de presión pueden despreciarse en la ecuación de cantidad de movimiento en x. En consecuencia las ecuaciones que rigen el movimiento son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp_c}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

donde $p_c(x)$ representa la presión en el centro del canal, $y = h/2$. Puesto que a lo largo de la línea de corriente $y = h/2$, $v = 0$ y el fluido no experimenta efectos viscosos, la ecuación (2) proporciona:

? diría más bien que se puede despreciar frente a u

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp_c}{dx}=u_c\frac{du_c}{dx} \tag{3}$$

de modo que la ecuación de cantidad de movimiento se escribe como:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}=u_c\frac{du_c}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4}$$

Las condiciones de contorno para resolver el sistema (1), (4) son:

$$\begin{aligned} &y=0:\quad u=v=0;\\ &y=h/2:\quad u=u_c(x),\quad \partial u/\partial y=0,\quad v=0.\\ &x=0:\quad u(y)=U_\infty,\quad 0\le y\le h/2 \end{aligned} \tag{5}$$

El valor de la velocidad en el centro del canal $u_c(x)$ es parte de la solución a determinar. Por ello es preciso introducir una ligadura adicional en el campo de velocidad, que se impone al establecer la ecuación de continuidad integral en el canal para un volumen de control situado entre $x = 0$ y $x = x$:

$$\int_0^{h/2} u\,dy=\frac{U_\infty h}{2} \tag{6}$$

2) La ecuación de Karman se puede derivar sumando al primer miembro de la ecuación (4) el término $-u_c(\partial u/\partial x+\partial v/\partial y)+u\,du_c/dx-u\,du_c/dx$ que es idénticamente nulo. Se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(u(u_c-u)\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(v(u_c-u)\big)+\frac{du_c}{dx}(u_c-u)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7}$$

Integrando en la dirección y:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2}\big(u(u_c-u)\big)dy+\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2}(u_c-u)dy=\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{\tau_p}{\rho} \tag{8}$$

Usando la ecuación (6), la segunda integral del primer miembro puede escribirse en función de u_c, h, U_∞. Además introduciendo el espesor de cantidad de movimiento δ_2, y el coeficiente de fricción c_f:

$$\delta_2 = \int_0^{h/2} \left(\frac{u}{u_c}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)\right) dy\,; \quad \tau_p = c_f \frac{1}{2}\rho u_c^2 \tag{9}$$

la ecuación (8) se transforma en:

$$\frac{d}{dx}(u_c^2\delta_2) + \frac{du_c}{dx}(u_c - U_\infty)\frac{h}{2} = \frac{c_f}{2}u_c^2 \tag{10}$$

o bien:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_c}\frac{du_c}{dx}\left(\left(1-\frac{U_\infty}{u_c}\right)\frac{h}{2} + 2\delta_2\right) = \frac{c_f}{2} \tag{11}$$

Para la ley lineal de velocidad en la capa límite:

$$\frac{u}{u_c} = \begin{cases} \dfrac{y}{\delta} & 0 \le \dfrac{y}{\delta} \le 1 \\ 1 & 1 \le \dfrac{y}{\delta} \le \dfrac{h}{2\delta} \end{cases} \tag{12}$$

se obtiene:

$$c_f = \frac{2\nu}{u_c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{2\nu}{u_c\delta}, \qquad \delta_2 = \int_0^{h/2} \left(\frac{u}{u_c}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)\right) dy = \frac{\delta}{6} \tag{13}$$

Además, la ligadura (6) proporciona:

$$u_c(h-\delta) = U_\infty h \tag{14}$$

y por tanto:

$$\frac{1}{u_c}\frac{du_c}{dx} = \frac{1}{(h-\delta)}\frac{d\delta}{dx} \tag{15}$$

Introduciendo las expresiones (13) a (15) en la ecuación de Karman (11) se obtiene:

$$\frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx} + \frac{5\delta}{6(h-\delta)}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu(h-\delta)}{U_\infty h\delta} \tag{16}$$

es decir:

$$\int_0^{\delta/h} \frac{\tilde{\delta}(1+4\tilde{\delta})}{(1-\tilde{\delta})^2}\, d\tilde{\delta} = \frac{6\nu x}{U_\infty h^2} \tag{17}$$

cuya integración proporciona:

$$4\left(\frac{\delta}{h}\right)+9ln\left(\frac{h-\delta}{h}\right)+\frac{5\delta}{h-\delta}=\frac{6\nu L}{U_\infty h^2}\frac{x}{L} \tag{18}$$

Utilizando (14), la evolución de u_c/U_∞ toma la forma:

$$4\left(1-\left(\frac{u_c}{U_\infty}\right)^{-1}\right)-9ln\left(\frac{u_c}{U_\infty}\right)+5\left(\frac{u_c}{U_\infty}-1\right)=\frac{6\nu L}{U_\infty h^2}\frac{x}{L} \tag{19}$$

El coeficiente de fricción viene dado por:

$$c_f=\frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_c^2}=\frac{2\nu}{U_\infty h}\left(\frac{u_c}{U_\infty}\frac{\delta}{h}\right)^{-1}=\frac{2\nu}{U_\infty h}\left(\frac{u_c}{U_\infty}-1\right)^{-1} \tag{20}$$

con u_c/U_∞ dada por la expresión (19).

Para $\delta/h \ll 1$, desarrollando en serie la expresión (18) se obtiene:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2\approx\frac{6\nu L}{U_\infty h^2}\frac{x}{L} \tag{21}$$

que también se puede obtener al simplificar el integrando en (17) para el caso $\tilde{\delta} \ll 1$. En este límite, la expresión (21) que da la evolución del espesor pierde la información de h:

$$\frac{\delta}{x}\approx\sqrt{\frac{12\nu}{U_\infty x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_2}{x}\approx(3Re_x)^{-1/2} \tag{22}$$

Dado que $6\nu x/U_\infty h^2 = O((\delta/h)^2) \ll 1$, la ecuación (19) implica:

$$\frac{u_c}{U_\infty}\approx 1 \tag{23}$$

El esfuerzo de fricción para $\delta/h \ll 1$ adopta la expresión:

$$c_f\approx(3Re_x)^{-1/2} \tag{24}$$

Las expresiones (22) a (24) constituyen la solución obtenida de la ecuación de Karman para una placa plana sin gradiente de presión y con perfil lineal de velocidad en la capa límite.

La máxima longitud de placa para la que el análisis es válido se obtiene al imponer que la línea de corriente $y = h/2$ está libre de efectos viscosos. Esto equivale a imponer en la expresión (18) $\delta = h/2$ en $x/L_{max} = 1$. Se obtiene:

$$\left(\frac{L}{h}\right)_{max}=\frac{7-9ln2}{6}\frac{U_\infty h}{\nu}\approx 0.13\frac{U_\infty h}{\nu} \tag{25}$$

La evolución del espesor total de la capa límite y del coeficiente de fricción para $Re_h = 3\cdot 10^3$, $L/h = 50$ se muestra en la figura 1.

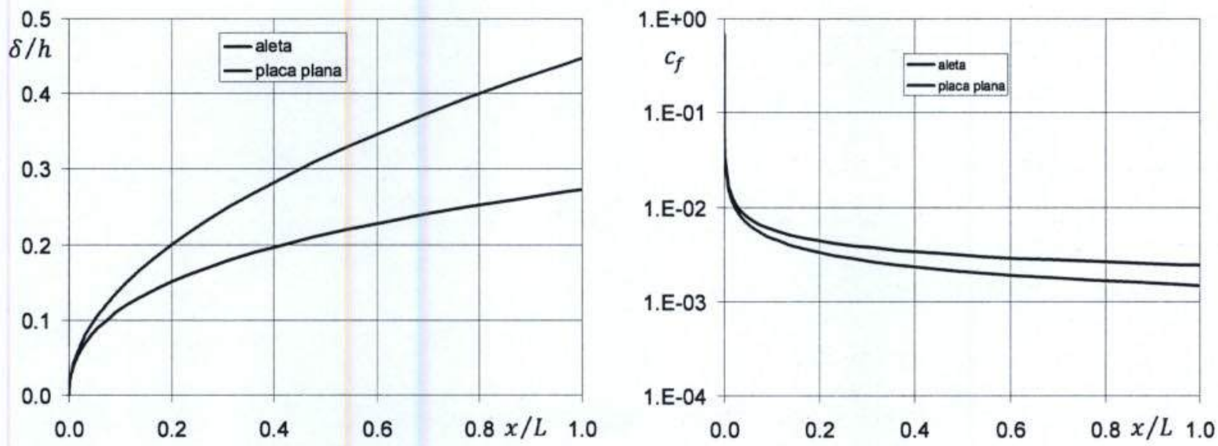
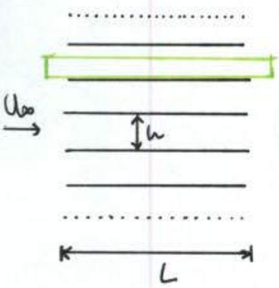
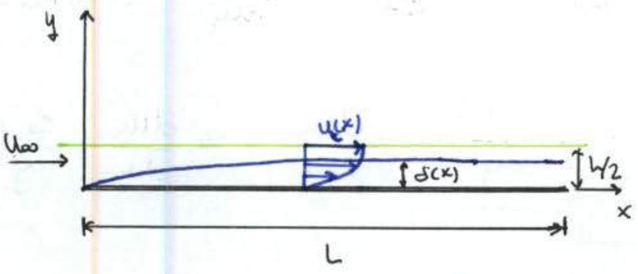


Figura 1. Evolución del espesor total de la capa límite y del coeficiente de fricción en la aleta para $Re_h = 3 \cdot 10^3, L/h = 50$, comparado con la evolución en la placa plana aislada.

El efecto de canal hace que la capa límite en la configuración de aletas crezca con x a un menor ritmo de como lo hace la placa plana aislada. En consecuencia el coeficiente de fricción es mayor también en la configuración de la aleta. El efecto es todavía mayor cuando el coeficiente de fricción se define adimensionalizando el esfuerzo en la pared con la presión dinámica de entrada $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$, que es lo que permite comparar directamente con el caso de la placa plana aislada. Utilizando la analogía de Reynolds para el flujo de calor adimensional se observa que la configuración de canal en las aletas aumenta en número de Stanton con respecto a la configuración de placa plana, intensificando el efecto de transferencia de calor.

EXAMEN FINAL 05/02/2015





$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} \gg 1$ $\quad \frac{2\delta(L)}{h} < 1 \rightarrow$ efectos viscosos en la línea de corriente $y = h/2$ despreciables

Incompresible

1) Ec. continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

variaciones transversales de presión pueden despreciarse en la ec. $\rightarrow$ flujo casi unidireccional

Ec. cant. mov. en x: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_c}{dx} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$p_c(x)$: presión en el centro del canal ($y = h/2$).

A lo largo de la línea de corriente $y = h/2$: $v = 0$ y fluido no experimenta efectos viscosos.

? $\rightarrow v)_{h/2} \ll u)_{h/2}$

Entonces: $u_c\frac{\partial u_c}{\partial x} + 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_c}{dx} + 0 \rightarrow u_c\frac{du_c}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_c}{dx}$

El sistema queda entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_c\frac{du_c}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}}$$

Condiciones de contorno:
$$\begin{cases} y = 0: u = v = 0 \\ y = h/2: u = u_c(x),\ \partial u/\partial y = 0,\ v = 0 \\ x = 0: u = U_\infty,\quad 0 \le y \le h/2 \end{cases}$$

$u_c(x)$ hay que determinarlo $\rightarrow$ establecer ligadura adicional en el campo de velocidad

$\hookrightarrow$ Ecuación de continuidad integral en el canal para V_c entre $x=0$ y $x=x$:

$$\boxed{\int_0^{h/2} u\,dy = \frac{U_\infty h}{2}}$$

2) Se añade al primer miembro de la ec. de cant. de movimiento el término nulo: $-u_c\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{du_c}{dx} - u\frac{du_c}{dx}$ $\rightarrow$ Argucia matemática

$\downarrow$ En hoja aparte deducido sin esto.

$\frac{\partial(u u_c)}{\partial x} = u\frac{du_c}{dx} + u_c\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u_c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u\cdot u_c)}{\partial x} - u\frac{du_c}{dx}$

$\frac{\partial(v u_c)}{\partial y} = v\cancel{\frac{\partial u_c}{\partial y}}^{0} + u_c\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow u_c\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(v u_c)}{\partial y}$

$$-\frac{\partial(u u_c)}{\partial x} + u\cancel{\frac{du_c}{dx}} - \frac{\partial(v u_c)}{\partial y} + u\frac{du_c}{dx} - u\cancel{\frac{du_c}{dy}} \quad \text{(término que se añade)}$$

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(u u_c)}{\partial x} - \frac{\partial(v u_c)}{\partial y} + u\frac{du_c}{dx} - u_c\frac{du_c}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial[u(u-u_c)]}{\partial x}dy + \int_0^{h/2}\cancelto{0}{\frac{\partial[v(u-u_c)]}{\partial y}dy} + \int_0^{h/2}(u-u_c)\frac{du_c}{dx}dy = \int_0^{h/2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cancel{dy}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} -[u(u-u_c)]\,dy + \frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2} -(u-u_c)\,dy = +\cancelto{0}{\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{h/2}} + \overbrace{\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0}^{\tau_p/\rho}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2}[u(u_c-u)]\,dy + \frac{du_c}{dx}\left\{\underbrace{\int_0^{h/2}u_c\,dy}_{h\cdot u_c/2} - \underbrace{\int_0^{h/2}u\,dy}_{u_\infty h/2}\right\} = \tau_p/\rho = \frac{1}{2}u_c^2 C_f$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_0^{h/2} u_c^2\left[\frac{u}{u_c}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)\right]dy\right\} + \frac{du_c}{dx}\cdot\frac{h}{2}(u_c-u_\infty) = \frac{1}{2}u_c^2 C_f$$

$$\frac{d}{dx}\left\{u_c^2\cdot\delta_2\right\} + \frac{h}{2}(u_c-u_\infty)\frac{du_c}{dx} = \frac{1}{2}u_c^2 C_f$$

$$2u_c\frac{du_c}{dx}\cdot\delta_2 + u_c^2\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{h}{2}(u_c-u_\infty)\frac{du_c}{dx} = \frac{1}{2}u_c^2 C_f$$

$$\div u_c^2 \to \frac{2}{u_c}\delta_2\cdot\frac{du_c}{dx} + \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{h}{2}\frac{1}{u_c}\left(1-\frac{u_\infty}{u_c}\right)\frac{du_c}{dx} = \frac{1}{2}C_f$$

Reordenando: $$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_c}\frac{du_c}{dx}\left[\left(1-\frac{u_\infty}{u_c}\right)\frac{h}{2} + 2\delta_2\right] = \frac{C_f}{2}}$$

3) Asumiendo:

$$\frac{u}{u_c} = \begin{cases} y/\delta & 0 \le y/\delta \le 1 \\ 1 & 1 \le y/\delta \le \frac{h}{2\delta} \end{cases}$$

$$\delta_2 = \int_0^{h/2}\left(\frac{u}{u_c}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)\right)dy = \int_0^1 \delta\left(\frac{y}{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) + \int_1^{h/2\delta}\cancelto{0}{\delta(1(1-1))\,d(y/\delta)}$$

$$= \delta\left|\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\frac{1}{2} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\frac{1}{3}\right|_0^1 = \delta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\delta}{6}$$

$\underline{\delta_2 = \delta/6}$

$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu\cdot\frac{u_c}{\delta} \to C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_c^2} = \frac{\mu\, 1/\delta}{\frac{1}{2}\rho u_c} = \underline{\frac{2\nu}{\delta u_c} = C_f}$$

∘ Ligadura: $\delta u_c\int_0^{h/2\delta}\frac{u}{u_c}d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta u_c\frac{1}{2} + \delta u_c\frac{h}{2\delta} - \delta u_c = \frac{u_c}{\cancel{2}}(h-\delta) = \frac{u_\infty h}{\cancel{2}} \to u_c(h-\delta) = u_\infty h$

EXAMEN FINAL 05/02/2015 (CONTINUACIÓN)

$$u_c = \frac{u_\infty h}{(h-\delta)} \rightarrow \frac{du_c}{dx} = \underbrace{\frac{d(u_\infty h/(h-\delta))}{d(1/(h-\delta))}}_{(u_\infty h)} \cdot \underbrace{\frac{d(1/(h-\delta))}{d(h-\delta)}}_{\left(-\frac{1}{(h-\delta)^2}\right)} \cdot \underbrace{\frac{d(h-\delta)}{dx}}_{\left(-\frac{d\delta}{dx}\right)}$$

$$\frac{du_c}{dx} = \frac{u_\infty h}{(h-\delta)^2}\cdot\frac{d\delta}{dx} \rightarrow \frac{1}{u_c}\cdot\frac{du_c}{dx} = \frac{1}{(h-\delta)}\cdot\frac{d\delta}{dx}$$

Ec. Karman:

$$\left(1-\frac{u_\infty}{u_c}\right)\frac{h}{2} + 2\delta_2 = \frac{5\delta}{6}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx} + \frac{5\delta}{6(h-\delta)}\cdot\frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu(h-\delta)}{u_\infty h\cdot\delta}}$$

$$\left[\frac{1}{6}+\frac{5\delta}{6(h-\delta)}\right]\frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu h(1-\overset{\tilde\delta}{\delta/h})}{u_\infty h\,\delta} = \frac{\nu(1-\tilde\delta)}{u_\infty \tilde\delta h}$$

$$\left[\frac{1}{6}+\frac{5\tilde\delta}{6(1-\tilde\delta)}\right]\frac{d\tilde\delta}{dx} = \left[\frac{1-\tilde\delta+5\tilde\delta}{6(1-\tilde\delta)}\right]\frac{d\tilde\delta}{dx} = \frac{1+4\tilde\delta}{6(1-\tilde\delta)}\cdot\frac{d\tilde\delta}{dx} = \frac{\nu(1-\tilde\delta)}{u_\infty\tilde\delta h^2}$$

$$\frac{\tilde\delta(1+4\tilde\delta)}{(1-\tilde\delta)^2}\cdot\frac{d\tilde\delta}{dx} = \frac{6\nu}{u_\infty h^2} \rightarrow \int_0^{\delta/h}\frac{\tilde\delta(1+4\tilde\delta)}{(1-\tilde\delta)^2}\cdot d\tilde\delta = \frac{6\nu x}{u_\infty h^2} = \frac{6\nu L}{u_\infty h^2}\cdot\frac{x}{L}$$

$$\hookrightarrow [\ldots] \quad \boxed{4\left(\frac{\delta}{h}\right)+9\ln\left(\frac{h-\delta}{h}\right)+\frac{5\delta}{h-\delta} = \frac{6\nu L}{u_\infty h^2}\cdot\frac{x}{L}}$$

$$\frac{h-\delta}{h} = \left(\frac{u_c}{u_\infty}\right)^{-1} \rightarrow \frac{h-\delta}{h}-1 = \frac{\cancel{h}-\delta-\cancel{h}}{h} = \left(\frac{u_c}{u_\infty}\right)^{-1}-1 \rightarrow \underset{*}{\frac{\delta}{h}} = 1-\left(\frac{u_c}{u_\infty}\right)^{-1}$$

$$\frac{h}{h-\delta}-1 = \frac{u_c}{u_\infty}-1 = \frac{\cancel{h}-\cancel{h}+\delta}{h-\delta} = \frac{\delta}{h-\delta}$$

$$\boxed{4\left[1-\left(\frac{u_c}{u_\infty}\right)^{-1}\right] - 9\ln\left(\frac{u_c}{u_\infty}\right)+5\left(\frac{u_c}{u_\infty}-1\right) = \frac{6\nu L}{u_\infty h^2}\cdot\frac{x}{L}}$$

$$c_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_c^2} = \frac{2\nu}{\delta u_c} = \frac{2\nu}{u_\infty h}\cdot\left(\frac{u_c}{u_\infty}\cdot\underset{*}{\frac{\delta}{h}}\right)^{-1} = \boxed{\frac{2\nu}{u_\infty h}\cdot\left(\frac{u_c}{u_\infty}-1\right)^{-1} = C_f}$$

$$1-\left(\frac{u_c}{u_\infty}\right)^{-1}$$

$\boxed{\delta \ll 1}$ $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 \approx \frac{6\nu L}{U_\infty h^2}\cdot\frac{x}{L}$; simplificando la ecuación antes de integrar:

$$\frac{\delta}{x} \approx \sqrt{\frac{12\nu}{U_\infty x}} \rightarrow \frac{\delta_2}{x} \approx (3\,Re_x)^{-1/2}$$

$$\frac{6\nu x}{U_\infty h^2} = o\left((\delta/h)^2\right) \rightarrow \frac{u_c}{U_\infty} \approx 1$$

$$C_f \approx (3\,Re_x)^{-1/2}$$

• Máxima longitud de placa: $\delta = h/2$ en $x/L_{máx} = 1$

$$\hookrightarrow \underbrace{4\cdot\frac{1}{2}}_{2} + 9\ln(1/2) + \frac{5h/2}{\underbrace{\frac{2h}{2} - h/2}_{5}} = \frac{6\nu}{U_\infty h}\cdot\frac{L_{máx}}{h}$$

$$\boxed{\left(\frac{L}{h}\right)_{máx} = \frac{7-9\ln 2}{6}\cdot\frac{U_\infty h}{\nu}}$$

* DEDUCIR ECUACIÓN DE KARMAN DE EX. 05/02/2015

- Ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy+(v)_{h/2}-\cancel{(v)_0}^{\,0} \rightarrow \underline{(v)_{h/2}=-\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy}$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=u_c\frac{du_c}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

0 (viscosidad puede despreciarse en $y=h/2$)

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\cdot u\,dy+(v\cdot u)_{h/2}-\cancel{(v u)_0}^{\,0}=\int_0^{h/2} u_c\frac{du_c}{dx}dy+\cancel{\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{h/2}}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\cdot u\,dy+\underbrace{u_c\cdot\left(-\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy\right)}_{\circledast}=\int_0^{h/2} u_c\frac{du_c}{dx}dy-\left(\tau_p/\rho\right)$$

$\circledast$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\cdot u_c\,dy=u_c\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy+\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy \rightarrow u_c\cdot\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy=\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\,u_c\,dy-\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\cdot u\,dy-\frac{d}{dx}\int_0^{h/2} u\cdot u_c\,dy+\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2} u\,dy-\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2} u_c\,dy=-\left(\tau_p/\rho\right)$$ → cambio signo y reagrupo;

$$\frac{d}{dx}\left\{u_c^2\int_0^{h/2}\frac{u}{u_c}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)dy\right\}+u_c\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)dy=\left(\tau_p/\rho\right)$$

esta integral se puede resolver con la ligadura

$$\frac{d}{dx}\left\{u_c^2\cdot\delta_2\right\}+u_c\frac{du_c}{dx}\int_0^{h/2}\left(1-\frac{u}{u_c}\right)dy=\left(\tau_p/\rho\right)=\frac{\frac{1}{2}\cancel{\rho}\,u_c^2\cdot c_f}{\cancel{\rho}}$$

$$\delta_2\frac{d}{dx}(u_c)\cdot 2u_c+u_c^2\frac{d\delta_2}{dx}+u_c\frac{du_c}{dx}\left[\frac{h}{2}\left(1-\frac{U_\infty}{u_c}\right)\right]=\frac{1}{2}C_f\,u_c^2;\quad \div\, u_c^2$$

$$\frac{2}{u_c}\delta_2\frac{du_c}{dx}+\frac{d\delta_2}{dx}+\frac{1}{u_c}\frac{du_c}{dx}\left[\frac{h}{2}\left(1-\frac{U_\infty}{u_c}\right)\right]=\frac{1}{2}C_f$$

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx}+\frac{1}{u_c}\frac{du_c}{dx}\left[\frac{h}{2}\left(1-\frac{U_\infty}{u_c}\right)+2\delta_2\right]=\frac{1}{2}C_f}$$

* RESOLUCIÓN DE LA INTEGRAL DE EX. 05/02/2015

$$\int_0^{\tilde{\delta}} \frac{\tilde{\delta}(1+4\tilde{\delta})}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta} = \int_0^{\tilde{\delta}} \frac{\tilde{\delta}+4\tilde{\delta}^2}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta} = \int_0^{\tilde{\delta}} \frac{\tilde{\delta}+4(1-\tilde{\delta})^2-4+8\tilde{\delta}}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta} =$$

$$= \int_0^{\tilde{\delta}} \frac{4\cancel{(1-\tilde{\delta})^2}}{\cancel{(1-\tilde{\delta})^2}} d\tilde{\delta} + \int_0^{\tilde{\delta}} \frac{9\tilde{\delta}-4}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta} = 4\tilde{\delta} + \underbrace{\int_0^{\tilde{\delta}} \frac{9\tilde{\delta}-4}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta}}_{I}$$

$$\xi = (1-\tilde{\delta}) \rightarrow d\xi = -d\tilde{\delta} \ ; \quad \tilde{\delta} = 1-\xi$$

$$I = -\int^{\xi} \frac{9(1-\xi)-4}{\xi^2} d\xi = -\int_0^{\xi} \frac{5-9\xi}{\xi^2} d\xi = \int_0^{\xi} \frac{(-5)}{\xi^2} d\xi + 9\int_0^{\xi} \frac{\cancel{\xi}}{\xi^2} d\xi =$$

$$= +\frac{5}{\xi} + 9\ln(\xi) = \frac{5}{1-\tilde{\delta}} + 9\ln(1-\tilde{\delta})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\tilde{\delta}} \frac{\tilde{\delta}(1+4\tilde{\delta})}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta} = 4\tilde{\delta} + 9\ln(1-\tilde{\delta}) + \frac{5}{1-\tilde{\delta}}$$

Haciendo el cambio de $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{h}$:

$$\int_0^{\tilde{\delta}} \frac{\tilde{\delta}(1+4\tilde{\delta})}{(1-\tilde{\delta})^2} d\tilde{\delta} = 4\left(\frac{\delta}{h}\right) + 9\ln\left(\frac{h-\delta}{h}\right) + \frac{5h}{h-\delta}$$

diferente a resultado ?

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final: 06-07-2015**

La capa limite viscosa sobre una placa plana sometida a una corriente uniforme de un liquido de velocidad U esta dada por la solución de Blasius. Si la corriente uniforme esta a una temperatura T_∞ y la placa a una temperatura T_p constante, hay una capa limite térmica que responde a la ecuación

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

donde u y v son las componentes de la velocidad obtenidas con la solución de Blasius. La densidad del liquido es ρ, el calor específico es c y la conductividad térmica k. La difusitividad térmica $\alpha = k/\rho c$ tiene las mismas dimensiones que la viscosidad cinemática ν y su cociente es el numero de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$. Cuando el numero de Prandtl es grande, el espesor de la capa limite viscosa es muy grande frente al de la capa térmica, de modo que la velocidad del liquido en la capa límite térmica varía linealmente con y. Tengan en cuenta que el espesor de la capa límite viscosa es $\delta_v \sim x\sqrt{\nu/Ux}$. Se pide:

1.- Orden de magnitud del esfuerzo viscoso en la pared τ_p.

2.- Orden de magnitud de la velocidad u en la capa límite térmica.

3.- Orden de magnitud de la velocidad v en la capa límite térmica.

4.- Orden de magnitud del espesor δ_T de la capa límite térmica.

5.- Orden de magnitud del flujo de calor en la pared q_p.

SOLUCIÓN

1.- El esfuerzo viscoso en la pared es tal que

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \sim \mu \frac{U}{\delta_v}.$$

2.- En las proximidades de la pared, para $y \ll \delta_v$, la velocidad u está dada por

$$u = \left(\frac{\tau_p}{\mu} \right) y \sim U \frac{\delta_T}{\delta_v}.$$

3.- La velocidad v se obtiene de la ecuación de la continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

lo que implica

$$\frac{U\delta_T}{\delta_v x} \sim \frac{v}{\delta_T} \rightarrow v \sim \frac{\delta_T^2}{\delta_v} \frac{U}{x}.$$

4.- El término convectivo de la ecuación de la energía es del orden

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \sim \rho c \left(U \frac{\delta_T}{\delta_v} \right) \left(\frac{T_p - T_\infty}{x} \right),$$

mientras que el de conducción es

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim k \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T^2}.$$

Dado que ambos términos deben ser del mismo orden, se tiene

$$\left(\frac{\delta_T}{x} \right)^3 \sim Pr^{-1} Re^{-3/2} \rightarrow \frac{\delta_T}{x} \sim Re^{-1/2} Pr^{-1/3}.$$

5.- El flujo de calor en la pared es

$$q_p = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \sim k \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T} \sim k \frac{T_p - T_\infty}{x} Re^{1/2} Pr^{1/3},$$

y el número de Nusselt es

$$Nu = \frac{q_p x}{k \left(T_p - T_\infty \right)} \sim Re^{1/2} Pr^{1/3}.$$

EXAMEN FINAL 06/07/2015

U, T_p, T_∞

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad ; \quad \alpha=\frac{k}{\rho c} \quad ; \quad P_r=\frac{\nu}{\alpha}\gg 1 \rightarrow \delta_v \gg \delta_T$$

$$\delta_v \sim x\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$u|_{\delta_T}=y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \delta_T\cdot\frac{U}{\delta_v}$$ → velocidad del líquido en la capa límite térmica varía linealmente con y

1) $$\tau_p=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow \tau_p \sim \mu\frac{U}{\underset{\sqrt{\frac{\mu x}{U\rho}}}{\delta_v}} \rightarrow \boxed{\tau_p \sim \sqrt{\frac{U^3\rho\mu}{x}}}$$

2) $$u|_{\delta_T} \sim U\cdot\left(\frac{\delta_T}{\delta_v}\right) \sim \boxed{\delta_T\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}} \sim u|_{\delta_T}}$$

3) Ec. continuidad: $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow \frac{U\delta_T}{\delta_v\cdot x} \sim \frac{v|_{\delta_T}}{\delta_T} \rightarrow v|_{\delta_T} \sim U\cdot\left(\frac{\delta_T^2}{\delta_v\cdot x}\right)$$

$$\boxed{v|_{\delta_T} \sim \delta_T^2\left(\frac{U}{x}\right)\sqrt{\frac{U}{\nu x}}}$$

4) Términos convectivos ~ Términos de conducción

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) \sim \rho c\frac{U}{\delta_v}\cdot\delta_T\cdot\frac{\Delta T}{x}$$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim k\frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

$$\left.\right\}\ \rho c\frac{U}{\delta_v}\cdot\delta_T\frac{\cancel{\Delta T}}{x} \sim k\frac{\cancel{\Delta T}}{\delta_T^2}$$

$$\frac{\delta_T^3}{x^3} \sim \underbrace{\frac{k}{\mu c}}_{P_r^{-1}}\cdot\frac{\mu/\rho}{U x^{\cancel{3}2}}\cancel{x}\cdot\delta_v \rightarrow \frac{\delta_T^3}{x^3} \sim \frac{1}{P_r}\underbrace{\frac{\nu}{Ux^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{x}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}}_{Re^{-3/2}} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_T}{x} \sim P_r^{-1/3}\cdot Re^{-1/2}}$$

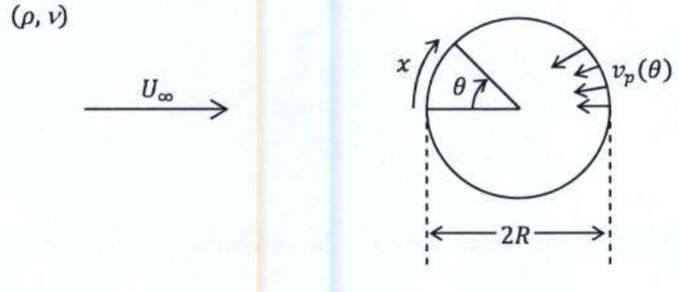
5) $$q_p=-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \sim k\frac{\Delta T}{\delta_T} \sim \frac{k\Delta T}{x}\cdot P_r^{1/3}\cdot Re^{1/2}$$

$$\boxed{Nu \sim \frac{q_p x}{k\Delta T} \sim P_r^{1/3}\cdot Re^{1/2}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Final 06.07.2015**

Un cilindro circular de radio R se encuentra expuesto a un flujo laminar, uniforme, de velocidad U_∞ perpendicular a su eje (ver figura adjunta). El fluido puede considerarse incompresible, con densidad ρ y viscosidad cinemática ν.



Suponiendo que el flujo verifica $Re = 2RU_\infty/\nu \gg 1$, el módulo de la velocidad ideal sobre la superficie del cilindro viene dado por:

$$U_e(\theta) = 2U_\infty sen\theta,$$

con $\theta = x/R$ siendo el ángulo azimutal medido respecto del punto de remanso anterior y siendo x la coordenada a lo largo de la superficie del cilindro, tal como se muestra en la figura adjunta.

Se desea analizar el desarrollo de la capa límite que se establece sobre la superficie del cilndro cuando, para controlar su evolución, se aplica una ley de succión $v_p(\theta)$ en la región cercana a $\theta = \pi$. Debido a la simetría de la configuración, el análisis puede restringirse al rango azimutal $0 \le \theta \le \pi$.

1) Utilizando el método integral de Thwaites, demostrar que en la región cercana al punto de remanso anterior, caracterizada por valores $\theta = x/R \ll 1$, el espesor de cantidad de movimiento δ_{20}/R es aproximadamente uniforme, únicamente función del número de Reynolds Re. En esta región la velocidad exterior $U_e(x)$ se aproxima a la que se establece sobre una capa límite en la solución de semejanza de Falkner-Skan, con $m = 1$. Determinar la evolución del espesor de cantidad de movimiento obtenida asumiendo la solución de Falkner-Skan equivalente, δ_{20-FS}/R, como función de Re y de x/R. Especificar la región de validez de ambas soluciones (3 puntos).

2) Determinar la coordenada azimutal θ_s del punto de separación sobre la superficie del cilindro dado por el método de Thwaites, así como el valor del espesor de cantidad de movimiento en dicho punto, δ_{2s}/R, en función del número de Reynolds Re. Determinar asimismo la relación δ_{2s}/δ_{20} (2 puntos).

3) En el intervalo $\theta_s \le \theta \le \pi$ se aplica succión de la capa límite. Teniendo en cuenta que en la separación laminar el factor de forma verifica $H_{12,s} \approx 3.5$, determinar la ley que describe, en función de la coordenada θ, la evolución del espesor de cantidad de movimiento δ_2/δ_{20} y de la *mínima* velocidad de succión $|v_p/U_\infty|$ necesaria para garantizar que la capa límite se mantiene adherida sobre el cilindro (3 puntos).

4) Utilizando la ecuación integral de Karman y el método aproximado de Thwaites calcular, para $\theta = \pi/2$, el valor del coeficiente de fricción $c_f(\pi/2)$, escribiéndolo en función del Reynolds local $(U_e\delta_2/\nu)_{\theta=\pi/2}$. Comparar el valor obtenido con el equivalente a la solución de Blasius, comprobando que en $\theta = \pi/2$ la capa límite sobre el cilindro responde aproximadamente a un perfil de Blasius (2 puntos).

Solución

1) La evolución del espesor de cantidad de movimiento de acuerdo con el método aproximado de Thwaites viene dada por:

$$\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = \frac{0.45\,\nu}{RU_e^6}\int_0^\theta U_e^5(\theta')d\theta' = \frac{0.45}{Re}\left(\frac{\int_0^\theta sen^5(\theta')d\theta'}{sen^6(\theta)}\right) \tag{1}$$

Para $\theta = x/R \ll 1$, $sen(\theta) \approx \theta$ y la expresión (1) proporciona:

$$\left(\frac{\delta_{20}}{R}\right)^2 = \frac{3}{40}Re^{-1} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\delta_{20}}{R}\right) = 0.274 \cdot Re^{-1/2} \tag{2}$$

que es uniforme con respecto a θ. En la región de validez de (2) la velocidad exterior toma la forma:

$$\frac{U_e}{U_\infty} \approx 2\frac{x}{R} \tag{3}$$

Esta ley corresponde a un perfil de Falkner-Skan $U_e = Ax^m$ con $m = 1$ y $A = 2U_\infty/R$. El valor del parámetro de Falkner-Skan es $\beta = 2m/(m+1) = 1$. El espesor de cantidad de movimiento en la solución de Falker-Skan viene dado por:

$$\frac{\delta_{20-FS}}{R} = \frac{x}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\left(2U_\infty \frac{x}{R}\right)x}} \cdot \frac{f''(0,1) - \lim_{\eta\to\infty}\left(\eta - f(\eta)\right)_{\beta=1}}{2} = 0.292 \cdot Re^{-1/2} \tag{4}$$

La solución de Falkner-Skan proporciona un espesor de cantidad de movimiento 6% superior al dado por el método aproximado de Thwaites. La validez de la expresión (2) requiere $x/R \ll 1$ y un Reynolds de la capa límite elevado, lo cual a su vez implica $Re \cdot (x/R)^2 \gg 1$. Esta última condición justifica también la validez de la expresión (4).

2) Para valores arbitrarios de θ, antes del punto de separación, la integración de la expresión (1) proporciona:

$$\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = \frac{6}{25 \cdot Re} \cdot \frac{1 - (15/8)\cdot cos(\theta)[1 - 2\,cos^2(\theta)/3 + cos^4(\theta)/5]}{sen^6(\theta)} \tag{5}$$

De forma equivalente, introduciendo (2), se obtiene:

$$\frac{\delta_2}{\delta_{20}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\{1 - (15/8)\cdot cos(\theta)[1 - 2\,cos^2(\theta)/3 + cos^4(\theta)/5]\}^{1/2}}{sen^3(\theta)} \tag{6}$$

En el método de Thwaites el punto de separación viene dado por:

$$\frac{\delta_{2s}^2}{\nu}\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_s = \lambda_s \tag{7}$$

con $\lambda_s = -0.09$. Introduciendo (5) en (7):

$$\frac{cos(\theta_s)\{1-(15/8)\cdot cos(\theta_s)[1-2\,cos^2(\theta_s)/3+cos^4(\theta_s)/5]\}}{sen^6(\theta_s)} = -\frac{3}{8} \tag{8}$$

La solución exacta a la ecuación (8) proporciona $\theta_s = 103.1°$. Despreciando los términos en $cos^2(\theta_s)$, $cos^4(\theta_s)$ se obtiene $\theta_s = 103.0°$.

El valor del espesor de cantidad de movimiento en el punto de separación se obtiene de (7):

$$\left(\frac{\delta_{2s}}{R}\right)^2 = \lambda_s\frac{\nu}{R^2}\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_s^{-1} = \frac{\lambda_s}{cos(\theta_s)}Re^{-1} = 0.397\cdot Re^{-1} \rightarrow \frac{\delta_{2s}}{R} = 0.630\cdot Re^{-1/2} \tag{9}$$

Comparando el resultado anterior con el obtenido en el apartado 1:

$$\frac{\delta_{2s}}{\delta_{20}} = 2.30 \tag{10}$$

3) El mínimo flujo de succión necesario para mantener la capa límite adherida es aquel que establece una capa límite con coeficiente de fricción nulo en el intervalo $\theta_s \le \theta \le \pi$. De acuerdo con el método de Thwaites, esta condición implica $\lambda = \lambda_s$ para $\theta_s \le \theta \le \pi$. Esta condición define la evolución del espesor de cantidad de movimiento en este intervalo:

$$\frac{\delta_2^2}{\delta_{2s}^2} = \frac{(dU_e/d\theta)_{\theta_s}}{dU_e/d\theta} = \frac{cos\theta_s}{cos\theta} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\delta_2}{\delta_{20}} = 2.30\sqrt{\frac{cos\theta_s}{cos\theta}} \tag{11}$$

Además, imponiendo $\lambda = \lambda_s$ para $\theta_s \le \theta \le \pi$, se tiene:

$$2\frac{1}{\delta_2}\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{(dU_e/dx)}\frac{d^2U_e}{dx^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\delta_2}{2R}tan\theta \tag{12}$$

Con las condiciones impuestas, la ecuación de Karman en este intervalo se escribe como:

$$\frac{v_p}{U_e} = \frac{d\delta_2}{dx} + \left(2+H_{12,s}\right)\frac{\delta_2}{U_e}\frac{dU_e}{dx} \qquad \rightarrow \qquad \frac{v_p}{U_\infty} = \frac{\delta_2}{R}\left\{tan\theta sen\theta + 2\left(2+H_{12,s}\right)cos\theta\right\} \tag{13}$$

Finalmente, utilizando los resultados obtenidos en (9) y (11)

$$\frac{v_p}{U_\infty} = \frac{0.63}{Re^{1/2}}\{tan\theta sen\theta + 11\cdot cos\theta\}\sqrt{\frac{cos\theta_s}{cos\theta}} \tag{14}$$

Esta velocidad es negativa, indicando que se trata de una succión. La evolución con la coordenada θ del espesor de cantidad de movimiento y de la velocidad de succión se muestra en la figura 1.

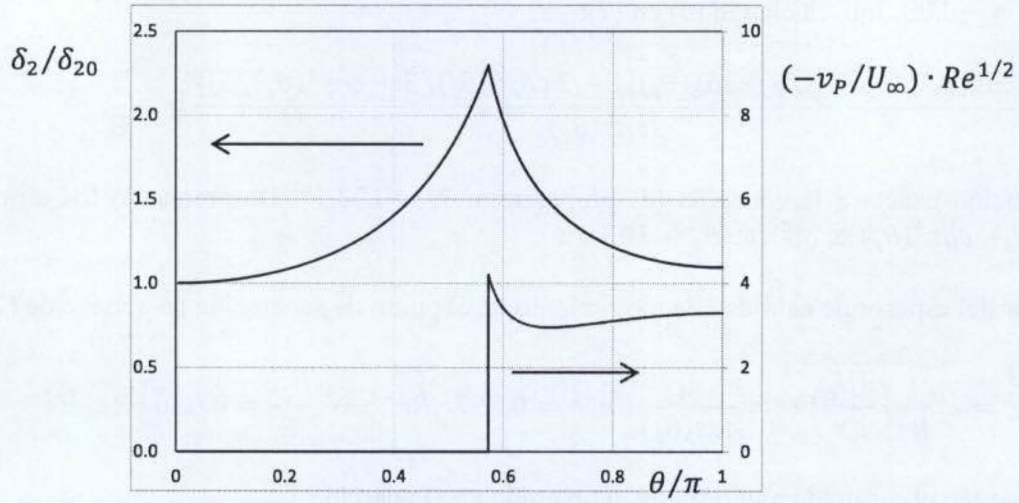


Figura 1 Evolución del espesor de cantidad de movimiento (azul) y de la velocidad de succión (rojo) a lo largo de la coordenada azimutal del cilindro.

4) EL coeficiente de fricción en $\theta = \pi/2$ donde $dU_e/dx = 0$ se obtiene de la ecuación de Karman:

$$c_{f,\pi/2} = 2\left(\frac{d\delta_2}{dx}\right)_{\pi/2} \tag{15}$$

La expresión de Thwaites proporciona:

$$(U_e^6)_{\pi/2} \cdot (\delta_2)_{\pi/2} \cdot 2\left(\frac{d\delta_2}{dx}\right)_{\pi/2} = 0.45\,\nu(U_e^5)_{\pi/2} \tag{16}$$

o bien:

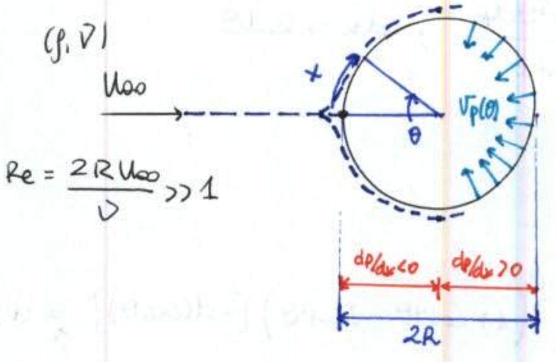
$$c_{f,\pi/2} = 0.45\left(\frac{U_e\delta_2}{\nu}\right)_{\pi/2}^{-1} \tag{17}$$

La solución de Blasius proporciona:

$$c_{f,Blasius} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}} = \frac{0.664^2}{(U_e\delta_2/\nu)} = 0.441\left(\frac{U_e\delta_2}{\nu}\right)_{Blasius}^{-1} \tag{18}$$

La relación entre ambos coeficientes es 1.02, y es igual a la relación de las pendientes de la velocidad en la pared de ambos perfiles de velocidad, $(\partial(U/U_e)/\partial(y/\delta_2))_{y/\delta_2=0}$. Además, la derivada segunda en la pared es nula en ambos casos. Asimismo, $(U/U_e)_{y/\delta_2\to\infty} \to 1$, mientras que para $y/\delta_2 \to \infty$ todas las derivadas de la velocidad tienden a cero en ambos casos. Todo ello implica que el perfil de velocidad en $\theta = \pi/2$ responde aproximadamente a un perfil de Blasius.

EXAMEN FINAL 06/07/2015



Módulo de la velocidad ideal sobre la superficie del cilindro: $U_e(\theta) = 2U_\infty \operatorname{sen}\theta$

$$\theta = x/R$$

$v_p(\theta)$ en las proximidades de $\theta = \pi$

1) • Método integral de Thwaites

• Región cercana al punto de remanso anterior ($\theta \ll 1$) $\Big\} \Rightarrow \frac{\delta_{20}}{R}$ uniforme y únicamente función del número de Reynolds.

• $U_e \to \sim$ solución de semejanza de Falkner-Skan ($m=1$) $\Rightarrow \frac{\delta_{20\text{-}FS}}{R} = f(Re, x/R)$

• Validez de ambas soluciones.

$$U_e(\theta) \cong 2U_\infty \theta = \frac{2U_\infty}{R}x \to \text{Falkner-Skan: } U_e = A \cdot x^m \begin{cases} A = 2U_\infty/R \\ m = 1 \end{cases}$$

→ Método integral de Thwaites → $\frac{d}{dx}(U_e^b \delta_2^2) = a \nu U_e^{b-1}$; $a = 0{,}45$, $b = 6$

$$\int d(U_e^6 \delta_2^2) = 0{,}45\nu \cdot \left(\frac{2U_\infty}{R}\right)^5 \int x^5 dx \to U_e^6 \delta_2^2 = \nu \frac{0{,}45}{6} \cdot \left(\frac{2U_\infty}{R}\right)^5 \cdot x^6 + \cancel{C} \xrightarrow{} 0\ (x=0, \delta_2=0)$$

$$\left(\frac{2U_\infty}{R}\right)^{\cancel{6}} \cdot \cancel{x^6} \cdot \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{6} \cdot \cancel{\left(\frac{2U_\infty}{R}\right)^5} \cdot \cancel{x^6}\nu \to \delta_2^2 = \frac{0{,}45}{6} \cdot \frac{\cancel{R}}{2U_\infty}\nu \cdot \frac{R^2}{\cancel{R^2}} ;$$

$$\frac{\delta_{20}}{R} = \sqrt{0{,}075} \cdot \left(\frac{1}{Re}\right)^{1/2} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta_{20}}{R} = 0{,}274 (Re)^{-1/2}}$$

→ Solución de semejanza de Falkner-Skan: espesor de cantidad de movimiento →

$$\delta_2 = x\sqrt{\frac{2-\beta}{Re_x}} \left\{ \frac{\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} - \beta \lim_{\eta\to\infty}[\eta - f(\eta)]}{1+\beta} \right\} ; \beta = \frac{2m}{m+1} \underset{m=1}{=} 1$$

$$= \cancel{x} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{\frac{2U_\infty}{R}\cancel{x} \cdot x}} \left\{ \frac{f''(0) - \lim_{\eta\to\infty}[\eta - f(\eta)]}{2} \right\} = \frac{R}{R}\sqrt{\frac{\nu R}{2U_\infty}} \left(\frac{1{,}2326 - 0{,}6481}{2}\right) = R\ Re^{-1/2} \cdot 0{,}292$$

$$\beta = 1 \begin{cases} f''(0) = 1{,}2326 \\ [\eta - f(\eta)]_\infty = 0{,}6481 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\delta_{20\text{-}FS}}{R} = 0{,}292 (Re)^{-1/2}}$$

La solución de Falkner-Skan proporciona un espesor de cantidad de movimiento 6,6% superior al dado por el método aproximado de Thwaites. La solución dada por el método de Thwaites requiere que $x/R \ll 1$ y $Re_\delta \gg 1$, que implica que $Re \cdot (x/R)^2 \gg 1$*. Esta última condición justifica también la validez de la solución de Falkner-Skan.

$$* \; Re_\delta \sim \frac{U_e \cdot x}{\nu} \sim \frac{U_\infty \cdot \frac{\cancel{x}}{R} \cdot x}{\nu} \cdot \frac{R^2}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{x^2}{R^2} \sim \frac{U_\infty R}{\nu} \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^2 \sim \underline{\underline{Re\left(\frac{x}{R}\right)^2 \gg 1}}$$

2) θ_s del punto de separación dado por el método de Thwaites, así como δ_{2s}/R en función del Re, y δ_{2s}/δ_{20}:

$$\frac{d}{dx}\left(U_e^6\delta_2^2\right) = 0{,}45\,\nu\,U_e^5 \rightarrow \frac{\delta_2^2}{R^2} = 0{,}45\,\frac{\nu}{2U_\infty R^2}\cdot\frac{\int_0^\theta \operatorname{sen}^5\theta\, dx}{\operatorname{sen}^6\theta} \quad ; \quad dx = R\,d\theta$$

$$\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = 0{,}45\cdot\frac{\nu}{2U_\infty R}\cdot\left(\frac{\int_0^\theta \operatorname{sen}^5\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^6\theta}\right)$$

$$\int_0^\theta \operatorname{sen}^5\theta\, d\theta = \int_0^\theta \operatorname{sen}^4\theta\left[\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right] = \int_0^\theta \operatorname{sen}^4\theta\left[-d(\cos\theta)\right] = \int_0^\theta\left(1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta\right)\left[-d(\cos\theta)\right] = (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta \\ \operatorname{sen}^4\theta = (\operatorname{sen}^2\theta)^2 = 1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta\end{array}\right\}\ \cos\theta = \xi$$

$$(*) = -\int_1^\xi\left(1+\xi^4-2\xi^2\right)d\xi = -\xi - \frac{1}{5}\xi^5 + \frac{2}{3}\xi^3\Big|_1^\xi = -\xi - \frac{1}{5}\xi^5 + \frac{2}{3}\xi^3 + \underbrace{1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}_{\frac{15}{15}+\frac{3}{15}-\frac{10}{15}=8/15} =$$

$$= -\cos\theta - \frac{\cos^5\theta}{5} + \frac{2}{3}\cos^3\theta + 8/15 = \frac{8}{15}\left[1 - \frac{15}{8}\cos\theta - \frac{3}{8}\cos^5\theta + \frac{10}{8}\cos^3\theta\right]$$

$$\left(\frac{\delta_2}{R}\right)^2 = 0{,}45\cdot\frac{1}{Re}\left(\frac{\frac{8}{15}\left[1-\frac{15}{8}\cos\theta\left(1+\frac{1}{5}\cos^4\theta - \frac{2}{3}\cos^2\theta\right)\right]}{\operatorname{sen}^6\theta}\right)$$

→ Esta expresión proporciona como varía δ_2 en función de θ hasta el punto de desprendimiento.

$0 \le \theta \le \pi$

$$\delta_2^2 = \frac{\lambda\nu}{dU_e/dx} \longrightarrow \frac{\delta_{2s}^2}{\nu}\cdot\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_s = \lambda_s \Rightarrow \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_s = \left(\frac{dU_e}{d\theta}\right)_s\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_s = 2U_\infty\cos\theta_s\cdot\frac{1}{\cancel{R}}\cancel{R^2} = \frac{\nu R^2}{\delta_{2s}^2}(-0{,}09)$$

$$G = \frac{2\nu}{U_e\delta_2}\,T(\lambda) = \frac{2\nu}{U_e\delta_2}\cdot(\lambda+0{,}09)^{0{,}62} \rightarrow \lambda_s = -0{,}09$$

$$\left(\frac{\delta_{2s}}{R}\right)^2 = \frac{-0{,}09}{\cos\theta_s}\cdot\frac{1}{Re}$$

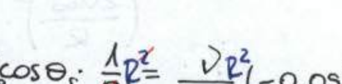
$$\frac{-0{,}09}{\cos\theta_s}\cdot\frac{1}{\cancel{Re}} = 0{,}45\cdot\frac{1}{\cancel{Re}}\cdot\frac{8}{15}\cdot\left[\frac{1-15/8\cos\theta_s\left(1+\frac{1}{5}\cos^4\theta_s - \frac{2}{3}\cos^2\theta_s\right)}{\operatorname{sen}^6\theta_s}\right]$$

$$\frac{-0{,}09}{0{,}45}\cdot\frac{15}{8} = \cos\theta_s\cdot\left[\frac{1-15/8\cos\theta_s\left(1+\frac{1}{5}\cos^4\theta_s - \frac{2}{3}\cos^2\theta_s\right)}{\operatorname{sen}^6\theta_s}\right] = -0{,}375 \rightarrow \theta_s$$

Despreciando términos de $\cos^2\theta$ y $\cos^4\theta$:

$$-0{,}375 = \frac{\cos\theta_s}{\operatorname{sen}^6\theta_s}\left(1 - \frac{15}{8}\cos\theta_s\right)$$

$\theta(°)$	F
90	+0,375
95	+0,271
100	+0,123
105	−0,098



$$\frac{0{,}123}{x} = \frac{0{,}098}{5-x} \rightarrow x \simeq 2{,}78$$

$$\theta = 100 + 2{,}78 \simeq 103°$$

$$\boxed{\theta_s \cong 103°}$$ → Aguanta un gradiente de presión adverso de unos 10°

$$\left(\frac{\delta_{2s}}{R}\right) = 0{,}633\cdot(Re)^{-1/2}$$

$$\frac{\delta_{2s}/R}{\delta_{20}/R} = \boxed{\frac{\delta_{2s}}{\delta_{20}} = 2{,}30}$$

EXAMEN FINAL 06/07/2015 (CONTINUACIÓN)

3) $\theta_s \leq \theta \leq \pi \rightarrow$ succión de la capa límite

$H_{12,s} = 3{,}5$

- Ley que describe la evolución del espesor de cantidad de movimiento δ_2/δ_{20} ?
- Mínima velocidad de succión $|v_p/U_\infty|$ necesaria para garantizar que la capa límite se queda adherida. ?

$c_f = 0$ para $\theta_s \leq \theta \leq \pi$ gracias a v_p

$\lambda = \lambda_s$ para $\theta_s \leq \theta \leq \pi$ (de acuerdo con método de Thwaites)

$$\delta_2^2 = \frac{\lambda \nu}{(du_e/dx)} \rightarrow \frac{\delta_2^2}{\delta_{2s}^2} = \frac{(du_e/dx)_s}{(du_e/dx)} = \frac{\cos\theta_s}{\cos\theta} \rightarrow \frac{\delta_2}{\delta_{2s}} = \left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\delta_{2s}}{\delta_{20}} = 2{,}30$$

$$\boxed{\frac{\delta_2}{\delta_{20}} = 2{,}30\left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta}\right)^{1/2}}$$

Ecuación de KARMAN

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H_{12})\frac{\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{2}\cancel{c_f}^{\,0} + \frac{v_p}{u_e}$$

$$\frac{du_e}{dx} = \frac{2U_\infty}{R}\cos\theta$$

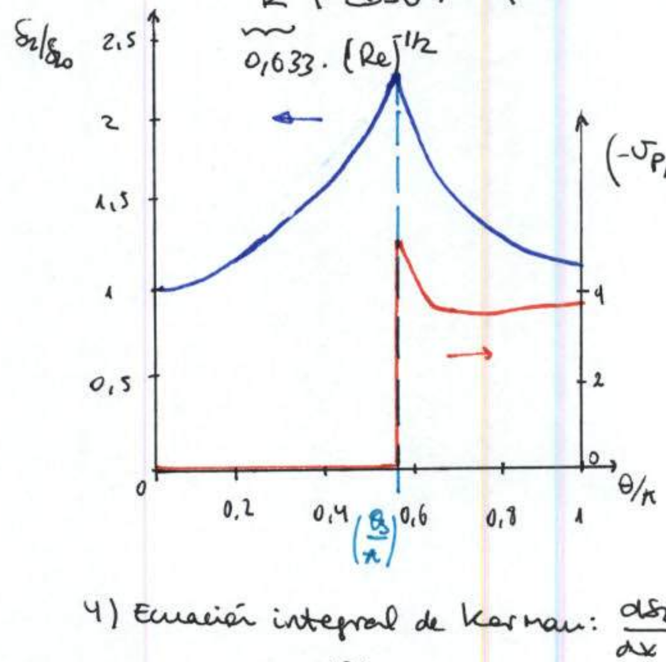
$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\delta_{2s}\left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta}\right)^{1/2}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \delta_{2s}(\cos\theta_s)^{1/2}\cdot\frac{1}{2R}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos^{1/2}\theta}$$

$$= \underbrace{\delta_{2s}\left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta}\right)^{1/2}}_{\delta_2}\cdot\frac{1}{2R}\cdot\tan\theta$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\delta_2}{2R}\cdot\tan\theta$$

$$\frac{v_p}{U_\infty} = 2\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\delta_2}{2R}\tan\theta + 5{,}5\cdot\frac{\delta_2}{\cancel{2U_\infty}\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\cancel{2U_\infty}}{R}\cos\theta\right) = \frac{\delta_2}{R}\left(\tan\theta\operatorname{sen}\theta + 11\cos\theta\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\delta_{2s}}{R}}_{0{,}633\cdot(Re)^{-1/2}}\left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta}\right)^{1/2}\left(\tan\theta\operatorname{sen}\theta + 11\cos\theta\right) \rightarrow \boxed{\frac{v_p}{U_\infty} = \frac{0{,}633}{Re^{1/2}}(\tan\theta\operatorname{sen}\theta + 11\cos\theta)\left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta}\right)^{1/2}}$$



4) Ecuación integral de Karman: $\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H_{12})\frac{\delta_2}{u_e}\cdot\cancel{\frac{du_e}{dx}}^{\,0} = \frac{1}{2}c_f + \cancel{\frac{v_p}{u_e}}^{\,0}$ (en $\pi/2$ aún es cero)

$$c_{f,\pi/2} = 2\left(\frac{d\delta_2}{dx}\right)_{\pi/2}$$

Método de Thwaites: $\frac{d}{dx}(u_e^6\cdot\delta_2^2) = 0{,}45\nu u_e^5 \rightarrow \left(6u_e^5\cdot\cancel{\frac{du_e}{dx}}^{\,0}\cdot\delta_2^2 + u_e^6\cdot 2\delta_2\frac{d\delta_2}{dx}\right)_{\pi/2} = \left(0{,}45\nu \cancel{u_e^5}\right)_{\pi/2}$

$$2\cdot\left(\frac{d\delta_2}{dx}\right)_{\pi/2} = 0{,}45\cdot\left(\frac{\nu}{u_e\delta_2}\right)_{\pi/2} \rightarrow \boxed{c_{f\pi/2} = 0{,}45\cdot\left(\frac{u_e\cdot\delta_2}{\nu}\right)^{-1}_{\pi/2}}$$

Solución de Blasius:

$$C_{f,Blasius} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} = 0,664 \cdot \left(\frac{U_e \delta_2}{\nu}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\delta_2}{x}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{U_e \cdot x}{\nu}}} = \frac{0,664}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{U_e \cdot x \delta_2}{\nu \cdot \delta_2 x}}} \rightarrow \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{x/\sqrt{x} \cdot 0,664}{\sqrt{\frac{U_e \delta_2}{\nu}}} \Rightarrow \left(\frac{\delta_2}{x}\right)^{1/2} = 0,664 \cdot \left(\frac{U_e \delta_2}{\nu}\right)^{-1/2}$$

$$C_{f,Blasius} = 0,664^2 \left(\frac{U_e \delta_2}{\nu}\right)^{-1}_{Blasius} = \boxed{0,441 \left(\frac{U_e \delta_2}{\nu}\right)^{-1}_{Blasius} = C_{f,Blasius}}$$

$$\frac{C_f}{C_{f,Blasius}} = 1,02$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos II **Examen final 16–01–14**

Una placa plana bidimensional de longitud a, está sometida a una corriente uniforme de velocidad U_∞, presión p_∞ y temperatura T_∞, de un líquido de densidad ρ, viscosidad μ, calor específico c y conductividad térmica k constantes (número de Prandtl $Pr = \mu c/k$). La placa, cuya temperatura es T_P constante, está orientada paralelamente a la dirección de la corriente incidente. El número de Reynolds $\rho U_\infty a/\mu$ muy grande, de modo que los efectos viscosos quedan delimitados a una capa límite que supondremos laminar.

Las ecuaciones que permiten determinar las componentes de la velocidad u y v, y la temperatura T del líquido en la capa límite son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \qquad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,; \qquad \rho u c \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Se pide:

1.- Gradiente de presión exterior dp_e/dx.

2.- Condiciones de contorno necesarias para determinar las componentes u y v de la velocidad.

3.- Condiciones de contorno adicionales para determinar la temperatura T.

4.- Orden de magnitud del espesor de la capa límite viscosa δ_v.

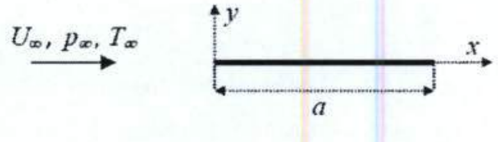
5.- Orden de magnitud del esfuerzo viscoso en la pared τ_p.

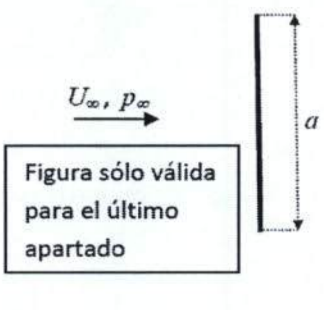
6.- Orden de magnitud de la fuerza de resistencia D, por unidad de envergadura de la placa.

7.- Orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica δ_T.

8.- Orden de magnitud del flujo de calor en la pared q_p.

9.- Suponiendo que la placa estuviese orientada perpendicularmente a la dirección de la corriente incidente, estimar el orden de magnitud de la fuerza de resistencia D por unidad de envergadura de la placa.





SOLUCIÓN

1.- Como la corriente no viscosa alrededor de la placa plana es la no perturbada, la presión es $p_e = p_\infty$, de modo que $dp_e/dx = 0$.

2.- En $y = 0$ es $u = v = 0$. En $y \to \infty$ es $u = U_\infty$ y en $x = 0$ es $u = U_\infty$.

3.- En $y = 0$ es $T = T_P$. En $y \to \infty$ es $T = T_\infty$ y en $x = 0$ es $T = T_\infty$.

4.- El término convectivo es del orden $\rho u \partial u/\partial x \sim \rho v \partial u/\partial y \sim \rho U_\infty^2/a$, mientras que el viscoso es del orden de $\mu \partial^2 u/\partial y^2 \sim \mu U_\infty/\delta_v^2$. Par que ambos términos sean del mismo orden es necesario que

$$\frac{\delta_v}{a} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty a}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

5.- El esfuerzo viscoso es

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \frac{\mu U_\infty}{\delta_v} \sim \frac{\mu U_\infty}{a}\sqrt{Re} \sim \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re}}.$$

6.- La fuerza de resistencia por unidad de envergadura de la placa es

$$D \sim \tau_p a \sim \frac{\rho U_\infty^2 a}{\sqrt{Re}}.$$

7.- El espesor de la capa límite térmica se obtiene de comparar el término convectivo $\rho u c \partial T/\partial x \sim \rho v c \partial T/\partial y \sim \rho U_\infty c \triangle T/a$, con el de conducción de calor $k\partial^2 T/\partial y^2 \sim k \triangle T/\delta_T^2$, y para que sean del mismo orden, es necesario que

$$\delta_T^2 \sim \frac{ka}{\rho U_\infty c} \sim a^2 \frac{k}{\mu c} \frac{\mu}{\rho U_\infty c} \sim \frac{a^2}{Pr Re},$$

donde $Pr = \mu c/k$ es el número de Prandtl. De la relación anterior se obtiene

$$\frac{\delta_T}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{RePr}}.$$

8.- El flujo de calor está dado por

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \frac{k\triangle T}{\delta_T} \sim \frac{k\,(T_P - T_\infty)}{a}\frac{a}{\delta_T} \sim \frac{k\,(T_P - T_\infty)}{a}\sqrt{RePr},$$

donde $q_p a/k\,(T_P - T_\infty)$ es el número de Nusselt, Nu, que resulta ser

$$Nu \sim \sqrt{RePr}.$$

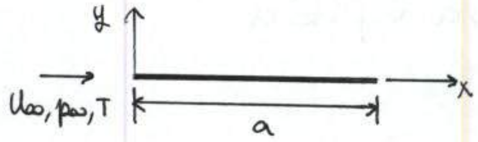
9.- Cuando la placa es perpendicular a la corriente incidente, esta se desprende en los bordes de la placa y la contribución más importante a la resistencia es la de forma, de modo que

$$D \sim a\triangle p \sim \rho U_\infty^2 a.$$

EXAMEN FINAL 16/01/2014

Placa plana 2D: $l=a$, $\underbrace{U_\infty, p_\infty, T_\infty, \rho, \mu, c, k, T_p}_{ctes}$ $Pr=\frac{\mu c}{k}$; $Re=\frac{\rho U_\infty a}{\mu}\gg 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \; ; \; \rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\underbrace{-\cancel{\frac{dp_e}{dx}}}_{0}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \; ; \; \rho u c\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v c\frac{\partial T}{\partial y}=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



1) Como $p_e=p_\infty$ es uniforme: $\boxed{\frac{dp_e}{dx}=0}$ Recordar que $-\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}=u_e\frac{du_e}{dx}=0$; $u_e=U_\infty=cte$

2) $\boxed{\begin{array}{l} y=0:\ u=v=0 \\ y\to\infty:\ u=U_\infty \\ x=0:\ u=U_\infty \end{array}}$ → para que cumpla solución de semejanza.

3) $\boxed{\begin{array}{l} y=0:\ T=T_p \\ y\to\infty:\ T=T_\infty \\ x=0:\ T=T_\infty \end{array}}$ → para que cumpla solución de semejanza

4) $\frac{U_\infty}{a}\sim\frac{v_c}{\delta_v}\rightarrow v_c\sim U_\infty\frac{\delta_v}{a}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\rho\frac{U_\infty^2}{a} \\ \rho v\frac{\partial u}{\partial y}\sim\rho v_c\cdot\frac{U_\infty}{\delta_v}\sim\rho\frac{U_\infty^2}{a}\end{array}\right]\sim\mu\frac{U_\infty}{\delta_v^2}$

$$\rho\frac{U_\infty^{\cancel{2}}}{a}\sim\mu\frac{\cancel{U_\infty}}{\delta_v^2}\rightarrow \boxed{\frac{\delta_v}{a}\sim\frac{1}{\sqrt{Re}}}$$

5) $\tau_p=+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\sim\mu\cdot\frac{U_\infty}{\delta_v}\sim\mu\cdot\frac{U_\infty}{a}\sqrt{Re}\sim\frac{\mu\cdot\rho U_\infty^2}{\rho U_\infty a}\sqrt{Re}\sim\boxed{\frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re}}\sim\tau_p}$

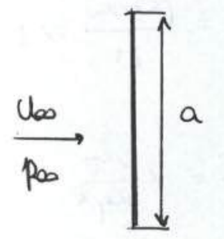
6) $D\sim\frac{D'}{\epsilon}\sim\frac{\tau_p\cdot S}{\epsilon}\sim\frac{\tau_p\cdot a\cdot\cancel{\epsilon}}{\cancel{\epsilon}}\sim\tau_p\cdot a\rightarrow\boxed{D\sim\frac{\rho U_\infty^2 a}{\sqrt{Re}}}$ $S\sim A_m$

7) $\rho U_\infty c\frac{\cancel{\Delta T}}{a}\sim k\frac{\cancel{\Delta T}}{\delta_T^2}\rightarrow\delta_T^2\sim\frac{k}{\mu c}\cdot\frac{\mu/\rho}{U_\infty}\cdot a\rightarrow\left(\frac{\delta_T}{a}\right)^2\sim\frac{1}{Pr\cdot Re}$

$$\boxed{\frac{\delta_T}{a}\sim(Pr\cdot Re)^{-1/2}}$$

8) $q_p=-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}\sim k\frac{\Delta T}{\delta_T}\sim k\frac{\Delta T}{a}\cdot(Pr\cdot Re)^{1/2}\rightarrow\boxed{Nu\sim\frac{q_p\cdot a}{k\Delta T}\sim(Pr\cdot Re)^{1/2}}$

9)



En esta configuración se produce desprendimiento en los bordes de la placa ⇒ contribución más importante a la resistencia es la de forma:

$$D \sim \frac{D'}{\varepsilon} \sim \frac{\Delta p \cdot S'}{\varepsilon} \sim \frac{\Delta p \cdot \cancel{\varepsilon} \cdot a}{\cancel{\varepsilon}} \sim \Delta p\, a \sim \rho U_\infty^2 a$$

$$\boxed{D \sim \rho U_\infty^2 a}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 09–07–2014**

La capa límite de Blasius es aquella formada sobre una placa plana semi-infinita, situada paralelamente a una corriente uniforme de valor U_∞ y sin gradiente de presiones. Las ecuaciones que la determinan son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

donde ρ y μ son constantes. Se pide:

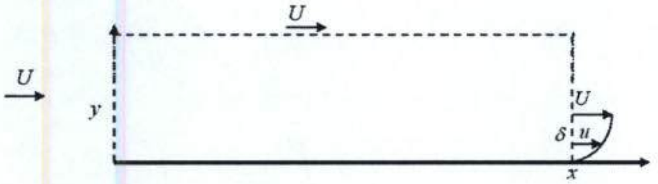
a) Orden de magnitud de la velocidad transversal, v, a la capa límite en función de su espesor δ.

b) Orden de magnitud del espesor $\delta(x)$ de la capa límite.

c) Orden de magnitud del esfuerzo en la placa, $\tau_p(x)$.

d) Utilizando la ecuación de la continuidad aplicada al volumen de control[1] indicado en la figura, determinar el gasto volumétrico, q, que abandona el volumen de control por su parte superior, en función del espesor de desplazamiento δ^*.

e) Utilizando la ecuación de la cantidad de movimiento aplicada al mismo volumen de control, determinar $\tau_p(x)$ en función del espesor de cantidad de movimiento θ.



Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en forma integral, para un movimiento estacionario y en ausencia de fuerzas másicas son

$$\int_\Sigma \rho (\vec{v} - \vec{v_c}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

$$\int_\Sigma \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v_c}) \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_\Sigma p \vec{n} d\sigma + \int_\Sigma \vec{n} \cdot \tau' d\sigma.$$

El espesor de desplazamiento está dado por

$$\delta_1 \equiv \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

y el de cantidad de movimiento por

$$\delta_2 \equiv \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

[1] La cara superior del volumen de control se extiende más allá de la capa límite en la dirección vertical, tal como se muestra en la figura.

SOLUCIÓN

a) De la ecuación de la continuidad se tiene

$$\frac{U}{x} \sim \frac{v}{\delta}.$$

b) Los dos términos convectivos, de acuerdo con la relación anterior, son del mismo orden y del orden de $\rho U^2/x$ mientras que el término viscoso es del orden de $\mu U/\delta^2$. Cómo en la capa límite ambos términos son del mismo orden, se tiene

$$\frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} \quad \Rightarrow \quad \delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}.$$

Conocido δ, la velocidad transversal queda

$$v \sim U_\infty \frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\mu U_\infty}{\rho x}}.$$

c) El esfuerzo en la placa es tal que

$$\tau_p \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta} \sim \sqrt{\frac{\rho \mu U_\infty^3}{x}}.$$

d) La ecuación de la continuidad en forma integral proporciona

$$\int_0^\infty \rho\,(u - U)\,dy + \int_0^x \rho v dx = 0,$$

lo que permite escribir

$$q = \int_0^x v dx = \int_0^\infty (U - u)\,dy = U \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = U\delta^*.$$

e) La ecuación de cantidad de movimiento en forma integral proporciona

$$\rho \int_0^\infty \left(u^2 - U^2\right) dy + \rho U \int_0^x v dx = -\int_0^x \tau_p dx,$$

ya que la integral de las presiones es nula porque la presión es uniforme. A su vez de la ecuación de la continuidad se tiene

$$\int_0^x v dx = \int_0^\infty (U - u)\,dy,$$

que sustituido en la de cantidad de movimiento proporciona

$$\rho \int_0^\infty \left[\left(u^2 - U^2\right) + U\,(U - u)\right] dy = -\int_0^x \tau_p dx,$$

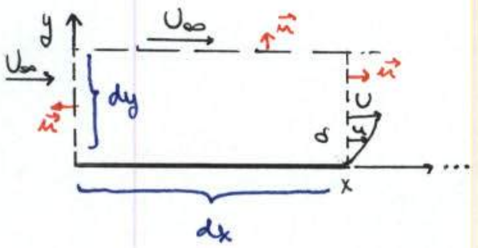
de modo que

$$\int_0^x \tau_p dx = \rho U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \rho U^2 \theta,$$

y derivando con respecto a x se tiene

$$\tau_p = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}.$$

EXAMEN 09/07/2014



Capa límite de Blasius : $U = cte \rightarrow \frac{dp_e}{dx} = 0$

• Ecuaciones: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ; \rho, \mu \text{ ctes}$$

a) Orden de magnitud v

• Ecuación de la continuidad: $\frac{U_\infty}{x} \sim \frac{v}{\delta} \rightarrow \boxed{v \sim U_\infty \frac{\delta}{x}}$

b) $\frac{\rho U_\infty^{\cancel{2}}}{x} \sim \mu \frac{\cancel{U_\infty}}{\delta^2} \rightarrow \delta^2 \sim \frac{\mu/\rho}{U} x \rightarrow \left(\frac{\delta}{x}\right)^2 \sim \frac{\nu}{Ux} \sim Re^{-1} \rightarrow \frac{\delta}{x} \sim Re^{-1/2}$

$$\boxed{\delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}} \rightsquigarrow v \sim U_\infty \frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\mu U_\infty}{\rho x}}$$

c) $\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta} \sim \mu \frac{U_\infty \sqrt{\rho U_\infty}}{\sqrt{\mu x}} \rightsquigarrow \boxed{\tau_p \sim \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}}}$

d) Ec. continuidad:

$$\int_\Sigma \rho(\vec{v} - \vec{v}_c)\vec{n}\, d\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\infty \cancel{\rho}(u - U)\, dy + \int_0^x \cancel{\rho} v\, dx = 0$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad q = \int_0^x v\, dx = \int_0^\infty (U - u)\, dy = \int_0^\infty U\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

$\boxed{\delta^* \equiv \delta_1}$ $\qquad \boxed{q = U \cdot \delta^*}$

e) Ec. cantidad de movimiento:

$$\int_\Sigma \rho\vec{v}(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}\, d\sigma = -\cancel{\int_\Sigma p\vec{n}\, d\sigma} + \int_\Sigma \vec{n}\cdot\tau'\, d\sigma \rightarrow \int_0^\infty \rho(u^2 - U^2)\, dy + \rho U \int_0^x v\, dx = -\int_0^x \tau_p\, dx$$

presión es uniforme

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad \text{De ec. continuidad: } \int_0^x v\, dx = \int_0^\infty (U - u)\, dy \nearrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \rho(u^2 - U^2)\, dy + \rho U \int_0^x (U - u)\, dy = -\int_0^x \tau_p\, dx$$

$$\rho \int_0^\infty \left[(u^2 - \cancel{U^2}) + U(\cancel{U} - u)\right] dy = -\int_0^x \tau_p\, dx \rightarrow \rho \int_0^\infty (u^2 - Uu)\, dy = -\rho \int_0^\infty U^2\left(\frac{u}{U} - \frac{u^2}{U^2}\right) dy \Rightarrow$$

$$+\int_0^x \tau_p\, dx = -\rho U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = +\rho U^2 \theta$$

$$\int_0^x \tau_p\, dx = \rho U^2 d\theta \rightarrow \boxed{\tau_p = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}}$$

$\boxed{\theta \equiv \delta_2}$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 22-05-13**

PRIMERA PREGUNTA

Un perfil simétrico de cuerda c a ángulo de ataque nulo, está sometido a una corriente uniforme de velocidad U_∞ y presión p_∞ de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. El número de Reynolds del movimiento $\rho U_\infty c/\mu$ es grande. Las ecuaciones que determinan la capa límite sobre el perfil (supuesta laminar) son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{dp_e}{dx} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

donde p_e es la presión exterior a la capa límite, que no varía con y. Se pide:

1.- Orden de magnitud de la velocidad transversal v a la capa límite.

2.- Orden de magnitud del término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento.

3.- Orden de magnitud del espesor de la capa límite.

4.- Orden de magnitud del esfuerzo en la pared del perfil.

5.- Orden de magnitud de la fuerza de fricción F_f (por unidad de envergadura E) sobre el perfil.

SEGUNDA PREGUNTA

Por un tubo liso de diámetro D e infinitamente largo, fluye un líquido de densidad ρ y viscosidad cinemática ν, con velocidad media en la sección de valor U. El movimiento es turbulento ya que el número de Reynolds $Re = UD/\nu$ es alto. La caída de presión entre dos secciones situadas a una distancia L es tal que

$$\frac{2\left[p\left(x=0\right) - p\left(x=L\right)\right]}{\rho U^2} = 1,5.$$

Se pide determinar:

6.- Coeficiente de fricción de Darcy λ.

7.- Velocidad de fricción u_* relativa a U.

8.- Orden de magnitud del espesor (referido a D) de la capa en la que los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden.

SOLUCIÓN

PRIMERA PREGUNTA

1.- De la ecuación de la continuidad se tiene

$$\frac{U_\infty}{c} \sim \frac{v}{\delta} \quad \Rightarrow \quad v \sim U_\infty \frac{\delta}{c} \ll u.$$

2.- Cada uno de los sumandos del término convectivo es del orden

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{U_\infty^2}{c}; \quad \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \rho U_\infty \frac{v}{\delta} \sim \rho \frac{U_\infty^2}{c},$$

de modo que ambos son del mismo orden.

3.-El orden de magnitud del espesor de la capa límite se obtiene de hacer que el término viscoso, medido con δ, y el convectivo sean del mismo orden

$$\rho \frac{U_\infty^2}{c} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2},$$

lo que implica

$$\frac{\delta}{c} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty c}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

4.- El esfuerzo en la pared está dado por

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta} \sim \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re}}.$$

5.- La fuerza de fricción, por unidad de envergadura del perfil, está dada por

$$\frac{F_f}{E} \sim \tau_p c \sim \frac{\rho U_\infty^2 c}{\sqrt{Re}}.$$

SEGUNDA PREGUNTA

6.- Dado que la ecuación de cantidad de movimiento proporciona

$$p\,(x=0) - p\,(x=L) = \frac{\lambda L}{D}\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right),$$

resulta que $\lambda L/D = 1{,}5$, de modo que $\lambda = 1{,}5D/L = 0{,}015$.

7.- Dado que el esfuerzo en la pared es

$$\tau_p = \frac{\lambda}{8}\rho U^2,$$

y que la velocidad de fricción se define como

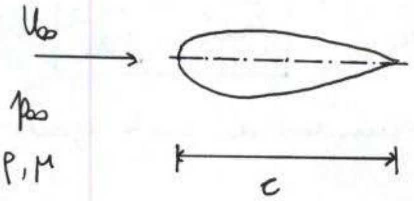
$$\tau_p = \rho u_*^2,$$

resulta que

$$\frac{u_*}{U} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0{,}043.$$

8.- $\tau_p = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$; ρu_*^2 $\qquad \delta \sim \sqrt{\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$

EXAMEN 22/05/2013 (PRIMERA PREGUNTA)



$$Re_c = \frac{\rho U_\infty c}{\mu} \gg 1$$

• Ecuaciones CAPA LÍMITE (laminar):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] \rho \left(u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) = -\dfrac{dp_e}{dx} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

p_e: presión exterior a la capa límite que no varía con y.

1) Orden de magnitud de la velocidad transversal v a la capa límite:

◦ Ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{U_\infty}{c} \sim \frac{v}{\delta} \rightarrow v \sim U_\infty \underbrace{\left(\frac{\delta}{c}\right)}_{\ll 1} \ll U_\infty \rightarrow \boxed{v \sim U_\infty (\delta/c) \ll U_\infty}$$

2) Orden de magnitud del término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho \left(\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{①} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{②} \right)$$

① $\rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} \sim \rho U_\infty \dfrac{U_\infty}{c} \sim \rho \dfrac{U_\infty^2}{c}$

② $\rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \rho v \dfrac{U_\infty}{\delta} \sim \rho U_\infty \dfrac{\cancel{\delta}}{c} \cdot \dfrac{U_\infty}{\cancel{\delta}} \sim \rho \dfrac{U_\infty^2}{c}$

$$\boxed{\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \rho \frac{U_\infty^2}{c}}$$

3) Orden de magnitud del espesor de la capa límite:

↳ En capa límite: términos convectivos ~ términos viscosos

$$\rho \frac{U_\infty^{\cancel{2}}}{c} \sim \mu \frac{\cancel{U_\infty}}{\delta^2} \rightarrow \frac{\delta^2}{c^2} \sim \frac{\mu \cdot \cancel{c}}{\rho U_\infty \cdot c^{\cancel{2}}} \rightarrow \frac{\delta}{c} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty c}} \sim \sqrt{1/Re_c}$$

$$\boxed{\delta/c \sim 1/\sqrt{Re_c}}$$

4) Orden de magnitud del esfuerzo en la pared del perfil:

$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \mu\,\frac{U_\infty}{\delta} \sim \mu\,\frac{\rho U_\infty^2}{c\rho U_\infty}\cdot\sqrt{Re_c} \sim \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re_c}} \rightarrow \boxed{\frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_c}}}$$

5) Orden de magnitud de la fuerza de fricción F_f (por unidad de embergadura E) sobre el perfil:

$$\left.\begin{array}{l} F_f \sim \tau_p \cdot S^{\sim A_m} \\ S \sim E\cdot c \end{array}\right\} \frac{F_f}{E} \sim \tau_p\cdot c \sim \frac{c\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re_c}} \rightarrow \boxed{\frac{F_f}{E} \sim \frac{\rho U_\infty^2\cdot c}{\sqrt{Re_c}}}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos II **Examen parcial 20–12–12**

Una placa plana semi infinita está a una temperatura T_p constante. La placa está sometida a una corriente uniforme de un líquido con velocidad U_∞, presión p_∞ y temperatura T_∞, con ángulo de ataque nulo.

Las ecuaciones que permiten determinar la capa límite viscosa laminar sobre la placa son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

y, una vez conocidas u y v, se puede determinar la capa límite térmica mediante la ecuación

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Mediante estimaciones de órdenes de magnitud, se pide:

1.- Variación del espesor de la capa límite viscosa δ_v con la coordenada x a lo largo de la placa.

2.- Variación con la coordenada x del coeficiente de fricción $C_f = 2\tau_p/\rho U_\infty^2$.

3.- Variación con x del espesor de la capa límite térmica δ_T.

4.- Variación con x del flujo de calor en la placa q_p.

5.- ¿Cual es el orden de magnitud de δ_T cuando el número de Prandtl es grande?.

RESPUESTAS - VERSIÓN 2

P1 - Dos puntos	P2 - Dos puntos	P3 - Dos puntos
1a.- $\delta_v \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$	2a.- $C_f \sim \frac{\nu}{U_\infty x}$	3a.- $\delta_T \sim x$
1b.- $\delta_v \sim x$	2b.- $C_f \sim \frac{U_\infty x}{\nu}$	3b.- $\delta_T \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty Pr}}$
1c.- $\delta_v \sim \frac{\nu}{U_\infty}$	2c.- $C_f \sim \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}$	3c.- $\delta_T \sim \sqrt{\frac{\nu x Pr}{U_\infty}}$
1d.- $\delta_v \sim \frac{\nu x}{U_\infty}$	2d.- $C_f \sim \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$	3d.- $\delta_T \sim \frac{\nu}{U_\infty Pr}$
1e.- Ninguna de las anteriores	2e.- Ninguna de las anteriores	3e.- Ninguna de las anteriores

P4 - Dos puntos	P5 - Dos puntos
4a.- $\frac{q_p}{k(T_p - T_\infty)} \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty Pr}}$	5a.- $\delta_T \sim x Pr^{-1/3}$
4b.- $\frac{q_p}{k(T_p - T_\infty)} \sim \frac{\nu x}{U_\infty Pr}$	5b.- $\delta_T \sim Pr^{-1/2} \frac{\nu x}{U_\infty}$
4c.- $\frac{q_p}{k(T_p - T_\infty)} \sim \sqrt{\frac{U_\infty Pr}{\nu x}}$	5c.- $\delta_T \sim Pr^{-1} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$
4d.- $\frac{q_p}{k(T_p - T_\infty)} \sim \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	5d.- $\delta_T \sim Pr^{-1/3} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$
4e.- Ninguna de las anteriores	4e.- Ninguna de las anteriores

EXAMEN PARCIAL 20/12/12

$\longrightarrow U_\infty,\ p_\infty, T_\infty$

- Ecuación de la continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$
- Ecuación de la cantidad de movimiento según eje x: $\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\Big\} \rightarrow \delta_v$

- Ecuación de la energía: $\rho c u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho c v\frac{\partial T}{\partial y}=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

*Estimaciones de órdenes de magnitud:

1) δ_v : $\frac{U_\infty}{x}\sim\frac{v}{\delta_v}\rightarrow v\sim U_\infty\cdot\frac{\delta_v}{x}$ (cont.)

$\rho\frac{U_\infty^2}{x}$

$\rho\frac{U_\infty}{\delta_v}\cdot v\sim\rho\frac{U_\infty^2}{x}\cdot\frac{\delta_v}{\cancel{\delta_v}}$

término convectivo: $\sim\rho\frac{U_\infty^2}{\cancel{x}}$

término viscoso: $\sim\mu\frac{U_\infty}{\delta_v^2}$

$\rightarrow \mu\frac{\cancel{U_\infty}}{\delta_v^2}\sim\rho\frac{U_\infty^{\cancel{2}}}{x}$

$\delta_v^2\sim\frac{\mu/\rho}{U_\infty}\cdot x$

$$\boxed{\delta_v\sim\sqrt{\frac{\nu\cdot x}{U_\infty}}}$$

2) $C_f=2\tau_p/\rho U_\infty^2 \rightarrow \tau_p=\mu\left(\overset{\sim U_\infty/\delta_v}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{y=0}\sim\mu\cdot\frac{U_\infty}{\sqrt{\frac{\nu\cdot x}{U_\infty}}}$

$C_f\sim\frac{\mu\cancel{U_\infty}}{\sqrt{\frac{\nu\cdot x}{U_\infty}}}\cdot\frac{1}{\rho U_\infty^{\cancel{2}}}\sim\frac{\nu\sqrt{U_\infty}}{\sqrt{\nu\cdot x}\,U_\infty}\sim\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}\rightarrow \boxed{C_f\sim\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}}$

3) $\frac{\cancel{\rho c}\,U_\infty\frac{\cancel{\Delta T_\infty}}{x}}{\cancel{\rho c}\,v\frac{\cancel{\Delta T_\infty}}{\delta_T}}\sim\frac{\cancel{U_\infty}(1/\cancel{x})}{\cancel{U_\infty}\cdot\frac{\delta_v}{\cancel{x}}\cdot\left(\frac{1}{\delta_T}\right)}\sim\frac{\delta_T}{\delta_v}$ si $\delta_T\sim\delta_v$ y $\delta_T\gg\delta_v$ el orden del término convectivo será el mismo: $\sim\Delta T_\infty\,\rho c U_\infty/x$

Vamos a suponer este caso:

$\cancel{\Delta T_\infty}\rho c\frac{U_\infty}{x}\sim k\frac{\cancel{\Delta T_\infty}}{\delta_T^2}\rightarrow\delta_T^2\sim\frac{k}{\mu c}\cdot\frac{\mu/\rho\cdot x}{U_\infty}\sim\frac{1}{Pr}\cdot\frac{\nu x}{U_\infty}$

$$\boxed{\delta_T\sim\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty\cdot Pr}}}$$

4) $q_p=-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}\sim k\frac{\overset{(T_p-T_\infty)}{\Delta T}}{\delta_T}\sim k\frac{\Delta T}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty Pr}}}\rightarrow\boxed{\frac{q_p}{k(T_p-T_\infty)}\sim\sqrt{\frac{U_\infty\cdot Pr}{\nu x}}}$

5) δ_T con $P_r >> 1$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_v \sim \sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}} \rightarrow \dfrac{\delta_v}{x} \sim (Re)^{-1/2} \\ \delta_T \sim \sqrt{\dfrac{\nu x}{P_r U_\infty}} \rightarrow \dfrac{\delta_T}{x} \sim (P_r \cdot Re)^{-1/2} \end{array}\right\} \dfrac{\delta_T/\cancel{x}}{\delta_v/\cancel{x}} \sim \dfrac{(P_r \cdot \cancel{Re})^{-1/2}}{(\cancel{Re})^{-1/2}} \sim P_r^{-1/2}$$

$$\frac{\delta_T}{\delta_v} \sim \frac{1}{\sqrt{P_r}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } P_r << 1 \\ \text{si } P_r \sim 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{solución de (3)}$$

si $P_r >> 1 \Leftrightarrow \delta_v >> \delta_T \rightarrow$ término dominante en términos convectivos : $\rho c v \dfrac{\partial T}{\partial y}$

$$\rho c v \cdot \frac{\cancel{\Delta T}}{\cancel{\delta_T}} \sim k \frac{\cancel{\Delta T}}{\delta_T^{\cancel{2}}} \rightarrow \delta_T \sim \frac{k}{\rho c v} \sim \frac{k}{\mu c} \cdot \frac{\mu/\rho}{v} \sim \frac{1}{P_r} \cdot \frac{\nu}{v}$$

El orden de u ya no es U_∞ ya que $\delta_T << \delta_v$

! * $u = y\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \dfrac{U_\infty}{\delta_v} \cdot \delta_T$

La velocidad transversal se obtiene de la ecuación de la continuidad:

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \approx \frac{U_\infty \delta_T / \delta_v}{x} \cdot \delta_T \sim \frac{U_\infty \delta_T^2}{x \cdot \delta_v}$$

Entonces: $\delta_T \sim \dfrac{1}{P_r} \cdot \dfrac{\nu x \cdot \delta_v}{U_\infty \delta_T^2} \rightarrow \delta_T^3 \sim \left(\dfrac{1}{P_r}\right) \cdot \dfrac{\nu x \cdot \sqrt{\nu x}}{U_\infty \cdot \sqrt{U_\infty}} \sim \dfrac{1}{P_r} \cdot \left(\dfrac{\nu x}{U_\infty}\right)^{3/2}$

$$\boxed{\delta_T \sim P_r^{-1/3} \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 17–09–08**

Considérese la capa límite sobre una placa plana semi infinita de una corriente uniforme, paralela a la placa, de velocidad U constante. El fluido es un líquido de densidad ρ y viscosidad μ.

La ecuación integral de Kármàn para la capa límite incompresible es

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\theta\left(2+\frac{\delta^*}{\theta}\right) = \frac{1}{2}c_f,$$

donde u_e la velocidad exterior a la capa límite,

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy \ ; \ \theta(x) = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy,$$

son los espesores de desplazamiento y de cantidad de movimiento, respectivamente, y

$$c_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2},$$

es el coeficiente de fricción, siendo τ_p el esfuerzo en la pared. Se pide:

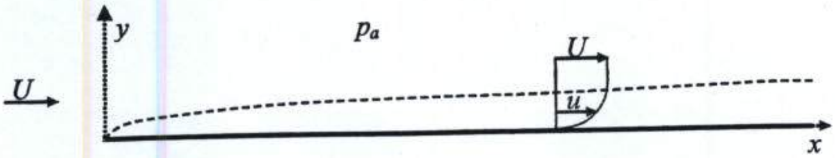
1.- Simplificar la ecuación de Kármàn para el caso considerado.

2.- Si la capa límite es laminar, muestren, por estimaciones de orden de magnitud en la ecuación de cantidad de movimiento[1], que

$$c_f\sqrt{\frac{\rho U x}{\mu}} = a,$$

siendo a una constante.

3.- Suponiendo que la constante a del apartado anterior es conocida, determinar el espesor de cantidad de movimiento θ. Determinen también la resistencia de la placa $D(x)$ desde el origen hasta la posición x.



[1]Recuerden que las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para una capa límite laminar de un fluido incompresible son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ ; \ \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

SOLUCIÓN

1.- Como en este caso $u_e = U =$ constante, $du_e/dx = dU/dx = 0$ y la ecuación de Kármàn queda

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}c_f.$$

2.- De la ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial se obtiene

$$\frac{\rho U^2}{x} \sim \frac{\mu U}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}}.$$

$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$

Además

$$\tau_p \sim \mu\frac{U}{\delta} \sim \rho U^2\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}},$$

$\mu U \cdot \sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} \cdot \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{U}} \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$

de modo que

$$c_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}}.$$

$= \mu \cdot U \cdot U \cdot \rho \sqrt{\frac{\mu}{\mu \rho x U}}$

$= U^2 \rho \sqrt{\frac{\mu}{\rho x U}}$

3.- Con

$$c_f = a\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}},$$

de la ecuación de Kármàn se tiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}c_f = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}},$$

que se integra, con $\theta(0) = 0$, para dar

$$\theta = a\sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}},$$

o bien

$$\frac{\theta}{x} = a\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = c_f.$$

Dado que

$$\tau_p = \frac{1}{2}c_f\rho U^2 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\rho\mu U^3}{x}},$$

la resistencia es

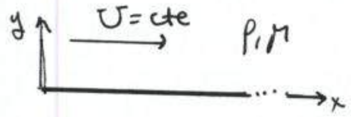
$$D = \int_0^x \tau_p dx = a\sqrt{\rho\mu U^3}\int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = a\sqrt{\rho\mu U^3 x}.$$

Obsérvese que

$$\frac{D}{\rho U^2 x} = \frac{\theta}{x} = c_f.$$

EXAMEN 17/09/2008

Placa plana semiinfinita



Ecuación integral de Karman:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\delta_2\left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) = \frac{1}{2}C_f \ ; \ u_e = U$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \ ; \ \delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \ ; \ C_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2}$$

1) Simplificar ec. de Karman

$$\frac{du_e}{dx} = 0 \ (U \text{ es cte}) \rightarrow \boxed{\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{1}{2}C_f}$$

2) Mostrar que: $C_f\sqrt{\frac{\rho U x}{\mu}} = \underset{\hookrightarrow \text{cte}}{a}$

- Ec. continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v_c \sim U \cdot \frac{\delta}{x}$
- Ec. cant. mov.: $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\cancel{\frac{dp_e}{dx}}^{\,0} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\overset{?}{\rho U^2/x} \qquad \overset{?}{\rho v_c \frac{U}{\delta}} \qquad \overset{?}{\mu \frac{U}{\delta^2}} \rightarrow \frac{\rho U^{\cancel{2}}}{x} \sim \mu \frac{\cancel{U}}{\delta^2}$$

$$\overset{?}{\rho \frac{U^2}{x}}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$$

$$\tau_p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \mu \frac{U}{\delta} \sim \mu \frac{U\sqrt{\rho U}}{\sqrt{\mu x}} \sim \rho U^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}}$$

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2} \sim \frac{\cancel{\rho U^2}}{\cancel{\rho U^2}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} \rightarrow \boxed{C_f\sqrt{\frac{\rho U x}{\mu}} \sim 1}$$

3) $C_f\sqrt{\frac{\rho U x}{\mu}} = a \rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{1}{2}C_f = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} \rightarrow \int_0^{\delta_2} d\delta_2 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} \cdot \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\delta_2 = \frac{a}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} \cdot \cancel{2}\sqrt{x}$$

$$\boxed{\delta_2 = a\sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}}$$

$$\tau_p = \frac{1}{2}C_f \rho U^2 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}$$

$$D = \int_0^x \tau_p dx = \frac{a}{\cancel{2}}\sqrt{\rho \mu U^3} \cdot \underbrace{\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{\cancel{2}\sqrt{x}} = a\sqrt{\rho \mu U^3 x} \rightarrow \boxed{D = a\sqrt{\rho \mu U^3 \cdot x}}$$

MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 4. INTRODUCCIÓN AL FLUJO TURBULENTO

Origen de la turbulencia

La turbulencia aparece a causa de inestabilidades a altos números de Reynolds.

- Flujo laminar en un tubo se hace turbulento cuando el nº de Reynolds (basado en velocidad media y diámetro de tubo) $Re \sim 2000 - 3000$ → depende de las perturbaciones que se introduzcan
- Capa límite laminar en una placa sin gradiente de presiones se hace turbulento cuando $Re_\delta = \frac{U_\infty \delta_1}{\nu} \approx 600$

- Matemáticamente: detalles de transición no son bastante bien entendidos
  - Gran parte de la teoría de inestabilidad del flujo laminar → teoría linealizada ↓ válida para pequeñas perturbaciones (lejos de los altos niveles de fluctuación de un flujo turbulento)
  - Casi toda la teoría de flujos turbulentos es teoría asintótica
    ↳ bastante aproximada a muy altos números de Reynolds, incompleta a números de Reynolds no tan altos.

EXPERIMENTOS → transición se inicia normalmente por un mecanismo primario de inestabilidad (bidimensional).

Inestabilidad primaria → movimientos secundarios (tridimensionales y ellos mismos se hacen inestables).
↓
spots turbulentos → crecen rápidamente mezclándose unos con otros
↓
flujo turbulento desarrollado

- En otros casos: turbulencia se origina por inestabilidades que generan torbellinos los cuales se hacen, a su vez, también inestables.

Los flujos turbulentos siempre aparecen a altos números de Reynolds, son tridimensionales con altos niveles de fluctuación con torbellinos de amplios rangos de tamaño y frecuencia, y siempre son disipativos.

LA TURBULENCIA NECESITA UN CONTINUO APORTE DE ENERGÍA

Importancia de movimientos turbulentos a efectos prácticos → mejora la difusión.

Escalas de la turbulencia.

- Los torbellinos de tamaño más grande en un movimiento turbulento
  - ↳ escalan con el tamaño transversal del flujo.

Con sus tamaños y velocidades típicas → $Re \gg 1$ y efectos disipativos de la viscosidad no cuentan.

- Solo en escalas muy pequeñas y velocidades también pequeñas (generadas por no linealidad de ecuaciones).
  - ↳ efectos viscosos pueden ser importantes para disipar la energía asociada a los torbellinos grandes

→ Torbellinos más grandes $\left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad } \Delta U \\ \text{longitud } L \end{array} \right\} \rightarrow Re = \frac{(\Delta U) L}{\nu} \gg 1$

↳ frecuencia: $f_L \sim \Delta U / L$

↳ energía (por unidad de masa y tiempo) asociada a estos torbellinos y que ha de disiparse: $\varepsilon \sim (\Delta U)^3 / L$

$$\varepsilon \sim \frac{F \cdot V}{\rho L^3} \sim \frac{\Delta p \cdot L^2 \cdot V}{\rho L^3} \sim \frac{\cancel{\rho} V^2 \cdot \cancel{L^2} \cdot V}{\cancel{\rho} L^{\cancel{3}}}$$

La energía se transfiere a escalones intermedios de velocidad característica v_ℓ y tamaño característico $\ell \Rightarrow \ell v_\ell / \nu \gg 1$:

$$\frac{v_\ell^3}{\ell} \sim \varepsilon \sim \frac{(\Delta U)^3}{L} \rightarrow v_\ell \sim \Delta U \cdot \left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/3} \ll \Delta U$$

$$f_\ell \sim \Delta U \left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{L} \sim f_L \cdot \left(\frac{L}{\ell}\right)^{2/3} \gg f_L$$

ESCALA DE KOLMOGOROV

Velocidad: v_η
Tamaño característico: η
} → donde se disipa la energía $\Rightarrow \eta v_\eta / \nu \sim 1$ (Efectos viscosos cuentan)

↳ $v_\eta \sim \Delta U \left(\frac{\eta}{L}\right)^{1/3}$; $f_\eta \sim f_L \left(\frac{L}{\eta}\right)^{2/3}$

↳ $\frac{\eta v_\eta}{\nu} \sim \frac{L \Delta U}{\nu} \left(\frac{v_\eta}{\Delta U}\right)\left(\frac{\eta}{L}\right) \sim Re \left(\frac{\eta}{L}\right)^{4/3} \sim 1 \rightarrow \frac{L}{\eta} \sim Re^{3/4}$

$v_\eta \sim \Delta U \cdot Re^{-1/4}$; $f_\eta \sim f_L \cdot Re^{1/2}$

Mallar un volumen de dimensión característica L y capturar la disipación viscosa $\Rightarrow$ hay que hacer una malla de tamaño característico η
↳ y con algo de resolución $\eta/3$

NÚMERO DE CELDAS $\sim \left(\frac{L}{\eta/3}\right)^3 \sim 27 \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim 27 \cdot Re^{9/4}$

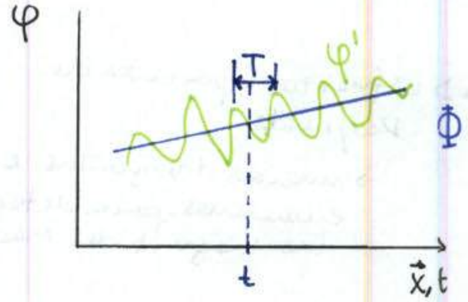
↱ "cuando se estornuda ya se tiene"
* $Re \sim 10^4 \rightarrow$ nº de celdas $\sim 10^{10}$ (diez mil millones de celdas)
* $Re \sim 10^5 \rightarrow$ nº de celdas $\sim 10^{12.5}$ (varios billones de celdas)

⤳ Simulación directa hoy por hoy no se puede

Valores medios. Ecuaciones de Reynolds.

En movimiento turbulento → magnitud fluida cualquiera $\varphi(\vec{x},t)$:

$$\varphi(\vec{x},t) = \Phi(\vec{x},t) + \varphi'(\vec{x},t) \begin{cases} \Phi(\vec{x},t): \text{valor medio de } \varphi(\vec{x},t) \to \text{no tiene por qué ser constante.} \\ \varphi'(\vec{x},t): \text{fluctuación} \end{cases}$$



$\overline{\varphi'} = 0$ → Valor medio:

$$\Phi = \overline{\varphi} = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi \, dt$$

$$\Phi = \langle\varphi\rangle(\vec{x},t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\vec{x},t;j)$$

- Energía cinética (por unidad de masa):

$$\overline{e_c} = \frac{1}{2}\overline{v_i v_i} = \frac{1}{2}\overline{(V_i+v_i')(V_i+v_i')} = \underbrace{\frac{1}{2}V_iV_i}_{K} + \cancel{V_i\overline{v_i'}}^{\,0} + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'}}_{k}$$

- Energía cinética media: $K = \frac{1}{2}V_iV_i = \frac{1}{2}V_i^2$

- Energía cinética de las fluctuaciones turbulentas: $k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'} = \frac{1}{2}\overline{v_i'}^2$

- INTENSIDAD de la turbulencia: $\sqrt{\overline{v_i' v_i'}} = \sqrt{2k}$
- NIVEL de turbulencia: $\dfrac{\sqrt{\overline{v_i' v_i'}}}{\sqrt{V_i \cdot V_i}} = \sqrt{\dfrac{k}{K}}$

ECUACIONES DE REYNOLDS DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO INCOMPRESIBLE:

$$v_i = V_i + v_i' \;;\; p = P + p' \;;\; T = \overline{T} + T'$$

- Ecuación de la CONTINUIDAD:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \to \text{tomando valores medios: } \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{V_i + v_i'})}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \cancel{\frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_i}}^{\,0} = 0$$

Por tanto, ecuación de la continuidad es la misma para valores medios que para valores instantáneos: $\boxed{\dfrac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0}$

- Ecuación de la CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}')$$

Promediando: $\dfrac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} = \dfrac{\partial V_i}{\partial t}$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \cancel{\frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i}}^{\,0}$$

$$\tau_{ij}' = 2\mu\gamma_{ij} + \left(\mu_v - \tfrac{2}{3}\mu\right)\cancel{\nabla\cdot\vec{v}}^{\,0 \text{ (incompresible)}}\delta_{ij}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\hookrightarrow \tau_{ij}' = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \to \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \hookrightarrow \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\cancel{\frac{\partial v_j}{\partial x_j}}\right)$$

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(V_i + v_i')(V_j + v_j')} = V_iV_j + \cancel{V_i\overline{v_j'}}^{\,0} + \cancel{\overline{v_i'}V_j}^{\,0} + \overline{v_i' v_j'} = V_iV_j + \overline{v_i' v_j'}$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (V_iV_j)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \left(\overline{v_i'v_j'}\right)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (V_iV_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho\overline{v_i'v_j'}\right)}$$

$-\rho\overline{v_i'v_j'}$ → modifican los esfuerzos viscosos $\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ ⇒ esfuerzos aparentes de Reynolds

↳ nuevas incógnitas en las ecuaciones para determinar las magnitudes medias.

• Ecuación de la ENERGÍA:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \frac{\partial (v_iT)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

Promediando: $\overline{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$; $\overline{\frac{\partial T}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}$

$$\overline{\frac{\partial (v_iT)}{\partial x_i}} \Rightarrow \overline{v_iT} = \overline{(V_i+v_i')(\overline{T}+T')} = V_i\overline{T} + \overline{v_i'T'} \Rightarrow \frac{\partial (V_i\overline{T})}{\partial x_i} + \frac{\partial \left(\overline{v_i'T'}\right)}{\partial x_i}$$

$$\rho c \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \rho c \frac{\partial (V_i\overline{T})}{\partial x_i} + \rho c \frac{\partial \left(\overline{v_i'T'}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}\right)$$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \rho c \frac{\partial (V_i\overline{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - \rho c \overline{v_i'T'}\right)}$$

$-\rho c\overline{v_i'T'}$ → modifican los términos convectivos $k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}$ ⇒ flujo de calor aparente de Reynolds

↳ nuevas incógnitas en las ecuaciones para determinar las magnitudes medias

Problemas: $\left\{ \begin{array}{l} \overline{v_i'v_j'} \\ \overline{v_i'T'} \end{array} \right.$ ⇒ Dado uno, tras hipótesis, se puede obtener el otro

⊛ Problema del cierre de ecuaciones: dar ecuaciones suficientes para obtener los parámetros extra y poder integrar las ecuaciones.

• Ecuación de la energía cinética media y turbulenta:

Término viscoso: $\tau'_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\cdot \cancel{\nabla\vec{v}}^{\,0\text{ (incompresible)}}\cdot\delta_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

$\hookrightarrow \gamma_{ij} \equiv S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

$$\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \; ; \; \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \rho\overline{v'_i v'_j} \rightarrow$$

Caso estacionario (Cant. de mov.) $\rightarrow \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau'_{ij}) \Rightarrow$ razón: fácil de escribir la ecuación de la energía cinética.

→ Multiplicando la ecuación de la cantidad de movimiento por V_i (porque i es la única variable muda):

$$\underbrace{\rho V_j \frac{\partial(V_i\cdot V_i/2)}{\partial x_j}} = \underbrace{V_i\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}} \Rightarrow V_i\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(\tau'_{ij}V_i)}{\partial x_j} - \underbrace{\tau'_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{*}$$

→ i se repite y j también

* Parte de la energía se pasa a movimiento turbulento.

$$* \tau'_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \tau'_{ij}S_{ij}$$

$$\hookrightarrow \tau'_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \tau'_{ji}\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \tau'_{ij}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) = 2\tau'_{ij}S_{ij}$$

Tensor es simétrico $\tau'_{ij} \equiv \tau'_{ji}$

$$\rho V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial(\tau'_{ij}\cdot V_i)}{\partial x_j} - \tau'_{ij}S_{ij} \; ; \; \tau'_{ij}S_{ij} = -p\cancel{\delta_{ij}}^{\,0}S_{ij} + \underbrace{2\mu S_{ij}S_{ij}} - \rho\overline{v'_i v'_j}S_{ij}$$

función de disipación viscosa de Rayleigh $\equiv \Phi_v$

• Ecuación para la energía cinética del mov. medio:

$$\boxed{\rho V_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial(V_i\tau'_{ij})}{\partial x_j} + \rho\overline{v'_i v'_j}S_{ij} - \Phi_v}$$

• Ecuación de la energía cinética turbulenta: promediando la ecuación de la energía cinética instantánea y restándole la energía cinética del movimiento medio.

$$\boxed{\rho V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\overline{p'v'_i} - \frac{1}{2}\rho\overline{v'_i v'_j v'_j} + 2\mu\overline{v'_j s'_{ij}}\right) - \rho\overline{v'_i v'_j}S_{ij} - 2\mu\overline{s'_{ij}s'_{ij}}}$$

con $s'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i}\right)$

↳ traspaso de energía desde la corriente media $-(-\rho\overline{v'_i v'_j}S_{ij})$ a los torbellinos de las escalas intermedias $+(-\rho\overline{v'_i v'_j}S_{ij})$

Esta energía es del orden de $\sim \rho\varepsilon \sim \rho\, V\cdot V\cdot\frac{V}{L}$

Viscosidad turbulenta.

$$-\overline{v_i'v_j'} = 2\nu_T S_{ij} = \nu_T \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

• Para la evaluación del flujo de calor turbulento: $-\overline{T'v_i'} = \alpha_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}$

↳ Ecuación de cant. de mov. queda:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial (V_iV_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \overline{v_i'v_j'}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right]$$

$\nu_T \gg \nu$

↳ Ecuación de la energía:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial (V_i\overline{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - \overline{v_i'T'}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\alpha+\alpha_T)\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}\right]$$

↳ difusitividad térmica turbulenta

Número de Prandtl turbulento: $Pr_T = \nu_T/\alpha_T$ → en la práctica ~ 1 (se coge $=1$) $\Rightarrow \alpha_T \simeq \nu_T$

Tanto ν_T como α_T tienen dimensiones de velocidad por longitud.

↳ Se trata de definir la velocidad y longitud apropiadas al movimiento turbulento:

$$\nu_T = C_1 \times [V] \times [L] \Rightarrow \alpha_T$$

- HIPÓTESIS DE BOUSSINESQ:

$$-\overline{v_i'v_j'} = \nu_T S_{ij} - \underbrace{\frac{2}{3}k\delta_{ij}}_{}$$

añadido → porque el primer término vale cero (?) para el caso de los líquidos.

- TEORÍA DEL CAMINO DE MEZCLA DE PRANDTL:

Prandtl visualiza el transporte turbulento en flujos de cortadura simple como elementos (torbellinos) que mantienen la cantidad de movimiento del fluido durante una distancia de mezcla l_m en la dirección de la cortadura.

La fluctuación de velocidad asociada a estos torbellinos, v_m, se mide de las diferencias de velocidad del flujo medio.

Para un flujo casi unidireccional en la dirección x con cortadura en la dirección y: $\nu_T \sim l_m \cdot v_m \sim l_m^2 \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \Rightarrow \nu_T = l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right|$ $\left(v_m \sim l_m \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|\right)$

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{dU}{dy} = l^2 \frac{dU}{dy}\left|\frac{dU}{dy}\right|$$ → La longitud l depende del problema.

- Para flujos cercanos a una pared suele ser la distancia a la pared.
- Para corrientes libres es el diámetro del chorro o la estela.

→ La hipótesis de semejanza de Kármán proporciona una estimación de la longitud l en la forma:

$$l = K\left|\frac{dU/dy}{d^2U/dy^2}\right|, \text{ donde } K \approx 0{,}41$$

- MODELOS DE TURBULENCIA:

- **Modelos algebraicos**: los utilizados en la práctica → la viscosidad turbulenta se modeliza mediante las ecuaciones algebraicas → no es necesario integrar ninguna ecuación adicional

  ↳ basados en la teoría de mezcla de Prandtl

  ⇒ uno de los más utilizados: Baldwing - Lomax

- **Modelos de una ecuación**: se caracterizan porque la velocidad típica es $\sqrt{k}$, la velocidad asociada a la energía cinética turbulenta.

  $\nu_T = l\sqrt{k}$ y la longitud l se toma análoga a la de los modelos algebraicos.

  ↳ se denominan de una ecuación porque es necesario integrar una ecuación diferencial adicional → que proporciona k.

- **Modelos de dos ecuaciones**: es el más popular denominado modelo $k-\varepsilon$

$$v_m = \sqrt{k}$$

$$l_m \to \varepsilon = \frac{v_m^3}{l_m} \to l_m = \frac{v_m^3}{\varepsilon} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = l_m$$

$$\nu_T = l_m \cdot v_m = \frac{k^{1/2} \cdot k^{3/2}}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\nu_T = C \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}}$$

Estos modelos se caracterizan porque es necesario integrar dos ecuaciones diferenciales más {una para la energía turbulenta: k; una para la disipación: ε

⇒ Los modelos anteriores suponen, en cada punto e instante, un valor único de ν_T ⇒ presupone la no existencia de direcciones privilegiadas → válido para la viscosidad molecular, pero no siempre en los movimientos turbulentos. ⇒

⇒ Consecuencia; se empiezan a utilizar otros tipos de modelos que definen un valor diferente de ν_T para cada esfuerzo.

- **Simulación directa**: no sería necesaria ninguna hipótesis sobre la turbulencia, pero eso implicaría llegar a tamaños como los de la escala de Kolmogorov ⇒ impracticable todavía en aplicaciones industriales.

- **Modelos "Large Eddy Simulation" (LES)**: representan un estado intermedio entre la simulación directa y los modelos clásicos de turbulencia. Se resuelve exactamente hasta las escalas más pequeñas que es posible numéricamente (las más afectadas por las condiciones de contorno) y se hacen hipótesis sobre las escalas menores.

- Modelos de Turbulencia:

- Modelos algebraicos: los utilizados en la práctica → la viscosidad turbulenta se modeliza mediante las ecuaciones algebraicas → no se necesita integrar ecuaciones diferenciales
  basados en la teoría de la mezcla de Prandtl

  → uno de los más utilizados: Baldwin-Lomax

- Modelos de una ecuación: se caracterizan porque la velocidad típica es $\sqrt{k}$, la velocidad asociada a la energía cinética turbulenta.

  $\nu_T = C\sqrt{k}\,\ell$ y la longitud ℓ se tiene, como lo que los modelos algebraicos.

  Se denominan de una ecuación porque es necesario integrar una ecuación diferencial adicional y que proporciona k.

- Modelos de dos ecuaciones: es el más popular el conocido modelo $k-\varepsilon$

$$\vartheta_m = \sqrt{k}$$

$$\ell_m \cdot \varepsilon = \frac{\vartheta_m^3}{\ell_m} \to \ell_m = \frac{\vartheta_m^3}{\varepsilon} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = \ell_m$$

$$\nu_T = \ell_m \vartheta_m = \frac{k^{1/2} k^{3/2}}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\nu_T = C\frac{k^2}{\varepsilon}}$$

  Estos modelos se caracterizan porque es necesario integrar dos ecuaciones diferenciales más (una para la energía turbulenta k, una para la disipación ε)

- Los modelos anteriores suponen, en cada punto, la existencia de un valor único de ν_T → presuponen la no existencia de direcciones privilegiadas → válido para la viscosidad molecular pero no siempre en los movimientos turbulentos.
  → en consecuencia se empiezan a utilizar otros tipos de modelos que definen un valor diferente de ν_T para cada esfuerzo.

- Simulación directa: no sería necesario ninguna hipótesis sobre la turbulencia, pero es complicado llegar a resolver hasta las de la escala de Kolmogorov → es impracticable todavía en aplicaciones industriales.

- Modelos "Large Eddy Simulation" (LES): representan un estado intermedio entre la simulación directa y los modelos clásicos de turbulencia. Se resuelve exactamente hasta las escalas más pequeñas que es posible numéricamente (las más afectadas por las condiciones de contorno) y se hacen hipótesis sobre las escalas menores.

MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 5. FLUJO ESBELTO TURBULENTO

- Caso bidimensional estacionario de un líquido para el flujo medio en el que las variables son $U(x,y)$, $V(x,y)$ y $P(x,y)$.
- Flujo esbelto: longitud característica en la dirección del eje x, $L \gg \delta$, longitud característica en la dirección del eje y.

- Ecuación de la continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} i=1 \to x_1 = x,\ v_1 = U \\ i=2 \to x_2 = y,\ v_2 = V \end{array}\right\} \to \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0} \qquad \frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \to V \sim U\left(\frac{\delta}{L}\right) \ll U$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento según el eje x:

$$\boxed{V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{v_i' v_j'}\right)}$$

$\underline{\underline{i=1}}$: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{v_i'v_j'}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)$

$$\underbrace{U\frac{\partial U}{\partial x}}_{U^2/L} + \underbrace{V\frac{\partial U}{\partial y}}_{\frac{V\cdot U}{\delta} \sim \frac{U^2}{L}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}}_{\nu\frac{U}{L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{\nu\frac{U}{\delta^2}}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{u'^2}\right)}}_{\frac{k}{L}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)}_{\frac{k}{\delta}}$$

$$U^2/L \sim \frac{V\cdot U}{\delta} \sim \frac{U^2}{L} \qquad \nu\frac{U}{L^2} \ll \nu\frac{U}{\delta^2} \qquad \frac{k}{L} \ll \frac{k}{\delta}$$

→ Para que los términos turbulentos cuenten:

$$\frac{k}{\delta} \sim \frac{U^2}{L} \to \left[k \sim U^2 \cdot \left(\frac{\delta}{L}\right) \ll U^2\right]$$

$$\hookrightarrow U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)$$

$$\frac{\Delta_L P}{\rho \cancel{L}} \sim \frac{U^2}{\cancel{L}} \to \underline{\underline{\Delta_L P \sim \rho U^2}}$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento según el eje y:

$$\underline{\underline{i=2}}:\ \underbrace{U\frac{\partial V}{\partial x}}_{\frac{UV}{L}} + \underbrace{V\frac{\partial V}{\partial y}}_{\frac{V^2}{\delta}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}}_{\nu\frac{V}{L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nu\frac{V}{\delta^2}}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{u'v'}\right)}}_{\frac{k}{L}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{v'^2}\right)}_{\frac{k}{\delta}}$$

$$\frac{UV}{L} \sim \frac{V^2}{\delta} \sim \frac{V^2}{\delta} \qquad \nu\frac{V}{L^2} \ll \nu\frac{V}{\delta^2} \qquad \frac{k}{L} \ll \frac{k}{\delta}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(P+\rho\overline{v'^2}\right)}=\underbrace{U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}}-\nu\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta_\delta(P+\rho\overline{v'^2})}{\cancel{\delta}} \sim \frac{V^2}{\cancel{\delta}} \rightarrow \underline{\Delta_\delta(P+\rho\overline{v'^2})\sim\rho V^2}$$

$$\frac{\Delta_\delta(P+\rho\overline{v'^2})}{\Delta_L P}\sim\frac{\cancel{\rho}V^2}{\cancel{\rho}U^2}\sim\left(\frac{V}{U}\right)^2\sim\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1$$

↳ En primera aproximación: $\frac{\partial}{\partial y}(P+\rho\overline{v'^2})\approx 0$ (simplifica mucho el problema)

→ Integrando respecto de y: $\underline{P+\rho\overline{v'^2}=cte=P_e(x)}$ ← buscamos fuera de la región turbulenta

$$\hookrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{dP_e}{dx}-\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial x}$$

- Por tanto, la ecuación de cantidad de movimiento según el eje x queda:

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_e}{dx}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial x}}}_{\frac{k}{L}}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)}_{\frac{k}{\delta}}$$

$$\frac{k}{L} \ll \frac{k}{\delta}$$

$$\boxed{U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_e}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)}$$

Turbulencia libre

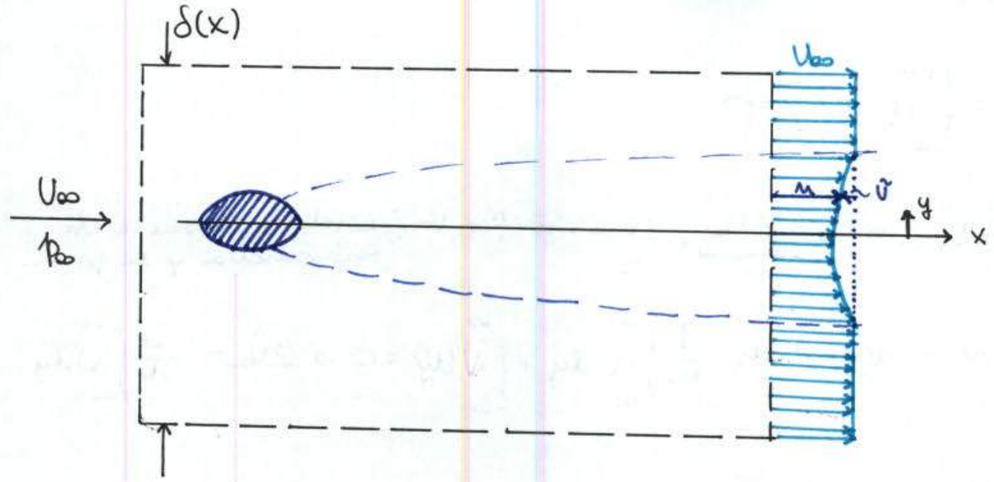
- Presión exterior es constante: $\frac{dP_e}{dx}\approx 0$
- Ausencia de paredes (salvo cerca de cuerpos): término viscoso pequeño frente al turbulento.

→ Ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\\&U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)\end{aligned}}$$

ESTELA (BIDIMENSIONAL) LEJANA

El término estela se aplica a toda región de vorticidad no nula en el lado corriente abajo de un cuerpo inmerso en una corriente uniforme.



- En la estela de un cuerpo simétrico, la velocidad media difiere de la corriente uniforme exterior a la estela, U_∞, en una cantidad $\tilde{U}$ muy pequeña frente a U_∞:

$U = U_\infty + \tilde{U}$

- Las velocidades de fluctuación turbulenta son también del orden de $\tilde{U}$ (de resultados experimentales, típico en estudio de movimientos turbulentos):

$\overline{u'v'} \sim \tilde{U}^2$

- Ecuación de la continuidad:

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0} \rightarrow V \sim \tilde{U}\left(\frac{\delta(x)}{x}\right) << \tilde{U}$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$(U_\infty + \tilde{U})\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + V\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})$$

$$\underbrace{U_\infty\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}}_{\frac{U_\infty \tilde{U}}{x}} + \underbrace{\tilde{U}\cancel{\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}}}_{} + \underbrace{V\cancel{\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}}}_{} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}^{\rightarrow \sim \tilde{U}^2/\delta(x)}$$

$$\frac{U_\infty \tilde{U}}{x} >> \left(\frac{\tilde{U}^2}{x} \sim \frac{V\tilde{U}}{\delta(x)} \sim \frac{\tilde{U}^2}{x}\right), \text{ ya que } \frac{U_\infty \cancel{\tilde{U}}/\cancel{x}}{\tilde{U}^{\cancel{2}}/\cancel{x}} \sim \frac{U_\infty}{\tilde{U}} >> 1$$

$$\boxed{U_\infty\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}$$

→ tienen que ser del mismo orden:

$$U_\infty\frac{\tilde{U}}{x} \sim \frac{\tilde{U}^2}{\delta(x)} \rightarrow \frac{\delta(x)}{x} \sim \frac{\tilde{U}}{U_\infty}$$

→ Multiplicándolo por dy e integrando a través de la estela:

$$U_\infty \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{U}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} d(-\overline{u'v'}) = 0$$

↑ fluctuaciones fuera de la estela $(-\infty, +\infty)$ son nulas.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{U}\,dy = cte = -I$$

- ¿Qué es I?

I es la resistencia por unidad de envergadura del cuerpo.

→ Expresión completa sin linealizar:

$$\frac{\partial(UU)}{\partial x}+\frac{\partial(UV)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}UU\,dy+\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}d(UV)}=\int_{-\infty}^{+\infty}d(-\overline{u'v'})=0$$

$$(UV)_{\infty}-(UV)_{-\infty}=U_\infty\cdot\underbrace{2V_\infty}$$; ¿Qué significa V_∞? Estela se va haciendo más ancha y se frena.

↳ de la ecuación de continuidad: $\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}U\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}d(V)=0\rightarrow 2V_\infty=-\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}U\,dy$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}UU\,dy-\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}UU_\infty\,dy=0\rightarrow\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}U(U-U_\infty)\,dy=0$$

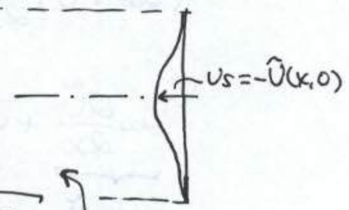
↳ $\int_{-\infty}^{\infty}U(U-U_\infty)\,dy=cte=-\frac{D}{\rho}$, donde D es la resistencia del cuerpo

Con $U=U_\infty+\tilde U$, $U_\infty\gg\tilde U$ } → $\int_{-\infty}^{\infty}(U_\infty+\tilde U)(\cancel{U_\infty}+\tilde U-\cancel{U_\infty})\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}(U_\infty\cdot\tilde U+\cancel{\tilde U^2})\,dy=U_\infty\int_{-\infty}^{\infty}\tilde U\,dy=-\frac{D}{\rho}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\tilde U\,dy=-\frac{D}{\rho U_\infty}=-I}$$

- Escalas de $\delta(x)$ y $\tilde U(x,0)$:

Resistencia → $\tilde U\cdot\delta(x)\sim I\rightarrow\tilde U\sim\frac{I}{\delta(x)}\rightarrow\tilde U(x,0)\sim\sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}\sim u_s$



Cant. de mov. → $\delta(x)\sim x\frac{\tilde U}{U_\infty}\sim x\cdot\frac{I/\delta(x)}{U_\infty}\rightarrow\delta(x)^2\sim\frac{Ix}{U_\infty}\rightarrow\delta(x)\sim\sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}$

Entonces:

$\delta(x)=a\sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}$, $u_s=b\sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}$ } donde a y b son dos constantes que hay que determinar

Se van a buscar soluciones autosemejantes en la forma:
$\tilde U(x,0)=-u_s(x)\,f(\eta)$
$-\overline{u'v'}=u_s^2(x)\,g(\eta)$; con $\eta=\frac{y}{\delta(x)}$

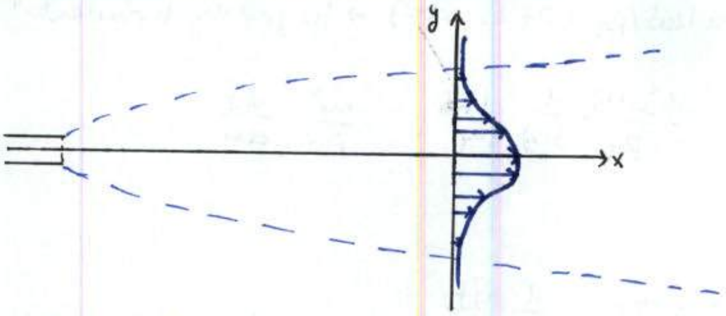
↳ Introduciendo estos términos en la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$U_\infty\frac{\partial\tilde U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'});\quad\frac{\partial\tilde U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-u_s f(\eta))=-\frac{du_s}{dx}\cdot f(\eta)-u_s\frac{df(\eta)}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{\partial x}$$

$$\frac{du_s}{dx}=b\sqrt{IU_\infty}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot x}\right)=-\frac{1}{2}\,u_s\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\ //\ \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y/\delta(x))=y\sqrt{\frac{U_\infty}{I}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}\,x}=-\frac{1}{2}\frac{\eta}{x}$$

$$\frac{\partial\tilde U}{\partial x}=\frac{1}{2}u_s\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f(\eta)+\frac{u_s}{2}\frac{\eta}{x}\frac{df}{d\eta}$$

CHORRO (BIDIMENSIONAL) LEJANO



- Ecuación de la continuidad:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0} \rightarrow V\sim U\frac{\delta}{x}$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\boxed{U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)}$$

$$\frac{U^2}{x}\sim V\frac{U}{\delta}\sim\frac{U^2}{x}$$

$$\frac{U^2}{x}\sim\frac{-\overline{u'v'}}{\delta} \Rightarrow -\overline{u'v'}\sim U^2\frac{\delta}{x}\ll U^2$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial x}+\frac{\partial(UV)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right) \rightarrow$$ multiplicando por dy e integrando:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}U^2dy+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}d(UV)}_{0\,(U(\pm\infty)=0)}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}d(-\overline{u'v'})}_{0\text{ (no hay turbulencia en } y=\pm\infty)} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}U^2dy=0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}U^2dy=cte=m$$

↳ cantidad de movimiento por unidad de masa y unidad de longitud.

↳ $U^2\delta\sim m \rightarrow [m]=[V^2\cdot L]$

↳ $\delta=\delta(m,x) \rightarrow \underline{\delta/x=cte}$

U típica es la U del centro: $U(x,0)=U_{máx}=f(x,m) \rightarrow \underline{\frac{U_{máx}}{\sqrt{m/x}}=cte}$

Buscamos soluciones de semejanza de la forma:

$\delta=ax$; $U_{máx}=b'\sqrt{m/x}$

↳ a debe de ser ≪1 para que se cumple que el flujo es turbulento, habrá que comprobarlo una vez resuelto el problema.

Para el segundo miembro hay que emplear un modelo de turbulencia:

→ Utilizando la viscosidad turbulenta: $\nu_T = u_s\delta/R_T$ (R_T es cte) → "Reynolds turbulento"

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \frac{u_s\delta}{R_T}\left(-u_s \frac{df}{d\eta}\cdot \underbrace{\frac{d\eta}{dy}}_{1/\delta(x)}\right) = -\frac{u_s^2 \cancel{\delta(x)}}{R_T}\frac{1}{\cancel{\delta(x)}}\cdot\frac{df}{d\eta} = -\frac{u_s^2}{R_T}\cdot\frac{df}{d\eta}$$

De la solución autosemejante:

$$-\overline{u'v'} = u_s^2(x)\cdot g(\eta) = -\frac{u_s^2(x)}{R_T}\cdot\frac{df}{d\eta} \rightarrow \underline{g(\eta) = -\frac{1}{R_T}\frac{df}{d\eta}}$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) = -\frac{u_s^2}{R_T}\cdot\frac{1}{\delta(x)}\cdot\frac{d^2f}{d\eta^2}}$$

La ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{1}{2}\frac{u_s U_\infty}{x}\left(f(\eta)+\eta\frac{df}{d\eta}\right) = -\frac{u_s^2}{R_T}\frac{1}{\delta(x)}\cdot\frac{d^2f}{d\eta^2} \rightarrow f(\eta)+\eta\frac{df(\eta)}{d\eta} = -\frac{2u_s}{U_\infty R_T}\cdot\frac{x}{\delta(x)}\cdot\frac{d^2f(\eta)}{d\eta^2}$$

$$\frac{2u_s}{U_\infty R_T}\cdot\frac{x}{\delta(x)} = \frac{2\cdot b\sqrt{I\cancel{U_\infty}/\cancel{x}}}{\cancel{U_\infty}\cdot R_T}\cdot\frac{\cancel{x}}{a\sqrt{I\cancel{x}/\cancel{U_\infty}}} = \boxed{\frac{2b}{aR_T} = 1} \rightarrow \text{por comodidad}$$

Entonces,

$$\boxed{f+\eta\frac{df}{d\eta}+\frac{d^2f}{d\eta^2}=0 \text{ ; con condiciones de contorno: } f(\infty)=f(-\infty)=0}$$

(porque $U=U_\infty$ en $\pm\infty$, entonces $\tilde{U}=0$)

↳ Solución: $\boxed{f(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{U}\,dy = -I \underset{\tilde{U}=-u_s f}{\Rightarrow} +u_s(x)\cdot\delta(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\eta)\,d\eta = +I$$

$$b\sqrt{\frac{I\cancel{U_\infty}}{\cancel{x}}}\cdot a\sqrt{\frac{\cancel{I}\cancel{x}}{\cancel{U_\infty}}}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\eta^2/2)\,d\eta}_{\sqrt{2\pi}} = \cancel{I} \Rightarrow \boxed{a\cdot b = 1/\sqrt{2\pi}}$$

Las relaciones $ab = 1/\sqrt{2\pi}$ y $\frac{2b}{aR_T}=1$ determinan a y b, ya que $R_T \simeq 12,5$ es un valor experimental $\Rightarrow \begin{cases} a = 0,25 \\ b = 1,58 \end{cases}$

↳ $\delta(x) = 0,25\sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}$

$u_s(x) = 1,58\sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}$

$\tilde{U}(x) = -1,58\sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y/\delta(x)\right)^2\right\}$

• Para obtener V → utilizar la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_s(x)\cdot\exp\{-\eta^2/2\}\right) = G(y,x)$$

↳ y una vez obtenido:

$$V = \int_0^y G(y,x)\,dy.$$

. Utilizando la función de corriente:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$[\psi] = [\underbrace{V}_{\sqrt{\mu/x}} \cdot L] \rightarrow \frac{\psi}{\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot x} = \frac{\psi}{\sqrt{\mu x}} = cte \rightarrow \psi = b\sqrt{\mu x} \cdot F(\eta)$$

con $\eta = y/\delta(x)$

$$U = b\sqrt{\mu x}\,\frac{dF(\eta)}{d\eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{1/\delta(x) = 1/ax} = \frac{b\sqrt{\mu x}}{ax}\frac{dF(\eta)}{d\eta} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot \frac{dF(\eta)}{d\eta} = U$$

$$U_{m\acute{a}x} = U(x,0) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0} \rightarrow b' = \underbrace{\frac{b}{a}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0}}$$

es un número: lo más sencillo es asignarle el valor de uno $\Rightarrow F'(0) = 1$

$$* \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{b}{a^2 x}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\,\frac{d^2F}{d\eta^2}$$

$$* \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot \frac{1}{x}\frac{dF(\eta)}{d\eta} + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{\partial x}\right) \quad ; \quad \eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{ax} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{y}{ax}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot \frac{1}{x}\frac{dF(\eta)}{d\eta} - \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{y}{ax}}_{\eta}\frac{d^2F}{d\eta^2} = -\frac{b}{ax}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{dF}{d\eta} + \eta\frac{d^2F}{d\eta^2}\right)$$

$$V = -\left\{\frac{1}{2}b\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot F(\eta) + b\sqrt{\mu x} \cdot \frac{dF}{d\eta}\underbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}_{\underbrace{\left(\frac{y}{ax}\right)}_{\eta}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}\right\} = -\left\{\frac{1}{2}b\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot F(\eta) - b\sqrt{\frac{\mu}{x}} \cdot \eta\frac{dF}{d\eta}\right\}$$

$$= b\sqrt{\frac{\mu}{x}}\left(-\frac{1}{2}F + \eta\frac{dF}{d\eta}\right)$$

$$\rightsquigarrow U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\,\frac{dF(\eta)}{d\eta} \cdot \left[-\frac{b}{ax}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{dF}{d\eta} + \eta\frac{d^2F}{d\eta^2}\right)\right] + b\sqrt{\frac{\mu}{x}}\left(-\frac{1}{2}F + \eta\frac{dF}{d\eta}\right) \cdot \frac{b}{a^2 x}\sqrt{\frac{\mu}{x}}\,\frac{d^2F}{d\eta^2} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\mu}{x^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + \cancel{\eta\frac{dF}{d\eta} \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2}}\right] + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\mu}{x^2}\left[-\frac{1}{2}F \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2} + \cancel{\eta\frac{dF}{d\eta} \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\mu}{x^2}\left[\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + F\frac{d^2F}{d\eta^2}\right]$$

→ Modelo de turbulencia:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow \nu_T \sim \delta(x) \cdot u_s(x) \rightarrow R_T = \frac{U_s(x)\delta(x)}{\nu_T} \rightarrow \nu_T = \frac{U_s(x)\delta(x)}{R_T} = \frac{\frac{b}{\cancel{a}}F'(0)\sqrt{\frac{\mu}{x}}\,\cancel{a}x}{R_T}$$

$u_s = U_{m\acute{a}x}$

$$u_s(x) = U_{m\acute{a}x} = U(x,0) = \underbrace{\frac{b}{a}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0}}_{b'}\sqrt{\frac{\mu}{x}} \quad ; \quad \delta(x) = ax$$

$$\nu_T = \frac{b\overbrace{F'(0)}^{=1}\sqrt{\mu x}}{R_T} \rightarrow -\overline{u'v'} = \frac{b}{R_T}\sqrt{\cancel{\mu x}} \cdot \frac{b}{a^2 x}\sqrt{\frac{\mu}{\cancel{x}}} \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2} = \frac{b^2 \mu}{a^2 R_T x}\,\frac{d^2F}{d\eta^2}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right) = \frac{b^2 \mu}{a^2 R_T x}\cdot\frac{1}{ax}\cdot\frac{d^3F}{d\eta^3}$$

$$\circledast \quad U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}}\frac{\cancel{\mu}}{\cancel{x^2}}\left[\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + F\frac{d^2F}{d\eta^2}\right] = \frac{\cancel{b^2\mu}}{\cancel{a^2}R_T\cancel{x}}\cdot\frac{1}{a\cancel{x}}\cdot\frac{d^3F}{d\eta^3}$$

$$\underbrace{\frac{2}{aR_T}}_{=1}\frac{d^3F}{d\eta^3} + \left[\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + F\frac{d^2F}{d\eta^2}\right] = 0 \rightarrow \boxed{\frac{2}{aR_T} = 1}$$

$$\frac{d^3F}{d\eta^3} + F\frac{d^2F}{d\eta^2} + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d}{d\eta}\left(F\frac{dF}{d\eta} + \frac{d^2F}{d\eta^2}\right) = 0} \rightarrow$$

C.C. $\begin{cases} \eta \to \infty: F'(\infty) = 0 \to \text{velocidad } U \text{ en el infinito } (y\to\infty) \text{ es nula} \\ \eta = 0: F(0) = 0 \to \text{eje es línea de corriente} \\ \quad\quad F''(0) = 0 \to \text{pendiente de la velocidad en el eje es nula} \end{cases}$

$\rightarrow$ Integrando una vez se tiene: $\int_0^\eta \frac{d}{d\eta}\left(F\,dF/d\eta + d^2F/d\eta^2\right) d\eta = 0 \rightarrow F\frac{dF}{d\eta} + \frac{d^2F}{d\eta^2} - \left(F\frac{dF}{d\eta} + \frac{d^2F}{d\eta^2}\right)_0$

$$\Rightarrow F\frac{dF}{d\eta} + \frac{d^2F}{d\eta^2} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{F^2}{2} + \frac{dF}{d\eta}\right) = 0} \rightarrow$$

Integrando de nuevo: $\int_0^\eta \frac{d}{d\eta}\left(\frac{F^2}{2} + \frac{dF}{d\eta}\right)d\eta = 0 \rightarrow$

C.C. $\begin{cases} \eta = 0: F(0) = 0 \\ \quad\quad F'(0) = 1 \end{cases}$ ↳ se ha establecido antes por conveniencia.

$$\rightarrow \frac{F^2}{2} + \frac{dF}{d\eta} - \left(\frac{F^2}{2} + \frac{dF}{d\eta}\right)_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F^2}{2} + \frac{dF}{d\eta} = 1} \rightarrow \left(\frac{F}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}\,\frac{d(F/\sqrt{2})}{d\eta} = 1 \ ; \quad \xi = F/\sqrt{2}$$

$$\xi^2 + \sqrt{2}\,\frac{d\xi}{d\eta} = 1 \rightarrow \sqrt{2}\,\frac{d\xi}{d\eta} = 1 - \xi^2 \rightarrow \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,d\eta$$

$$\frac{1}{1-\xi^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right) \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^\xi \frac{d\xi}{1+\xi} + \frac{1}{2}\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\eta d\eta \rightarrow \ln(1+\xi) - \ln(1-\xi) = \sqrt{2}\,\eta + \cancel{C}$$

$$\ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \sqrt{2}\,\eta \rightarrow \frac{1+\xi}{1-\xi} = e^{\sqrt{2}\eta} \underset{\xi = F/\sqrt{2}}{\rightarrow} \frac{1+F/\sqrt{2}}{1-F/\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\eta} \rightarrow 1 + F/\sqrt{2} = e^{\sqrt{2}\eta} - \frac{F e^{\sqrt{2}\eta}}{\sqrt{2}}$$

$$1 - e^{\sqrt{2}\eta} = -\left(\frac{F}{\sqrt{2}} + \frac{F e^{\sqrt{2}\eta}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{F}{\sqrt{2}}\left(1 + e^{\sqrt{2}\eta}\right) \rightarrow e^{\sqrt{2}\eta} - 1 = \frac{F}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}\eta} + 1\right)$$

$$F(\eta) = \sqrt{2}\left(\frac{e^{\eta\sqrt{2}} - 1}{e^{\eta\sqrt{2}} + 1}\right) \quad \left\{ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x/e^{-x} - 1}{e^x/e^{-x} + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right.$$

$$2x = \sqrt{2}\,\eta \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta = \eta/\sqrt{2} \rightarrow (e^{\eta\sqrt{2}} - 1)/(e^{\eta\sqrt{2}} + 1) = \tanh(\eta/\sqrt{2})$$

Entonces: $F(y) = \sqrt{2}\tanh(y/\sqrt{2})$

$$F'(y) = \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{senh}^2(y/\sqrt{2}) + \cosh^2(y/\sqrt{2})}{\cosh^2(y/\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} = \operatorname{sech}^2(y/\sqrt{2})$$

$$= \frac{4}{\left(e^{y/\sqrt{2}} + e^{-y/\sqrt{2}}\right)^2}$$

$a = \dfrac{2}{R_T} \approx 0{,}078$

$\uparrow$

$R_T \approx 25{,}7$

• Por otro lado, para obtener b:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = m \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2}{a^2}\frac{m}{\cancel{x}} \cdot \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \cdot \frac{\delta(x)\, dy}{\cancel{ax}} = \cancel{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 dy = \frac{a}{b^2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(y/\sqrt{2})\, dy = \frac{a}{b^2} \rightarrow \sqrt{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(x)\, dx}_{\text{matlab: } = 4/3} = \frac{a}{b^2}$$

$x = y/\sqrt{2}$

$dx = dy/\sqrt{2} \rightarrow dy = \sqrt{2}\, dx$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot 4}{3} = \frac{a}{b^2} \rightarrow b \approx 0{,}203$$

En resumen se tiene:

$$\begin{cases} \delta(x) \approx 0{,}078\, x \\ u_s(x) = U(x,0) \approx 2{,}60\sqrt{\dfrac{m}{x}} \\ \psi \approx 0{,}203\sqrt{mx} \cdot F(y) \end{cases}$$

MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 6. FLUJO TURBULENTO EN CONDUCTOS

* Tubo infinitamente largo de sección circular y radio R, por el que discurre un líquido de densidad ρ y viscosidad μ en régimen turbulento.

* Campo de velocidades: $\begin{cases} \text{- eje } x: U+u' \\ \text{- eje } r: v_r' \\ \text{- eje } \theta: v_\theta' \end{cases}$ → a velocidad media U en la dirección del eje x se le superponen las velocidades de agitación turbulenta u', v_r', v_θ'

* Movimiento en la dirección del eje x → unidireccional para los valores medios
  ↳ componentes V_r y V_θ de la velocidad media son nulas $U \neq 0; V_r = V_\theta = 0$
  y además u', v_r', y v_θ' son independientes de x. $u', v_r', v_\theta' \neq 0$ pero son solo funciones de y

  Los valores medios de la velocidad tampoco dependen de θ y $\overline{v_r' v_\theta'} = 0 \Rightarrow \overline{u_i' u_j'} = f(r)$ → no depende de θ

• Ecuaciones que determinan el movimiento:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (rU)}{\partial x} = 0 \Rightarrow U = U(r) & (1) \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r\overline{u'v_r'})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \dfrac{\partial U}{\partial r}\right) = 0 & (2) \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r\overline{v_r'^2})}{\partial r} + \dfrac{\overline{v_\theta'^2}}{r} = 0 & (3) \end{cases}$$

→ Multiplicando esta última ecuación por dr e integrándola entre 0 y r:

$$\int_0^r -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\cdot dr + \int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[-r\overline{v_r'^2}\right] dr + \int_0^r \frac{\overline{v_\theta'^2}}{r} dr = 0$$

$$-\frac{P(x,r)}{\rho} + \frac{P_0(x)}{\rho} + \int_0^r \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-r\overline{v_r'^2}) + \overline{v_\theta'^2}\right] dr = 0$$

$$-\frac{p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\Phi(r) = -\frac{1}{\rho}P_0(x) \rightarrow P(x,r) = P_0(x) + \Phi(r)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial P(x,r)}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx}}$$

Llevando esto a la ecuación (2):

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx} - \frac{1}{r}\frac{d(r\overline{u'v_r'})}{dr} + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

(tanto U como $\overline{u'v_r'}$ no dependen más que de r)

Integrar respecto a r:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}\int_0^r r\,dr + \int_0^r d(-r\overline{u'v_r'}) + \int_0^r d\left(\nu r\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

$$-\frac{r^2}{2\rho}\frac{dp_0}{dx} - \cancel{r}\overline{u'v'_r} + \nu\cancel{r}\frac{dU}{dr} = 0$$

Particularizando para $r=R$:

$$-\frac{R}{2\rho}\frac{dp_0}{dx} - (\cancel{\overline{u'v'_r}})_R + \underbrace{\nu\left(\frac{dU}{dR}\right)_{r=R}}_{=-\frac{1}{\rho}\tau_p} = 0 \rightarrow -\frac{R}{2\cancel{\rho}}\frac{dp_0}{dx} = \frac{1}{\rho}\tau_p = \rho u_*^2 *$$

0 (no hay fluctuación)

coeficiente de fricción de Darcy

$$\tau_p = \rho u_*^2 = \frac{1}{2}C_f\rho U_0^2 = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 4C_f}$$

coeficiente de fricción

$$\boxed{U_0 = \frac{Q}{\pi R^2}}$$ $Q \rightarrow$ gasto volumétrico

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}$$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{2\rho}\frac{dp_0}{dx} = \frac{u_*^2}{R} \Rightarrow r\frac{u_*^2}{R} - \overline{u'v'_r} + \nu\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{r u_*^2}{R} - \overline{u'v'_r} + \nu\frac{dU}{dr} = 0$$

$U \sim U_0 \rightarrow U = U_0 \cdot f(y)$

$\overline{u'v'_r} \sim u_*^2 \rightarrow$ según muestra la experiencia

$\Rightarrow \overline{u'v'_r} = u_*^2\, g(y)$

Además utilizando la variable: $y = R - r$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Pared: } y=0\\ \text{Centro: } y=R\end{array}\right.$

$$\frac{r}{R} = 1 - y/R \;;\; dy = -dr$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{r}{R} - g + \frac{\nu}{u_*^2}U_0\frac{df}{dr}\right)\cancel{u_*^2} = 0 \rightarrow \boxed{1 - \frac{y}{R} - g - \left(\frac{\nu}{u_*^2}\frac{U_0}{R}\right)\frac{df}{d(y/R)} = 0}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de primer orden para determinar f ($f(0)=0$) pero, como en todos los movimientos turbulentos $\Rightarrow$ una incógnita más $\rightarrow$ Esfuerzos turbulentos g

será necesario recurrir a resultados experimentales para cerrar el problema.

Regiones del movimiento

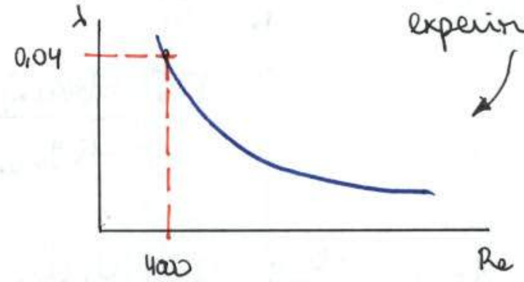
En un movimiento turbulento completamente desarrollado, el número de Reynolds multiplicado por el coeficiente de fricción también es grande.
↳ se demuestra experimentalmente

$$1-\frac{y}{R}-g-\underbrace{\left(\frac{\nu}{u_*^2}\,\frac{U_0}{R}\right)}\frac{df}{d(y/R)}=0$$

$$\frac{\nu}{U_0R}\cdot\left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2=\frac{1}{Re}\cdot\frac{8}{\lambda}\ll 1$$

$\frac{u_*}{U_0}=\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$

↳ $\left(\frac{u_*}{U_0}\right)^2\cdot\frac{U_0R}{\nu}=\frac{\lambda}{8}\cdot\frac{U_0R}{\nu}\gg 1$

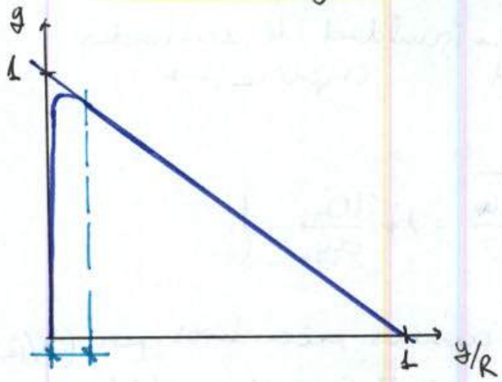


↳ caso "límite": $\frac{1}{Re}\cdot\frac{8}{\lambda}\simeq 0{,}05\ll 1$

Con esta hipótesis la ecuación se reduce: $\boxed{1-y/R-g=0}$

Cuando me separo de las paredes no cuentan para nada los efectos viscosos → NÚCLEO CENTRAL DEL TUBO: $g=1-y/R$ ⇒ ZONA DEL DEFECTO DE VELOCIDADES

$1-y/R-g=0$ cumple la condición en el centro del tubo ($y/R=1$) donde $g=0$, pero no la cumple en la pared ($y/R=0$) donde se obtiene $g=1$ y debe ser $g=0$ → allí se anulan las fluctuaciones de la velocidad.

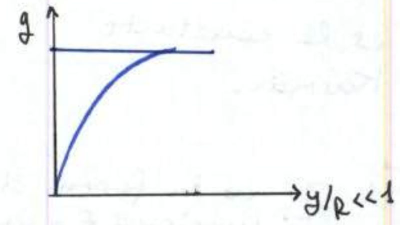


La solución falla a distancias y/R pequeñas (cerca de la pared) donde g sufre variaciones de orden unidad.

Para $\underbrace{y/R\sim 1}$ ⇒ $g\sim 1$ → $\overline{u'v_r'}\sim u_*^2\ll U_0^2$, ya que $\lambda\ll 1$

En esta zona los efectos viscosos no cuentan → las diferencias de velocidad U con respecto a U_0 van a ser del orden de las fluctuaciones de velocidad, $u'\sim v_r'\sim u_*\ll U_0$ de los torbellinos grandes que son arrastrados por la corriente.

En esta región → $f=\frac{U}{U_0}=1+\frac{u_*}{U_0}F(y/R)$
↳ ley de defectos de velocidades



Para valores $y/R\ll 1$ los efectos viscosos han de contar → en caso contrario no se conseguiría anular la velocidad en la pared.
Además la solución válida en el núcleo central: $g\to 1$ ⇒ fluctuaciones de velocidad siguen siendo del orden de u_* (como lo confirman los resultados experimentales).

$$\frac{r u_*^2}{R}-\overline{u'v_r'}+\nu\frac{dU}{dr}=0\;\rightarrow\; u_*^2\Big(1-\overset{y/R\ll 1}{\cancel{y/R}}\Big)-\underbrace{\overline{u'v_r'}}_{u_*^2 g}-\nu\frac{dU}{dy}=0$$

$$u_*^2 - u_*^2 g - \nu \frac{dU}{dy} = 0 \rightarrow U \sim u_*$$ (longitud característica ν/u_*) ya que los efectos viscosos deben contar en esta zona.

$$\hookrightarrow 1 - g - \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dy} = 0$$

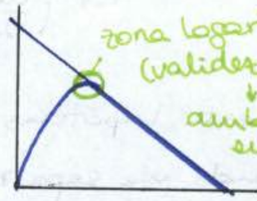
$$\hookrightarrow \frac{d(U/u_*)}{d(y/(\nu/u_*))} \Rightarrow \begin{cases} y_+ = \dfrac{y u_*}{\nu} \\ U_+ = U/u_* \end{cases}$$

$$1 - g - \frac{dU_+}{dy_+} = 0 \quad \begin{cases} U_+(0) = 0 \\ g(0) = 0 \rightarrow \text{en la pared no hay fluctuación} \end{cases}$$

Zona de validez común de las dos regiones:

- Solución exterior: $y/R \rightarrow 0 \rightarrow g \rightarrow 1$
- Solución interior: $y_+ \rightarrow \infty \rightarrow g \rightarrow 1$

coinciden



tanto las funciones como sus derivadas han de coincidir

$\rightarrow$ Supuesto conocido $g = g(y_+)$ tal que $g(0) = 0$ y $g(\infty) \rightarrow 1$:

$$U_+(y_+) = y_+ - \int_0^{y_+} g(y_+)\,dy_+$$

Regiones intermedias (i) $\begin{cases} U_i = U_0 + u_* F_i(y/R) \\ U_i = u_* \cdot U_{+i}(y_+) \end{cases}$ $\rightarrow$ igualdad de derivadas implica $\rightarrow$

$$\rightarrow \cancel{u_*}\frac{dF_i}{d(y/R)} = u_* \frac{dU_{+i}}{dy_+}\cdot\frac{dy_+}{d(y/R)} = u_*\frac{dU_{+i}}{dy_+}\cdot R\cdot\frac{u_*}{\nu} = \cancel{u_*}\frac{dU_{+i}}{dy_+}\cdot\frac{1}{\delta}$$

$$\hookrightarrow \frac{dF_i}{d(y/R)} = \frac{1}{\delta}\frac{dU_{+i}}{dy_+}$$ $\rightarrow$ Multiplicando ambos miembros por (y/R) y teniendo en cuenta que $y_+ = (y/R)/\delta \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{y}{R}\right)\frac{dF_i}{d(y/R)} = y_+\frac{dU_{+i}}{dy_+} = \frac{1}{K}$$; donde $K \approx 0{,}41$ es la constante universal de Kármán

$$\int dF_i = \frac{1}{K}\int\frac{d(y/R)}{(y/R)} \rightarrow \left[F_i = \frac{1}{K}\ln(y/R) + C_1\right]$$

$$\int dU_{+i} = \frac{1}{K}\int\frac{dy_+}{y_+} \rightarrow \left[U_{+i} = \frac{1}{K}\ln(y_+) + C_2\right]$$

$\rightarrow$ es la forma de las funciones F y U_+ en la región intermedia denominada logarítmica

Sustituyéndolas en las expresiones de las regiones intermedias:

$$U_0 + u_*\left(\frac{1}{K}\ln(y/R) + C_1\right) = u_*\left(\frac{1}{K}\ln(y_+) + C_2\right)$$

$$\frac{U_0}{u_*} = \frac{1}{K}\underbrace{\ln\left(\frac{y_+R}{y}\right)}_{\text{término importante}} + (C_2 - C_1)$$ $\begin{cases} C_2 - C_1 \approx 2 \text{ para tubos de sección circular} \\ C_2 \approx 5{,}5 \end{cases}$ $\rightarrow$ valores experimentales

$$\frac{y_+R}{y}=\frac{(\cancel{y}U_*/\nu)\cdot R}{\cancel{y}}=\frac{U_*R}{\nu}\cdot\frac{U_0}{U_0}=\frac{U_0R}{\nu}\cdot\left(\frac{U_*}{U_0}\right)=\frac{U_0R}{\nu}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

$$\frac{U_0}{U_*}=\frac{1}{K}\ln\left(\frac{U_0R}{\nu}\frac{U_*}{U_0}\right)+2$$

$$\hookrightarrow \boxed{\sqrt{\frac{8}{\lambda}}=\frac{1}{K}\ln\left(\frac{U_0R}{\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right)+2}$$

→ Esta ecuación determina el coeficiente de fricción de Darcy λ, para TUBOS LISOS, en función del número de Reynolds RU_0/ν y de dos constantes, la de Kármán K y C_2-C_1 (≈ 2)

*→ C_1: única información que proviene de lejos de la pared (cuenta poco)

Efecto de la rugosidad

Tubo rugoso: altura media de grano $h \ll R$ → problema cambia sólo en la zona interior.

De la ecuación: $u_*^2-\overline{u'v'_i}-\nu\frac{dU}{dy}=0$, válida para $y/R\ll 1$, la solución será de la forma:

(En el núcleo central seguimos teniendo la ley de defecto de velocidades independiente del nº de Reynolds y de la rugosidad relativa h/R)

$$U=f(\underset{[L]}{y},\underset{[V]}{u_*},\underset{[V\cdot L]}{\nu},h)$$

→ ANÁLISIS DIMENSIONAL: $\underset{U_+}{\frac{U}{U_*}}=\varphi\left(\underset{y_+}{\frac{yU_*}{\nu}},\frac{hU_*}{\nu}\right)$

$$U_+=\varphi\left(y_+,\frac{hU_*}{\nu}\right)$$

→ En la región de empalme se tendrá:

$$U_+=\frac{1}{K}\ln y_++\underbrace{C_3\left(\frac{U_*h}{\nu}\right)}$$

↳ la constante C_2 es ahora C_3 función de λ (a través de U_*) y del número de Reynolds basado en h.

• Ecuación en la región intermedia:

$$U_i=u_*U_+=U_0+u_*\left(\frac{1}{K}\ln(y/R)+C_1\right)$$

$$\hookrightarrow \sqrt{\frac{8}{\lambda}}=\frac{1}{K}\ln\left(\frac{RU_0}{\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right)+C_3\left(\frac{U_*h}{\nu}\right)-C_1$$

; C_3-C_1 es ahora función de λ, a través de u_*, y del número de Reynolds basado en h

$$\lambda=\Lambda\left(\frac{U_0R}{\nu},\frac{h}{R}\right)$$ → desconocido

↳ no se conoce $C_3\left(\frac{U_*h}{\nu}\right)$

Cuando $\boxed{\frac{\nu}{u_*}\gg h}$ → rugosidad muy pequeña comparada con el espesor de la capa viscosa → límite de los tubos lisos

↳ $C_3(u_*h/\nu)\to C_2$ porque $u_*h/\nu\to 0$

Cuando $\boxed{\frac{\nu}{u_*} \ll h}$ → no tiene sentido hablar de la capa viscosa de espesor ν/u_*, ya que no existe por ser $\nu/u_* h \ll 1$

↳ Reescribir la ecuación en la forma:

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{y}{h}, \frac{\nu/u_*}{h}\right) \Rightarrow U_+ = f\left(\xi, \frac{\nu/u_*}{h}\right)$$

$$\xi = y/h$$

$$\frac{dU}{dy} = u_* \frac{dU_+}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dy} = \frac{u_*}{h}\frac{dU_+}{d\xi} \rightarrow \cancel{u_*}\frac{dF}{d(y/R)} = \frac{\cancel{u_*}}{h}\frac{dU_+}{d\xi}$$

$$\left(\frac{y}{R}\right)\frac{dF}{d(y/R)} = \frac{y}{R}\cdot\frac{1}{h}\frac{dU_+}{d\xi} = \frac{y}{R}\frac{1}{h}\cdot\frac{dU_+}{dy_+}\cdot\underbrace{\frac{dy_+}{d\xi}}_{\frac{hu_*}{\nu}} = \frac{y}{\cancel{R}}\cdot\frac{1}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{h}Ru_*}{\nu}\frac{dU_+}{dy_+} = y_+\frac{dU_+}{dy_+} = \frac{1}{K}$$

En la región de empalme:

$$U_{+i} = \frac{1}{K}\ln\xi + C_4\left(\frac{\nu/u_*}{h}\right) \xrightarrow[\ll 1]{} \frac{1}{K}\ln\xi + C_4(0)$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{U_0}{u_*} = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{R}{h}\right) + C_4 - C_1 \;;\; \text{ya que } \ln\xi - \ln(y/R) = \ln\left(\frac{\xi}{y/R}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{y}}{h}\cdot\frac{R}{\cancel{y}}\right) = \ln\left(\frac{R}{h}\right)$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{R}{h}\right) + C_4(0) - C_1}$$; donde $C_4 - C_1 \simeq 4{,}92$ para tubos de sección circular.

↳ proporciona el coeficiente de fricción de Darcy en función de la rugosidad relativa h/R y no depende del número de Reynolds.
↳ caso correspondiente a movimientos a muy altos números de Reynolds (mov. turbulento completamente desarrollado)
↳ coeficiente de fricción no depende de la viscosidad pero sí depende de la rugosidad relativa.

Cuando $\boxed{\nu/u_* \sim h}$ → coeficiente de fricción es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa

$$\hookrightarrow \lambda = \Lambda\left(\frac{U_0 R}{\nu}, \frac{h}{R}\right)$$

Relación: $\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 4{,}92 - 2{,}46\ln\left(\frac{h}{R} + 3{,}28\frac{\nu}{U_0 R}\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\right)$ → similar a la de Colebrook

Coeficiente de fricción de Darcy, en función del número de Reynolds basado en el diámetro D del tubo ($Re = U_0 D/\nu$) y de la rugosidad relativa, $\varepsilon = h/D$, se da en el DIAGRAMA DE MOODY.

Aproximación explícita (aproxima bien el diagrama de Moody en el intervalo $3000 < Re < 10^8$:

$$\boxed{\lambda = 1{,}325\left\{\ln\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right\}^{-2}}$$ Ecuación de Swamee-Jain

Tubos de sección no circular

El valor del coeficiente de fricción va a ser el mismo que en el caso circular debido a que λ está determinado esencialmente de lo que ocurre cerca de la pared, y allí la pared puede considerarse localmente plana, perdiendo memoria de la forma de la sección.

↳ Es necesario utilizar una longitud que haga el papel del diámetro en el caso de los tubos circulares.

↳ longitud → diámetro equivalente: $D = 4r_h$

- $r_h \equiv$ radio hidráulico: cociente entre el área A de la sección ocupada por el fluido dividida por el perímetro mojado por el fluido ℓ

$$\boxed{r_h = A/\ell}$$

La utilización del diámetro equivalente $(D = 4A/\ell)$ se justifica al establecer el equilibrio de fuerzas en un tramo de tubo de longitud Δx y área A:

$$(p_1 - p_2)A = \tau_f \Delta x \,\ell \rightarrow \overbrace{\frac{A}{\ell}}^{r_h} \frac{(p_1-p_2)}{\Delta x} = \tau_f = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{p_1 - p_2}{\Delta x} = \frac{\lambda}{8}\,\frac{\rho U_0^2}{r_h}}$$

El radio hidráulico de una sección circular es la mitad del radio geométrico:

$$r_h = \frac{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi}\cancel{R}} = \frac{R}{2} \rightarrow \frac{p_1-p_2}{\Delta x} = \frac{\lambda}{8}\frac{\left(\frac{1}{2}\rho U_0^2\right)}{R} = -\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{\lambda}{8}\rho U_0^2 = -\frac{R}{2}\frac{dp}{dx}$$

que coincide con la expresión * de la página 80

- Caso del canal abierto:

$$r_h = \frac{A}{\ell} = \frac{ah}{a+2h} \quad ; \text{ si } a \gg h \rightarrow \underline{r_h \simeq h}$$

⇒ Para el diagrama de Moody hay que tomar el diámetro equivalente:

$$\boxed{D_{eq} = 4r_h = 4\frac{A}{\ell}}$$

Caso de flujo de gases

- **RÉGIMEN SUBSÓNICO:**

  El coeficiente de ficción de Darcy, λ, sería función de un parámetro más en el caso de los gases: el número de Mach. Sin embargo, la experiencia indica que esta dependencia es despreciable para este régimen

  ↳ se puede justificar por el hecho de que el coeficiente de fricción depende esencialmente de la estructura del flujo en las proximidades de la pared donde el número de Mach es bajo y su efecto es despreciable.

- **RÉGIMEN SUPERSÓNICO:**

  ↳ lo anterior no es válido

  ⇒ las ondas que se generan afectan a la zona de empalme cambiando la estructura del flujo con respecto al caso subsónico y haciéndola dependiente del número de Mach.

Perfil de velocidades cerca de la pared.

Modelo de turbulencia: $\overline{u'v'_r} = \nu_T \frac{dU}{dy}$; $\nu_T = [V] \times [L]$

Según el camino libre de Prandtl: $\nu_T \sim \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \Rightarrow$

$$\rightarrow \overline{u'v'_r} = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} = \ell^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = \ell_+^2 \left(\frac{dU_+}{dy_+} \right)^2 u_*^2$$

$$\ell \frac{dU}{dy} = \ell \frac{u_* \, d(U/u_*)}{\frac{\nu}{u_*} d\left(\frac{y u_*}{\nu}\right)} = \underbrace{\frac{\ell u_*}{\nu}}_{\ell_+} \cdot u_* \frac{dU_+}{dy_+}$$

$$g = \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = \left(\ell_+ \frac{dU_+}{dy_+} \right)^2 \rightarrow 1 - g - \frac{dU_+}{dy_+} = 0 \rightarrow 1 - \underbrace{\left(\ell_+ \frac{dU_+}{dy_+} \right)^2}_{\text{término turbulento}} - \underbrace{\frac{dU_+}{dy_+}}_{\text{término viscoso}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \left(\ell_+^2 \cdot \frac{dU_+}{dy_+} + 1 \right) \frac{dU_+}{dy_+} = 0}$$

- $y_+ \gg 1$ → nos metemos en la zona logarítmica : $y_+ \frac{dU_+}{dy_+} = \frac{1}{K}$ ⇝ $g = 1$

$$\Rightarrow g = 1 = \left(\ell_+ \frac{dU_+}{dy_+} \right)^2 \rightarrow \ell_+ \underbrace{\frac{dU_+}{dy_+}}_{1/(K y_+)} = 1 \rightarrow \ell_+ = y_+ \cdot K$$

→ $\boxed{y_+ \gg 1 : \ell_+ \rightarrow K y_+}$

■ $y_+ \ll 1 \rightarrow$ perfil de velocidad lineal: $u = \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} y = \frac{\tau_p}{\mu} y$

De la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\tau_p/\mu)}{\partial x} \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \underbrace{\frac{\partial(\tau_p/\mu)}{\partial x}}_{0} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

0 (porque u_* es constante)

$$\left.\begin{array}{l} u \sim y \\ v \sim y^3 \end{array}\right\} \rightarrow uv \sim y^4$$

$$\ell_+^2 \sim y_+^4 \rightarrow \left[\ell_+ \sim y_+^2\right]$$

Para modelizar ℓ_+ entonces es de la forma:

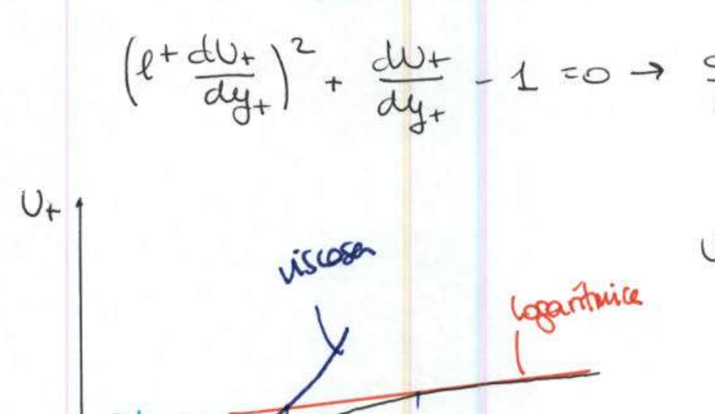
$$\ell_+ = \kappa y_+ \underbrace{\left[1 - \exp(-y_+/A)\right]}_{\text{FACTOR DE AMORTIGUACIÓN DE VAN DRIEST}} \rightarrow \begin{cases} y_+ \ll 1: \ell_+ \rightarrow \kappa y_+\left[1-(1-y_+/A)\right] \rightarrow \frac{\kappa}{A} y_+^2 \\ y_+ \gg 1: \ell_+ \rightarrow \kappa y_+[1-0] \rightarrow \kappa y_+ \end{cases}$$

$(A \simeq 26)$

Obtener el perfil de velocidades U_+:

$$\left(\ell^+ \frac{dU_+}{dy_+}\right)^2 + \frac{dU_+}{dy_+} - 1 = 0 \rightarrow \frac{dU_+}{dy_+} = \frac{2}{1+\sqrt{1+4\ell_+^2}} \; ; \; U_+(y_+=0) = 0$$

$$U_+ = \int_0^{y_+} \frac{2\,dy_+}{1+\sqrt{1+4[\ell_+(y_+)]^2}}$$



"Fotografía" de cómo es el flujo:

■ Zona del defecto de velocidades:

$$1 - y/R - g = 0 \rightarrow g = 1 - y/R$$

$$U = U_0 + u_* F(y/R) \; ; \; \nu_T = u_* \ell$$

$$\overline{u'v_r'} = \nu_T \frac{dU}{dy} = \nu_T \frac{u_*}{R} \frac{dF}{d(y/R)} = \frac{u_*^2}{R} \ell \frac{dF}{d(y/R)}$$

$$g = \boxed{\frac{\ell}{R} \frac{dF}{d(y/R)} = 1 - y/R}$$

Hay que tener una ℓ adecuada para que F cumpla la condición de empalme.

■ $y/_R \ll 1 \rightarrow \frac{\ell}{R}\frac{dF}{d(y/R)} = 1$ $\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dF}{d(y/R)} = \frac{R}{\ell} \\ \frac{dF}{d(y/R)} = \frac{1}{k}\cdot\frac{R}{y} \end{array}\right\} = \frac{\cancel{R}}{\ell} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\cancel{R}}{y} \rightarrow \ell = ky$

$\frac{y}{R}\frac{dF}{d(y/R)} = \frac{1}{k}$

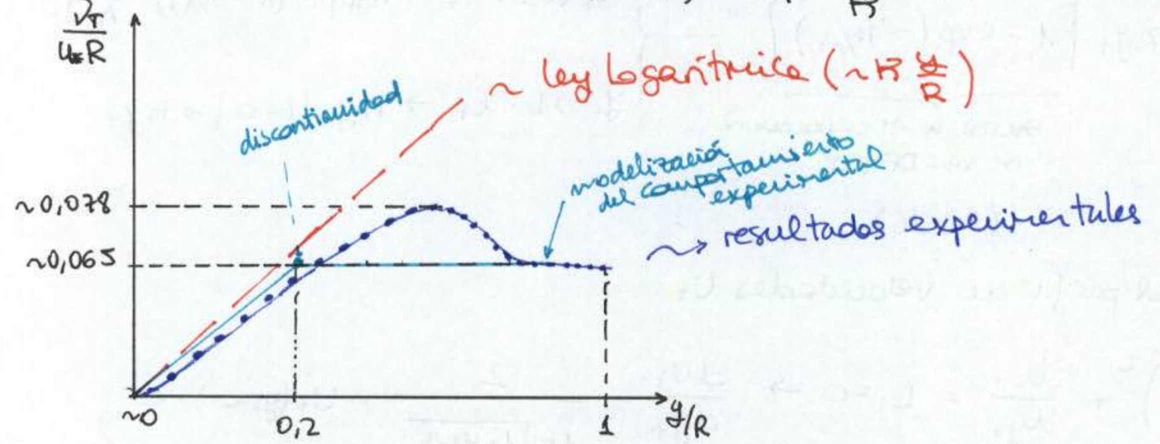
$y/_R \ll 1 : \ell \rightarrow ky$

$$k\frac{y}{R}\frac{dF}{d(y/R)} = 1 - y/_R \rightarrow k\,dF = \frac{1-\xi}{\xi}d\xi \rightarrow kF = \left[\ln\left(\frac{y}{R}\right) - \frac{y}{R}\right] + C$$

$\xi = y/_R$

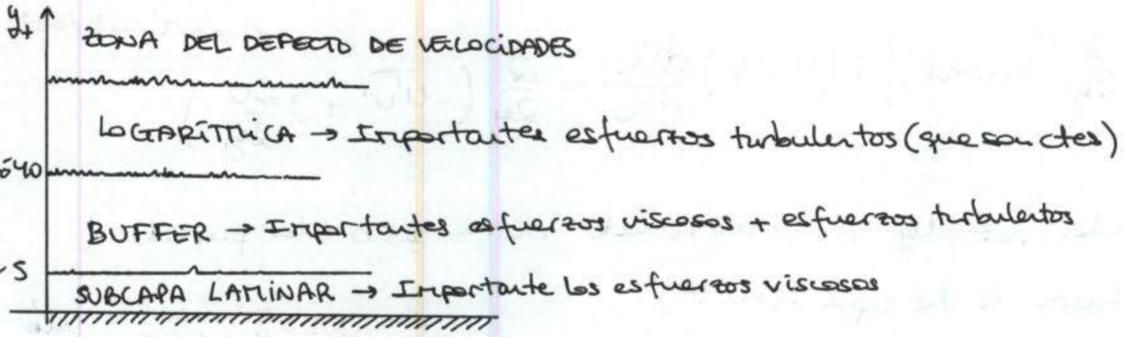
$$\hookrightarrow F = \frac{1}{k}\left[\ln(y/_R) - \frac{y}{R}\right] + \underset{\substack{\approx \\ 3{,}5}}{C_1}$$

F en el centro: $F(y/_R = 1) = C_1 - \frac{1}{k}$ ⇝ no es muy real.



MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

TEMA 7. CAPA LÍMITE TURBULENTA



- Estimación de $y/R \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re \approx 10^6 \\ \lambda \approx 0{,}012 \end{array} \right|$

$$\frac{U_*}{U_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \approx \frac{Re_{u_*}}{Re_{u_0}} = \frac{U_* R/\nu}{U_0 R/\nu} \quad ; \quad \frac{U_* R}{\nu} \sim \frac{U_0 D}{2\nu}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \sim \frac{10^6}{2}\sqrt{\frac{0{,}012}{8}} \sim 2\cdot 10^4$$

$$y_+ = \frac{y\,U_*}{\nu} = \frac{y}{R}\cdot\frac{U_* R}{\nu} \simeq 2\cdot 10^4 \cdot (y/R)$$

Para $\underline{\underline{y_+ = 5}} \Rightarrow \underline{y/R} \simeq \frac{5}{2\cdot 10^4} = \underline{2{,}5\cdot 10^{-4}}$

Ecuaciones de la capa límite turbulenta, bidimensional e incompresible.

- Ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial (UU)}{\partial x} + \frac{\partial (UV)}{\partial y} \underbrace{- U_e \frac{dU_e}{dx}}_{\text{gradiente de presiones}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Haciendo: $\left\{ \begin{array}{l} UU = U(U-U_e) + UU_e \\ UV = V(U-U_e) + VU_e \end{array} \right|$ y sustituyendo en las derivadas:

$$\frac{\partial (UU)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_e)\right] + \frac{\partial}{\partial x}(UU_e) = \frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_e)\right] + U_e\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{dU_e}{dx}$$

$$\frac{\partial (UV)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_e)\right] + \frac{\partial}{\partial y}(VU_e) = \frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_e)\right] + U_e\frac{\partial V}{\partial y} + V\cancel{\frac{\partial U_e}{\partial y}}^{\,0}$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial x}+\frac{\partial(UV)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-Ue)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-Ue)\right]+Ue\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)}_{=0\text{ (por ecuación de la continuidad)}}+U\frac{dUe}{dx}$$

→ la ecuación de la cantidad de movimiento queda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-Ue)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-Ue)\right]+(U-Ue)\frac{dUe}{dx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}+\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

↳ multiplicándola por dy e integrando entre y=0 (la pared) hasta ∞ (fuera de la capa límite):

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty\left[U(U-Ue)\right]dy+\underbrace{\left[V(U-Ue)\right]\Big|_0^\infty}+\frac{dUe}{dx}\int_0^\infty(U-Ue)\,dy=\overbrace{\left(-\overline{u'v'}\right)\Big|_0^{\cancel{\infty}}}^{-u_*^2}+\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)\Big|_0^{\cancel{\infty}}$$

fuera de la capa límite: flujo de Euler

no hay fluctuaciones

$$\left[V\cancel{(U-Ue)}\right]_\infty-\left[V(U-Ue)\right]_0=-V_s(0-Ue)=+V_sUe$$

$U=Ue$

↑ velocidad de succión o soplado

$$\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{\tau_p}{\rho}=\frac{\cancel{\rho}u_*^2}{\cancel{\rho}}=\frac{1}{2}\rho Ue^2C_f\Rightarrow\left(\frac{u_*}{Ue}\right)^2=\frac{1}{2}C_f$$

Donde:

$$\int_0^\infty U(U-Ue)\,dy=-Ue^2\int_0^\infty\frac{U}{Ue}\left(1-\frac{U}{Ue}\right)dy=-Ue^2\delta_2$$

→ espesor de cantidad de movimiento

$$\int_0^\infty(U-Ue)\,dy=-Ue\int_0^\infty\left(1-\frac{U}{Ue}\right)dy=-Ue\,\delta_1$$

↳ espesor de desplazamiento

$$+\frac{d}{dx}(Ue^2\delta_2)+\delta_1Ue\frac{dUe}{dx}=+u_*^2+V_sUe$$

$$Ue^2\frac{d\delta_2}{dx}+2Ue\delta_2\frac{dUe}{dx}+\delta_1Ue\frac{dUe}{dx}=u_*^2+V_sUe$$

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx}+\frac{1}{Ue}\frac{dUe}{dx}(2\delta_2+\delta_1)=\left(\frac{u_*}{Ue}\right)^2+\frac{V_s}{Ue}}$$

→ Integral de Karman

Por conveniencia se utilizará el espesor normalizado Δ:

$$u_*\Delta=\delta_1Ue=\int_0^\infty(Ue-U)\,dy$$

Zonas del movimiento

ZONA DEL DEFECTO DE VELOCIDADES

Coordenada transversal: $y \sim \Delta$

Diferencia de velocidades: $U - U_e \sim u_* \ll U_e$

Coordenada longitudinal: $x \sim L$ (L: longitud característica a lo largo de la capa límite)

Número de Reynolds: $u_*\Delta/\nu \gg 1$

Esfuerzos turbulentos: $\overline{u'v'} \sim u_*^2$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_e)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_e)\right] + (U-U_e)\frac{dU_e}{dx}}_{\sim \frac{U_e \cdot u_*}{L}} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{-\overline{u'v'}}_{\frac{u_*^2}{\Delta}} + \underbrace{\cancel{\nu\frac{\partial U}{\partial y}}}\Big)$$

despreciable frente a esfuerzos turbulentos

$$\frac{u_*^2}{\Delta} \gg = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial(U-U_e)}{\partial y}\right) \sim \frac{\nu u_*}{\Delta^2}$$

$$\frac{\nu\frac{\partial U}{\partial y}}{-\overline{u'v'}} \sim \frac{\frac{\nu \cancel{u_*}}{\Delta}}{u_*^{\cancel{2}}} \sim \frac{\nu}{u_*\Delta} \ll 1$$

Comparando términos convectivos y gradiente de presiones con los esfuerzos turbulentos:

$$\frac{U_e \cancel{u_*}}{L} \sim \frac{u_*^{\cancel{2}}}{\Delta} \rightarrow \frac{u_*}{U_e} \sim \frac{\Delta}{L} \ll 1 \Rightarrow U = U_e + \Theta(u_*),\ u_* \ll U_e \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{dU_e}{dx}$$

De la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow V = -y\frac{dU_e}{dx}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_e)\right] = (U-U_e)\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{\partial(U-U_e)}{\partial y} = -(U-U_e)\frac{dU_e}{dx} - y\frac{dU_e}{dx}\cdot\frac{\partial(U-U_e)}{\partial y}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_e)\right] = (U-U_e)\frac{dU_e}{dx} + U_e\frac{\partial(U-U_e)}{\partial x}$$

La ecuación de la cantidad de movimiento queda entonces:

$$\boxed{U_e\frac{\partial(U-U_e)}{\partial x} + (U-U_e)\frac{dU_e}{dx} - y\frac{dU_e}{dx}\cdot\frac{\partial(U-U_e)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}$$

→ Ecuación linealizada de la capa límite ↓ es lineal para el defecto de velocidades $U_e - U$

→ Solución de la forma: $U = U_e + u_* F\left(\frac{y}{\Delta}, x\right) \rightarrow \int_0^\infty (U-U_e)dy = u_*\Delta\int F\cdot d(y/\Delta)$

$$-U_e\int_0^\infty\left(1-\frac{U}{U_e}\right)dy = -U_e\delta_1 = u_*\Delta\int_0^\infty F d\left(y/\Delta\right) = -u_*\Delta$$

$$u_*\Delta = U_e\delta_1 \rightarrow \int_0^\infty F d(y/\Delta) = -1$$

- La solución no es válida para valores pequeños de $y/\Delta \rightarrow U \not\to U_e$

ZONA CERCANA A LA PARED

- velocidad: $U \sim u_*$
- Esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden: $-\overline{u'v'} \sim \nu \dfrac{\partial U}{\partial y}$

despreciable frente a gradiente de presiones

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_e)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_e)\right]}}_{\sim \frac{U_e u_*}{L}} + \underbrace{(\cancel{U}-U_e)\frac{dU_e}{dx}}_{\sim \frac{U_e^2}{L}}{}^{(*)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)}_{}$$

$\sim \dfrac{U_e u_*}{L} \ll \sim \dfrac{U_e^2}{L}$

$u_*^2 \sim \nu \dfrac{u_*}{y} \rightarrow y_+ = \dfrac{u_* y}{\nu} \sim 1$

$U_+ = U/u_* \sim 1$

$y \sim \dfrac{\nu}{u_*} \rightarrow \dfrac{u_*^2}{y} \sim \dfrac{u_*^3}{\nu}$

$$\frac{\cancel{U_e} u_*/\cancel{L}}{U_e^2/\cancel{L}} \sim \frac{u_*}{U_e} \ll 1$$

→ Relación entre el término del gradiente de presiones y los de los esfuerzos:

$$\frac{\frac{U_e^2}{L}}{u_*^3/\nu} \sim \underbrace{\left(\frac{U_e}{u_*}\cdot\frac{\Delta}{L}\right)}_{\sim 1}\cdot\frac{U_e}{u_*}\cdot\frac{\nu}{u_*\cdot\Delta} \sim \underbrace{\frac{U_e}{u_*}}_{\gg 1}\cdot\underbrace{\frac{\nu}{u_*\Delta}}_{\ll 1} \ll 1$$

$$\frac{U_e}{u_*} \sim \ln\left(\frac{u_*\Delta}{\nu}\right) \rightarrow \frac{U_e}{u_*}\cdot\frac{\nu}{u_*\Delta} \sim \left(\frac{\nu}{u_*\Delta}\right)\ln\left(\frac{u_*\Delta}{\nu}\right) \ll 1 \text{ cuando } u_*\Delta/\nu \gg 1$$

En primera aproximación se concluye que el término del gradiente de presiones es también despreciable. (*)

→ La ecuación de cantidad de movimiento en las proximidades de la pared se reduce a un balance entre los esfuerzos viscosos y turbulentos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0 \rightarrow -\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_p}{\rho} = u_*^2$$

en $y=0$: $-\overline{u'v'} = 0$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = \frac{\tau_p}{\mu}$$

En forma adimensional: $\dfrac{-\overline{u'v'}}{u_*^2} + \dfrac{\nu u_*^2}{\nu u_*^2}\cdot\dfrac{\partial(U/u_*)}{\partial(y u_*/\nu)} = 1 \rightarrow g + \dfrac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1$

$\left.\begin{array}{l} -\overline{u'v'} = 0 \\ U = 0 \end{array}\right\}$ en $y = 0$

La solución es de la forma:

$$U_+ = H(y_+) \rightarrow U = u_* H(y_+)$$

ZONA DE ACOPLAMIENTO DE AMBAS SOLUCIONES. REGIÓN LOGARÍTMICA

$$\left.\begin{matrix} y_+ \to \infty \\ \eta = \dfrac{y}{\Delta(x)} \to 0 \end{matrix}\right\}$$ velocidad y derivadas de velocidad iguales

- zona del defecto de velocidades: $U = U_e + u_* F(\eta, x)$
- zona próxima a la pared: $U = u_* U_+(y_+)$

→ **Derivadas**:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = u_* \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \overbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}^{1/\Delta} = \frac{u_*}{\Delta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta}$$ (zona del defecto de velocidades)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = u_* \frac{\partial U_+}{\partial y_+} \cdot \overbrace{\frac{\partial y_+}{\partial y}}^{u_*/\nu} = \frac{u_*^2}{\nu} \cdot \frac{\partial U_+}{\partial y_+}$$ (zona próxima a la pared)

$$\frac{\cancel{u_*}}{\Delta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{u_*^{\cancel{2}}}{\nu} \cdot \frac{\partial U_+}{\partial y_+} \to \underbrace{y \frac{1}{\Delta}}_{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} = \underbrace{y \frac{u_*}{\nu}}_{y_+} \frac{\partial U_+}{\partial y_+} \to \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = y_+ \frac{\partial U_+}{\partial y_+} = \frac{1}{k}$$

$k = 0{,}41$ (constante universal de Karman)

De donde salen las soluciones:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{k\eta} \to \boxed{F = \frac{1}{k} \ln \eta + A(x)}$$

→ depende de la corriente exterior (del gradiente de presiones de la capa límite) ⇝

$$A = f\left(\frac{dU_e}{dx}, \Delta, u_*\right) \xrightarrow[\text{adim.}]{} A = A\Big(\underbrace{\frac{\Delta(x)}{u_*} \cdot \frac{dU_e}{dx}}\Big)$$

↑ lo único que se conoce sin tener que calcular la solución

$\equiv \Pi$; si $\Pi = \frac{\Delta}{u_*} \cdot \frac{dU_e}{dx} = cte$ (capas límite en equilibrio)

$A \neq A(x)$ → problema más simple: $F = F\left(\frac{y}{\Delta(x)}\right)$

$$\frac{\partial U_+}{\partial y_+} = \frac{1}{k y_+} \to \boxed{U_+ = \frac{1}{k} \ln y_+ + B}$$

→ no depende de x (igual que la cte de los tubos)

$B \approx 5{,}3$

→ **Valores**

$$\left.\begin{matrix} U = U_e + u_* \left\{ \frac{1}{k} \ln \eta + A(x) \right\} \\ U = u_* U_+ = u_* \left\{ \frac{1}{k} \ln y_+ + B \right\} \end{matrix}\right] \to \frac{U_e}{u_*} + \frac{1}{k} \ln \eta + A(x) = \frac{1}{k} \ln y_+ + B$$

$$\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\cancel{y} u_* / \nu}{\cancel{y}/\Delta} \right) + B - A(x) \to \frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\Delta u_*}{\nu} \right) + B - A(x)$$

$$\boxed{\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{U_e \delta_1}{\nu} \right) + B - A(x)}$$

→ Esta relación permite calcular el esfuerzo en la pared (proporcional a u_*^2) en función del número de Reynolds $U_e\delta_1/\nu$ si se conociera $A(x)$

Perfil de velocidades cerca de la pared

La ecuación $G + \frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1$ determina la velocidad en las proximidades de la pared.

Para valores pequeños de y_+ (subcapa laminar): $\frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1 \Rightarrow U_+ = y_+$

Para valores grandes de y_+: $G = 1$ (esfuerzo turbulento constante)

- Para determinar la velocidad es necesario conocer la viscosidad turbulenta:

→ Modelo de turbulencia:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial u}{\partial y} = l_T \cdot u_* \frac{\partial u}{\partial y}$$

La ecuación $-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = u_*^2$ puede escribirse como:

$$(l_T u_* + \nu)\frac{\partial u}{\partial y} = u_*^2 \rightarrow (l_T u_* + \nu)\cdot\frac{\cancel{u_*^2}}{\nu}\frac{\partial(u/u_*)}{\partial\left(\frac{y u_*}{\nu}\right)} = \cancel{u_*^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (l_T u_* + \nu)\frac{1}{\nu}\frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1 \xrightarrow[\frac{l_T u_*}{\nu} = l_+]{} \boxed{(l_+ + 1)\frac{\partial U_+}{\partial y_+} = 1}$$

$y_+ \gg 1 \Rightarrow \frac{\partial U_+}{\partial y_+} \rightarrow \frac{1}{l_+} = \frac{1}{k y_+} \Rightarrow l_+ \rightarrow k y_+$

Zona logarítmica

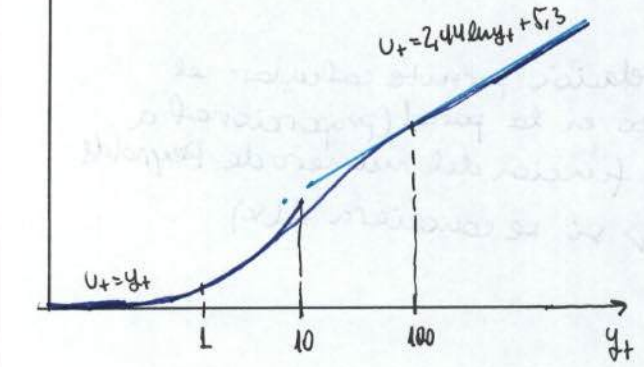
$y_+ \ll 1 \rightarrow l_+ = f(y_+)$; $l_+ \rightarrow k y_+\left[1 - 1 - (-y_+/C)\right] = k y_+\left(\frac{y_+}{C}\right)$

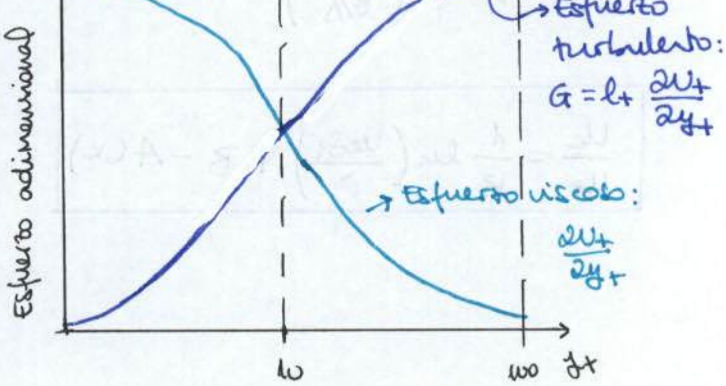
$$\boxed{l_+ = k y_+\left(1 - e^{-y_+/C}\right)}$$

C se determina de los resultados experimentales

$C = 36{,}5$

$$\frac{dU_+}{dy_+} = \frac{1}{1+l_+} = \frac{1}{1 + k y_+\left[1 - e^{-y_+/C}\right]} \rightarrow U_+ = \int_0^{y_+}\frac{dy_+}{1 + k y_+\left[1 - e^{-y_+/C}\right]}$$





Capas límites en equilibrio

DEFECTO DE VELOCIDADES

$$\left.\begin{aligned} &U_e \frac{\partial}{\partial x}(U-U_e) + (U-U_e)\frac{dU_e}{dx} - y\frac{\partial}{\partial y}(U-U_e)\frac{dU_e}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) \\ &U = U_e + u_* F\left(\frac{y}{\Delta(x)}, x\right) \end{aligned}\right\}$$

→ Caso particular en el que F no depende directamente de x → $F\left(\frac{y}{\Delta(x)}\right)$ →

→ capas límites en equilibrio : $F = F(\eta)$, $\eta = y/_{\Delta(x)}$

$$A = f\Big(\underbrace{\frac{dU_e}{dx}}_{\substack{\text{zona}\\\text{exterior}}}, \underbrace{u_*}_{\substack{\text{zona}\\\text{interior}}}, \Delta\Big) \rightarrow A = \varphi\Big(\underbrace{\frac{\Delta}{u_*}\cdot\frac{dU_e}{dx}}_{\text{cte}}\Big)$$

→ $U(U_e - U) = U_e(U_e - U) - (U_e - U)^2$

Integral de Karman:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty U(U_e-U)\,dy + \frac{dU_e}{dx}\int_0^\infty (U_e-U)\,dy = u_*$$

$$\int_0^\infty U(U_e-U)\,dy = U_e\underbrace{\int_0^\infty (U_e-U)\,dy}_{} - \cancel{\underbrace{\int_0^\infty (U_e-U)^2 dy}_{}}$$

zonas → $\sim U_e^2 \frac{\nu}{u_*}$ (porque $y_+ \sim 1$) (próxima a la pared)

vs

→ $\sim U_e \cdot u_* \cdot \Delta$ (resto)

zonas → pared: $\sim U_e^2\frac{\nu}{u_*}$ → $\frac{U_e^2 \nu/u_*}{U_e u_* \Delta} \sim \frac{U_e}{u_*}\cdot\frac{\nu}{u_*\Delta} \ll 1$

→ exterior: $\sim u_*^2 \Delta$ → $\frac{u_*^2\Delta}{u_* U_e \Delta} \sim \frac{u_*}{U_e} \ll 1$

→ vs: $\frac{U_e^{\cancel{2}}(\nu/u_*)}{\cancel{U_e}\cdot u_* \cdot\Delta} \sim \frac{U_e}{u_*}\cdot\underbrace{\frac{\nu}{u_*\Delta}}_{\ll 1} \ll 1$

En primera aproximación entonces: $\int_0^\infty U(U_e-U)\,dy \cong U_e\int_0^\infty (U_e-U)\,dy = U_e u_* \Delta$

$$\int_0^\infty (U_e-U)\,dy = U_e\,\delta_1 = u_*\Delta$$

La ecuación de Karman queda entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[U_e u_* \Delta\right] + \frac{dU_e}{dx}\cdot u_*\Delta = u_*^2$$

$$U_e\frac{d(u_*\Delta)}{dx} + 2u_*\Delta\frac{dU_e}{dx} = u_*^2 \xrightarrow[u_*^2]{\div} \frac{U_e}{u_*^2}\frac{d(u_*\Delta)}{dx} + 2\underbrace{\left(\frac{\Delta}{u_*}\frac{dU_e}{dx}\right)}_{\text{cte para capa límite en equilibrio.}} = 1$$

Ecuación del defecto de velocidades: $\rightarrow$

- $$\frac{\partial(U-U_e)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_* F(\eta)\right)=F\frac{du_*}{dx}+u_*\frac{\partial F}{\partial x}=F\frac{du_*}{dx}+u_*\frac{dF}{d\eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{\hookrightarrow -\frac{\eta}{\Delta}\cdot\frac{d\Delta}{dx}}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial\Delta}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial x}=-\frac{\eta}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx}$$

$$\rightarrow\frac{\partial(U-U_e)}{\partial x}=F\cdot\frac{du_*}{dx}-\frac{u_*}{\Delta}\eta\frac{d\Delta}{dx}\cdot\frac{dF}{d\eta}$$

- $$(U-U_e)\frac{dU_e}{dx}=u_* F(\eta)\cdot\frac{dU_e}{dx}$$

- $$y\frac{\partial}{\partial y}(U-U_e)\frac{dU_e}{dx}=\Delta\eta\frac{\partial}{\partial y}(u_* F)\frac{dU_e}{dx}=\cancel{\Delta}\eta u_*\frac{dF}{d\eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial y}}_{1/\cancel{\Delta}}\cdot\frac{dU_e}{dx}=\eta u_*\frac{dF}{d\eta}\cdot\frac{dU_e}{dx}$$

- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_*^2 G(\eta)\right)=u_*^2\frac{dG}{d\eta}\cdot\frac{1}{\Delta}$$
$$-\overline{u'v'}=u_*^2 G(\eta)$$

$$\rightarrow U_e F\cdot\frac{du_*}{dx}-\frac{u_*}{\Delta}U_e\frac{d\Delta}{d}\eta\frac{dF}{d\eta}+u_* F\cdot\frac{dU_e}{dx}-\eta u_*\frac{dF}{d\eta}\frac{dU_e}{dx}=u_*^2\frac{dG}{d\eta}\cdot\frac{1}{\Delta}$$

$$\underbrace{\left[U_e\frac{du_*}{dx}+u_*\frac{dU_e}{dx}\right]}_{\frac{d(u_*U_e)}{dx}}\cdot F-\left[U_e\frac{u_*}{\Delta}\frac{d\Delta}{d}+u_*\frac{dU_e}{dx}\right]\eta\frac{dF}{d\eta}=\frac{u_*^2}{\Delta}\cdot\frac{dG}{d\eta}\rightarrow\div\frac{u_*^2}{\Delta}$$

$$\left[\frac{\Delta}{u_*^2}\frac{d(u_*U_e)}{dx}\right]F-\left[\frac{\cancel{\Delta}}{u_*^2}\cdot U_e\frac{\cancel{u_*}}{\cancel{\Delta}}\cdot\frac{d\Delta}{dx}+\frac{\Delta}{u_*^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{u_*}\frac{dU_e}{dx}\right]\eta\cdot\frac{dF}{d\eta}=\frac{dG}{d\eta}$$

$$\left[\frac{\Delta}{u_*^2}\cdot\frac{d(u_*U_e)}{dx}\right]F-\left[\frac{U_e}{u_*}\cdot\frac{d\Delta}{dx}+\frac{\Delta}{u_*}\cdot\frac{dU_e}{dx}\right]\eta\frac{dF}{d\eta}=\frac{dG}{d\eta}$$

$$\underbrace{\left[\frac{\Delta}{u_*^2}\cdot\frac{d(u_*U_e)}{dx}\right]}_{(1)}F-\underbrace{\left[\frac{1}{u_*}\cdot\frac{d(\Delta U_e)}{dx}\right]}_{(2)}\eta\frac{dF}{d\eta}=\frac{dG}{d\eta}$$

(1) (2) $\rightarrow$ tienen que ser constantes

(1)

$$\frac{\Delta}{u_*^2}\cdot\frac{d(u_*U_e)}{dx} = \underbrace{2\,\frac{\Delta}{\cancel{u_*^2}}\cdot \cancel{u_*}\cdot\frac{dU_e}{dx}}_{\substack{\text{cte por capa}\\ \text{límite de equilibrio}}} + \frac{\Delta}{u_*^2}U_e\frac{du_*}{dx} - \frac{\Delta}{u_*}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\frac{\Delta}{u_*^2}\left[U_e\frac{du_*}{dx} - u_*\frac{dU_e}{dx}\right] = -\Delta\frac{d}{dx}\left(\frac{U_e}{u_*}\right) \quad \frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{u_*\Delta}{\nu}\right) + B - A$$

$$\leadsto \frac{\Delta}{u_*^2}\frac{d}{dx}(u_*U_e) = 2\underbrace{\frac{\Delta}{u_*}\frac{dU_e}{dx}}_{\sim\frac{\Delta}{u_*}\cdot\frac{U_e}{L}} - \underbrace{\Delta\frac{d}{dx}\left(\frac{U_e}{u_*}\right)}_{\sim\Delta/L}$$

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{U_e}{u_*}\right) = \frac{1}{k}\,\frac{1}{u_*\Delta}\cdot\frac{d}{dx}(u_*\Delta) = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{u_*}\frac{du_*}{dx} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx}\right]\sim\frac{1}{L}\right\}$$

$$\frac{\cancel{\Delta}/\cancel{L}}{\frac{\cancel{\Delta}}{u_*}\cdot\frac{U_e}{\cancel{L}}} \sim \frac{u_*}{U_e} \ll 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta}{u_*^2}\frac{d}{dx}(u_*U_e) \cong 2\left(\frac{\Delta}{u_*}\frac{dU_e}{dx}\right)}$$

(2)

$$\frac{1}{u_*}\frac{d(\Delta U_e)}{dx} = \frac{1}{u_*}\frac{d}{dx}\left(u_*\Delta\frac{U_e}{u_*}\right) = \underbrace{\frac{U_e}{u_*^2}\frac{d}{dx}(u_*\Delta)}_{\sim\frac{U_e}{\cancel{u_*^2}}\cdot\frac{\cancel{u_*}\Delta}{L}} + \underbrace{\Delta\frac{d}{dx}\left(\frac{U_e}{u_*}\right)}_{\sim\frac{\Delta}{L}}$$

$$\frac{\cancel{\Delta}/\cancel{L}}{\frac{U_e\cancel{\Delta}}{u_*\cancel{L}}} \sim \frac{u_*}{U_e} \ll 1 \leadsto \frac{1}{u_*}\frac{d(\Delta U_e)}{dx} \cong \frac{U_e}{u_*^2}\frac{d}{dx}(u_*\Delta) = 1 - 2\left(\frac{\Delta}{u_*}\frac{dU_e}{dx}\right)$$

de la Ecuación de Karman

$$\boxed{\frac{1}{u_*}\frac{d(\Delta U_e)}{dx} \cong 1 - 2\left(\frac{\Delta}{u_*}\frac{dU_e}{dx}\right)}$$

Llamando $\underline{\Pi = -\left(\frac{\Delta}{u_*}\cdot\frac{dU_e}{dx}\right) = \text{cte}}$

$$\boxed{-2\cdot\Pi\cdot F - (1+2\cdot\Pi)\,y\,\frac{dF}{dy} = \frac{dG}{dy}}$$

→ Problema a resolver junto con un modelo de turbulencia (relacionar G con F y y)

$$-\overline{u'v'} = u_*\,l_T\,\frac{\partial U}{\partial y} = u_*^2\,l_T\,\frac{\partial F}{\partial y} = u_*^2\,l_T\frac{dF}{dy}\cdot\frac{1}{\Delta} = \frac{u_*^2}{\Delta}\,l_T\,\frac{dF}{dy} = u_*^2\,G(y) \rightarrow \underline{G(y) = \frac{l_T}{\Delta}\cdot\frac{dF}{dy}}$$

$$-2\cdot\Pi\cdot F - (1+2\cdot\Pi)\,y\,\frac{dF}{dy} = \frac{d^2F}{dy^2}\cdot\frac{l_T}{\Delta}$$

De la solución en la zona logarítmica : $\kappa y \frac{dF}{dy} = 1$

- Cuando $y \to \infty$: $F(y\to\infty)=0$; $G(y\to\infty)=0$ (no hay esfuerzos turbulentos)
- Cuando $y \to 0$: $G(y\to 0)\to 1$; $\frac{dF}{dy} \to \frac{1}{\kappa y}$; $\frac{l_T}{\Delta} \to \kappa y$

$$\underbrace{\int_0^\infty (u-u_e)\,dy}_{-u_e\delta_1} = \Delta u_* \int_0^\infty F\, d(y/\Delta) = \cancel{\Delta u_*}\int_0^\infty F dy = -\cancel{u_e\delta_1}^{\,1} \quad (u_e\delta_1 = \Delta u_*)$$

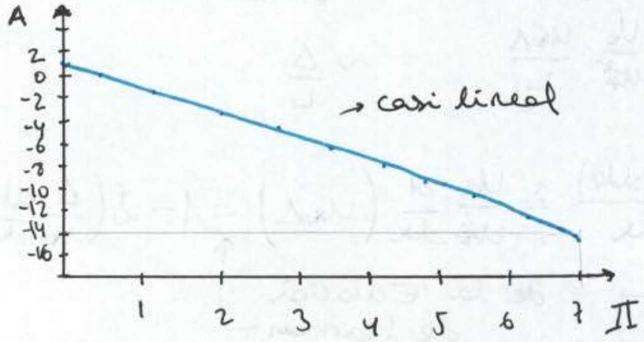
$$\hookrightarrow \int_0^\infty F dy = -1$$

- Problema: obtener u_* y Δ
  - → Ecuación de Karman : $\frac{u_e}{u_*^2}\frac{d(u_*\Delta)}{dx} = 1+2\Pi$
  - → Equivalente a λ en ecuación de tubos: $\frac{u_e}{u_*} = \underbrace{\frac{1}{\kappa}}_{\kappa=0,41} \ln\left(\frac{u_*\Delta}{\nu}\right) + \underbrace{B}_{B=5,3} - \underbrace{A(\Pi)}$ ↳ depende del gradiente de presiones (*)
    - ↳ Acoplamiento exterior-pared

$(A(0)=0,62)$

Conocido el valor de $A(\Pi)$ se puede determinar la evolución con x de Δ y u_*.

(*)

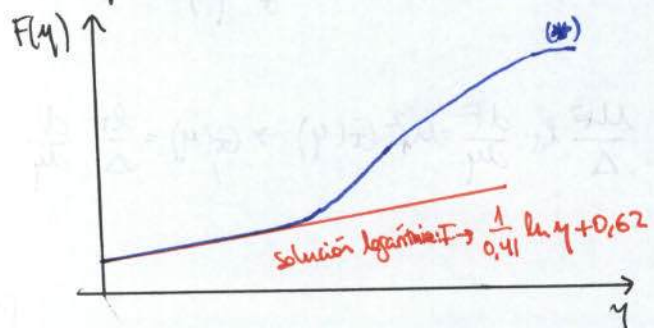


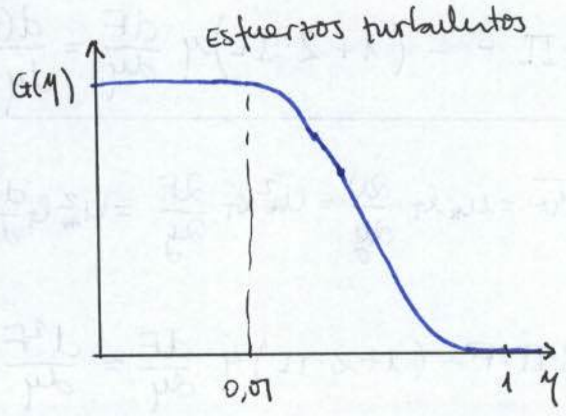
$\boxed{\text{CAPA LÍMITE SIN GRADIENTE DE PRESIONES}}$ (≡ equivalente a Blasius en caso laminar)

$$\Pi = 0 \to \text{Ec. diferencial: } -y\frac{dF}{dy} = \frac{l_T}{\Delta}\cdot\frac{d^2F}{dy^2} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{y\to 0} \frac{l_T}{\Delta} \to \kappa y \\ \lim\limits_{y\to\infty} \frac{l_T}{\Delta} \to cte \end{array}\right\} \quad \frac{l_T}{\Delta} = C\left[1-e^{-\kappa y/C}\right]$$

C vale lo apropiado (en este caso $C = 1/44$)





• Determinación de la evaluación con x del esfuerzo en la pared (u_*^2) y el espesor de la capa límite Δ:

$$\frac{U_e}{u_*^2}\frac{d(u_*\Delta)}{dx} = 1 \; ; \; u_*\Delta = \delta_1 U_e \rightarrow \frac{U_e}{u_*^2}\cancelto{0}{\frac{dU_e}{dx}}\delta_1 + \frac{U_e}{u_*^2}\cdot U_e\frac{d\delta_1}{dx} = 1 \rightarrow \left(\frac{U_e}{u_*}\right)^2\frac{d\delta_1}{dx} = 1$$

$$\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{u_*\Delta}{\nu}\right) + B - A(0) = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{\delta_1 U_e}{\nu}\right) + B - A(0)$$

$Re_x = U_e x/\nu$

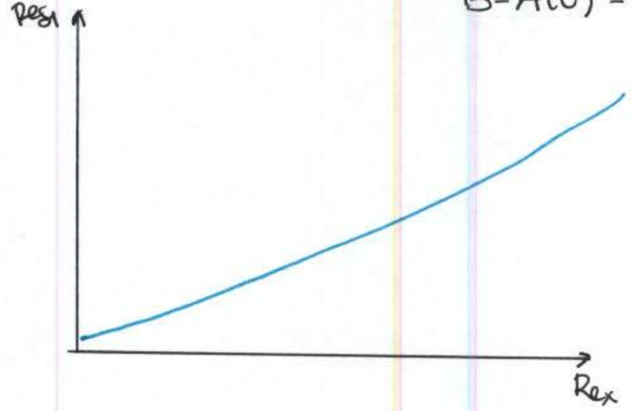
$Re_{\delta_1} = U_e\delta_1/\nu$

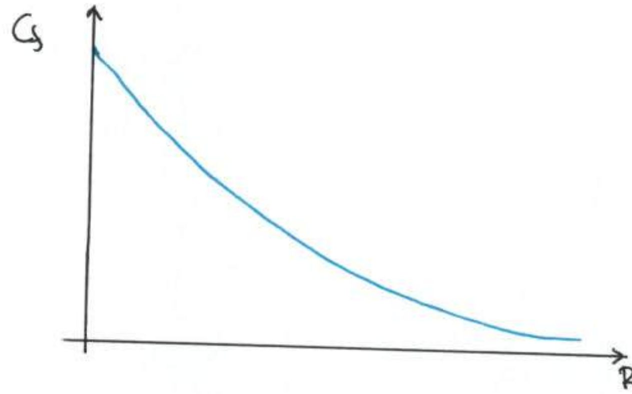
$$\left(\frac{U_e}{u_*}\right)^2\frac{d\,Re_{\delta_1}}{d\,Re_x} = 1$$

$$\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{K}\ln(Re_{\delta_1}) + B - A(0)$$

$$\frac{d\,Re_{\delta_1}}{d\,Re_x} = \frac{1}{\left[\frac{1}{K}\ln Re_{\delta_1} + B - A(0)\right]^2} \quad ; \quad C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = 2\left(\frac{u_*}{U_e}\right)^2$$

$$B - A(0) = 4{,}68$$





$\boxed{\text{ANÁLISIS SIMPLIFICADO}}$

Prandtl observó (con los datos experimentales de que disponía), el perfil de velocidades en la zona exterior de la capa límite se puede aproximar por la ley potencial de velocidades:

$$\left(\frac{U}{U_e}\right) = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \text{ para } y \leq \delta \text{ y } \frac{U}{U_e} = 1 \text{ para } y > \delta$$

- Espesor de desplazamiento, δ_1:

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_e}\right)dy = \delta\int_0^1 (1 - \xi^{1/7})d\xi = \frac{\delta}{8}$$

• Espesor de cantidad de movimiento, δ_2:

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{U}{U_e}\left(1 - \frac{U}{U_e}\right)dy = \delta\int_0^1 \xi^{1/7}(1 - \xi^{1/7})d\xi = \frac{7\delta}{72}$$

El perfil potencial no permite obtener el coeficiente de fricción, ya que no es válido cerca de la pared.

(en $y=0$: $\left(\frac{\partial(U/U_e)}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow \infty$) → Siguiendo con la sugerencia de Prandtl, se puede ajustar mediante una ley del tipo: $C_f \simeq a\,Re_\delta^{-1/6}$ ($a \simeq 0{,}02$)

Con la ecuación integral de Karman:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{1}{2} C_f \rightarrow \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = \frac{a}{2}\left(Re_\delta\right)^{-1/6} \Rightarrow \frac{7}{72}\frac{dRe_\delta}{dRe_x} = \frac{a}{2}\left(Re_\delta\right)^{-1/6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re_\delta = \left(6a\, Re_x\right)^{6/7} \rightarrow C_f = a\left(Re_\delta\right)^{-1/6} = a\left(6a\, Re_x\right)^{-1/7} \approx 0{,}027\, Re_x^{-1/7}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen 25-01-2017**

En una capa límite turbulenta sin gradiente de presiones, con una velocidad de succión/soplado constante y de valor v_s constante, la ecuación de cantidad de movimiento para la zona del defecto de velocidades es

$$U_e \frac{\partial}{\partial x}(U - U_e) + v_s \frac{\partial}{\partial y}(U - U_e) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right), \tag{1}$$

donde $y \sim \triangle$ (espesor normalizado tal que $u_* \triangle = U_e \delta_1$) y cuya solución puede escribirse en la forma

$$U = U_e + u_* F\left(\frac{y}{\triangle}, \frac{v_s}{u_*}\right), \tag{2}$$

donde $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$ siendo τ_p el esfuerzo en la pared.

La ecuación de la cantidad de movimiento en la zona cercana a la pared (subcapa viscosa, buffer y zona logarítmica), está dada por

$$v_s \frac{dU}{dy} = \frac{d}{dy}\left(-\overline{u'v'} + \nu \frac{dU}{dy}\right). \tag{3}$$

Se pide:

1.- Integren una vez la ecuación (3) con respecto a y e introduzcan la velocidad de fricción. (1 punto).

2.- Escriban la ecuación del apartado anterior (apartado 1) en forma adimensional utilizando $U^+ = U/u_*$ e $y^+ = yu_*/\nu$ como variables adimensionales, junto con $v_s^+ = v_s/u_*$ y $g = -\overline{u'v'}/u_*^2$. (1 punto).

3.- Para $y^+ \ll 1$, los efectos viscosos son dominantes frente a los turbulentos. Determinen $U^+ = U^+(y^+, v_s^+)$. (1.5 puntos).

4.- Cuando $y^+ \gg 1$, los esfuerzos viscosos son despreciables frente a los turbulentos. Obtengan los esfuerzos turbulentos $g = g(U^+, v_s^+)$. (1 punto).

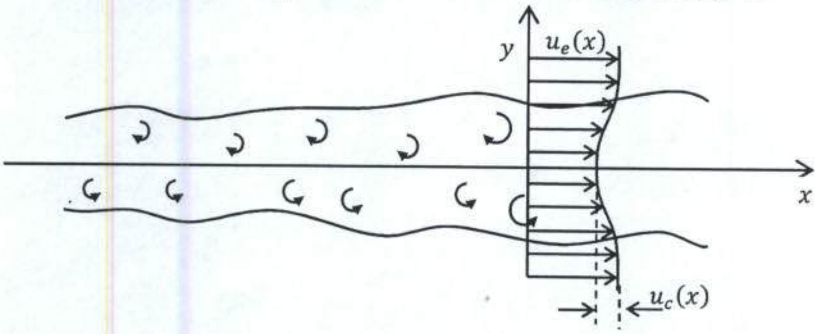
5.- De la ecuación (1) con $y/\triangle \ll 1$ y de la ecuación (3) con $y^+ \gg 1$, mostrar que existe una zona de validez común de las soluciones $F\left(\frac{y}{\triangle}, v_s^+\right)$ y $U^+(y^+, v_s^+)$. Mostrar que esa zona de validez común es logarítmica y que, en principio, la constante κ_s es distinta de la de Kármàn como consecuencia de la existencia de v_s^+. (3 puntos).

6.- Utilicen la teoría del camino de mezcla de Prandtl para modelizar los esfuerzos turbulentos. En esta teoría $\nu_T = \ell_m v_m$, siendo ℓ_m la longitud de mezcla y $v_m = \ell_m |dU/dy|$. Se pide determinar la longitud de mezcla $\ell^+ = \ell_m u_*/\nu$ en la región logarítmica, como función de v_s^+ e y^+. (2.5 puntos).

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Final 25.01.2017**

La figura adjunta muestra una estela turbulenta plana, que se desarrolla a lo largo del eje x de un conducto 2D de *área variable*, caracterizado por poseer flujo *casi-unidireccional*. El eje de la estela y del conducto coinciden, de modo que en la región de la estela la velocidad axial del flujo impuesto por el conducto de área variable puede considerarse tan solo función de la coordenada axial, $u_e = u_e(x)$, mientras que la velocidad transversal asociada a la variación de área del conducto verifica en su eje $(y = 0)$, $v_e(x, 0) = 0$. El origen del eje x se selecciona de manera que la longitud l_x que caracteriza las variaciones de la velocidad u_e y el desarrollo axial de la estela verifica $l_x \sim x$.



El defecto de velocidad media $u_c(x) = u_e(x) - \bar{u}(x, 0)$ existente en el eje de la estela $(y = 0)$ verifica $u_c/u_e \ll 1$, de modo que se trata de una estela *lejana*. El flujo medio en la región de la estela lejana puede describirse introduciendo una pequeña perturbación $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})$ al flujo irrotacional impuesto por el conducto (u_e, v_e, p_e) sin el efecto de la estela:

$$\bar{u} = u_e + \tilde{u}; \quad \bar{v} = v_e + \tilde{v}; \; \bar{p} = p_e + \tilde{p}$$

Se desea analizar el desarrollo de la estela lejana. Específicamente:

1) Teniendo en cuenta que cerca del eje del conducto$(y = 0)$ la velocidad axial u_e tan solo depende de x, escribir la ecuación de continuidad para el flujo impuesto por el conducto (u_e, v_e, p_e) en el entorno de su eje, expresando la velocidad transversal $v_e(x, y)$ como función de la coordenada transversal y, así como del gradiente de velocidad axial, du_e/dx. Escribir asimismo la ecuación de cantidad de movimiento axial para el flujo impuesto por el conducto en el entorno de su eje, determinando el gradiente axial de presiones $(1/\rho) \cdot (dp_e/dx)$ como función de $u_e(x)$. (2)

2) Asumiendo que la estela turbulenta lejana es un flujo esbelto cuya extensión transversal δ verifica:

$$\delta/x \ll 1, \; Re = u_c\delta/\nu \gg 1,$$

escribir las ecuaciones simplificadas de continuidad, cantidad de movimiento *axial* y *transversal* para las perturbaciones del flujo medio en la estela $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})$. Estableciendo el balance convectivo-turbulento en la ecuación de cantidad de movimiento axial, relacionar el cociente δ/x con u_c/u_e, confirmando que la estela lejana es un flujo esbelto que verifica $\delta/x \ll 1$. (3)

3) Definiendo la anchura de la estela en la estación x como $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u} dy = -u_c\delta$, y asumiendo que el defecto de velocidad decae rápidamente en la región exterior a la estela como para que se tenga $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}(y\tilde{u}) dy = (y\tilde{u})|_{-\infty}^{\infty} = 0$, integrar transversalmente la ecuación de cantidad de movimiento axial en la región de la estela para demostrar que se verifica:

$$u_e^2(x) \cdot u_c(x) \cdot \delta(x) = A$$

Siendo A una constante independiente de la coordenada x. (3)

4) Se desea explorar la posibilidad de que la estela turbulenta lejana que se desarrolla en el conducto de área variable posea estructura de semejanza. Para ello se introduce el siguiente escalado:

$$\tilde{u} = u_c(x) \cdot F(\eta), \qquad -\overline{u'v'} = u_c^2(x) \cdot G(\eta), \qquad \eta = y/\delta(x)$$

Incorporando estas expresiones en la ecuación de cantidad de movimiento para las perturbaciones asociadas a la estela obtenida anteriormente y utilizando el resultado del apartado anterior, determinar la relación adicional que deben verificar $u_e(x), u_c(x)$ y $\delta(x)$ para que la estructura de semejanza propuesta sea posible. (3)

5) Comprobar que las leyes $u_e \sim x^a$, $\delta \sim x^b$, $u_c \sim x^c$, con a, b y c constantes, son compatibles con la estructura de semejanza propuesta, determinando la relaciones $b = b(a)$, $c = c(a)$. Determinar asimismo si existe algún valor del exponente a que caracteriza la velocidad en el conducto que verifique $b = c$, de manera que tanto el defecto de velocidad u_c como la anchura de la estela δ tengan una evolución similar con la distancia x a lo largo del conducto. (1)

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 01-02-2016**

PRIMERA PREGUNTA

Las soluciones de Falkner-Skan describen las capas límites que se forman sobre cuñas. El flujo potencial alrededor de una cuña de ángulo $\pi\beta$ da lugar a una velocidad de deslizamiento a lo largo de la pared de la forma $u_e(x) = Ax^{\beta/(2-\beta)}$, donde A es una constante. La capa límite viscosa sobre la cuña admite solución de semejanza con la variable

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}},$$

siendo la función de corriente: $\psi = f(\eta)\sqrt{(2-\beta)\nu x u_e(x)}$; mientras que la velocidad está dada por $u = u_e(x)(df/d\eta)$. La ecuación de cantidad de movimiento se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, que permite determinar $f(\eta)$, que para valores pequeños de η se tiene $\lim_{\eta\to 0} f(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}$, mientras que para valores muy grandes de η se obtiene $\lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = \eta$.

La ecuación de la energía, que permite determinar la distribución de temperaturas en la capa límite, también admite solución de semejanza y se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + Pr f(\eta)\frac{d\theta}{d\eta} = 0,$$

donde $\theta = (T - T_\infty)/(T_p - T_\infty)$, siendo T_∞ la temperatura de la corriente exterior y T_p la temperatura de la pared, ambas constantes. El número de Prandtl es $Pr = \mu c/k$.

Utilizando la ecuación anterior y los datos proporcionados sobre la función $f(\eta)$, se trata de determinar el número de Nusselt (o su equivalente, el flujo de calor en la pared) cuando el número de Prandtl es muy pequeño ($Pr \ll 1$). Observen que para $Pr \ll 1$, la capa límite térmica es muy gruesa comparada con la viscosa[1].

SEGUNDA PREGUNTA

Refiriéndonos al problema anterior de la contracción en el que la velocidad exterior puede asimilarse a la velocidad media longitudinal a lo largo del eje de la contracción x_1, de modo que $\bar{u}_1(x_1 = 0) = U_0$ y $\bar{u}_1(x_1 = L) = CU_0$, la rejilla genera un flujo turbulento débil y uniforme al inicio de la contracción, caracterizado por un nivel de energía cinética turbulenta $k_0 \ll U_0^2$ y una escala integral turbulenta $\ell_{t0} \sim k_0^{3/2}/\varepsilon_0$, con ε_0 siendo el valor de la disipación turbulenta a la entrada de la contracción. Suponiendo $C \gg 1$, de forma que $k_0^{1/2}/(CU_0) \ll \ell_{t0}/L \ll 1$, y asumiendo que es posible despreciar las variaciones transversales de energía cinética turbulenta, se desea analizar su evolución a lo largo del eje de la contracción. Para ello, partiendo de la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta en turbulencia libre

$$\bar{u}_j\frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_t\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \varepsilon,$$

evaluar el orden de magnitud de los distintos términos que aparecen en la ecuación, simplificándola. Considerando asimismo que en el flujo casi-unidireccional en la dirección x_1 se verifica $\overline{u_1'^2} \approx \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}$ determinar la relación k_L/k_0, siendo k_L el nivel de energía cinética turbulenta a la salida de la contracción.

[1] Tengan en cuenta que

$$\int_0^\infty e^{-\varsigma^2}d\varsigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

SOLUCIÓN

PRIMERA PREGUNTA

Como la capa límite viscosa es muy delgada con respecto a la térmica cuando $Pr \ll 1$, la función $f(\eta)$ puede aproximarse por η, con lo que la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \eta Pr \frac{d\theta}{d\eta} = 0,$$

que puede integrarse una vez para dar

$$\frac{d\theta}{d\eta} = K \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right),$$

de esta ecuación se deduce que

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K,$$

integrando de nuevo se tiene

$$\theta = 1 + K \int_0^\eta \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right)\right] d\eta,$$

donde se ha impuesto la condición de contorno $T = T_p$ en $y = 0$, lo que implica $\theta = 1$ en $\eta = 0$. Para determinar la constante K hay que imponer la condición de contorno $T = T_\infty$ en $y \to \infty$, lo que implica $\theta = 0$ en $\eta \to \infty$, mediante esta condición se obtiene

$$K = \frac{-1}{\int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right)\right] d\eta},$$

ecuación que con $\varsigma = \eta\sqrt{Pr/2}$, puede escribirse como

$$\int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 Pr\right)\right] d\eta = \sqrt{\frac{2}{Pr}} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\varsigma^2\right)\right] d\varsigma = \sqrt{\frac{\pi}{2Pr}},$$

lo que proporciona

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K = -\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}.$$

El flujo de calor está dado por

$$q_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k\left(T_p - T_\infty\right)\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -k\left(T_p - T_\infty\right)\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} \sqrt{\frac{u_e(x)}{(2-\beta)\nu x}},$$

y sustituyendo el valor de $\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = K = -\sqrt{\frac{2Pr}{\pi}}$ se obtiene

$$q_p = \frac{k\left(T_p - T_\infty\right)}{x}\sqrt{\frac{2PrRe_x}{\pi(2-\beta)}},$$

siendo $Re_x = xu_e(x)/\nu$. El número de Nusselt es

$$Nu = \frac{q_p x}{k\left(T_p - T_\infty\right)} = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi(2-\beta)}}\right]\sqrt{PrRe_x}.$$

SEGUNDA PREGUNTA

Si x_1 y x_2 representan la coordenada axial y transversal en el eje de la contracción, la ecuación de la energía cinética toma la forma

$$\bar{u}_1 \frac{\partial k}{\partial x_1} = -\overline{u_1'^2}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon,$$

Asumiendo que $\overline{u_1'^2} \approx \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}$, resulta que $k = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right) \approx \frac{1}{2}\left(2\overline{u_1'^2}\right) = \overline{u_1'^2}$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{\partial\left(\bar{u}_1 k\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon.$$

El orden de magnitud de la viscosidad cinemática turbulenta es $\nu_t \sim \ell_{t0}\sqrt{k_0}$, el de la velocidad $u_e \sim CU_0$, el de la coordenada $x_1 \sim L$, el de la energía cinética turbulenta $k \sim k_0$ y el de la disipación $\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim k_0^{3/2}/\ell_{t0}$. Con estos órdenes de magnitud se tiene: $\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1} \sim CU_0 k_0/L$; $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) \sim \ell_{t0} k_0^{3/2}/L^2$; y $\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim k_0^{3/2}/\ell_{t0}$. Refiriendo los órdenes de magnitud de los dos términos del segundo miembro al orden de magnitud del primer miembro se tiene

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right)}{\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1}} \sim \frac{\ell_{t0}}{L} \frac{k_0^{1/2}}{CU_0} \ll 1,$$

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1}} \sim \frac{k_0^{1/2}}{CU_0} \frac{L}{\ell_{t0}} \ll 1,$$

ya que aunque $L/\ell_{t0} \gg 1$, el producto anterior todavía es pequeño, de acuerdo con lo citado en el enunciado. A la vista de esto, la ecuación de la energía cinética turbulenta se reduce a

$$\frac{\partial\left(\bar{u}_1 k\right)}{\partial x_1} = 0,$$

que puede integrarse para dar

$$\bar{u}_1 k = U_0 k_0,$$

que particularizada al final de la contracción, donde $\bar{u}_1 = CU_0$, proporciona la energía cinética turbulenta, k_L, en la salida de la contracción

$$\frac{k_L}{k_0} = \frac{U_0}{CU_0} = \frac{1}{C}.$$

EXAMEN 01/02/2016 (SEGUNDA PREGUNTA)

$\bar{u}_1(x_1=0)=U_0$
$\bar{u}_1(x_1=L)=CU_0$
$k_0 \ll U_0^2$
$l_{t0} \sim k_0^{3/2}/\varepsilon_0$

· $C \gg 1 \rightarrow \frac{k_0^{1/2}}{CU_0} \ll \frac{l_{t0}}{L} \ll 1$

· Posible despreciar variaciones transversales de energía turbulenta *

· $\overline{u_1'^2} \approx \overline{u_2'^2}+\overline{u_3'^2}$ (flujo casi-unidireccional en la dirección x_1)

Ecuación de la energía cinética turbulenta en turbulencia libre:

$$\bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \varepsilon \rightarrow i: \text{variable muda}$$

x_1: coordenada axial en el eje de contracción
x_2: coordenada transversal en el eje de contracción

$i=1$:

$$\bar{u}_1\frac{\partial k}{\partial x_1} + \underbrace{\bar{u}_2 \cancel{\frac{\partial k}{\partial x_2}}}_{0\,(\text{enunciado})} + \underbrace{\bar{u}_3 \cancel{\frac{\partial k}{\partial x_3}}}_{0\,(\text{enunciado})} = -\overline{u_1'^2}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} - \overline{u_1' u_2'}\cancel{\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}} - \overline{u_1'u_3'}\cancel{\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_T\frac{\partial k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu_T \underbrace{\cancel{\frac{\partial k}{\partial x_2}}}_{0\,(\text{enunciado})}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu_T \underbrace{\cancel{\frac{\partial k}{\partial x_3}}}_{0\,(\text{enunciado})}\right) - \varepsilon$$

$$\bar{u}_1\frac{\partial k}{\partial x_1} = -\overline{u_1'^2}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t\frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon = -k\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon$$

$$k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \underbrace{\overline{u_2'^2}+\overline{u_3'^2}}_{\approx \overline{u_1'^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overline{u_1'^2}\right) = \overline{u_1'^2}$$

$$\bar{u}_1\frac{\partial k}{\partial x_1} + k\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial(\bar{u}_1 \cdot k)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t\frac{\partial k}{\partial x_1}\right) - \varepsilon$$

$\nu_t \sim l_{t0}\sqrt{k_0}$
$u_e \sim CU_0$
$x_1 \sim L$
$k \sim k_0$
$\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim k_0^{3/2}/l_{t0}$

$\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1} \sim \frac{CU_0 k_0}{L}$

$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) \sim \frac{l_{t0}(k_0)^{3/2}}{L^2}$

$\varepsilon \sim \varepsilon_0 \sim k_0^{3/2}/l_{t0}$

$$\frac{\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1}}{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu_t\frac{\partial k}{\partial x_1}\right)} \sim \frac{\frac{CU_0 \cancel{k_0}}{\cancel{L}}}{\frac{l_{t0}(k_0)^{\cancel{3/2}}}{L^{\cancel{2}}}} \sim \underbrace{\frac{L}{l_{t0}}}_{\gg 1} \underbrace{\frac{CU_0}{k_0^{1/2}}}_{\gg 1} \gg 1$$

$$\rightarrow \frac{\partial(\bar{u}_1 k)/\partial x_1}{\varepsilon} \sim \frac{CU_0 \cancel{k_0}/L}{k_0^{\cancel{3/2}}/l_{t0}} \sim \underbrace{\frac{CU_0}{k_0^{1/2}}}_{\gg 1}\cdot\underbrace{\frac{l_{t0}}{L}}_{\ll 1} \gg 1$$

La ecuación de la energía cinética turbulenta se reduce a:

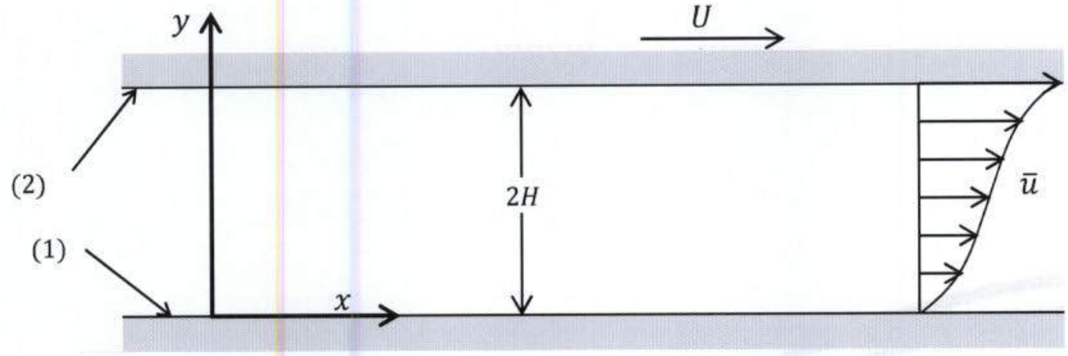
$$\boxed{\frac{\partial(\bar{u}_1 k)}{\partial x_1} = 0} \rightarrow \bar{u}_1 k = U_0 k_0 \rightarrow \text{Particularizada en la zona de contracción: } x_1 = L \left\{ \begin{array}{l} k = k_L \\ \bar{u}_1 = CU_0 \end{array}\right.$$

$$C\cancel{U_0}k_L = \cancel{U_0}k_0 \rightarrow \boxed{\frac{k_L}{k_0} = \frac{1}{C}} \ll 1$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Final 01.02.2016**

El flujo turbulento de Couette es un flujo uni-direccional que se establece entre dos placas paralelas, alineadas según el eje x, separadas una distancia $2H$, que se mueven con una velocidad relativa U. Cuando el número de Reynolds $Re = 2HU/\nu$ es suficientemente elevado, el flujo se hace turbulento. Para analizarlo supondremos que la placa inferior, que denotaremos con el índice (1), está ligada al sistema de referencia, mientras que la superior (2) se desplaza en la dirección del eje $+x$ con velocidad U, tal como se muestra en la figura adjunta. El movimiento de la pared (2) arrastra al fluido y genera un esfuerzo de fricción sobre dicha pared que trata de frenarla, mientras que sobre la superficie (1) el fluido genera un esfuerzo de fricción que tiende a arrastrar la placa inferior en la dirección del movimiento. Mediante una transformación de Galileo, es siempre posible elegir un sistema de referencia en el que el flujo neto en la dirección x es cero. Como resultado, *la presión media sobre la superficie inferior, que llamaremos* p_1*, resulta ser constante para cualquier* x.



Se pretende analizar el flujo turbulento de Couette con $(u^*/U)^2 \cdot (2HU/\nu) \gg 1$, en un canal de paredes lisas, siendo u^* la velocidad de fricción. Para ello:

1) Establecer las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento en las direcciones x, y, demostrando que el gradiente de presión media en la dirección x, $\partial\bar{p}/\partial x$, se anula en todo el flujo. Establecer asimismo las condiciones de contorno apropiadas para la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x.

2) Demostrar que el esfuerzo de fricción que el fluido ejerce sobre las superficies (1) y (2) es igual en valor absoluto y de signo contrario, validando el resultado $\partial\bar{p}/\partial x = 0$ para este flujo.

3) Utilizando las siguientes variables para describir, respectivamente, el flujo sobre las superficies inferior y superior:

Zona (1), asociada a superficie inferior (1): $x_1 = x;\ y_1 = y;\ u_1 = u;\ \ v_1 = v$

Zona (2), asociada a superficie superior (2): $x_2 = -x;\ y_2 = 2H - y;\ u_2 = U - u;\ \ v_2 = -v$

re-escribir la ecuación de cantidad de movimiento longitudinal para el flujo en cada zona, demostrando que en las nuevas variables el flujo medio obedece exactamente a las mismas ecuaciones y condiciones de contorno, y por tanto $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ para $y_1 = y_2$. Utilizando este resultado determinar U_c, el valor de la velocidad media del flujo en el centro del canal, $y = H$, como función de la diferencia de velocidades establecida entre las superficies, U.

4) Demostrar asimismo que el flujo en cada una de las zonas introducidas más arriba incluye regiones de pared y exteriores a la pared, dando las ecuaciones y condiciones de contorno que rigen cada región, el rango de coordenadas y_i $(i = 1,2)$ en que son válidas, y comprobando que existe, para cada zona, una región logarítmica de acoplamiento entre las regiones de pared y las exteriores a las mismas. Comparando la ecuación diferencial que rige la región de pared de cada zona con la que describe el flujo sobre tubos lisos, proponer el valor, para cada zona, de la constante de la región logarítmica escrita en coordenadas de pared.

5) Introducir para cada una de las zonas (1) y (2) la hipótesis de Boussinesq y demostrar que las viscosidades turbulentas verifican:

$$y_1 = y_2:\ \nu_{t1} = \nu_{t2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d\nu_{t1}}{dy_1}\right)_{y_1=H} = \left(\frac{d\nu_{t2}}{dy_2}\right)_{y_2=H} = 0$$

6) A la vista de estos resultados, proponer una ley polinómica para las viscosidades turbulentas fuera de las regiones de pared:

$$\frac{y_i}{H} \gg \frac{\nu}{u^* H}: \qquad \nu_{ti} = A \cdot \frac{y_i}{H} + B \cdot \left(\frac{y_i}{H}\right)^2, \quad i = 1{,}2$$

determinando el valor de las constantes A, B.

Utilizando el resultado obtenido, integrar la ecuación de cantidad de movimiento para obtener la ley de defecto de velocidad $(\bar{u} - U/2)/u^*$ en la mitad inferior del canal, para $\nu/u^* H \ll y/H \leq 1$.

7) Determinar la ley que proporciona la velocidad de fricción como función del número de Reynolds del flujo, Re:

$$\frac{U/2}{u^*} = F(Re), \qquad Re = 2HU/\nu$$

Solución

1) Las ecuaciones para el flujo medio son:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{u} = \bar{u}(y) \tag{1a}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \tag{1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\bar{p} + \overline{v'^2}\right) = 0 \tag{1c}$$

Integrando en la dirección transversal la ecuación (1c) se tiene:

$$\frac{1}{\rho}\bar{p} + \overline{v'^2} = \frac{1}{\rho}p_1 \tag{2}$$

siendo p_1 la presión tanto en la pared inferior como en la superior, donde $\overline{v'^2} = 0$, que el enunciado nos dice que no depende de x. Dado que los promedios temporales de la velocidad tampoco dependen de x, la ecuación (2) implica:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{dp_1}{dx} = 0 \tag{3}$$

En consecuencia la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se escribe como:

$$\frac{d}{dy}\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{d\bar{u}}{dy}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -\overline{u'v'} + \nu\frac{d\bar{u}}{dy} = u^{*2} \tag{4}$$

Siendo $u^{*2} = \nu(d\bar{u}/dy)_{y=0} = \nu(d\bar{u}/dy)_{y=2H}$. Las condiciones de contorno apropiadas para (4) son:

$$y = 0\colon\ \bar{u} = 0, \quad -\overline{u'v'} = 0 \tag{5a}$$

$$y = 2H\colon \quad (U - \bar{u}) = 0, \quad -\overline{u'v'} = 0 \tag{5b}$$

2) El tensor de esfuerzos viscosos del flujo medio viene dado por:

$$\bar{\bar{\tau}}' = \rho\begin{bmatrix} 0 & \nu\dfrac{d\bar{u}}{dy} \\ \nu\dfrac{d\bar{u}}{dy} & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Y dado que la normales exteriores a las superficies (1) y (2) son respectivamente $\vec{n}_1 = \vec{j}$, $\vec{n}_2 = -\vec{j}$, se tiene:

$$\vec{\tau}_{f1} = \rho\begin{bmatrix} 0 & \nu\dfrac{d\bar{u}}{dy} \\ \nu\dfrac{d\bar{u}}{dy} & 0 \end{bmatrix}_{y=0}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \rho\nu\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_{y=0}\vec{\imath} = \rho u^{*2}\vec{\imath} \tag{7a}$$

$$\vec{\tau}_{f2} = \rho \begin{bmatrix} 0 & \nu\dfrac{d\bar{u}}{dy} \\ \nu\dfrac{d\bar{u}}{dy} & 0 \end{bmatrix}_{y=2H} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\rho\nu\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_{y=2H} \vec{\imath} = -\rho u^{*2}\vec{\imath} \tag{7b}$$

de manera que la superficie (1) tiende a ser arrastrada por el fluido, mientras que la superficie (2) tiende a ser frenada. Utilizando las expresiones (7a,7b), aplicando la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral al canal del flujo de Couette entre dos planos cualesquiera situados en coordenadas $x = constante$, se comprueba que en este flujo se debe verificar $\partial\bar{p}/\partial x = 0$.

3) Con las transformaciones sugeridas en el enunciado del problema, el flujo en la mitad inferior de la pared queda descrito por las siguientes ecuaciones y condiciones de contorno:

$$-\overline{u_1'v_1'} + \nu\frac{d\bar{u}_1}{dy_1} = u^{*2} \tag{8a}$$

$$y_1 = 0: \quad \bar{u}_1 = 0, \quad -\overline{u_1'v_1'} = 0 \tag{8b}$$

donde U_c es un valor a determinar como parte de la solución. Análogamente, para el flujo sobre la pared superior se tiene:

$$-\overline{u_2'v_2'} + \nu\frac{d\bar{u}_2}{dy_2} = u^{*2} \tag{9a}$$

$$y_2 = 0: \quad \bar{u}_2 = 0, \quad -\overline{u_2'v_2'} = 0 \tag{9b}$$

Las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno que rigen ambas mitades del flujo escritas en las nuevas variables son idénticas. Por tanto debe verificarse:

$$y_1 = y_2 \quad \rightarrow \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \tag{10}$$

En particular, en $y_1 = y_2 = H$, $\bar{u}_1 = \bar{u} = U_c$, mientras que $\bar{u}_2 = U - \bar{u} = U - U_c$ y la condición (10) implica que:

$$U_c = U - U_c \qquad \rightarrow \qquad U_c = U/2 \tag{11}$$

4) Dado que $(u^*/U)^2(2HU/\nu) \gg 1$, el flujo tanto en la región superior como en la inferior presenta dos regiones claramente diferenciadas: una a distancias $y_i/H = O(1)$, donde el esfuerzo viscoso es despreciable y otra a distancias $y_i u^*/\nu = O(1)$ donde es necesario retener el esfuerzo viscoso. El acoplamiento entre ambas regiones exige la existencia de una tercera región que simultáneamente verifique $y_i/H \ll 1$, $y_i u^*/\nu \gg 1$, donde la solución adopta un perfil logarítmico:

$$y_1u^*/\nu \gg 1: \quad \frac{\bar{u}_1}{u^*} = \frac{1}{\kappa}ln\frac{y_1u^*}{\nu} + C; \qquad y_1/H \ll 1: \quad \frac{\bar{u}_1}{u^*} = \frac{1}{\kappa}ln\frac{y_1}{H} + C_1' \tag{12a}$$

$$y_2u^*/\nu \gg 1: \quad \frac{\bar{u}_2}{u^*} = \frac{1}{\kappa}ln\frac{y_2u^*}{\nu} + C; \qquad y_2/H \ll 1: \quad \frac{\bar{u}_2}{u^*} = \frac{1}{\kappa}ln\frac{y_2}{H} + C_2' \tag{12b}$$

La constante C que aparece en la descripción logarítmica de la ley de la pared para las regiones inferior y superior es idéntica, puesto que la ecuación diferencial y condiciones de contorno que rigen ambas regiones son también idénticas, iguales asimismo a las que describen la región de la pared en tubos lisos. Por tanto debe ser $C \approx 5.2$.

La ecuación de cantidad de movimiento en las regiones inferior y superior del canal, fuera de las regiones de pared viene dada por:

$$y_1/H \gg \nu/Hu^*: \quad -\overline{u_1'v_1'} = u^{*2} \tag{13a}$$

$$y_2/H \gg \nu/Hu^*: \quad -\overline{u_2'v_2'} = u^{*2} \tag{13b}$$

5) Introduciendo la hipótesis de Boussinesq, se tiene:

$$(\nu + \nu_{t1})\frac{d\bar{u}_1}{dy_1} = u^{*2}; \quad y_1 = 0\colon\ \nu_{t1} = 0, \qquad \bar{u}_1 = 0; \quad y_1 = H\colon\ \bar{u}_1 = U/2 \tag{14a}$$

$$(\nu + \nu_{t2})\frac{d\bar{u}_2}{dy_2} = u^{*2}; \quad y_2 = 0\colon\ \nu_{t2} = 0, \qquad \bar{u}_2 = 0; \quad y_2 = H\colon\ \bar{u}_2 = U/2 \tag{14b}$$

Utilizando (10) y las ecuaciones (14a), (14b) se concluye que:

$$y_1 = y_2 \quad \rightarrow \quad \nu_{t1} = \nu_{t2} \tag{15}$$

y en consecuencia:

$$y_1 = y_2 = H \quad \rightarrow \quad \frac{d\nu_{t1}}{dy_1} = \frac{d\nu_{t2}}{dy_2} = 0 \tag{16}$$

6) Para la región inferior, la viscosidad turbulenta adimensional $\tilde{\nu}_{t1} = \nu_{t1}/(u^*H)$ verifica:

$$\xi_1 = \frac{y_1}{H} = 0\colon\ \tilde{\nu}_{t1} = 0; \quad \xi_1 = 1\colon\ \frac{d\tilde{\nu}_{t1}}{d\xi_1} = 0 \tag{17}$$

Además en la capa logarítmica de la región 1 se tiene:

$$\nu/Hu^* \ll \xi_1 \ll 1\colon\ \tilde{\nu}_{t1} = \kappa\xi_1 \tag{18}$$

Teniendo en cuenta (17) y (18) se propone:

$$\nu/Hu^* \ll \xi_1 \leq 1\colon\ \tilde{\nu}_{t1} = \kappa\xi_1(1 - \xi_1/2) \quad \leftrightarrow \quad A = -2B = \kappa \tag{19}$$

Con esta ley, la ecuación de cantidad de movimiento en la región inferior, fuera de la región de la pared, se escribe como:

$$\kappa\xi_1(1 - \xi_1/2)\frac{d}{d\xi_1}\left(\frac{\bar{u}_1}{u^*}\right) = 1; \quad \xi_1 = 1\colon\ \frac{\bar{u}_1}{u^*} = \frac{U}{2u^*} \tag{20}$$

O bien:

$$\frac{\bar{u}_1}{u^*} = \frac{U}{2u^*} + \frac{1}{\kappa}\int_1^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\xi_1(1 - \xi_1/2)} = \frac{U}{2u^*} + \frac{1}{\kappa}ln\left(\frac{\xi_1}{2 - \xi_1}\right) \tag{21}$$

Para $\xi_1 \ll 1$ se recupera la ley logarítmica que aparece en (12a) con:

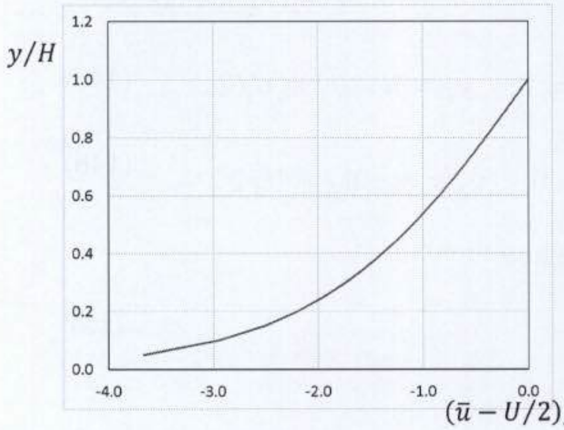
$$C_1' = \frac{U}{2u^*} - \frac{1}{\kappa}ln(2) \tag{22}$$

Asegurando el acoplamiento del perfil de velocidades en la zona logarítmica se tiene:

$$\frac{U/2}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{u^*}{U}\frac{2HU}{\nu}\right) + C \tag{23}$$

o bien, con $C \approx 5.2$:

$$\frac{U/2}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{u^*}{U/2}\frac{2HU}{\nu}\right) + 3.5 \tag{24}$$



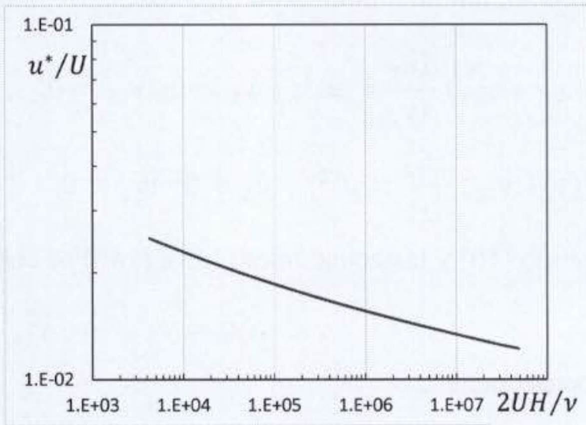


Figura 1: Flujo de Couette turbulento con paredes lisas. Izquierda: perfil del defecto de velocidad. Derecha: velocidad de fricción como función del número de Reynolds.

Aunque no se pide en el ejercicio, en el caso de que las paredes tengan rugosidad y el número de Reynolds sea suficientemente elevado para que podamos considerar paredes totalmente rugosas, la descripción es idéntica, excepto que el perfil de velocidad en la región cercana a la pared se escribe como:

$$y_1/h \gg 1: \quad \frac{\bar{u}_1}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\frac{y_1}{h} + B(u^*h/\nu); \qquad y_1/H \ll 1: \quad \frac{\bar{u}_1}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\frac{y_1}{H} + C_1' \tag{25a}$$

$$y_2/h \gg 1: \quad \frac{\bar{u}_2}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\frac{y_2}{h} + B(u^*h/\nu); \qquad y_2/H \ll 1: \quad \frac{\bar{u}_2}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\frac{y_2}{H} + C_2' \tag{25b}$$

Para Reynolds suficientemente elevado se tiene $u^*h/\nu > 80$, en cuyo caso $B = B_\infty \approx 8.5$. Utilizando el modelo de Boussinesq propuesto anteriormente, la región central del flujo adopta el perfil dado en (21) y el acoplamiento de la velocidad en la región logarítmica implica:

$$\frac{U/2}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\frac{2H}{h} + B_\infty \quad \leftrightarrow \quad \frac{U/2}{u^*} = 10.2 - \frac{1}{\kappa} ln\frac{h}{H} \tag{26}$$

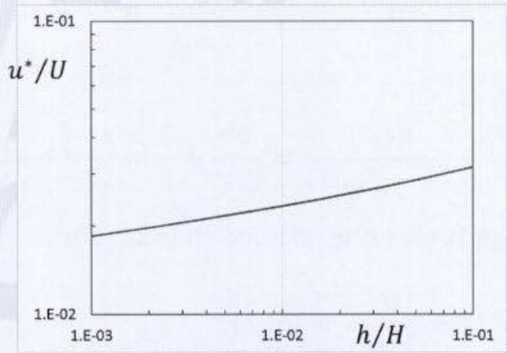
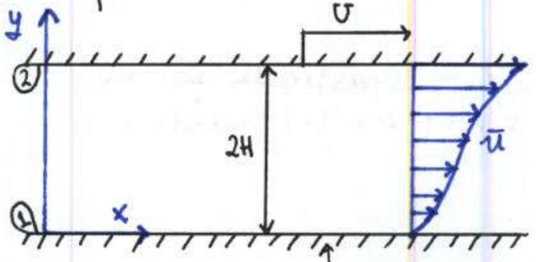


Figura 2: Velocidad de fricción como función de la rugosidad relativa para paredes totalmente rugosas.

EXAMEN 01/02/2016

• Flujo turbulento de Couette, $Re = \dfrac{2HU}{\nu} \gg 1$



$\llcorner p_1$ uniforme $\rightarrow \dfrac{dp_1}{dx} = 0$

$$\left(\frac{u_*}{U}\right)^2 \cdot \left(\frac{2HU}{\nu}\right) \gg 1$$

paredes lisas

u_*: velocidad de fricción

1) Ecuaciones para el flujo medio:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 : \ \bar{u} = \bar{u}(y) \quad \text{(Ec. de la continuidad)}}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right\}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{v'^2}\right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \overline{v'^2}\right) = 0 \xrightarrow{\int dy} \frac{\bar{p}}{\rho} + \overline{v'^2} = G(x)$$

$G(x)$?: en $y=0$: $\left.\begin{matrix}\bar{p} = p_1 \\ \overline{v'^2} = 0\end{matrix}\right\} \rightarrow G(x) = p_1/\rho \rightarrow \boxed{\dfrac{\bar{p}}{\rho} + \overline{v'^2} = p_1/\rho \quad \text{(Ec. cantidad de movimiento en y)}}$

$\llcorner p_1$: cte para cualquier x

$\overline{v'^2}$: no depender de x

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}_1}{dx} = 0}$$

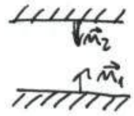
$$0 = \frac{d}{dy}\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)$$

$$\llcorner -\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = G'(x)$$

$G'(x)$?: en $y=0$: $\left(\nu\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y=0} = u_* = \left(\nu\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y=2H}$

$$\boxed{-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_* \ \text{(Ec. de cantidad de movimiento en x)} \quad \Bigg| \quad \text{Condiciones de contorno: } \begin{matrix} y=0: \bar{u}=0, \ -\overline{u'v'}=0 \\ y=2H: \bar{u}=U, \ -\overline{u'v'}=0 \end{matrix}}$$

2) Tensor de esfuerzos viscosos del flujo medio: (fluido sobre pared)



$\vec{n}_1 = \vec{j}$

$\vec{n}_2 = -\vec{j}$

$$\bar{\bar{\tau}}' = \rho\begin{bmatrix} 0 & \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{matrix}\bar{\tau}_{p_1} = \bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{n}_1 \\ \bar{\tau}_{p_2} = \bar{\bar{\tau}}' \, \vec{n}_2\end{matrix}$$

$$\bar{\tau}_{p_1} = \rho\begin{bmatrix} 0 & \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}_{y=0}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \left(\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_0 \vec{i} = \rho u_*^2 \vec{i}$$

$$\bar{\tau}_{P_2} = \rho \begin{bmatrix} 0 & \nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \\ \nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}_{y=2H} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_{y=2H}\vec{i} = -\rho u_*^2\vec{i}$$

$$\boxed{\bar{\tau}_{P_1} = -\bar{\tau}_{P_2}}$$

Superficie (1) tiende a ser arrastrada por el fluido, mientras que superficie (2) tiende a ser frenada.

3) Re-escalar el problema:

Zona ①: $x_1 = x$; $y_1 = y$; $u_1 = u$; $v_1 = v$

Zona ②: $x_2 = -x$; $y_2 = 2H - y$; $u_2 = U - u$; $v_2 = -v$

- Zona ①: $-\overline{u_1'v_1'} + \nu\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial y_1} = u_*^2$

$y_1 = 0$: $\bar{u}_1 = 0$, $-\overline{u_1'v_1'} = 0$

- Zona ②: $-\overline{(-u_2')(-v_2')} + \nu\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y_2} = u_*^2$; $y_2 = 0$: $\bar{u}_2 = 0$, $-\overline{u_2'v_2'} = 0$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial(U-\bar{u}_2)}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y_2}\cdot\underbrace{\frac{\partial y_2}{\partial y}}_{-1} = \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y_2}$$

↳ misma ecuación diferencial y mismas condiciones de contorno:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\overline{u_i'v_i'} + \nu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial y_i} = u_*^2 \\ &y_i = 0 : \bar{u}_i = 0, -\overline{u_i'v_i'} = 0 \end{aligned} \quad \Big\{ i = 1,2} \Rightarrow \boxed{\bar{u}_1 = \bar{u}_2 \text{ cuando } y_1 = y_2}$$

$$y_1 = y_2 = H \rightarrow \begin{aligned} &\bar{u}_1 = \bar{u} = U_c \\ &\bar{u}_2 = U - \bar{u} = U - U_c \end{aligned} \Big\} \rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \rightarrow U_c = U - U_c \rightarrow \boxed{U_c = U/2}$$

4) $\left(\frac{u_*}{U}\right)^2\left(\frac{2HU}{\nu}\right) \gg 1$

$-\overline{u_i'v_i'} + \nu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial y_i} = u_*^2$

$i = 1,2$

$$-\frac{\overline{u_i'v_i'}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial y_i} = 1$$

si $$-\frac{\overline{u_i'v_i'}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\cdot\frac{U}{2H}\frac{\partial(\bar{u}_i/U)}{\partial(y_i/2H)}\cdot\frac{U}{U} = 1$$

$$-\frac{\overline{u_i'v_i'}}{u_*^2} + \underbrace{\left(\frac{U}{u_*}\right)^2\left(\frac{\nu}{2HU}\right)}_{\ll 1}\frac{\partial(\bar{u}_i/U)}{\partial(y_i/2H)} = 1 \qquad \bar{u}_i/U \sim 1 \text{ (zona exterior)}$$

$$\boxed{-\frac{\overline{u_i'v_i'}}{u_*^2} = 1}$$

↳ para que término viscoso despreciable → $\boxed{y_i \sim H}$

Si por el contrario : $-\dfrac{\overline{u_i'v_i'}}{u_*^2} + \dfrac{\nu}{u_*}\cdot\dfrac{\partial(\bar{u}_i/u_*)}{\partial y_i} = 1$

$$\boxed{CC:\ y_i=0 : \left(\nu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i}\right)_{y_i=0} = u_*^2}$$

$$\boxed{-\frac{\overline{u_i'v_i'}}{u_*^2} + \frac{\partial(\bar{u}_i/u_*)}{\partial(y_i u_*/\nu)} = 1} \rightarrow \boxed{\text{si } \frac{y_i u_*}{\nu} \sim 1} \Rightarrow \text{se retienen los efectos viscosos}$$

$$\boxed{\frac{y_i}{H} \ll 1 + \frac{y_i u_*}{\nu} \gg 1} \Rightarrow \text{Zona de acoplamiento}$$

{ · igualdad de velocidades
· igualdad de derivadas de la velocidad

<u>Zona exterior</u> → ley del defecto de velocidades : $\bar{u}_i = u_* F(y_i/H)$

<u>Zona interior</u> → $\bar{u}_i = u_* U_+ (y_i u_*/\nu)$

· Igualdad de derivadas :

$$\cancel{u_*}\frac{dF}{d(y_i/H)} = \cancel{u_*}\cdot\frac{dU_+}{d\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)}\cdot\frac{d\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)}{d(y_i/H)} = H\,\frac{u_*}{\nu}\,\frac{dU_+}{d\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)} \rightarrow \times\left(\frac{y_i}{H}\right)$$

$$\left(\frac{y_i}{H}\right)\frac{dF}{d(y_i/H)} = \left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)\frac{dU_+}{d\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)} = \frac{1}{k} \ ; \quad k : \text{constante de Karman} ,\ k \approx 0{,}41$$

Integrando
$$\begin{cases} dF = \left(\frac{y_i}{H}\right)^{-1} d(y_i/H)\cdot(1/k) \rightarrow \boxed{F = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{y_i}{H}\right) + C_{1i}} \\ dU_+ = \left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)^{-1} d\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right)\cdot(1/k) \rightarrow \boxed{U_+ = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right) + C_2} \end{cases}$$

→ forma de las funciones F y U_+ en la región intermedia (logarítmica)

↳ $C_2 \approx 5{,}2$

↳ Constante C_2 que aparece en la descripción logarítmica de la ley de la pared para las regiones 1 y 2 es idéntica, puesto que la ecuación diferencial y condiciones de contorno que rigen ambas regiones son también idénticas, iguales asimismo a las que describen la región de la pared en tubos lisos.

· Igualdad de velocidades: sustituyendo F y U_+

$$\bar{u}_i = u_*\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y_i}{H}\right) + C_{1i}\right) = u_*\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y_i u_*}{\nu}\right) + C_2\right)$$

$$0 = u_*\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{H u_*}{\nu}\right) + C_2 - C_{1i}\right) \rightarrow \boxed{0 = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{H u_*}{\nu}\right) + (C_2 - C_{1i})}$$

5) <u>Hipótesis de Boussinesq</u> : $\boxed{-\overline{u_i'v_i'} = \nu_{ti}\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i}}$ → Ecuación de cantidad de movimiento queda: $(\nu_{ti}+\nu)\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i} = u_*^2$

↳ $y_1 = y_2 : \nu_{t1} = \nu_{t2} \rightarrow \left(\dfrac{d\nu_{t1}}{dy_1}\right)_{y_1=H} = \left(\dfrac{d\nu_{t2}}{dy_2}\right)_{y_2=H} = 0$

$y_i = 0 : \bar{u}_i = 0,\ \nu_{ti} = 0 \ ; \ y_i = H : \bar{u}_i = U/2$

en $y_1 = y_2 \rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \rightarrow \nu_{t1} = \nu_{t2}$, en consecuencia cuando $y_1 = y_2 = H \rightarrow \boxed{\left(\dfrac{d\nu_{t1}}{dy_1}\right)_{y_1=H} = \left(\dfrac{d\nu_{t2}}{dy_2}\right)_{y_2=H} = 0}$

6) Ley polinómica para las viscosidades turbulentas fuera de las regiones de la pared:

$$\frac{y_i}{H} \gg \frac{\nu}{u_* H} : \nu_{ti} = A \cdot \frac{y_i}{H} + B \cdot \left(\frac{y_i}{H}\right)^2 , i = 1,2 \Rightarrow A, B?$$

$$\rightarrow \tilde{\nu}_{ti} = \frac{\nu_{ti}}{u_* H} \rightarrow \xi_i = \frac{y_i}{H} = 0 : \tilde{\nu}_{ti} = 0 ; \xi_i = 1 : \frac{d\tilde{\nu}_{ti}}{d\xi_i} = 0$$

Capa logarítmica: $\xi_i \ll 1$; $-\frac{\overline{u_i' v_i'}}{u_*^2} = 1 \rightarrow \nu_{ti} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i} = u_*^2$

$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i}$ en región logarítmica $\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i} = u_* \cdot \frac{df}{d(y_i/H)} = \frac{u_*}{k \cdot y_i}$

$$\nu_{ti} \cdot \frac{\cancel{u_*}}{k y_i} = u_*^{\cancel{2}} \rightarrow \nu_{ti} = k u_* y_i \rightarrow \tilde{\nu}_{ti} = k \xi_i$$

$$\left.\begin{array}{l} \xi_i \ll 1 : \tilde{\nu}_{ti} \approx k \xi_i \\ \xi_i \sim 1 : \frac{d\tilde{\nu}_{ti}}{d\xi_i} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \tilde{\nu}_{ti} = k \xi_i \left(1 - \frac{\xi_i}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{A = k} \\ \boxed{B = -\frac{k}{2}} \end{array}\right.$$

$\frac{\bar{u} - U/2}{u_*}$ en $y_i = H$ para $\nu/u_* H \ll y/H \leq 1 \rightarrow \xi_i \sim 1$

Ec cantidad de movimiento

$$\nu_{ti} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y_i} = u_*^2 \rightarrow \frac{\nu_{ti}}{u_* H} \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i/u_*)}{\partial(y_i/H)} = 1 \rightarrow \tilde{\nu}_{ti} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\bar{u}_i}{u_*}\right) = 1$$

$$k\xi_i\left(1 - \frac{\xi_i}{2}\right)\frac{d}{d\xi_i}\left(\frac{\bar{u}_i}{u_*}\right) = 1 \rightarrow k\xi_i\left(1 - \frac{\xi_i}{2}\right)\frac{d}{d\xi_i}\left(\frac{\bar{u}_i - U/2}{u_*}\right) = 1 \quad \left\{ \frac{d}{d\xi_i}\left(\frac{\bar{u}_i - U/2}{u_*}\right) = \frac{1}{k\xi_i\left(1 - \frac{\xi_i}{2}\right)} \right.$$

$$\xi_i = 1 : \frac{\bar{u}_i}{u_*} = \frac{U/2}{u_*} \qquad \xi_i = 1 : \frac{\bar{u}_i - U/2}{u_*} = 0$$

$$\int_0^{(\bar{u}_i - U/2)/u_*} d\left(\frac{\bar{u}_i - U/2}{u_*}\right) = \frac{1}{k}\int_1^{\xi_i} \frac{d\xi_i}{\xi_i\left(1 - \frac{\xi_i}{2}\right)} = \frac{1}{k}\int_1^{\xi_i} \frac{2\,d\xi_i}{\xi_i(2 - \xi_i)} = \frac{1}{k}\left[\int_1^{\xi_i} \frac{d\xi_i}{\xi_i} + \int_1^{\xi_i} \frac{d\xi_i}{(2 - \xi_i)}\right] = \frac{1}{k}\left(\ln \xi_i - \ln(2 - \xi_i)\right)$$

$$\boxed{\frac{\bar{u}_i - U/2}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\xi_i}{2 - \xi_i}\right)}$$

7) $\frac{U/2}{u_*} = F(Re)$

Para $\xi_i \ll 1 \longrightarrow \frac{\bar{u}_i}{u_*} = \frac{1}{k}\ln(\xi_i) + C_{1i} \longrightarrow C_{1i} = \frac{U/2}{u_*} - \frac{1}{k}\ln 2$

De (6) $\rightarrow \frac{\bar{u}_i - U/2}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\xi_i}{2 - \cancel{\xi_i}}\right)$

$$0 = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{H u_*}{\nu}\right) + C_2 - C_{1i}$$

$$0 = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{H u_*}{\nu}\right) + C_2 - \frac{U/2}{u_*} + \frac{1}{k}\ln 2 \rightarrow \frac{U/2}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{u_*}{U} \cdot \overbrace{\frac{2HU}{\nu}}^{Re}\right) + \overset{\simeq 5,2}{C_2} + \ln 2 - \ln 2$$

$$\boxed{\frac{U/2}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{u_*}{U/2} \cdot Re\right) + 4{,}5}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 04-07-2016**

PRIMERA PREGUNTA

Las ecuaciones que determinan la evolución de la estela bidimensional lejana de un cuerpo simétrico sometido a la corriente uniforme, U_∞, para un líquido de viscosidad cinemática ν, son

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

válidas tanto para régimen laminar ($-\overline{u'v'}=0$) como para régimen turbulento ($\nu\left(\partial u/\partial y\right)\approx 0$).

Se trata de determinar el orden de magnitud del espesor $\delta(x)$ de la estela lejana y el orden de magnitud del defecto de velocidades $\tilde{u}=u-U_\infty \ll U_\infty$ en los casos tanto laminar como turbulento. Para ello simplifiquen la ecuación de cantidad de movimiento adecuadamente y obtengan una relación integral entre el defecto de velocidades $\tilde{u}\ll U_\infty$ y la resistencia D por unidad de envergadura del cuerpo.

SEGUNDA PREGUNTA

Las ecuaciones que gobiernan la capa bidimensional de convección libre de un fluido en torno a un obstáculo (longitud característica ℓ), a temperatura T_P diferente de la del medio, y en ausencia de convección forzada, son

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\beta\left(T-T_\infty\right)f_{mx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \qquad u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

con la difusitividad térmica $\alpha=k/\rho c_p$ y $\theta=\left(T-T_\infty\right)/\left(T_P-T_\infty\right)$.

Denominando q al valor característico del flujo de calor en la pared del obstáculo, se pide determinar el orden de magnitud de la velocidad característica u_c y del número de Nusselt $Nu=q\ell/k\left(T_P-T_\infty\right)$ cuando el número de Prandtl ν/α es grande frente a la unidad y cuando es pequeño. Recuerden que el número de Grashof es $Gr=\beta\triangle T f_{mx}\ell^3/\nu^2$.

SOLUCIÓN

Primera pregunta

Como la velocidad $u = U_\infty + \tilde{u}$ la ecuación de la continuidad proporciona

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim \tilde{u}\frac{\delta}{x},$$

mientras que la de cantidad de movimiento se simplifica de la forma

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

ya que los términos $\tilde{u}\,(\partial \tilde{u}/\partial x)$ y $v\,(\partial \tilde{u}/\partial y)$ son muy pequeños comparados con $U_\infty\,(\partial \tilde{u}/\partial x)$. Multiplicando la ecuación anterior por dy e integrándola entre $+\infty$ y $-\infty$ se obtiene

$$U_\infty \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}dy = 0,$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}dy = -I = -\frac{D}{\rho U_\infty},$$

de esta ecuación se deduce

$$\tilde{u}\delta \sim I. \tag{2}$$

En el caso laminar $-\overline{u'v'} = 0$ y en la ecuación de cantidad de movimiento (1) se tiene $U_\infty\,(\partial \tilde{u}/\partial x) = \nu\left(\partial^2 \tilde{u}/\partial y^2\right)$ de modo que

$$\frac{U_\infty}{x} \sim \frac{\nu}{\delta^2}. \tag{3}$$

De (3) se obtiene

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}},$$

y llevando este valor de δ a la relación (2) se obtiene

$$\tilde{u} \sim \sqrt{\frac{I^2 U_\infty}{\nu x}} \sim \frac{D}{\rho U_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}.$$

En el caso turbulento, el término viscoso desaparece y además $-\overline{u'v'} \sim \tilde{u}^2$, de modo que de la ecuación de cantidad de movimiento (1) se obtiene $U_\infty\,(\partial \tilde{u}/\partial x) = \partial\left(-\overline{u'v'}\right)/\partial y \sim \tilde{u}^2/\delta$, lo que proporciona

$$\frac{U_\infty}{x} \sim \frac{\tilde{u}}{\delta}. \tag{4}$$

Las relaciones (2) y (4) permiten escribir

$$\delta \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}} \sim \sqrt{\frac{Dx}{\rho U_\infty^2}}; \quad y \quad \tilde{u} \sim \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}} \sim \sqrt{\frac{D}{\rho x}}.$$

Segunda pregunta

Si el número de Prandtl es grande, la capa térmica es muy delgada frente a la viscosa, pero los efectos de flotabilidad son sólo importantes en la capa térmica, que es donde tienen lugar los cambios de temperatura. En este caso el término de flotabilidad y el viscoso deben ser del mismo orden, este último evaluado en la capa térmica. Esto es:

$$\beta\,(T - T_\infty)\,f_{mx} \sim \frac{\nu u_c}{\delta_T^2} \quad \Rightarrow \quad u_c \sim \frac{\beta\,(T - T_\infty)\,f_{mx}\delta_T^2}{\nu},$$

y de la ecuación de la energía se obtiene

$$\frac{\delta_T}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{RePr}},$$

EXAMEN 04/07/2016 (PRIMERA PREGUNTA)

- Estela bidimensional lejana de un cuerpo simétrico sometido a la corriente uniforme:

  - Ec. continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

  - Ec. cant. mov.: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'} + \cancel{\nu\frac{\partial u}{\partial y}}\right)$ → 0 (ausencia de paredes)

Caso turbulento

velocidad: $U = U_\infty + \tilde{u} \longrightarrow \frac{\partial(U_\infty+\tilde{u})}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$; $\tilde{u} \ll U_\infty$

- Ec. cont.: $\frac{\partial(U_\infty+\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\tilde{u}}{x} \sim \frac{v}{\delta} \rightarrow v \sim \tilde{u}\frac{\delta}{x}$

- Ec. cant. mov.: $\underbrace{U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}}_{\sim \frac{U_\infty\tilde{u}}{x}} + \underbrace{\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}}_{\sim\frac{\tilde{u}^2}{x}} + \underbrace{v\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}}_{\sim v\frac{\tilde{u}}{\delta}\sim\frac{\tilde{u}^2}{x}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)$

$\gg$ $\sim \tilde{u}^2/x$

$$\frac{U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}}{\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+v\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}} \sim \frac{U_\infty\tilde{u}/\cancel{x}}{\tilde{u}^2/\cancel{x}} \sim \frac{U_\infty}{\tilde{u}} \gg 1$$

La ec. de cant. de movimiento queda: $U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)$

multiplicándola por dy e integrando entre $-\infty$ y $+\infty$:

$$U_\infty\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} d\left(-\overline{u'v'}\right) = \left(-\overline{u'v'}\right)_{-\infty}^{+\infty} = 0 \longrightarrow$$

↑ no hay fluctuaciones

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}\,dy = cte = -\frac{D}{\rho U_\infty} = -I \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}\,dy = -\frac{D}{\rho U_\infty}}$$

$\tilde{u}\,\delta(x) \sim I \longrightarrow \tilde{u} \sim I/\delta(x)$

$$U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right) \rightarrow U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right) \rightarrow \frac{U_\infty\cancel{\tilde{u}}}{x} \sim \frac{\tilde{u}^{\cancel{2}}}{\delta(x)} \sim \frac{I}{\delta(x)^2}$$

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}} \sim \sqrt{\frac{Dx}{\rho U_\infty^2}} \rightarrow \tilde{u} \sim \frac{I}{\delta(x)} \sim \frac{I\sqrt{U_\infty}}{\sqrt{Ix}} \sim \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}} \sim \sqrt{\frac{D}{\rho x}}$$

$$\boxed{\delta(x) \sim \sqrt{\frac{Dx}{\rho U_\infty^2}}} \qquad \boxed{\tilde{u} \sim \sqrt{\frac{D}{\rho x}}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Extraordinario 04.07.2016**

Se desea analizar la evolución aproximada de las magnitudes globales que caracterizan a una capa límite turbulenta que se desarrolla sobre una placa plana alineada con el eje x, sometida a un flujo exterior de velocidad constante U_e en la dirección x. Específicamente, se desea describir la evolución del espesor de la capa límite Δ, y de la velocidad de fricción u^*, asumiendo que en un punto de la placa, que se selecciona como origen de coordenadas $x = 0$, adoptan respectivamente valores Δ_0 y u_0^*.

Las ecuaciones que proporcionan la evolución de Δ y u^* son la ecuación integral de Karman y la de acoplamiento en ausencia de gradiente de presiones:

$$\frac{U_e}{u^{*2}}\frac{d}{dx}(\Delta u^*) = 1$$

$$\frac{U_e}{u^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{\Delta u^*}{\nu}\right) + B'$$

con $B' \approx 4.6$. Para analizar la evolución de la capa límite se definen las variables adimensionales:

$$\tilde{\Delta}= \frac{\Delta}{\Delta_0}, \quad \tilde{u}^* = \frac{u^*}{u_0^*}$$

Se pide:

1) Escribir las ecuaciones y condiciones de contorno adimensionales que dan la evolución de $\tilde{\Delta}$ y $\tilde{u}^*$. Determinar una relación de ligadura entre los valores iniciales Δ_0 y u_0^*. Obtener también, en función los parámetros que aparecen en el problema, el valor característico de la longitud l_{cx} a lo largo de la placa en que se producen cambios de orden unidad en alguna de las magnitudes $\tilde{\Delta}$, $\tilde{u}^*$.

2) Asumiendo que $\kappa U_e/u_0^* \gg 1$, y utilizando la ecuación de acoplamiento, demostrar que las variaciones a lo largo de la placa de la velocidad de fricción adimensional $\tilde{u}^*$ son mucho menores que las que experimenta el espesor adimensional de la capa límite, $\tilde{\Delta}$, comparando los valores de las derivadas $d\tilde{u}^*/dx$ y $d\tilde{\Delta}/dx$. A la vista de este resultado, simplificar las ecuaciones de evolución de la capa límite, obteniendo, el valor simplificado de $(d\Delta/dx)_{x=0}$ y de $(du^*/dx)_{x=0}$ como función de los parámetros del problema.

3) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior determinar, en función de x, las variaciones de Δ y de u^* en el *entorno* de $x = 0$.

Solución

1) La relación de ligadura entre Δ_0, u_0^* es inmediata puesto que deben satisfacer la ecuación de acoplamiento:

$$\frac{U_e}{u_0^*} = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{\Delta_0 u_0^*}{\nu}\right) + B' \tag{1}$$

Restando esta ecuación de la de acoplamiento para valores arbitrarios de Δ, u^* se tiene:

$$\frac{U_e}{u_0^*}\left(\frac{u_0^*}{u^*} - 1\right) = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{\Delta u^*}{\Delta_0 u_0^*}\right) \tag{1a}$$

Introduciendo la adimensionalización sugerida en el enunciado en la ecuación de Karman y en la de acoplamiento modificada (1a):

$$\frac{U_e \Delta_0}{u_0^*}\frac{1}{\tilde{u}^{*2}}\frac{d}{dx}(\tilde{\Delta}\tilde{u}^*) = 1 \tag{2a}$$

$$ln(\tilde{\Delta}\tilde{u}^*) = \frac{\kappa U_e}{u_0^*}\left(\frac{1}{\tilde{u}^*} - 1\right) \tag{2b}$$

$$x = 0: \quad \tilde{\Delta} = \tilde{u}^* = 1 \tag{2c}$$

La ecuación (2a) proporciona la longitud característica a lo largo del eje x en que se producen cambios de orden unidad en $\tilde{\Delta}\tilde{u}^*$:

$$l_{cx} \sim \frac{U_e}{u_0^*}\Delta_0 \tag{3}$$

Definiendo $\tilde{x} = (u_0^*/U_e)\cdot(x/\Delta_0)$, el problema adimensional se escribe como:

$$\frac{1}{\tilde{u}^{*2}}\frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{\Delta}\tilde{u}^*) = 1 \tag{4a}$$

$$ln(\tilde{\Delta}\tilde{u}^*) = \frac{\kappa U_e}{u_0^*}\left(\frac{1}{\tilde{u}^*} - 1\right) \tag{4b}$$

$$\tilde{x} = 0: \quad \tilde{\Delta} = \tilde{u}^* = 1 \tag{4c}$$

2) Derivando con respecto de $\tilde{x}$ la ecuación de acoplamiento adimensional (4b) se obtiene:

$$\frac{d\tilde{u}^*}{d\tilde{x}} = -\frac{1}{1 + \frac{\kappa U_e}{u_0^*}\frac{1}{\tilde{u}^*}}\frac{\tilde{u}^*}{\tilde{\Delta}}\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}} \tag{5}$$

de modo que:

$$\left(\frac{d\tilde{u}^*}{d\tilde{x}}\right)\bigg/\left(\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}\right) = O\left(\left(\frac{\kappa U_e}{u_0^*}\right)^{-1}\right) \ll 1 \tag{6}$$

Incorporando este resultado a la ecuación de Karman:

$$\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}} \approx \tilde{u}^*, \quad \frac{d\tilde{u}^*}{d\tilde{x}} \approx -\left(\frac{\kappa U_e}{u_0^*}\right)^{-1} \frac{\tilde{u}^{*3}}{\tilde{\Delta}} \tag{7}$$

En consecuencia:

$$\left(\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}=0} \approx 1, \quad \left(\frac{d\tilde{u}^*}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}=0} \approx -\left(\frac{\kappa U_e}{u_0^*}\right)^{-1} \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_{x=0} \approx \frac{u_0^*}{U_e}, \quad \left(\frac{du^*}{dx}\right)_{x=0} \approx -\frac{u_0^*}{\kappa\Delta_0}\left(\frac{u_0^*}{U_e}\right)^2 \tag{8}$$

3) La integración de las expresiones aproximadas (7) alrededor de $x = 0$ proporciona:

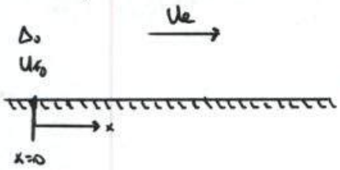
$$\tilde{\Delta} \approx 1 + \tilde{x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\Delta - \Delta_0}{\Delta_0} \approx \frac{u_0^* x}{U_e \Delta_0} \tag{9a}$$

$$\tilde{u}^* \approx 1 - \left(\frac{\kappa U_e}{u_0^*}\right)^{-1} \tilde{x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{u_0^* - u^*}{u_0^*} \approx \left(\frac{\kappa U_e}{u_0^*}\right)^{-1} \cdot \frac{u_0^* x}{U_e \Delta_0} \tag{9b}$$

De acuerdo con (7) y (9b) las variaciones de $\tilde{u}^*$ de orden unidad se producen en distancias de orden $\Delta\tilde{x} \sim \kappa U_e/u_0^*$, de manera que las expresiones (9a), (9b) son válidas para $u_0^* x/(U_e\Delta_0) \ll \kappa U_e/u_0^*$, o bien $(x/\Delta_0) \ll \kappa(U_e/u_0^*)^2$

EXAMEN 04/07/2016

Capa límite turbulenta que se desarrolla sobre una placa plana alineada con el eje x.



Ausencia de gradiente de presiones ($\Pi = 0$) → Capa límite en equilibrio

- Ecuación integral de Karman: $\frac{U_e}{u_*^2}\frac{d}{dx}(\Delta u_*) = 1$

- Ecuación de acoplamiento: $\frac{U_e}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\Delta u_*}{\nu}\right) + B'$
con $B' \approx 4{,}6$

– Variables adimensionales: $\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta_0}$, $\tilde{u}_* = \frac{u_*}{u_{*0}}$

- Adimensionalizando ecuación integral de Karman:

1) $\frac{U_e}{\tilde{u}^2\cdot u_{*0}^{\cancel{2}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\Delta_0\cdot\tilde{\Delta}\cdot \cancel{u_{*0}}\tilde{u}_*\right) = 1 \rightarrow \frac{U_e}{u_{*0}}\cdot\frac{\Delta_0}{\tilde{u}^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\tilde{\Delta}\cdot\tilde{u}_*\right) = 1 \rightarrow \frac{U_e}{u_{*0}}\cdot\Delta_0\cdot\frac{d}{dx}(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*) = \tilde{u}_*^2$

↳ $\tilde{x} = \frac{x}{\left(\frac{U_e}{u_{*0}}\right)\cdot\Delta_0} \Rightarrow \underline{\frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*) = \tilde{u}_*^2}$ (1)

→ Relación de ligadura entre Δ_0 y u_{*0} → Ecuación de acoplamiento:

$$\boxed{\frac{U_e}{u_{*0}} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\Delta_0 u_{*0}}{\nu}\right) + B'}$$

- Adimensionalizando ecuación de acoplamiento:

$$\frac{U_e}{u_{*0}\cdot\tilde{u}_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\tilde{\Delta}\tilde{u}_*\,\Delta_0 u_{*0}}{\nu}\right) + B' = \underbrace{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\Delta_0 u_{*0}}{\nu}\right) + B'}_{\frac{U_e}{u_{*0}}} + \frac{1}{k}\ln(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*)$$

$$\frac{U_e}{u_{*0}}\cdot\frac{1}{\tilde{u}_*} = \frac{U_e}{u_{*0}} + \frac{1}{k}\ln(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*)$$

↳ $\underline{\ln(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*) = k\frac{U_e}{u_{*0}}\left(\frac{1}{\tilde{u}_*} - 1\right)}$ (2)

Ecuaciones adimensionales:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{d\tilde{x}}(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*) = \tilde{u}_*^2 \\ \ln(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*) = k\frac{U_e}{u_{*0}}\left(\frac{1}{\tilde{u}_*} - 1\right) \\ \text{C.C.: } \tilde{x} = 0 : \tilde{\Delta}(0) = \tilde{u}_*(0) = 1 \end{array}}$$

Ecuación donde aparece $\tilde{x}$ → Karman:

$\left.\begin{array}{l}\tilde{u}_* \sim 1 \\ \tilde{\Delta} \sim 1\end{array}\right\} \rightarrow \tilde{x} \sim 1$

$\tilde{x} = \frac{x \sim l_{cx}}{\left(\frac{U_e}{u_{*0}}\right)\cdot\Delta_0} \sim 1 \Rightarrow \boxed{l_{cx} \sim \frac{U_e\cdot\Delta_0}{u_{*0}}}$

2) $\frac{kU_e}{u_{*0}} \gg 1 \rightarrow \varepsilon = \frac{u_{*0}}{kU_e} \ll 1 \rightarrow \varepsilon\ln\tilde{\Delta}\tilde{u}_* = \frac{1}{\tilde{u}_*} - 1$ (Ec. de acoplamiento)

↳ Derivando respecto de $\tilde{x}$ → $\varepsilon\frac{(d\tilde{\Delta}\tilde{u}_*/dx)}{\tilde{\Delta}\tilde{u}_*} = -\frac{1}{\tilde{u}_*^2}\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}} = \varepsilon\frac{\tilde{\Delta}\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}} + \tilde{u}_*\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}}{\tilde{\Delta}\tilde{u}_*}$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\tilde{u}_*}\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{\Delta}}\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}\right) = -\frac{1}{\tilde{u}_*^2}\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}} \rightarrow \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{u}_*} + \frac{1}{\tilde{u}_*^2}\right)\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}} = -\frac{\varepsilon}{\tilde{\Delta}}\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}} = \left(\frac{1+\varepsilon\tilde{u}_*}{\tilde{u}_*^2}\right)\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}}$$

$$\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}} = -\frac{\varepsilon\tilde{u}_*^2}{1+\varepsilon\tilde{u}_*}\cdot\frac{1}{\tilde{\Delta}}\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}} \rightarrow \boxed{\frac{d\tilde{u}/d\tilde{x}}{d\tilde{\Delta}/d\tilde{x}} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}}\cdot\frac{\varepsilon\tilde{u}_*^2}{1+\varepsilon\tilde{u}_*} \sim \varepsilon \ll 1}$$

→ Ecuación de Karman:

$$\frac{d(\tilde{\Delta}\tilde{u}_*)}{d\tilde{x}} = \tilde{u}_*^2 \rightarrow \cancel{\tilde{u}_*}\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}} + \tilde{\Delta}\underbrace{\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}}}_{\text{despreciable}} = \cancel{\tilde{u}_*^2} \rightarrow \frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}} = \tilde{u}_* \rightarrow \left(\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}=0} = (\tilde{u}_*)_{\tilde{x}=0} = 1$$

$$\left(\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}=0} = \left(\frac{1}{\cancel{\Delta_0}}\frac{d\Delta}{dx}\cdot\frac{u_e}{u_{*0}}\cdot\cancel{\Delta_0}\right)_{x=0} = 1 \rightarrow \boxed{\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_{x=0} = \frac{u_{*0}}{u_e}}$$

$$\frac{d\tilde{u}_*/d\tilde{x}}{d\tilde{\Delta}/d\tilde{x}} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}}\cdot\frac{\varepsilon\tilde{u}_*^2}{1+\varepsilon\tilde{u}_*} \rightarrow \left(\frac{du_*}{d\tilde{x}}\right) = -\frac{(d\tilde{\Delta}/d\tilde{x})}{\tilde{\Delta}}\cdot\frac{\varepsilon\tilde{u}_*^2}{1+\varepsilon\tilde{u}_*} = -\frac{\tilde{u}_*}{\tilde{\Delta}}\cdot\frac{\varepsilon\tilde{u}_*^2}{1+\varepsilon\tilde{u}_*}$$

$$\frac{du_*}{d\tilde{x}} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}}\cdot\frac{\varepsilon\tilde{u}_*^3}{1+\cancel{\varepsilon\tilde{u}_*}} \approx -\frac{1}{\tilde{\Delta}}\cdot\varepsilon\tilde{u}_*^3 \rightarrow \left(\frac{d\tilde{u}_*}{d\hat{x}}\right)_{\tilde{x}=0} = -\varepsilon$$

$$\left(\frac{d\tilde{u}_*}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}=0} = \left(\frac{1}{u_{*0}}\frac{du_*}{dx}\cdot\frac{u_e}{u_{*0}}\cdot\Delta_0\right)_{x=0} = -\varepsilon = -\frac{u_{*0}}{ku_e} \rightarrow \boxed{\left(\frac{du_*}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{u_{*0}}{k\Delta_0}\cdot\left(\frac{u_{*0}}{u_e}\right)^2}$$

3) Integrando $\left(\frac{d\tilde{\Delta}}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}=0} = 1 \rightarrow \tilde{\Delta} = \tilde{x} + C_1 \longrightarrow \tilde{\Delta} = \tilde{x} + 1$

$\tilde{x} = 0 \rightarrow 1 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 1$

En el entorno a $\tilde{x} = 0 \rightarrow \underline{\tilde{\Delta} \approx \tilde{x} + 1}$

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} \approx \frac{x}{u_e\Delta_0}u_{*0} + 1 \rightarrow \frac{\Delta}{\Delta_0} - 1 = \frac{x}{u_e\Delta_0}u_{*0} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta-\Delta_0}{\Delta_0} \approx \frac{u_{*0}x}{u_e\Delta_0}}$$

Integrando $\left(\frac{d\tilde{u}_*}{d\hat{x}}\right)_{\hat{x}=0} = -\varepsilon \rightarrow \tilde{u}_* \approx -\varepsilon\tilde{x} + C_1 = \underline{1 - \varepsilon\tilde{x} = \tilde{u}_*}$

$C_1 = 1$

$$\frac{u_*}{u_{*0}} = 1 - \varepsilon\left(\frac{x\cdot u_{*0}}{u_e\Delta_0}\right) = 1 - \left(\frac{u_{*0}}{ku_e}\right)\left(\frac{x\cdot u_{*0}}{u_e\Delta_0}\right) \rightarrow \boxed{\frac{u_* - u_{*0}}{u_{*0}} = -\left(\frac{ku_e}{u_{*0}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{u_{*0}x}{u_e\Delta_0}\right)}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO. ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 05–02–2015**

La ecuación de cantidad de movimiento que determina el movimiento turbulento de un líquido por un tubo liso de radio R es

$$\frac{ru_*^2}{R} - \overline{u'v_r'} + \nu\frac{dU}{dr} = 0,$$

donde U es la velocidad media, $-\rho\overline{u'v_r'}$ son los esfuerzos turbulentos, r es la coordenada radial, $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$ es la denominada velocidad de fricción, o velocidad aparente, con τ_p el esfuerzo en la pared, ρ la densidad del líquido y ν la viscosidad cinemática. El gasto volumétrico que circula por el tubo es $Q = \pi R^2 U_0$, de modo que el esfuerzo en la pared se puede escribir como $\tau_p = (\lambda/8)\,\rho U_0^2$, siendo λ el coeficiente de fricción de Darcy.

Sabiendo que $\lambda U_0 R/\nu \gg 1$, se pide:

1.- Significado físico de cada uno de los términos de la ecuación de cantidad de movimiento.

2.- Simplificar la ecuación de cantidad de movimiento para distancias $r \sim R$ y determinar el esfuerzo turbulento en esta región en función de u_* y r/R. Indicar la zona de validez de la expresión de estos esfuerzos turbulentos. Esta es la denominada zona del defecto de velocidades, en la que $U - U_0 \sim u_*$. Escriban la forma de la solución.

3.- Para distancias r cercanas a la pared, tales que $R - r \ll R$, la velocidad $U \sim u_*$. Simplifiquen la ecuación de cantidad de movimiento en esta región cercana a la pared, donde los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden y determinen el orden de magnitud del tamaño de esta región. Escriban también la forma de la solución en esta región.

4.- Mostrar que la ecuación simplificada del apartado 2), cuando $r/R \to 1$, tiende al mismo valor que la ecuación simplificada del apartado 3) para distancias, medidas desde la pared, grandes con respecto a su tamaño característico. Determinar los esfuerzos turbulentos, en función de u_*, en esta región intermedia denominada zona logarítmica. Forma de la solución en la región logarítmica.

5.- Si la velocidad $U_0 = 1\,m/s$, el radio del tubo $R = 0{,}5\,m$, la densidad del líquido $\rho = 1000\,kg \times m^{-3}$ y la viscosidad cinemática del líquido $\nu = 10^{-5}\,m^2/s$, determinen el coeficiente de fricción de Darcy[1], la velocidad u_* y el tamaño característico de la región cercana a la pared.

6.- Escriban la ecuación de la cantidad de movimiento en forma integral entre dos secciones del tubo situadas a $100\,m$ de distancia y determinen la caída de presión entre estas dos secciones, para los datos del apartado 5).

[1] El coeficiente de fricción de Darcy puede aproximarse por la relación

$$\lambda = 1{,}325\left[ln\left(\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^{-2},$$

donde Re es el número de Reynolds basado en U_0 y el diámetro D del tubo.

SOLUCIÓN

1.- El primer sumando ru_*^2/R proviene del término de presiones, el segundo $-\overline{u'v'_r}$ es proporcional a los esfuerzos turbulentos y el tercer sumando $\nu dU/dr$ es proporcional a los esfuerzos viscosos.

2.- Para $r \sim R$, la velocidad es del orden de U_0 y los esfuerzos aparentes de Reynolds son $\overline{u'v'_r} \sim u_*^2$, de modo que los dos primeros términos son del mismo orden

$$\frac{ru_*^2}{R} \sim \overline{u'v'_r} \sim u_*^2,$$

mientras que el último término es

$$\nu \frac{dU}{dr} \sim \frac{\nu U_0}{R},$$

de modo que la relación entre este último término y los otros dos es

$$\frac{\nu U_0/R}{u_*^2} \sim \left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2 \frac{\nu}{U_0 R} \ll 1.$$

De acuerdo con este resultado la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$\overline{u'v'_r} = u_*^2 \frac{r}{R}, \tag{1}$$

de modo que los esfuerzos turbulentos varían linealmente con el radio, que se anulan en el centro del tubo pero no se anulan en la pared, donde $r \to R$, de modo que para distancias $R - r \ll R$ la expresión anterior del esfuerzo viscoso no es válida.

Salvo en esta última región cercana a la pared, con $y = R - r$, la distribución de velocidad es de la forma

$$U = U_0 + u_* F\left(\frac{y}{R}\right),$$

que es la ley del defecto de velocidades.

3.- En la zona cercana a la pared, donde $U \sim u_*$, los órdenes de magnitud de los dos primeros sumandos siguen siendo los mismos que anteriormente. El término viscoso es ahora

$$\nu \frac{dU}{dr} \sim \frac{\nu u_*}{\ell_c},$$

que comparado con los otros dos términos proporciona

$$\frac{\nu u_*/\ell_c}{u_*^2} \sim 1,$$

que es de orden unidad ya que los efectos viscosos han de ser tan importantes como el que más, para que se pueda imponer la condición de velocidad nula en la pared. De la relación anterior se obtiene la longitud característica de la región cercana a la pared ℓ_c

$$\ell_c \sim \frac{\nu}{u_*}.$$

Como $u_* R/\nu = (u_*/U_0)(U_0 R/\nu) \gg 1$, se tiene $\ell_c \ll R$, de modo que $r/R \to 1$ y la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$1 - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{d\,(U/u_*)}{d\,(yu_*/\nu)} = 0, \tag{2}$$

donde $y_+ = yu_*/\nu$ es de orden unidad, lo mismo que $U_+ = U/u_*$. La solución es de la forma

$$U_+ = f\,(y_+)\,.$$

4.- Cuando $r \to R$, la ecuación (1) se reduce a $-\overline{u'v'_r} = u_*^2$, mientras que la ecuación (2) para $yu_*/\nu \gg 1$ se reduce $-\overline{u'v'_r} = u_*^2$. De modo que ambas soluciones coinciden y esta región (en la que $yu_*/\nu \gg 1$ pero $y/R \ll 1$) es de validez común. Las ecuaciones que determinan el campo de velocidades en esta región logarítmica son

$$\left(\frac{y}{R}\right) \frac{dF}{d(y/R)} = y_+ \frac{dU_+}{dy_+} = \frac{1}{\kappa},$$

lo que proporciona

$$F = \frac{1}{\kappa} ln\left(\frac{y}{R}\right) + C_1\,; \quad U_+ = \frac{1}{\kappa} ln\, y_+ + C_2,$$

siendo κ la constante de Karman y C_1 y C_2 dos constantes de integración.

5.- El número de Reynolds basado en el diámetro es

$$Re = \frac{U_0 2R}{\nu} = 10^5,$$

con este valor del Reynolds, el coeficiente de fricción de Darcy es

$$\lambda = 1{,}325\left[ln\left(\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^{-2} = 0{,}018.$$

La velocidad de fricción es tal que

$$\frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \sqrt{\frac{0{,}018}{8}} = 0{,}047,$$

de modo que $u_* = 47mm/s$. Del mismo modo, $\ell_c \sim \nu/u_* = 10^{-5}/0{,}047 = 0{,}000212\,m = 212\,\mu m$.

6.- La ecuación de cantidad de movimiento en forma integral proporciona

$$(p_1 - p_2)\,\pi R^2 = \tau_p 2\pi RL,$$

de modo que

$$p_1 - p_2 = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2 \frac{2L}{R} = \frac{\lambda L}{2D}\rho U_0^2 = \frac{0{,}018 \times 100}{2} \times 1000 \times 1^2 = 900\,Pa$$

EXAMEN 05/02/2015

Tubo liso Radio R, Ec. cant. mov: $\frac{r u_*^2}{R} - \overline{u'v'_r} + \nu \frac{dU}{dr} = 0$; $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$

$Q = \pi R^2 U_0$; $\tau_p = (1/8)\rho U_0^2$

$\lambda U_0 R/\nu \gg 1$

1) Significado físico de cada uno de los términos de la ecuación de cantidad de mov.:

$\frac{r u_*^2}{R}$	: proviene del término de presiones
$-\overline{u'v'_r}$	: proporcional a los esfuerzos turbulentos
$\nu \frac{dU}{dr}$	: proporcional a los esfuerzos viscosos

2) $\rho \overline{u'v'_r}$? $(r \sim R)$

$$\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2} \cdot \frac{dU}{dr} = 0 \rightarrow \frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{U_0 R} \cdot \left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2 \cdot \frac{d(U/U_0)}{d(r/R)} = 0$$

$$\left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2 = \left(\frac{8}{\lambda}\right) \qquad \underset{1}{\frac{r}{R}} - \underset{1}{\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2}} + 8 \cdot \underbrace{\left(\frac{\nu}{U_0 R \lambda}\right)}_{\ll 1} \cdot \frac{d(U/U_0)}{d(r/R)} = 0$$

Ec. Cant. de mov.: $\rightarrow \boxed{\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0}$ Esfuerzos turbulentos: $\rightarrow \boxed{-\rho\overline{u'v'_r} = u_*^2 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)}$ varían linealmente con el radio, se anulan en el centro del tubo.

Según esta ecuación los esfuerzos viscosos valen $-\rho\overline{u'v'_r} = u_*^2$ en la pared, lo cual está mal ya que en la pared se tienen que anular, de modo que para distancias $R-r \ll R$ la expresión anterior del esfuerzo viscoso no es válida. $(r \rightarrow R)$

Zona del defecto de velocidades $\rightarrow$ la solución toma la forma:

$$\boxed{U = U_0 + u_* F(y/R)} \quad \text{con } y = R - r$$

3) $r \rightarrow R : R - r \ll R$; $U \sim u$

$$\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dr} = 0; \quad y = R - r \rightarrow \frac{y}{R} = 1 - \frac{r}{R} \rightarrow \frac{r}{R} = 1 - \frac{y}{R}$$

$$dy = -dr$$

$$1 - \frac{y}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{\nu}{u_*^2} \cdot \frac{dU}{dy} = 0 \rightarrow \boxed{1 - \cancel{\frac{y}{R}} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{d(U/u_*)}{d(u_* y/\nu)} = 0}$$

$\frac{U}{u_*} = U_+ \sim 1$

$\frac{u_* y}{\nu} = y_+ \sim 1$

Esfuerzos viscosos ~ Esfuerzos turbulentos

$$\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} \sim 1 \rightsquigarrow y_+ = \frac{u_* y}{\nu} \sim 1 \rightarrow \boxed{y \sim \frac{\nu}{u_*}} \sim l_c$$

Solución de la forma: $\boxed{U_+ = f(y_+)}$

4) $\cdot\ \dfrac{r}{R} - \dfrac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0\ ,\ \dfrac{r}{R} \to 1 \to \boxed{1 - \dfrac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0}$

$\cdot\ 1 - \dfrac{y}{R} - \dfrac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \dfrac{dU_+}{dy_+} = 0,\quad y \gg l_c \to y_+ \gg 1 \to \boxed{1 - \dfrac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0}$

$(y/R \ll 1)$

$\to$ Esfuerzos turbulentos: $\boxed{-\rho\,\overline{u'v'_r} = -\rho u_*^2}$

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 + u_* F(y/R) \\ U_+ &= f(y_+) \quad \to U = u_* f(y_+) \end{aligned}\right] \to \text{Igualdad de valor y de derivadas}$$

- Igualdad de derivadas:

$$\cancel{u_*}\frac{dF(y/R)}{d(y/R)} = u_* \frac{df(y_+)}{dy_+}\cdot\underbrace{\frac{dy_+}{d(y/R)}}_{R\frac{u_*}{\nu}} = \cancel{u_*}\cdot\frac{Ru_*}{\nu}\frac{df(y_+)}{dy_+} = R\frac{y_+}{y}\frac{df(y_+)}{dy_+} \to$$

$$\frac{u_*}{\nu} = \frac{y_+}{y}$$

$$\to \left(\frac{y}{R}\right)\frac{dF(y/R)}{d(y/R)} = y_+\frac{df(y_+)}{dy_+} = \frac{1}{k} \quad (k \text{ es la constante de Karman})$$

$$\left(\frac{y}{R}\right)\frac{dF(y/R)}{d(y/R)} = \frac{1}{k} \to F = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{R}\right) + C_1$$

$$y_+\frac{df(y_+)}{dy_+} = \frac{1}{k} \to f \equiv U_+ = \frac{1}{k}\ln(y_+) + C_2$$

- Igualdad de valores:

$$U_0 + u_* F(y/R) = u_* f(y_+)$$

$$U_0 + \frac{u_*}{k}\ln(y/R) + C_1 = \frac{u_*}{k}\ln y_+ + C_2 \to \boxed{\frac{U_0}{u_*} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{y_+R}{y}\right) + (C_2 - C_1)}$$

5) $U_0 = 1\ m/s$

$R = 0{,}5\ m \to D = 1\ m$

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$\nu = 10^{-5}\ m^2/s$

$Re = \dfrac{U_0 D}{\nu} = 10^5$

λ?

u_*?

l_c?

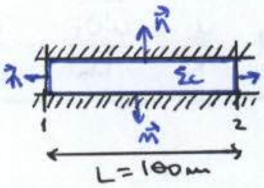
$$\lambda = 1{,}325\left[\ln\left(\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^{-2} = 0{,}018$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}018}$$

$$\frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \to u_* = U_0\sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0{,}047\ m/s$$

$$\boxed{u_* = 0{,}047\ m/s}$$

$$l_c \approx \frac{\nu}{u_*} = \frac{10^{-5}}{0{,}047} = 2{,}117\cdot 10^{-4}\ m \to \boxed{l_c \sim \frac{\nu}{u_*} = 212\ \mu m}$$

6) 

$$\int_{\Sigma_c}\rho\,\vec{v}\,\cancel{\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma} = -\int_{\Sigma_c} p\,\vec{n}\,d\sigma + \int_{\Sigma_c}\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}'\,d\sigma = 0, \quad (v_1 = v_2)\quad v_1 = v_2 \text{ (de ec. de la cont.)}$$

$$+\, p_1\frac{\pi D^2}{4} - p_2\frac{\pi D^2}{4} - \tau_p\cdot 2\pi\frac{D}{2}\cdot L = 0 \to p_1 - p_2 = \tau_p\cdot\frac{4L}{D}$$

$$\tau_p = \rho u_*^2$$

$$p_1 - p_2 = \rho u_*^2\cdot\frac{4L}{D} = 1000\cdot 0{,}047^2\cdot\frac{4\cdot 100}{1} = 900\ Pa \to \boxed{p_1 - p_2 = 900\ Pa}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO. ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen final 05–02–2015**

Un cuerpo axilsimétrico está sometido a una corriente uniforme U_∞ (en la dirección del eje x de simetría) de un líquido de densidad ρ. Aguas abajo del cuerpo se desarrolla una estela turbulenta (también axilsimétrica). Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento que determinan el flujo en la estela son

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0\,; \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v_r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v_r'}\right),$$

donde r es la coordenada radial, u la velocidad media en la dirección del eje x, v_r la velocidad media en la dirección radial y $-\rho\overline{u'v_r'}$ son los esfuerzos turbulentos.

En la estela lejana, donde el radio exterior $\delta(x)$ de la estela es mucho menor que la distancia x al cuerpo ($\delta/x \ll 1$), la velocidad media u difiere de U_∞ en una cantidad $\widetilde{u} \ll U_\infty$. Además en esta región, los esfuerzos turbulentos son tales que $\overline{u'v_r'} \sim \widetilde{u}^2$. Se pide:

1.- Estimen el orden de magnitud de la velocidad radial teniendo en cuenta que $u = U_\infty + \tilde{u}$.

2.- Simplifiquen la ecuación de cantidad de movimiento, de acuerdo con los órdenes de magnitud obtenidos anteriormente.

3.- Integren, transversalmente a la estela, la ecuación de cantidad de movimiento resultante de la simplificación, mostrando que existe una cantidad integral que se conserva.

4.- De los resultados de los apartados anteriores obtengan, a falta de constantes adimensionales, la variación del radio de la estela $\delta(x)$ y de la velocidad $\tilde{u}(x,0) = -u_s(x)$ como funciones de x. → órdenes de magnitud

5.- Si a y b son las constantes (desconocidas) necesarias para determinar por completo $\delta(x)$ y $u_s(x)$, respectivamente, y si la velocidad $\tilde{u}$ es de la forma $\tilde{u} = -u_s(x)\, f(\eta)$, con $\eta = r/\delta$, obtengan una relación entre las constantes a y b, supuesto que se conoce $f(\eta)$.

6.- Teniendo en cuenta que la viscosidad cinemática turbulenta ν_T es tal que $u_s\delta/\nu_T = Re_T$ es una constante conocida, y que $-\overline{u'v_r'} = u_s^2 g(\eta)$, escriban la ecuación y condiciones de contorno que determinan $f(\eta)$, así como la relación adicional que permite determinar a y b.

SOLUCIÓN

1.- Como $u = U_\infty + \tilde{u}$, la ecuación de la continuidad se escribe como

$$\frac{\partial (r\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0,$$

de modo que

$$\frac{\tilde{u}}{x} \sim \frac{v_r}{\delta} \Rightarrow v_r \sim \tilde{u}\frac{\delta}{x} \ll \tilde{u}.$$

2.- La ecuación de cantidad de movimiento puede escribirse en la forma

$$-U\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v_r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v_r'}\right).$$

El orden de magnitud del primer sumando del primer miembro es

$$U_\infty\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sim \frac{U_\infty \tilde{u}}{x},$$

mientras que el segundo sumando es

$$v_r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \sim \tilde{u}\frac{\delta}{x}\frac{\tilde{u}}{\delta} \sim \frac{\tilde{u}^2}{x},$$

de modo que la relación entre ambos términos es

$$\frac{v_r\left(\partial\tilde{u}/\partial r\right)}{U_\infty\left(\partial\tilde{u}/\partial x\right)} \sim \frac{\tilde{u}^2/x}{U_\infty\tilde{u}/x} \sim \frac{\tilde{u}}{U_\infty} \ll 1.$$

Como consecuencia de esto, la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$U_\infty\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v_r'}\right), \tag{1}$$

y como ambos términos han de ser del mismo orden, se tiene

$$\frac{U_\infty\tilde{u}}{x} \sim \frac{\tilde{u}^2}{\delta},$$

de modo que se tiene la relación

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{\tilde{u}}{U_\infty}. \tag{2}$$

3.- Multiplicando la ecuación (1) de cantidad de movimiento por rdr e integrando transversalmente, se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty U_\infty\tilde{u}rdr = \int_0^\infty d\left(-r\overline{u'v_r'}\right) = \left(-r\overline{u'v_r'}\right)_\infty - \left(-r\overline{u'v_r'}\right)_0 = 0,$$

de modo que

$$\int_0^\infty U_\infty\tilde{u}rdr = -I,$$

siendo I una constante relacionada con la resistencia del cuerpo. De esta ecuación se tiene

$$U_\infty\tilde{u}\delta^2 \sim I. \tag{3}$$

4.- De la ecuación (2) se obtiene $\tilde{u} \sim U_\infty\left(\delta/x\right)$, que sustituido en (3) proporciona $\delta^3U_\infty^2 \sim xI$, lo que permite determinar

$$\delta \sim \left(\frac{xI}{U_\infty^2}\right)^{1/3},$$

que llevado a (2) proporciona

$$\tilde{u} \sim \left(\frac{IU_\infty}{x^2}\right)^{1/3}.$$

5.- De acuerdo con el enunciado se tiene

$$\delta = a\left(\frac{xI}{U_\infty^2}\right)^{1/3} \quad ; \quad u_s = b\left(\frac{IU_\infty}{x^2}\right)^{1/3},$$

de modo que el radio de la estela crece como $x^{1/3}$ y el defecto de velocidad máxima decrece como $x^{-2/3}$.

Dado que $\tilde{u} = -u_s(x) f(r/\delta)$, la relación integral se puede escribir como

$$\int_0^\infty U_\infty \tilde{u} r dr = -U_\infty u_s \delta^2 \int_0^\infty f(\eta)\, \eta d\eta = -I,$$

siendo $\eta = r/\delta$. Dado que

$$u_s \delta^2 = a^2 b \left(\frac{IU_\infty}{x^2} \frac{I^2 x^2}{U_\infty^4} \right)^{1/3} = a^2 b \frac{I}{U_\infty},$$

permite escribir

$$\int_0^\infty f(\eta)\, \eta d\eta = \frac{1}{a^2 b}.$$

Supuesta conocida la función $f(\eta)$, la integral anterior dará lugar a un valor α de modo que la relación anterior se reduce a $\alpha a^2 b = 1$.

6.- Puesto que $\tilde{u} = -u_s(x) f(\eta)$ y dado que

$$\frac{du_s}{dx} = -\frac{2}{3}\frac{u_s}{x},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \delta}\frac{d\delta}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{\eta}{x},$$

se tiene

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -U_\infty \left[\frac{du_s}{dx} f(\eta) + u_s \frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{U_\infty}{3}\frac{u_s}{x}\left[2f(\eta) + \eta \frac{df}{d\eta} \right].$$

Del mismo modo

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v'_r} \right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r u_s^2 g(\eta) \right] = \frac{u_s^2 g}{r} + \frac{u_s^2}{\delta}\frac{dg}{d\eta} = \frac{u_s^2}{\delta}\left(\frac{g}{\eta} + \frac{dg}{d\eta} \right),$$

donde $\overline{u'v'_r} = u_s^2 g(\eta)$. Sustituidas las relaciones anteriores en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\frac{U_\infty}{3}\frac{u_s}{x}\left[2f(\eta) + \eta \frac{df}{d\eta} \right] = \frac{u_s^2}{\delta}\left(\frac{g}{\eta} + \frac{dg}{d\eta} \right),$$

que puede escribirse en la forma

$$g + \eta \frac{dg}{d\eta} - \frac{a}{3b}\left[2\eta f(\eta) + \eta^2 \frac{df}{d\eta} \right] = 0,$$

o bien

$$\frac{d}{d\eta}(\eta g) - \frac{a}{3b}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^2 f \right) = 0,$$

que puede integrarse una vez para obtener

$$g - \frac{a}{3b}\eta f = 0.$$

Dado que

$$-\overline{u'v'_r} = \nu_T \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = -\frac{\nu_T u_s}{\delta}\frac{df}{d\eta} = u_s^2 g(\eta),$$

de modo que

$$g(\eta) = -\frac{1}{Re_T}\frac{df}{d\eta},$$

y por lo tanto, la ecuación de cantidad movimiento integrada una vez queda para $f(\eta)$, en la forma

$$\frac{df}{d\eta} + \frac{aRe_T}{3b}\left[\eta f(\eta) \right] = 0.$$

Eligiendo el parámetro $aRe_T/3b = 1$, se tiene la relación adicional para determinar a y b. La ecuación diferencial para f queda

$$\frac{df}{f} = -\eta d\eta \quad \Rightarrow \quad f = exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 \right),$$

que ya cumple las condiciones de contorno

$$f \to 0 \; cuando \, \eta \to \infty,$$

$$\left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0.$$

Dado que

$$\int_0^\infty f(\eta)\, \eta d\eta = \int_0^\infty e^{-\eta^2/2} d\left(\eta^2/2\right) = -e^{\infty} + e^{-0} = 1,$$

de modo que el valor de α citado anteriormente es la unidad y, por lo tanto,

$$a^2 b = 1,$$

que junto con

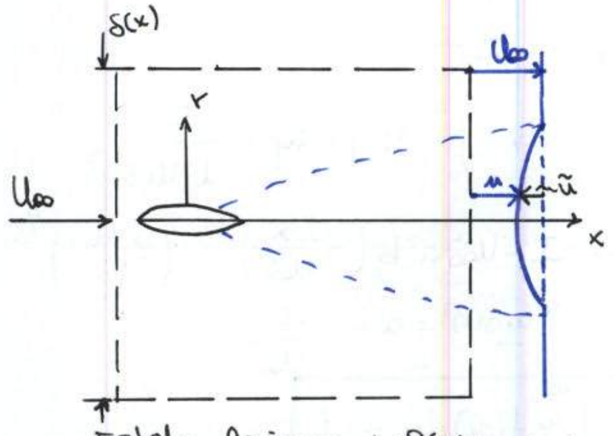
$$aRe_T/3b = 1,$$

proporciona

$$a = \left(\frac{3}{Re_T}\right)^{1/3} \;\; ; \;\; b = \left(\frac{3}{Re_T}\right)^{-2/3}.$$

EXAMEN 05/02/2015

- Cuerpo axilsimétrico
- Corriente uniforme U_∞ (eje x de simetría), ρ } ⇒ Estela axilsimétrica



- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v_r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v_r'}\right)$$

Estela lejana : $\delta(x)/x \ll 1 \rightarrow \tilde{u} \ll U_\infty$, esfuerzos turbulentos: $\overline{u'v_r'} \sim \tilde{u}^2$

1) $u = U_\infty + \tilde{u}$, v_r?

- Ec. continuidad:

$$\underbrace{\frac{\partial(rU_\infty)}{\partial x}}_{0\ (U_\infty \text{ es cte})} + \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{\partial(r\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\delta\tilde{u}}{x} \sim \frac{\cancel{\delta} v_r}{\cancel{\delta}} \rightarrow \boxed{v_r \sim \left(\frac{\delta(x)}{x}\right)\tilde{u} \ll \tilde{u}}$$

2) Simplificar Ec. CDM:

despreciables

$$U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \cancel{\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}} + \cancel{v_r\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}} = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v_r'}\right)}$$

$$\sim U_\infty\frac{\tilde{u}}{x} \gg \left(\sim\frac{\tilde{u}^2}{x} \qquad \sim v_r\frac{\tilde{u}}{\delta(x)} \sim \frac{\tilde{u}^2}{x}\right) \qquad \hookrightarrow \sim \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\cancel{\delta}}\left(\cancel{\delta}\cdot\tilde{u}^2\right) \sim \frac{\tilde{u}^2}{\delta}$$

$$\boxed{U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\overline{u'v_r'}\right)} \rightarrow U_\infty\frac{\cancel{\tilde{u}}}{x} \sim \frac{\tilde{u}^{\cancel{2}}}{\delta} \rightarrow \frac{\tilde{u}}{U_\infty} \sim \frac{\delta(x)}{x} \ll 1$$

3)

→ No se saca porque el enunciado dice que uniforme en eje x (no respecto de r)

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty U_\infty\tilde{u}r\,dr = \int_0^\infty d\left(-r\overline{u'v_r'}\right) = \cancel{\left(-r\overline{u'v_r'}\right)_\infty} - \cancel{\left(-r\overline{u'v_r'}\right)_0} = 0$$

fluctuaciones fuera de la estela son nulas (y en el eje también).

$$\boxed{\int_0^\infty U_\infty\hat{u}\,r\,dr = \text{cte} = -I}$$

[I: cte relacionada con la resistencia del cuerpo]

$$I \sim U_\infty\tilde{u}\,\delta(x)^2$$

4) $\tilde{u} \sim U_\infty\frac{\delta(x)}{x} \rightarrow I \sim U_\infty\cdot U_\infty\frac{\delta(x)}{x}\cdot\delta(x)^2 \rightarrow \boxed{\delta(x) \sim \left(\frac{I\cdot x}{U_\infty^2}\right)^{1/3}}$

$$\tilde{u} \sim \frac{U_\infty}{x}\cdot\left(\frac{I\,x}{U_\infty^2}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{U_\infty I}{x^2}\right)^{1/3} \rightarrow \boxed{\tilde{u} \sim \left(\frac{IU_\infty}{x^2}\right)^{1/3}}$$

5) Encontrar relación entre a y b.

$$\delta(x) = a\left(\frac{I x}{U_\infty^2}\right)^{1/3}$$

$$u_s = b\left(\frac{I U_\infty}{x^2}\right)^{1/3}$$

$\tilde{u} \sim u_s$

$\tilde{u} = -u_s(x) f(\eta)$

$\eta = r/\delta$

($f(\eta)$ conocido)

$$\int_0^\infty U_\infty \tilde{u}\, r\, dr = -I \qquad r = \eta\delta, \quad dr = \delta\, d\eta$$

$$\int_0^\infty U_\infty (-u_s(x) f(\eta))\, r\, dr = -I$$

$$+ u_s U_\infty \delta^2(x) \int_0^\infty \eta f(\eta)\, d\eta = +I \rightarrow \int_0^\infty \eta f(\eta)\, d\eta = \frac{I}{U_\infty u_s \delta(x)^2}$$

Como u_s y $\delta(x)$ conocidos $\rightarrow$ $u_s \delta(x)^2 = a^2 b \left(\frac{I x}{U_\infty^2}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{I U_\infty}{x^2}\right)^{1/3}$

$$u_s \delta(x)^2 = a^2 b \cdot \frac{I}{U_\infty}$$

$$\int_0^\infty \eta f(\eta)\, d\eta = \frac{\cancel{I}}{\cancel{U_\infty}} \cdot \frac{1}{a^2 b} \cdot \frac{\cancel{U_\infty}}{\cancel{I}} \rightarrow \boxed{\int_0^\infty \eta f(\eta)\, d\eta = \frac{1}{a^2 b}}$$

Conocido $f(\eta)$ se puede integrar $\int_0^\infty \eta f(\eta) d\eta = \alpha \rightarrow \alpha = \frac{1}{a^2 b} \rightarrow \underline{\underline{a^2 b \alpha = 1}}$

6) $\frac{u_s \delta}{\nu_T} = Re_T \rightarrow$ cte conocida

$-\overline{u' v_r'} = u_s^2 g(\eta)$

· Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = -\left(\frac{du_s}{dx} \cdot f(\eta) + \frac{df(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial x} \cdot u_s\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r \overline{u' v_r'}\right) \underset{\substack{r=\delta\eta \\ dr=\delta d\eta}}{=} \frac{1}{\eta}\cdot\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(+\eta\cancel{\delta} u_s^2 g(\eta)\right) = \frac{u_s^2}{\eta^2 \delta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta g(\eta)) = \frac{u_s^2}{\eta\delta}\cdot g(\eta) + \frac{u_s^2}{\cancel{\eta}\delta}\cancel{\eta}\frac{dg(\eta)}{d\eta}$$

$$= \frac{u_s^2}{\delta}\left(\frac{g(\eta)}{\eta} + \frac{dg(\eta)}{d\eta}\right)$$

$$\frac{du_s}{dx} = b(I U_\infty)^{1/3}\left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = -\frac{2}{3}\frac{u_s}{x}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial\delta}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial x} = -\frac{r}{\delta^2}\cdot\frac{1}{3}\cancel{a\left(\frac{I x}{U_\infty}\right)^{1/3}}\cdot x^{-1} = -\frac{1}{3}\frac{\eta}{x}$$

$$U_\infty\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = +U_\infty\left(+\frac{2}{3}\frac{u_s}{x}\cdot f(\eta) + \frac{1}{3}\frac{\eta}{x} u_s \frac{df(\eta)}{d\eta}\right) = \frac{U_\infty}{3}\frac{u_s}{x}\left[2f(\eta) + \eta\frac{df(\eta)}{d\eta}\right]$$

$$\frac{U_\infty}{3}\frac{\cancel{u_s}}{x}\left[2f(\eta) + \eta\frac{df(\eta)}{d\eta}\right] = \frac{u_s^2}{\delta(x)}\left[\frac{g(\eta)}{\eta} + \frac{dg(\eta)}{d\eta}\right]$$

$$\frac{x}{U_\infty}\frac{u_s}{\delta(x)} = \frac{b\left(\frac{I\cancel{U_\infty}}{\cancel{x^2}}\right)^{1/3}}{a\left(\frac{\cancel{I x}}{\cancel{U_\infty^2}}\right)^{1/3}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{U_\infty}} = \frac{b}{a}\ ; \quad \left(2f(\eta) + \eta\frac{df(\eta)}{d\eta} = \frac{3b}{a}\left[\frac{g(\eta)}{\eta} + \frac{dg(\eta)}{d\eta}\right]\right)\times\eta$$

$$\underbrace{2\eta f(\eta) + \eta^2\frac{df(\eta)}{d\eta}}_{d(\eta^2 f)/d\eta} = \frac{3b}{a}\underbrace{\left[g(\eta) + \eta\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right]}_{d(\eta g)/d\eta}$$

$$\frac{d(\eta g)}{d\eta} - \frac{a}{3b}\frac{d(\eta^2 f)}{d\eta} = 0 \xrightarrow[\int \cdot d\eta]{} \cancel{\eta} g - \frac{a}{3b}\eta^{\cancel{2}} f = 0 \rightarrow g - \frac{a}{3b}\eta f = 0$$

· Modelo de turbulencia:

$$\boxed{-\overline{u'v'_r} = \nu_T \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}} = -\frac{\nu_T \cancel{u_s}}{\delta}\cdot\frac{df}{d\eta} = u_s^{\cancel{2}} g(\eta) \rightarrow g(\eta) = -\frac{\nu_T}{u_s\delta}\frac{df}{d\eta} = -\frac{1}{Re_T}\frac{df}{d\eta}$$

$$-\frac{1}{Re_T}\cdot\frac{df}{d\eta} - \frac{a}{3b}\eta f(\eta) = 0 \rightarrow \frac{df}{d\eta} + \underbrace{\frac{aRe_T}{3b}}_{1}\eta f(\eta) = 0$$

→ este factor se elige igual a 1 por comodidad

$$\frac{df}{d\eta} + \eta f(\eta) = 0 \rightarrow \int_{f(0)}^{f(\eta)}\frac{df}{f} = -\int_0^{\eta}\eta\, d\eta \rightarrow \ln\left(f/f(0)\right) = -\frac{\eta^2}{2}$$

$\eta(0) = 0$

$f(0) = 1$

$$\boxed{f(\eta) = e^{-\eta^2/2}}$$

$$\boxed{\frac{aRe_T}{3b} = 1}$$

$a^2 b = 1$

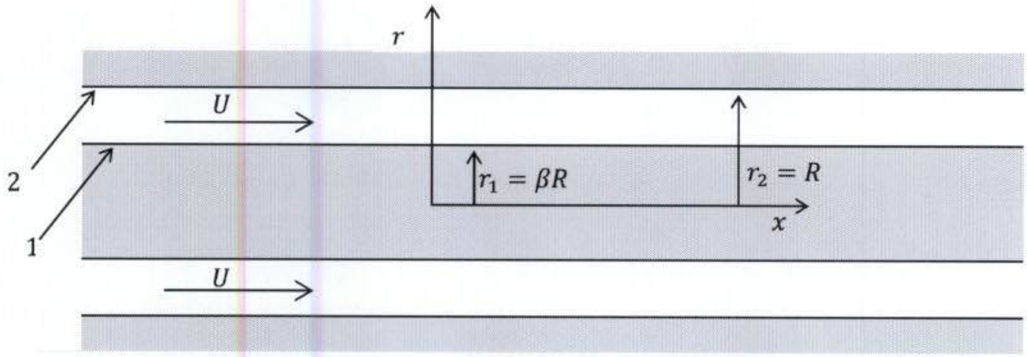
$$\oplus \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty}\eta f(\eta)\, d\eta = \int_0^{\infty}\eta e^{-\eta^2/2} d\eta = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2/2} d(\eta^2/2) = -e^{\infty} + e^{0} = 1 \\ \frac{d(\eta^2/2)}{d\eta} = \frac{\cancel{2}\eta}{\cancel{2}} \rightarrow d(\eta^2/2) = \eta\, d\eta \end{array} \right.$$

$$b = \frac{1}{a^2} \rightarrow \frac{aRe_T}{3\cdot(1/a^2)} = 1 \rightarrow \boxed{a = \left(\frac{3}{Re_T}\right)^{1/3}} \rightarrow \boxed{b = \left(\frac{3}{Re_T}\right)^{-2/3}}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AERONAUTICA Y DEL ESPACIO
ETSIAE

Mecánica de Fluidos Avanzada **Examen Final 06.07.2015**

Se desea analizar el flujo turbulento unidireccional establecido por un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad cinemática ν en un conducto de longitud infinita, definido entre dos superficies cilíndricas concéntricas que se denotan con los índices 1 y 2, teniendo radios respectivos $r_1 = \beta R$ y $r_2 = R$, con $\beta < 1$, $\beta = O(1)$, tal como se muestra en la figura adjunta.



Llamando $u^{*2} = (u_1^{*2} + \beta u_2^{*2})/(1+\beta)$, siendo u_1^*, u_2^* respectivamente la velocidad de fricción en la pared 1 y 2, asumiendo que $(1-\beta)(u^{*2}R/(U_0\nu)) \gg 1$, con U_0 denotando un valor característico de la velocidad media en el conducto, se pide:

1) Establecer las ecuaciones y condiciones de contorno que proporcionan la evolución del flujo medio, demostrando que el gradiente axial de presiones $\partial(P/\rho)/\partial x$ es uniforme en todo el flujo, $\partial(P/\rho)/\partial x = d(P/\rho)/dx$. Utilizando las variables $y_1 = r - r_1$, $y_2 = r_2 - r$, escribir la ecuación diferencial y condiciones de contorno que gobiernan la estructura turbulenta superficial establecida sobre cada una de las dos superficies cilíndricas, para distancias $y_1/(r_1 - r_2) \ll 1$ de la superficie 1, e $y_2/(r_1 - r_2) \ll 1$ de la superficie 2. Comparando ambas estructuras, determinar la relación u_1^*/u_2^* entre las velocidades de fricción que caracterizan el flujo superficial sobre ambas superficies (3 puntos).

2) Obtener una primera integral de la ecuación de cantidad de movimiento axial, en función de $d(P/\rho)/dx$. Determinar la relación entre el gradiente axial de presión y la velocidad de fricción media u^* introducida más arriba. Expresar la integral de la ecuación de cantidad de movimiento axial obtenida en este apartado en función de u^* (2 puntos).

3) Determinar la distribución radial del esfuerzo cortante turbulento $-\overline{u'v'}/u^{*2}$ en la región exterior a las capas superficiales de las paredes cilíndricas, especificando el rango de coordenadas radiales que define dicha región exterior (2 puntos).

4) Asumiendo que en la región exterior a las capas superficiales la viscosidad turbulenta adopta un perfil aproximadamente uniforme:

$$\nu_t \approx C_t u^* R(1-\beta),$$

con C_t siendo una constante que depende del valor de β, obtener la ley de velocidad media en dicha región, $(U - U_2)/u^*$, siendo U_2 el valor de la velocidad asociada a esta ley para $r = r_2 = R$. Obtener asimismo una estimación de la dependencia de la constante C_t con β, comprobando que $C_t = O(1)$ para $0 < \beta < 1$ (3 puntos).

Solución

1) Las ecuaciones para el flujo medio son:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad U = U(r) \tag{1}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right) \tag{2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{d}{dr}\left(-\overline{v'^2}\right) - \frac{\overline{v'^2} - \overline{v'^2_\theta}}{r} \tag{3}$$

Integrando con respecto a r la ecuación de cantidad de movimiento radial se obtiene:

$$0 = \frac{P}{\rho} + \overline{v'^2} - \int_{\beta R}^{r} \frac{\overline{v'^2} - \overline{v'^2_\theta}}{r} dr = \frac{P_1}{\rho} \tag{4}$$

siendo P_1 la presión en $r = r_1 = \beta R$. Derivando la expresión (4) con respecto a x, teniendo en cuenta que campo turbulento no depende de x, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{dP_1}{dx} \tag{5}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de cantidad de movimiento axial:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP_1}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right) \tag{6}$$

Y dado que el campo medio de velocidad y de fluctuaciones turbulentas no depende de x, debe ser dP_1/dx constante. Por tanto, de acuerdo con (5), $\partial P/\partial x$ es uniforme en todo el flujo. Para simplificar la notación, llamaremos a este gradiente dP/dx.

En consecuencia, la ecuación de cantidad de movimiento axial puede escribirse como:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right) \tag{7}$$

Las condiciones de contorno apropiadas para esta ecuación son:

$$r = r_1 = \beta R: \qquad U = 0, \ \overline{u'v'} = 0 \tag{8a}$$
$$r = r_2 = R: \qquad U = 0, \ \overline{u'v'} = 0 \tag{8b}$$

Las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el flujo turbulento sobre cada pared, a distancias cercanas a cada una de ellas son:

a) Pared 1, $y_1 = r - r_1$, con $y_1/(r_2 - r_1) \ll 1$, y velocidades de fluctuación v'_1 medidas en la dirección y_1. La ecuación diferencial para el flujo en esta región toma la forma:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{d}{dy_1}\left(-\overline{u'v'_1} + \nu\frac{\partial U_1}{\partial y_1}\right) \tag{9}$$

con condiciones de contorno:

$$y_1 = 0: \; U = 0\,, \;\; \overline{u'v'_1} = 0 \tag{10}$$

La velocidad de fricción sobre la superficie 1, expresada en la variable y_1 viene dada por:

$$u_1^{*2} = \nu\left(\frac{\partial U_1}{\partial y_1}\right)_{y_1=0} \tag{11}$$

b) Pared 2, $y_2 = r_2 - r$, con $y_2/(r_2 - r_1) \ll 1$, y velocidades de fluctuación v'_2 medidas en la dirección y_2. De forma análoga a la pared 1, se tiene:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{d}{dy_2}\left(-\overline{u'v'_2} + \nu\frac{\partial U_2}{\partial y_2}\right) \tag{12}$$

con condiciones de contorno:

$$y_2 = 0: \; U_2 = 0\,, \;\; \overline{u'v'_2} = 0 \tag{13}$$

En este caso, la velocidad de fricción sobre la pared 2 se expresa en las variables superficiales de acuerdo con:

$$u_2^{*2} = \nu\left(\frac{\partial U_2}{\partial y_2}\right)_{y_2=0} \tag{14}$$

Las ecuaciones y condiciones de contorno para las dos capas superficiales son idénticas, con idéntico término conductor, $-dP/dx$. Por tanto, la solución de la capa superficial en ambas superficies debe ser idéntica, $U_1(y_1) = U_2(y_2)$, para $y_1 = y_2$. En consecuencia:

$$u_1^{*2} = u_2^{*2} = u^{*2} \tag{15}$$

2) Integrando (7) respecto a r:

$$\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(\tilde{r} + \frac{C_1}{\tilde{r}}\right) \tag{16}$$

siendo $\tilde{r} = r/R$. Con la velocidad media descrita en la variable r, las velocidades de fricción en las superficies 1 y 2 vienen dadas por:

$$u_1^{*2} = u^{*2} = \nu\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_1} \quad , \quad u_2^{*2} = u^{*2} = -\nu\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_2} \tag{17}$$

Particularizando (16) para $r = r_1 = \beta R$ y para $r = r_2 = R$, e imponiendo (17), se tiene:

$$\left(\beta + \frac{C_1}{\beta}\right) = -(1 + C_1) \quad \rightarrow \quad C_1 = -\beta \tag{18}$$

Por tanto la integral de la ecuación de cantidad de movimiento puede escribirse como:

$$\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(\tilde{r} - \frac{\beta}{\tilde{r}}\right) \tag{19}$$

y en consecuencia:

$$u^{*2} = -\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}(1-\beta) \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = -\frac{2u^{*2}}{R(1-\beta)} \tag{20}$$

Introduciendo el resultado (20) en (19):

$$\left(-\overline{u'v'} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right) = u^{*2}\frac{(\beta/\tilde{r} - \tilde{r})}{(1-\beta)} \tag{21}$$

3) Dado que $(1-\beta)(u^{*2}R/(U_0\nu)) \gg 1$, el esfuerzo viscoso solo es relevante en capas superficiales alrededor de las paredes, de espesor ν/u^*. Por tanto, para distancias $y_i u^*/\nu \gg 1$ $(i = 1,2)$ el esfuerzo viscoso es despreciable y podemos escribir:

$$\frac{-\overline{u'v'}}{u^{*2}} \approx \frac{(\beta/\tilde{r} - \tilde{r})}{(1-\beta)} \tag{22}$$

que varía entre 1 para $\tilde{r} = \beta$ y -1 para $\tilde{r} = 1$. El rango de aplicación de (22) viene dado por la doble condición $y_i u^*/\nu \gg 1$ $(i = 1,2)$, o bien:

$$\beta + \left(\frac{u^*R}{\nu}\right)^{-1} \ll \tilde{r} \ll 1 - \left(\frac{u^*R}{\nu}\right)^{-1} \tag{23}$$

4) Asumiendo que en el exterior de las capas superficiales podemos considerar un perfil aproximadamente uniforme de viscosidad turbulenta, $\nu_t \approx C_t u^* R(1-\beta)$, introduciendo $-\overline{u'v'} = \nu_t(dU/dr)$, la ecuación (22) proporciona:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\frac{U}{u^*}\right) = \frac{(\beta/\tilde{r} - \tilde{r})}{C_t(1-\beta)^2} \tag{24}$$

Lo que implica que la velocidad media alcanza su máximo valor en la coordenada radial $\tilde{r} = \sqrt{\beta}$. Integrando (24):

$$\frac{U - U_2}{u^*} = \frac{1}{2C_t(1-\beta)^2}(2\beta ln\tilde{r} + 1 - \tilde{r}^2) \tag{25}$$

Los perfiles radiales, fuera de las capas superficiales, del esfuerzo cortante turbulento (expresión (22)) y de la velocidad media (expresión (25)), obtenidos para $\beta = 0.5$, se representan en la figura 1. El primero puede considerarse exacto en tanto se verifique (23), mientras que el segundo incluye la simplificación de adoptar un valor aproximadamente constante para C_t.

La diferencia máxima de velocidad $(U - U_2)$ se obtiene en $\tilde{r} = \sqrt{\beta}$:

$$max\left(\frac{U - U_2}{u^*}\right) = \frac{(\beta ln\beta + 1 - \beta)}{2C_t(1-\beta)^2} \tag{26}$$

Puesto que el mezclado turbulento es el responsable de las diferencias $(U - U_2)$, esperamos $max\,(U - U_2)/u^* = O(1)$. En consecuencia:

$$C_t \sim \frac{\big(\beta ln\beta + (1-\beta)\big)}{2(1-\beta)^2} \tag{27}$$

y resulta $C_t = O(1)$ para $0 < \beta < 1$.

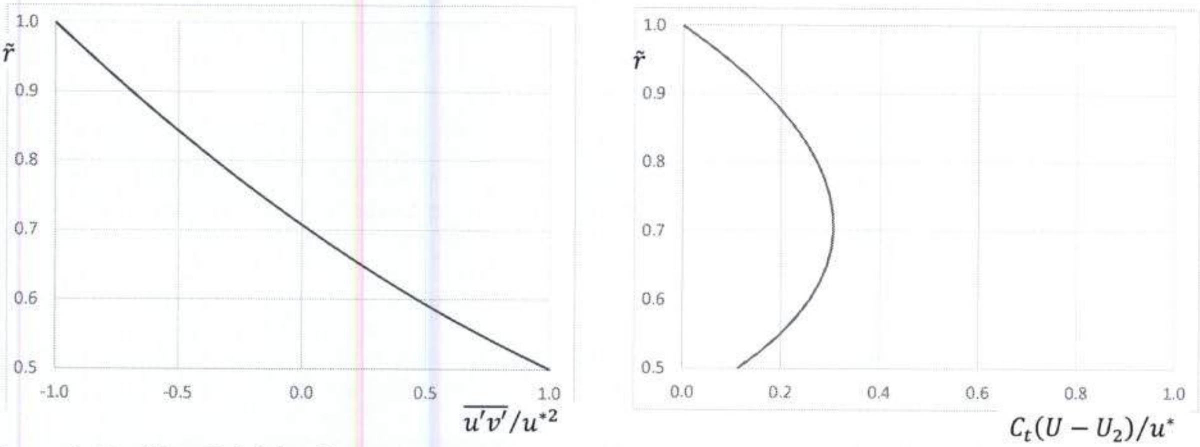


Figura 1: Perfil radial del esfuerzo cortante de Reynolds (izquierda) y de la velocidad media en el exterior de las capas superficiales para $\beta = 0.5$.

Aunque esta parte no se pide en el problema, una descripción más precisa de la viscosidad turbulenta consiste en asegurar que se recuperan expresiones compatibles con la región de acoplamiento logarítmico en las capa superficiales:

$$\nu_t \approx \kappa y_i u^* \tag{28}$$

siendo $\kappa = 0.41$ la constante de Karman. Para el conducto de estudio, una expresión sencilla de la viscosidad turbulenta compatible con (28) es:

$$\nu_t \approx \kappa R u^* \frac{(\tilde{r} - \beta)(1 - \tilde{r})}{1 - \beta} \tag{29}$$

Con esta ley, el perfil de velocidad media en la zona turbulenta toma la forma:

$$\frac{U-U_2}{u^*}=\frac{1}{\kappa}\int_{1^-}^{\tilde{r}}\frac{(\beta-\tilde{r}^2)}{\tilde{r}(\tilde{r}-\beta)(1-\tilde{r})}d\tilde{r} \tag{30}$$

que es válida en el rango dado por (23). En la figura 2 se representa el perfil de velocidad media resultante.

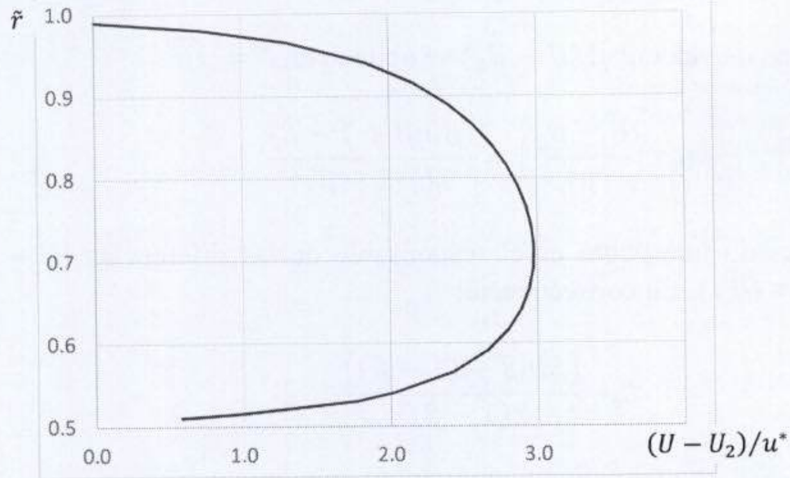
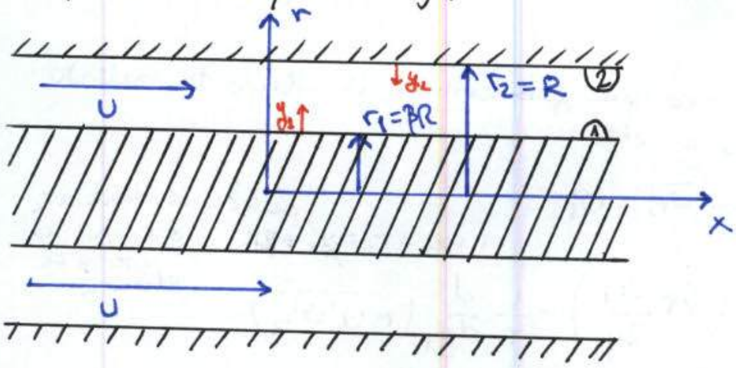


Figura 2: Perfil radial de la velocidad media en el exterior de las capas superficiales para $\beta = 0.5$, obtenido con un modelo de viscosidad turbulenta compatible con la región de acoplamiento logarítmico cerca de la paredes.

El valor de U_2 en (30) se fija en $\tilde{r} = 0.99$. Tal y como se observa en la figura 2, para $\beta = 0.5$, el máximo de velocidad difiere de U_2 aproximadamente en $3u^*$. Si se quiere compatibilizar este nivel con el resultado obtenido al asumir la expresión simplificada de la viscosidad turbulenta $\nu_t \approx C_t u^* R(1-\beta)$ se obtiene $C_t \approx 0.09 = O(10^{-1})$.

EXAMEN 06/07/2015

- Flujo turbulento unidireccional
- Fluido incompresible ρ, ν



$r_1 = \beta R$, $\beta = O(1)$ pero $\beta < 1$

$r_2 = R$

$u_*^2 = (u_{*1}^2 + \beta u_{*2}^2)/(1+\beta)$

$(1-\beta)(u_*^2 R/(U_0 \nu)) \gg 1$

1) Ecuaciones que determinan el movimiento:

$$\frac{\partial (rU)}{\partial x} = 0 \Rightarrow U = U(r) \quad \text{(Ec. continuidad)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\overline{u'v_r'})}{\partial r} = 0 \quad \text{(Ec. cantidad de movimiento axial)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\overline{v_\theta'^2}}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\overline{v_r'^2})}{\partial r} = 0 \quad \text{(Ec. cantidad de movimiento radial)}$$

$$\hookrightarrow \int_{\beta R}^{r} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\cdot dr + \int_{\beta R}^{r}\frac{\overline{v_\theta'^2}}{r}dr - \int_{\beta R}^{r}\frac{1}{r}\frac{\partial(r\overline{v_r'^2})}{\partial r}\cdot dr = 0$$

$$-\frac{P(x,r)}{\rho} + \underbrace{\frac{P(x,\beta R)}{\rho}}_{P_1/\rho} + \int_{\beta R}^{r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-r\overline{v_r'^2}) + \overline{v_\theta'^2}\right]dr = 0$$

$$-\frac{P(x,r)}{\cancel{\rho}} + \frac{P_1}{\cancel{\rho}} + \underbrace{\rho\int_{\beta R}^{r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-r\overline{v_r'^2}) + \overline{v_\theta'^2}\right]dr}_{\Phi(r)} = 0 \rightarrow P(x,r) = P_1(x) + \Phi(r)$$

$$\frac{\partial P(x,r)}{\partial x} = \frac{dP_1(x)}{dx}$$

Sustituyendo en la ec. de CDM axial:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP_1}{dx} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\overline{u'v_r'})}{\partial r}}_{f(r)} = 0$$

$f(r) \rightarrow$ no depende de x $\rightarrow \frac{dP_1}{dx}$ es constante

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx}}$$

· Condiciones de contorno para la ecuación de cantidad de movimiento axial:

$$\left.\begin{array}{l} r = r_1 = \beta R \Rightarrow U = 0\ ,\ \overline{u'v'_r} = 0 \\ r = r_2 = R \Rightarrow U = 0\ ,\ \overline{u'v'_r} = 0 \end{array}\right\}$$

→ Ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el flujo turbulento sobre Pared 1, a distancias cercanas a ella:

$y_1 = r - r_1$ | velocidad de fluctuación: $v'_{r_1} = v'_r$

$r = y_1 + r_1 = \cancel{y_1} + \beta R$ — despreciable frente a r_1 y $r_1 = \beta R$ es cte y se elimina

$\dfrac{y_1}{(r_1 - r_2)} \ll 1$ | $0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dy_1}\left(\nu r \dfrac{\partial U}{\partial y_1}\right) - \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dy_1}\left(r\,\overline{u'v'_{r_1}}\right)$

$\left.\begin{array}{l} r = y_1 + r_1 \\ dr = dy_1 \end{array}\right\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{d}{dy_1}\left(-\overline{u'v'_{r_1}} + \nu r \dfrac{\partial U}{\partial y_1}\right) \\ y_1 = 0 \Rightarrow U_1 = 0\ ,\ \overline{u'v'_{r_1}} = 0 \end{array}}$$

Velocidad de fricción sobre la pared 1: $u_{*1}^2 = \nu\left(\dfrac{dU_1}{dy_1}\right)_{y_1=0}$

→ Ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el flujo turbulento sobre Pared 2, a distancias cercanas a ellas: velocidad de fluctuación: $v'_{r_2} = -v'_r$

$y_2 = r_2 - r$ | $0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dy_2}\left(\nu r \dfrac{\partial U_2}{\partial y_2}\right) - \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dy_2}\left(r\,\overline{u'v'_{r_2}}\right)$

$\dfrac{y_2}{(r_2 - r_1)} \ll 1$

$r = r_2 - y_2$

$dr = -dy_2$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{d}{dy_2}\left(-\overline{u'v'_{r_2}} + \nu \dfrac{\partial U_2}{\partial y_2}\right) \\ y_2 = 0 \Rightarrow U_2 = 0\ ,\ \overline{u'v'_{r_2}} = 0 \end{array}}$$

Velocidad de fricción sobre la pared 2: $u_{*2}^2 = \nu\left(\dfrac{\partial U_2}{\partial y_2}\right)_{y_2=0}$

Las ecuaciones y condiciones de contorno son idénticas.

↳ Por tanto, la solución de la capa superficial en ambas superficies debe ser idéntica $\Rightarrow \boxed{U_1(y_1) = U_2(y_2)}$ para $y_1 = y_2$

↳ $\boxed{u_{*1}^2 = u_{*2}^2 = u_*^2}$

(Ecuación de cantidad de movimiento axial)

2) Integrando: $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\left(-\overline{u'v'_r} + \nu\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)\right] = 0 \rightarrow (\times r) + \int \cdot\, dr \rightarrow$

$$\rightarrow -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\int_{\beta R}^{r} r\,dr + \int_{\beta R}^{r} d\left[r\left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right] = 0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\frac{1}{2}\left(r^2 - \beta^2 R^2\right) + \left[r\left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right]_{\beta R}^{r} = 0 \quad \left\{ \left(-\overline{u'v'_r}\right)_{\beta R} = 0 \right\}$$

$$\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(\frac{r}{R}r - \beta^2 R\right) = r\left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \beta R \underbrace{\left(\nu\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\beta R}}_{u_*^2}$$

Particularizando para $r=R$ (Relaciono u_*^2 con dP/dx)

$$\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(R - \beta^2 R\right) = -R\,u_*^2 - \beta R\,u_*^2$$

$u_*^2 = u_{*2}^2 = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)_{y_2=0} = -\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r_2=R} \rightarrow \nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_R = -u_*^2$

$$R\frac{\cancel{R}}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(1-\beta^2\right) = -\cancel{R}u_*^2(1+\beta) \rightarrow u_*^2 = -\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta}\right) = -\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}(1-\beta) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(\tilde{r}\cdot r - \cancel{\beta^2 R} - \beta R(1-\cancel{\beta})\right) = r\left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r}\right) \rightarrow \div r$$

$$\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}\left(\tilde{r} - \frac{\beta}{\tilde{r}}\right) = \left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r}\right) \rightarrow \text{como } \boxed{u_*^2 = -\frac{R}{2\rho}\frac{dP}{dx}(1-\beta)}$$

$$-\frac{u_*^2}{(1-\beta)}\left(\tilde{r} - \frac{\beta}{\tilde{r}}\right) = \left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r}\right) \rightarrow \boxed{u_*^2\cdot\frac{(\beta/\tilde{r} - \tilde{r})}{(1-\beta)} = \left(-\overline{u'v'_r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r}\right)}$$

3) Región exterior $\rightarrow -\overline{u'v'_r}/u_*^2$?

$$\frac{\beta/\tilde{r} - \tilde{r}}{(1-\beta)} = -\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \underbrace{\frac{\nu u_b}{u_*^2 R}}_{\ll 1}\cdot\frac{\partial(u/u_b)}{\partial(r/R)} \begin{matrix}\rightarrow u\sim u_b\\ \rightarrow r\sim R\end{matrix}$$

$\hookrightarrow$ despreciable ~~los~~ esfuerzos viscosos

Para que sí se tenga en cuenta:

$$\left.\begin{matrix}\frac{r}{\nu}u_*\sim 1 \rightarrow \frac{r}{R}\sim\frac{\nu}{u_* R}\sim\tilde{r}\\ u/u_*\sim 1\end{matrix}\right\}$$

Para distancias $r\sim R$ y $\frac{r}{\nu}u_* \gg 1$ de la pared el esfuerzo viscoso es despreciable

$$\rightarrow \boxed{-\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} \approx \frac{\beta/\tilde{r} - \tilde{r}}{1-\beta}} \rightarrow \text{varía entre } \begin{cases}\tilde{r} = \beta \rightarrow -\overline{u'v'_r}/u_*^2 = 1\\ \tilde{r} = 1 \rightarrow -\overline{u'v'_r}/u_*^2 = -1\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Rango de aplicación: } \beta + \left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{-1} \ll \tilde{r} \ll 1 - \left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{-1}}$$

4) $\nu_t \approx C_t u_* R(1-\beta)$

$\frac{U-U_2}{u_*}$?

Hipótesis de Boussinesq: $-\overline{u'v'_r} = \nu_t\left(\frac{dU}{dr}\right)$

$$-\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = \frac{\nu_t}{u_*^2}\frac{dU}{dr} = \frac{\beta/\tilde{r} - \tilde{r}}{1-\beta} \Rightarrow \frac{C_t \cancel{u_*} R(1-\beta)}{u_*^{\cancel{2}}}\frac{dU}{dr} = \frac{\beta/\tilde{r} - \tilde{r}}{(1-\beta)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\tilde{r}}\left(\frac{U}{u_*}\right) = \frac{\beta/\tilde{r} - \tilde{r}}{C_t(1-\beta)^2} \rightarrow \frac{d}{d\tilde{r}}\left(\frac{U-U_2}{u_*}\right) = \frac{\beta/\tilde{r} - \tilde{r}}{C_t(1-\beta)^2}$$

$\tilde{r}=1: \frac{U}{u_*} = \frac{U_2}{u_*}$ | $\tilde{r}=1: \frac{U-U_2}{u_*} = 0$

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\frac{U-U_2}{u_*}\right)=\frac{(\beta/\tilde{r}-\tilde{r})}{C_t(1-\beta)^2}$$

$\tilde{r}=1:\ \frac{U-U_2}{u_*}=0$

Integrando de $\tilde{r}$ a 1:

$$\frac{U-U_2}{u_*}=\frac{1}{C_t(1-\beta)^2}\Big[\underbrace{\int_1^{\tilde{r}}\frac{\beta}{\tilde{r}}d\tilde{r}}_{\beta\ln\tilde{r}}-\underbrace{\int_1^{\tilde{r}}\tilde{r}\,d\tilde{r}}_{\frac{\tilde{r}^2}{2}-\frac{1}{2}}\Big]$$

$$\boxed{\frac{U-U_2}{u_*}=\frac{1}{2C_t(1-\beta)^2}(2\beta\ln\tilde{r}+1-\tilde{r}^2)}$$

Diferencia máxima de velocidad $\frac{U-U_2}{u_*}$:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\frac{U-U_2}{u_*}\right)=0\rightarrow\frac{\beta}{\tilde{r}}=\tilde{r}\rightarrow\tilde{r}=\sqrt{\beta}\Rightarrow\left(\frac{U-U_2}{u_*}\right)_{\text{máx}}=\frac{1}{2C_t(1-\beta)^2}(2\beta\ln\sqrt{\beta}+1-\beta)$$

$$\left(\frac{U-U_2}{u_*}\right)_{\text{máx}}=\frac{1}{2C_t(1-\beta)^2}(\beta\ln\beta+1-\beta)$$

Como el mezclado turbulento es el responsable de las diferencias $U-U_2\rightarrow$

$$\rightarrow\frac{U-U_2}{u_*}\sim1\Rightarrow\boxed{C_t\sim\frac{\beta\ln\beta+(1-\beta)}{2(1-\beta)^2}}\qquad \text{si } \beta: 0<\beta<1\Rightarrow C_t\sim1$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 21–06–08**

a) Por un tubo liso de radio R circula un gasto volumétrico Q de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ, tal que el número de Reynolds es muy alto. El coeficiente de fricción de Darcy, λ, es una función del número de Reynolds que se supone conocida, de modo que λ es un dato. Alternativamente, en lugar del gasto volumétrico Q, se puede utilizar la velocidad $U_0 = Q/\pi R^2$.

Teniendo en cuenta que la ecuación de cantidad de movimiento es

$$-\frac{r}{2}\frac{dp_0}{dx} - \rho\overline{u'v'_r} + \mu\frac{dU}{dr} = 0,$$

que

$$\frac{U_0 R}{\nu}\frac{\lambda}{8} \gg 1,$$

y que el coeficiente de fricción C_f se puede escribir como

$$C_f = \frac{\lambda}{4} = 2\left(\frac{u_*}{U_0}\right)^2,$$

se pide:

1.- Determinar el esfuerzo en la pared del tubo, τ_p, y el gradiente de presiones dp_0/dx.

2.- Determinar la velocidad de fricción, u_*.

3.- Esfuerzos turbulentos en la zona del defecto de velocidades (núcleo central del tubo).

4.- Orden de magnitud del espesor de la capa cercana a la pared, donde los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden.

5.- Valor de los esfuerzos turbulentos en la región logarítmica.

---

b) La resistencia de una esfera que se mueve en el seno de un líquido a la velocidad constante U es proporcional a $\mu U a$, siendo a el radio de la esfera y μ la viscosidad del líquido, si el número de Reynolds del movimiento $\rho U a/\mu \ll 1$.

Supongan que una esfera de densidad ρ_e y radio a se deja caer en el aire (de densidad $\rho \ll \rho_e$) bajo la acción de la gravedad. Admitan que el aire se comporta como un fluido incompresible en su movimiento alrededor de la esfera, y que el número de Reynolds de este movimiento es muy pequeño.

Se trata de determinar, a partir de la ecuación que determina la evolución de la velocidad de la esfera, el orden de magnitud de la velocidad U de caída de la esfera y del tiempo característico, t_c; de aceleración de la misma.

Por estimaciones de ordenes de magnitud en la ecuación de cantidad de movimiento, mostrar que el movimiento del aire alrededor de la esfera es casi estacionario, con lo que está justificado que su resistencia es del orden de $\mu U a$.

Orden de magnitud del parámetro ga^3/ν^2 (g aceleración de la gravedad y ν viscosidad cinemática del aire) para que el número de Reynolds sea pequeño, como se ha supuesto.

SOLUCIÓN

a).- El esfuerzo en la pared puede escribirse en las formas

$$\tau_p = \frac{1}{2}C_f \rho U_0^2 = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2 = \rho u_*^2,$$

de modo que, al ser λ conocido, porque se conoce el número de Reynolds y el tubo es liso, se tiene

$$\tau_p = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2 \ \text{ y } \ \frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}.$$

Particularizando la ecuación de cantidad de movimiento en $r = R$ se tiene

$$\frac{dp_0}{dx} = \frac{2}{R}\left(\mu\frac{dU}{dr}\right)_{r=R} = -\frac{2\tau_p}{R} = -\frac{\lambda}{4R}\rho U_0^2 = -\frac{2\rho u_*^2}{R}.$$

Sustituyendo el valor de dp_0/dx en la ecuación de cantidad de movimiento, queda

$$\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dr} = 0,$$

ecuación que puede escribirse en la forma

$$\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{U_0 R}\left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2 \frac{d\,(U/U_0)}{d\,(r/R)} = 0,$$

de modo que en la zona central del tubo se reduce a

$$\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} \Rightarrow \overline{u'v'_r} = \frac{r}{R}u_*^2 = \frac{r}{R}\frac{\lambda}{8}U_0^2.$$

Cerca de la pared del tubo la ecuación toma la forma

$$1 - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dy} = 0,$$

donde $y = R - r$. que se reduce a

$$1 - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{d\,(U/u_*)}{d\,(u_* y/\nu)} = 0,$$

de modo que el orden de magnitud de la zona en la que los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden es

$$y \sim \frac{\nu}{u_*} \sim \frac{\nu}{U_0}\sqrt{\frac{8}{\lambda}}.$$

En la ecuación anterior, cuando $y \gg \nu/u_*$, estamos en la zona logarítmica. y allí la ecuación de cantidad de movimiento anterior se reduce a

$$1 - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0 \Rightarrow \overline{u'v'_r} = u_*^2,$$

que es la zona de esfuerzos turbulentos constantes.

---

b).- La ecuación del movimiento de caída de la esfera es

$$m\frac{dU}{dt} = mg - D, \ \text{ con } \ U = 0 \ \text{ en } \ t = 0,$$

donde

$$m\frac{dU}{dt} \sim \rho_e a^3 \frac{U_c}{t_c} \ ; \ mg \sim \rho_e a^3 g \ ; \ D \sim \mu U_c a,$$

EXAMEN 21/06/08 (a)

$Q, \rho, \mu, Re \gg 1$; $Q \leftrightarrow U_0 = \frac{Q}{\pi R^2}$ | Tubo liso, R

$\lambda = f(Re) \to$ Dato

→ Ecuación de la cantidad de movimiento : $-\frac{r}{2}\frac{dp_0}{dx} - \rho\overline{u'v'_r} + \mu\frac{dU}{dr} = 0$

$$\frac{U_0 R}{\nu}\frac{\lambda}{8} \gg 1$$

→ Coeficiente de fricción C_f : $C_f = \frac{\lambda}{4} = 2\left(\frac{u_*}{U_0}\right)^2$

1) $\tau_p, \frac{dp_0}{dx}$?

$$\boxed{\tau_p = \frac{1}{2}C_f\rho U_0^2 = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2 = \rho u_*^2} \; (*) \to \frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

Como λ es dato → $\boxed{\tau_p = \frac{\lambda}{8}\rho U_0^2}$

Particularizando la ecuación de cantidad de movimiento en $r = R$:

$$-\frac{R}{2}\frac{dp_0}{dx} - \underbrace{\cancel{\rho\overline{u'v'_r}}}_{0 \text{ (en la pared no hay turbulencia)}} + \left(\mu\frac{dU}{dr}\right)_{r=R} = 0 \to \frac{dp_0}{dx} = \frac{2}{R}\underbrace{\left(\mu\frac{dU}{dr}\right)_{r=R}}_{-\tau_p} = -\frac{2}{R}\tau_p$$

$$\boxed{\frac{dp_0}{dx} = -\frac{\lambda}{4R}\rho U_0^2} \equiv -\frac{2\rho u_*^2}{R}$$

2) u_* ? → $\boxed{u_* = U_0\sqrt{\frac{\lambda}{8}}}$; 3) $\overline{u'v'_r}$ en la zona central del tubo (zona del defecto de velocidades)

→ Ecuación de cantidad de movimiento con $dp_0/dx = -\frac{2\rho u_*^2}{R}$

$$+\frac{r}{\cancel{2}}\cdot\left(+\frac{\cancel{2}}{R}\cancel{\rho}u_*^2\right) - \cancel{\rho}\overline{u'v'_r} + \frac{\mu}{\rho}\frac{dU}{dr} = 0 \xrightarrow{\div u_*^2} \frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dr} = 0 \to$$

$$\to \frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\cdot\frac{U_0}{R}\frac{d(U/U_0)}{d(r/R)}\cdot\frac{U_0}{U_0} = 0 \to \frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{U_0 R}\cdot\left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2\cdot\frac{d(U/U_0)}{d(r/R)} = 0$$

$$\frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \underbrace{\left(\frac{\nu}{U_0 R}\cdot\frac{8}{\lambda}\right)}_{\ll 1 \text{ (enunciado)}}\frac{d(U/U_0)}{d(r/R)} = 0 \Rightarrow \frac{r}{R} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0 \to \overline{u'v'_r} = u_*^2\cdot\frac{r}{R}$$

$$\to \boxed{\overline{u'v'_r} = \frac{r}{R}\cdot\frac{\lambda}{8}\cdot U_0^2}$$

4) Orden de magnitud del espesor de la capa cercana a la pared

cerca de la pared → ec. de la cantidad de movimiento (con $y = R - r$) ↳ $\frac{r}{R} = 1 - y/R$, $dr = -dy$

$$\to 1 - \underbrace{\cancel{\frac{y}{R}}}_{\frac{y}{R} \ll 1 \text{ cerca de la pared.}} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dy} = 0 \to 1 - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{d(U/u_*)}{d(u_* y/\nu)} = 0; \; \frac{U}{u_*} = U_+$$

$\frac{u_* y}{\nu} = y_+ \Rightarrow y_+ \sim 1$ cerca de la pared

$$y \sim \frac{\nu}{u_*}$$

$$\boxed{y \sim \frac{\nu}{u_*} \sim \frac{\nu}{U_0}\sqrt{\frac{8}{\lambda}}}$$

5) $\overline{u'v'_r}$ en región logarítmica

Cuando $y \gg \nu/u_*$ y cuando $r \to R$ ($y/R \to 0$) ambas soluciones deben coincidir → zona de acoplamiento (Región logarítmica)

La ecuación de la cantidad de movimiento queda, en ambos casos:

$$1 - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0 \rightarrow \boxed{\overline{u'v'_r} = u_*^2}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 08–06–09**

PRIMERA PREGUNTA

En el caso de gases caloríficamente perfectos las variables de Riemann son

$$\frac{2}{\gamma-1}a+u=R_+=\text{ Constante a lo largo de las líneas }\frac{dx}{dt}=u+a,$$

y

$$\frac{2}{\gamma-1}a-u=R_-=\text{ Constante a lo largo de las líneas }\frac{dx}{dt}=u-a.$$

Mostrar que si R_- es constante en todo el campo fluido, las líneas características $\frac{dx}{dt}=u+a$ son líneas rectas. Sin embargo las líneas $\frac{dx}{dt}=u-a$, en general, no son rectas. Pongan un ejemplo en lo que esto ocurra y den la velocidad $u(x,t)$ y la velocidad del sonido $a(x,t)$ para el ejemplo propuesto.

SEGUNDA PREGUNTA

La ecuación de la cantidad de movimiento que describe la evolución de una capa límite, puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho U\left(U-U_e\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho V\left(U-U_e\right)\right]+\left(\rho U-\rho_e U_e\right)\frac{dU_e}{dx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}+\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Se pide simplificar esta ecuación para el caso de una capa límite incompresible sobre una placa plana alineada con la corriente incidente, de velocidad U_e constante. Deducir a partir de ella la ecuación integral de Kármàn correspondiente. Tengan en cuenta que

$$\delta_2=\int_0^\infty\frac{\rho U}{\rho_e U_e}\left(1-\frac{U}{U_e}\right)dy,$$

es el espesor de cantidad de movimiento, y

$$c_f=\frac{2\tau_p}{\rho_e U_e^2},$$

el coeficiente de fricción.

Suponiendo una capa límite laminar cuyo perfil de velocidades es

$$\frac{U}{U_e}=\frac{y}{\delta(x)}\quad\text{para}\quad\frac{y}{\delta(x)}\le 1,$$

$$\frac{U}{U_e}=1\quad\text{para}\quad\frac{y}{\delta(x)}>1,$$

se pide determinar $\delta(x)$, $\delta_2(x)$ y $c_f(x)$.

SOLUCIÓN

PRIMERA PREGUNTA

De las dos ecuaciones de los invariantes se obtiene

$$a = \frac{\gamma - 1}{4}\left(R_+ + R_-\right),$$

$$u = \frac{1}{2}\left(R_+ - R_-\right).$$

Dado que R_- es constante en todo el campo fluido y como R_+ es constante a lo largo de las líneas $\frac{dx}{dt} = u + a$, resulta que a lo largo de estas líneas tanto u como a son constantes y, por lo tanto, son líneas rectas de pendiente $u + a$. Esta pendiente cambia de una línea R_+ a otra.

Las líneas $\frac{dx}{dt} = u - a$ no son rectas porque aunque R_- es constante en todo el campo fluido, el invariante R_+ va cambiando a lo largo de estas líneas y tanto u como a no son constantes.

Un ejemplo clásico es un pistón en un tubo infinito con aire en reposo a ambos lados. Si se pone en movimiento el pistón a velocidad constante hacia la izquierda, a la derecha del pistón se genera una onda de expansión que es una onda simple en la que $R_- = \frac{2}{\gamma-1}a_0$ =constante, siendo a_0 la velocidad del sonido del aire en reposo (en el instante inicial).

La velocidad del sonido del aire en contacto con el pistón se obtiene de

$$\frac{2}{\gamma - 1}a_p - u_p = \frac{2}{\gamma - 1}a_0 \quad \Rightarrow \quad a_p = a_0 + \frac{\gamma - 1}{2}u_p,$$

siendo u_p la velocidad del pistón (que es negativa para este ejemplo).

La característica de ecuación

$$u_p + a_p = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad x = \left(a_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_p\right)t,$$

y la trayectoria del pistón

$$x = u_p t,$$

delimitan la región en la que $u = u_p$ y $a = a_p = a_0 + \frac{\gamma-1}{2}u_p$, salvo que $-u_p \geq \frac{2a_0}{\gamma-1}$ en cuyo caso la velocidad del sonido se anula y la última característica sería

$$x = -\frac{2a_0}{\gamma - 1}t,$$

y entre esta característica y la trayectoria del pistón hay una zona de vacío.

El otro límite de la expansión corresponde a la característica

$$x = a_0 t.$$

Entre $t = 0$ y la característica anterior, el aire está en reposo en las mismas condiciones que en el instante inicial.

Entre $x = a_0 t$ y $x = \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u_p\right) t$ (o en su caso $x = -\frac{2a_0}{\gamma-1} t$) hay un abanico de expansión en el que

$$u + a = \frac{x}{t},$$

que junto con el invariante R_-

$$\frac{2}{\gamma - 1} a - u = \frac{2}{\gamma - 1} a_0,$$

determinan u y a en función de x y de t.

La solución de este ejemplo la pueden encontrar en la lección 29 (Movimiento unidireccional no estacionario de gases ideales).

SEGUNDA PREGUNTA

Por ser un fluido incompresible $\rho = \rho_e =$ constante. Para el caso de una placa plana U_e es constante de modo que $\frac{dU_e}{dx} = 0$. La ecuación de cantidad de movimiento queda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho U (U - U_e)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho V (U - U_e)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Multiplicando por dy e integrando entre cero e infinito se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \left[\rho U (U - U_e)\right] dy + \int_0^\infty d\left[\rho V (U - U_e)\right] = \int_0^\infty d\left(-\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

pero

$$\int_0^\infty d\left[\rho V (U - U_e)\right] = \left[\rho V (U - U_e)\right]_\infty - \left[\rho V (U - U_e)\right]_0 = 0,$$

ya que en $y \to \infty$ es $U = U_e$ y en $y = 0$ es $V = 0$.

Por otro lado

$$\int_0^\infty d\left(-\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \left(-\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_\infty - \left(-\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = -\tau_p,$$

ya que en $y \to \infty$ tanto $\rho\overline{u'v'}$ como $\mu\frac{\partial U}{\partial y}$ tienden a cero; y en $y = 0$ es $\rho\overline{u'v'} = 0$ y $\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = \tau_p$. En resumen se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \left[\rho U (U - U_e)\right] dy = -\tau_p.$$

Dividiendo por ρU_e^2 se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{U}{U_e}\left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2},$$

y utilizando las definiciones de θ y c_f se tiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} c_f.$$

Con el perfil de velocidades lineal se tiene

$$\theta = \int_0^\infty \frac{U}{U_e}\left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy = \delta \int_0^1 \xi\,(1-\xi)\,d\xi = \frac{\delta}{6},$$

y

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu U_e}{\delta}\left[\frac{\partial\,(U/U_e)}{\partial\,(y/\delta)}\right]_0 = \frac{\mu U_e}{\delta},$$

de modo que

$$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{\mu}{\rho U_e \delta},$$

quedando la ecuación

$$\frac{1}{6}\frac{d\,(\rho U_e \delta/\mu)}{d\,(\rho U_e x/\mu)} = \frac{\mu}{\rho U_e \delta},$$

y llamando $Rex = \rho U_e x/\mu$ y $Re\delta = \rho U_e \delta/\mu$, la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{dRe\delta}{dRex} = \frac{6}{Re\delta},$$

que se integra, con la condición $Re\delta = 0$ en $Rex = 0$, para dar

$$(Re\delta)^2 = 12\,(Rex) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{Rex}}.$$

El espesor de cantidad de movimiento queda

$$\frac{\theta}{x} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{Rex}},$$

mientras que el coeficiente de fricción es

$$c_f = \frac{2\mu}{\rho U_e \delta} = 2\frac{\mu}{\rho U_e x}\frac{x}{\delta} = 2\frac{1}{Rex}\frac{\sqrt{Rex}}{2\sqrt{3}} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{Rex}}.$$

En esta solución el coeficiente $1/\sqrt{3} = 0.58$, mientras que en la solución de Blasius se obtiene 0.664, lo que nos indica que el error cometido con este perfil de velocidades tan simple es del 13%.

$\boxed{\text{EXAMEN 08/06/09 (SEGUNDA PREGUNTA)}}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho U(U-U_e)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho V(U-U_e)\right]+(\rho U-\rho_e U_e)\frac{dU_e}{dx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}+\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

- Capa límite incompresible ($\rho=cte$) sobre una placa plana alineada con la corriente incidente ($U_e=cte$) $\rightarrow$ $dU_e/dx=0$
  - $\rightarrow$ Deducir ecuación integral de Karman
  - $\rightarrow$ Ecuación de la cantidad de movimiento queda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_e)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_e)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}+\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Multiplicando por dy e integrando:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty U(U-U_e)\,dy+\underbrace{\int_0^\infty d\left[V(U-U_e)\right]}_{(1)}=\underbrace{\int_0^\infty d\left(-\overline{u'v'}+\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)}_{(2)}$$

(1) $\int_0^\infty d\left[V(U-U_e)\right]=\left[V(\cancel{U-U_e})\right]_\infty-\left[\cancel{V}(U-U_e)\right]_0=0$

0 $(U=U_e)$ $\quad$ 0 (no dice nada el enunciado de que haya succión o soplado)

(2) $\int_0^\infty d\left(-\overline{u'v'}+\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\cancel{\left(-\overline{u'v'}\right)_\infty}-\cancel{\left(-\overline{u'v'}\right)_0}+\cancel{\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_\infty}-\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0=-\frac{\tau_p}{\rho}=$

0 Fuera de la capa límite (flujo de Euler) $\quad$ 0 $\quad$ 0 (no hay fluctuaciones)

$=-\frac{1}{2}C_f U_e^2$

$$U_e^2\frac{d}{dx}\underbrace{\int_0^\infty\frac{U}{U_e}\left(\frac{U}{U_e}-1\right)dy}_{-\delta_2}=-\frac{1}{2}C_f U_e^2\rightarrow+\frac{d\delta_2}{dx}\cdot\cancel{U_e^2}=+\frac{1}{2}C_f\cancel{U_e^2}$$

$$\hookrightarrow\ \boxed{\frac{d\delta_2}{dx}=\frac{1}{2}C_f}$$

$\uparrow$

en realidad: $\frac{d}{dx}\left[U_e^2\int_0^\infty\frac{U}{U_e}\left(\frac{U}{U_e}-1\right)dy\right]=-\frac{d}{dx}\left(U_e^2\delta_2\right)=-2U_e\delta_2\underbrace{\frac{dU_e}{dx}}_{0}-U_e^2\frac{d\delta_2}{dx}$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 18–09–09**

1.- Una corriente uniforme U_∞ de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ incide sobre una esfera de radio a. El número de Reynolds del movimiento $\rho U_\infty a/\mu$ es grande. Se trata de estimar el orden de magnitud del espesor δ de la capa límite suponiendo que es laminar. Estimen también el orden de magnitud del esfuerzo de fricción en la pared de la esfera y el orden de magnitud de la fuerza de resistencia.

2.- Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para la turbulencia libre bidimensional de un líquido son

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\ ;\ \ U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right).$$

Hagan aplicación al caso de una estela bidimensional lejana de un cuerpo simétrico sometido a una corriente uniforme U_∞, para determinar la variación con x del espesor δ de la capa y del defecto de la velocidad $\tilde{U}$ en $y=0$.

SOLUCIÓN

1.- Para estimar el orden de magnitud del espesor de la capa límite, el término viscoso de orden

$$\mu \frac{U_\infty}{\delta^2},$$

debe ser del mismo orden que el convectivo

$$\rho \frac{U_\infty^2}{a},$$

lo que proporciona

$$\frac{\delta}{a} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty a}}.$$

El orden de magnitud del coeficiente de fricción se obtiene de

$$\tau_p \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta} \sim \frac{\mu U_\infty}{a}\sqrt{\frac{\rho U_\infty a}{\mu}} \sim \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty a}},$$

de modo que la fuerza de fricción es del orden de

$$F_f \sim \tau_p a^2 \sim \rho U_\infty^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty a}},$$

sin embargo, la fuerza de resistencia es mucho mayor ya que al ser un cuerpo romo, se desprende la corriente y diferencia de presiones entre la parte frontal y la desprendida es del orden de ρU_∞^2, de modo que la fuerza de resistencia es

$$F_p \sim \rho U_\infty^2 a^2.$$

La relación entre ambas fuerzas es

$$\frac{F_f}{F_p} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty a}} \ll 1.$$

2.- En la estela bidimensional lejana la velocidad U puede escribirse como

$$U = U_\infty + \tilde{U},$$

con $\tilde{U} \backsim \sqrt{u'v'} \ll U_\infty$. Además, la resistencia (por unidad de longitud) es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U} \mathrm{d}y = -\frac{D}{\rho U_\infty} = -I.$$

De la ecuación de la continuidad se obtiene

$$\frac{\tilde{U}}{x} \sim \frac{V}{\delta},$$

de modo que la de cantidad de movimiento se reduce a

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right).$$

Del escalado de esta ecuación se tiene

$$\frac{U_\infty \tilde{U}}{x} \sim \frac{\tilde{U}^2}{\delta},$$

mientras que de la resistencia se tiene

$$\tilde{U}\delta \sim I.$$

De estas dos relaciones se obtiene

$$\delta \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}\,;\;\; \tilde{U} \sim \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}}.$$

$\boxed{\text{EXAMEN 18/09/09 (2)}}$

Turbulencia libre bidimensional de un líquido:

- Ecuación de la continuidad: $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$
- Ecuación de la cantidad de movimiento: $U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})$

Estela bidimensional lejana de un cuerpo simétrico sometido a una corriente uniforme U_∞.

→ Determinar la variación con x del espesor δ de la capa y del defecto de la velocidad $\tilde{U}$ en $y=0$.

$U = U_\infty + \tilde{U}$

→ Ec. de la continuidad: $\frac{\partial(\overset{cte}{\cancel{U_\infty}}+\tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\tilde{U}}{x} \sim \frac{V}{\delta} \rightarrow$

$\rightarrow V \sim \tilde{U}\left(\frac{\delta}{x}\right)$

→ Ec. de la cantidad de movimiento:

$$(U_\infty+\tilde{U})\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + V\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})$$

$$\underbrace{U_\infty\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}}_{\sim \frac{U_\infty \tilde{U}}{x}} + \underbrace{\cancel{\tilde{U}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}} + \cancel{V\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}}}_{\sim \tilde{U}^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}_{\sim \frac{\tilde{U}^2}{\delta}} \rightarrow \underline{U_\infty\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}$$

$\frac{U_\infty \tilde{U}}{x} \gg \sim \tilde{U}^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$

ya que

$\hookrightarrow \frac{U_\infty \cancel{\tilde{U}}/\cancel{x}}{\tilde{U}^{\cancel{2}}/\cancel{x}} \sim \frac{U_\infty}{\tilde{U}} \gg 1$

Multiplicando por dy e integrando:

$$U_\infty\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{U}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} d(-\overline{u'v'}) = 0 \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{U}\,dy = cte = -\frac{D}{\rho U_\infty} = -I$$

↳ fluctuaciones fuera de la estela son nulas

[Resistencia por unidad de longitud.]

De $\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{U}\,dy = -I \rightarrow \tilde{U}\cdot\delta \sim I \rightarrow \tilde{U} \sim \frac{I}{\delta}$

y con $\frac{U_\infty \cancel{\tilde{U}}}{x} \sim \tilde{U}^{\cancel{2}}/\delta \rightarrow \frac{U_\infty}{x} \sim \frac{I}{\delta^2} \rightarrow \boxed{\delta \sim \sqrt{\frac{I\cdot x}{U_\infty}}}$

(de la ecuación de cant. de mov.)

$$\boxed{\tilde{U} \sim \sqrt{\frac{I\cdot U_\infty}{x}}}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 29–06–11**

Por un tubo infinitamente largo, de pared lisa y de diámetro $D = 0{,}5\ m$, circula un gasto volumétrico de agua $Q = 0{,}60\ m^3 s^{-1}$. La diferencia de presiones entre dos secciones situadas a 50 m de distancia es de 5400 Pa. Se pide:

1.- Comprobar que el movimiento es turbulento ($\rho = 1000\ kg\,m^{-3}$, $\mu = 1{,}14 \times 10^{-3}\ kg\,m^{-1}s^{-1}$).

2.- Determinar la velocidad de fricción u_* definida como $u_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$, siendo τ_p el esfuerzo en la pared. Para ello utilicen la ecuación de la continuidad y la componente a lo largo del tubo de la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral

$$\int_\Sigma \rho\,(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0; \quad \int_\Sigma \rho\vec{v}\,(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = -\int_\Sigma p\vec{n} d\sigma + \int_\Sigma \vec{n} \cdot \tau' d\sigma.$$

3.- Estimen el orden de magnitud de los esfuerzos turbulentos $-\rho\overline{u'v'_r}$.

4.- Teniendo en cuenta que la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento a lo largo del tubo, para un movimiento turbulento, se reduce a

$$\frac{2ru_*^2}{D} - \overline{u'v'_r} + \nu\frac{dU}{dr} = 0,$$

donde r es la coordenada radial y U la velocidad media turbulenta, se pide:

- 4a.- Mostrar que los esfuerzos turbulentos varían linealmente con la distancia al centro del tubo, en la mayor parte de la sección del mismo donde $U \sim U_0 = 4Q/\pi D^2$, excepto en una pequeña región cercana a la pared
- 4b.- Determinar el orden de magnitud del espesor de la capa cercana a la pared, en la que los esfuerzos viscosos y turbulentos son del mismo orden. Tengan en cuenta que en esta región $U \sim u_*$.

SOLUCIÓN

1.- La velocidad media que da el mismo gasto es

$$U_0 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0{,}6}{\pi \times 0{,}5^2} = 3{,}06 \frac{m}{s},$$

y el número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho U_0 D}{\mu} = \frac{1000 \times 3{,}06 \times 0{,}5}{1{,}14 \times 10^{-3}} = 1{,}34 \times 10^6.$$

Como el número de Reynolds es mucho mayor que 3000, el movimiento en el tubo es turbulento.

2.- Con un volumen de control limitado por la pared del tubo y dos secciones (1 y 2) situadas a la distancia $L = 50\ m$, se tiene $\vec{v}_c = 0$ en todas las superficies del volumen de control. La ecuación de la continuidad proporciona $v_1 = v_2$ y la de cantidad de movimiento

$$(p_1 - p_2) \frac{\pi D^2}{4} = \tau_p \pi D L,$$

lo que proporciona

$$\tau_p = \frac{(p_1 - p_2) D}{4L} = \rho u_*^2,$$

resultando

$$u_* = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) D}{4 \rho L}} = \sqrt{\frac{5400 \times 0{,}5}{4 \times 1000 \times 50}} = 0{,}116 \frac{m}{s}.$$

3.- Los esfuerzos turbulentos son del mismo orden que el esfuerzo en la pared, de modo que $-\rho \overline{u' v_r'} \sim \tau_p = \rho u_*^2 = 1000 \times 0{,}116^2 = 13{,}5\ Pa$.

4a.- En la región del tubo donde $r \sim D$ los dos primeros términos de la ecuación de cantidad de movimiento son del mismo orden

$$\frac{2 r u_*^2}{D} \sim \overline{u' v_r'} \sim u_*^2,$$

mientras que el último término es del orden de

$$\nu \frac{dU}{dr} \sim \frac{\nu U_0}{D}.$$

La comparación entre ambos términos es

$$\frac{\nu \, (dU/dr)}{\overline{u' v_r'}} \sim \frac{\nu U_0 / D}{u_*^2} = \frac{\nu}{U_0 D} \left(\frac{U_0}{u_*} \right)^2 = \frac{(3{,}06/0{,}116)^2}{1{,}34 \times 10^6} = 5{,}19 \times 10^{-4} \ll 1.$$

Con el resultado anterior se ve que el término viscoso es despreciable en esta región y la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$\frac{2 r u_*^2}{D} - \overline{u' v_r'} = 0 \Rightarrow \frac{\overline{u' v_r'}}{u_*^2} = 2 \frac{r}{D},$$

lo que nos muestra que los esfuerzos turbulentos son nulos en el centro del tubo y varían linealmente con r. En la pared $\overline{u' v_r'}/u_*^2 = 1$, pero allí está solución no es válida, ya que en la pared debe ser $\overline{u' v_r'} = 0$.

4b.- Cerca de la pared el término viscoso debe ser tan importante como el que más, para poder imponer la condición de contorno $U = 0$ en $r = D/2$. En esta región utilizamos la variable $r = D/2 - y$ con

$y \ll D$ y cuyo orden de magnitud se desea determinar. En esta región la velocidad $U \sim u_*$, de modo que cada uno de los términos de la ecuación de cantidad de movimiento son del orden de

$$\frac{2ru_*^2}{D} = \frac{(D-2y)\,u_*^2}{D} \approx u_*^2; \quad \overline{u'v'_r} \sim u_*^2; \quad \nu\frac{dU}{dr} = -\nu\frac{dU}{dy} \sim \frac{\nu u_*}{\delta},$$

y para que los tres términos sean del mismo orden, el espesor δ debe ser tal que

$$\frac{\nu u_*}{\delta} \sim u_*^2 \;\Rightarrow\; \delta \sim \frac{\nu}{u_*} = \frac{1{,}14 \times 10^{-6}}{0{,}12} = 9{,}5 \times 10^{-6}\; m.$$

EXAMEN 29/06/11

Tubo liso $\quad Q = 0{,}6\ m^3/s \quad \rho = 1000\ Kg/m^3$

$D = 0{,}5\,m \quad p_1 - p_2 = 5400\,Pa \quad \mu = 1{,}14 \cdot 10^{-3}\ Kg/ms$

$L = x_1 - x_2 = 50\,m$

1) Comprobar que el movimiento es turbulento

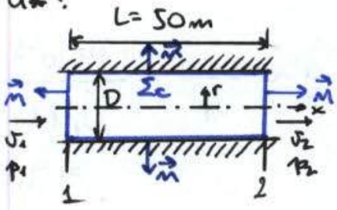
$$U_0 = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{\pi \cdot (0{,}5)^2}\,(m/s) = 3{,}06\ m/s$$

El número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho U_0 D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 3{,}06 \cdot 0{,}5}{1{,}14 \cdot 10^{-3}} = 1{,}34 \cdot 10^6$$

$\boxed{\text{Como } Re \gg 3000 \rightarrow \text{movimiento en el tubo es turbulento}}$

2) u_*?



$$\int_{\Sigma_c} \rho(\vec{v} - \cancel{\vec{v}_c}^{\,0}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0 \rightarrow \int_{\Sigma_c} \rho \vec{v} \vec{n}\, d\sigma = 0 \rightarrow -\rho v_1 \underbrace{\cancel{\frac{\pi D^2}{4}}}_{\text{tridimensional}} + \rho v_2 \cancel{\frac{\pi D^2}{4}} = 0$$

$$\underline{\underline{v_1 = v_2}}$$

$$\int_{\Sigma_c} \rho \vec{v}(\vec{v} - \cancel{\vec{v}_c}^{\,0}) \vec{n}\, d\sigma = -\int_{\Sigma} p \vec{n}\, d\sigma + \int_{\Sigma} \vec{n}\, \tau'\, d\sigma$$

$$-\rho \cancel{v_1^2 \frac{\pi D^2}{4}} + \rho \cancel{v_2^2} \frac{\pi D^2}{4} = + p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_2 \frac{\pi D^2}{4} - \cancel{2\pi} \frac{D}{\cancel{2}} \cdot L \cdot \tau_p = 0$$

por ec. continuidad

$$\tau_p = \frac{(p_1 - p_2) D}{4L} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enunciado}}}{=} \rho u_*^2 \rightarrow u_* = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) D}{4L\rho}} = \sqrt{\frac{5400 \cdot 0{,}5}{4 \cdot 50 \cdot 1000}} = 0{,}116\ m/s$$

$$\boxed{u_* = 0{,}116\ m/s}$$

3) Esfuerzos turbulentos del mismo orden que el esfuerzo en la pared:

$$-\rho \overline{u'v'_r} \sim \tau_p = \rho u_*^2 = 1000 \cdot 0{,}116^2 = 13{,}5\ Pa$$

$$\boxed{-\rho \overline{u'v'_r} \sim \tau_p = 13{,}5\ Pa}$$

4) $$\frac{2 r u_*^2}{D} - \overline{u'v'_r} + \nu \frac{dU}{dr} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r: \text{coordenada radial} \\ U: \text{velocidad media turbulenta} \end{array} \right.$$

4a) $$\frac{2r}{D} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \underbrace{\frac{\nu}{u_*^2} \frac{dU}{dr}}_{(*)} = 0 \qquad (*) \underbrace{\left(\frac{\nu}{U_0 D}\right) \cdot 2 \left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2}_{(**)} \cdot \frac{d(U/U_0)}{d(2r/D)}$$

$$(**)\ (1{,}34 \cdot 10^6)^{-1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3{,}06}{0{,}116}\right)^2 = 1{,}04 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

$$\underbrace{\frac{2r}{D}}_{\sim 1} - \underbrace{\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2}}_{\sim 1} + \cancel{\underbrace{\left(\frac{\nu}{U_0 D}\right) \cdot \left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2}_{(**)} \cdot \frac{d(U/U_0)}{d(2r/D)}} = 0$$

Con esto se demuestra que el término viscoso es despreciable en esta región ($r \sim D$) y la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a:

$$\frac{2r}{D} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} = \frac{2r}{D}} \rightarrow$$

Esfuerzos turbulentos nulos en el centro del tubo y varían linealmente con r.
En la pared $\overline{u'v'_r}/u_*^2 = 1$, pero esto no es válido porque debería ser $\overline{u'v'_r}/u_*^2 = 0$.

4b)

$$\frac{2r}{D} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dr} = 0 \longrightarrow 1 - \frac{2y}{D} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{\nu}{u_*^2}\frac{dU}{dy} = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{D}{2} - r \rightarrow \frac{2y}{D} = 1 - \frac{2r}{D} \rightarrow \frac{2r}{D} = 1 - \frac{2y}{D} \\ dy = -dr \end{cases}$$

$$1 - \frac{2y}{D} - \frac{\overline{u'v'_r}}{u_*^2} - \frac{d(U/u_*)}{d\left(\frac{y u_*}{\nu}\right)} = 0 \quad \begin{cases} U/u_* = U_+ \\ \frac{y u_*}{\nu} = y_+ \sim 1 \end{cases} \Rightarrow y \sim \frac{\nu}{u_*} = \frac{1{,}14 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0{,}116} = 9{,}83 \cdot 10^{-6}\, m$$

$$\boxed{y \sim \frac{\nu}{u_*} = 9{,}83 \cdot 10^{-6}\, m}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Mecánica de Fluidos II **Examen 21–09–11**

En la turbulencia libre las ecuaciones correspondientes al movimiento bidimensional toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right).$$

En el caso de la estela lejana de un cuerpo bidimensional simétrico, la velocidad u difiere de la velocidad exterior U_∞ en una cantidad $\tilde{u} \ll U_\infty$ ($u = U_\infty + \tilde{u}$) y las velocidades de fluctuación turbulenta son del mismo orden que $\tilde{u}$ ($\overline{u'v'} \sim \tilde{u}^2$). Se pide mostrar que el espesor $\delta(x)$ de la estela y el defecto de velocidad en el eje de simetría, $\tilde{u}(x,0)$, varían de la forma: $\delta(x) \sim \sqrt{C_1 x}$ y $\tilde{u}(x,0) \sim \sqrt{C_2/x}$, donde C_1 y C_2 son dos constantes que deben determinar. Para ello se aconseja proceder del modo siguiente:

1.- Utilizando la ecuación de la continuidad, estimen el orden de magnitud de la velocidad v en función de $\tilde{u}$, $\delta(x)$ y x.

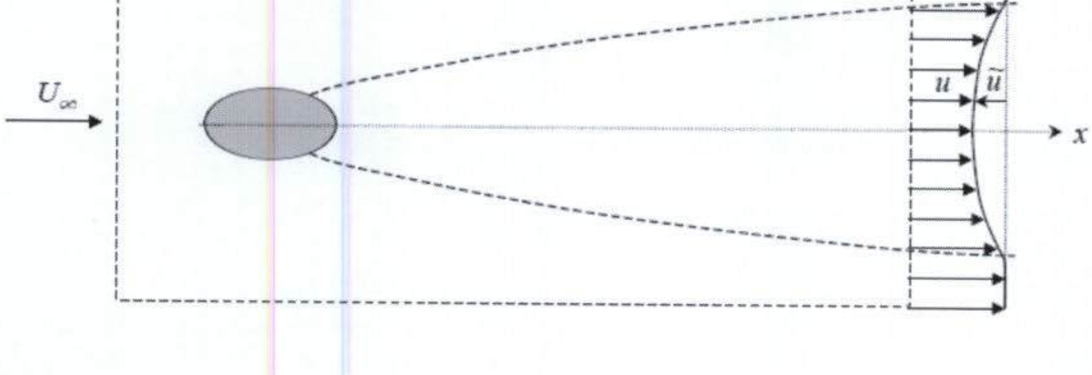
2.- Con el resultado del apartado anterior, simplifiquen la ecuación de cantidad de movimiento y estimen el orden de magnitud de $\delta(x)$ en función de $\tilde{u}$, U_∞ y x.

3.- Con la ecuación de cantidad de movimiento simplificada, muestren que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}\,dy = -I,$$

donde I es una constante que se supone conocida. Deduzcan de esta ecuación una nueva relación entre los órdenes de magnitud de $\tilde{u}$ y $\delta(x)$.

4.- Con los resultados de los apartados anteriores, determinen las constantes C_1 y C_2.



SOLUCIÓN

1.- Dado que $u = U_\infty + \tilde{u}$, la ecuación de la continuidad resulta

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

de donde se deduce

$$\frac{\tilde{u}}{x} \sim \frac{v}{\delta(x)} \quad \Rightarrow \quad v \sim \tilde{u}\frac{\delta(x)}{x}.$$

2.- Con $u = U_\infty + \tilde{u}$, la ecuación de cantidad de movimiento toma la forma

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right).$$

El orden de magnitud del primer sumando del primer miembro es

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sim \frac{U_\infty \tilde{u}}{x},$$

mientras que el del segundo sumando, teniendo en cuenta el resultado del apartado 1, es

$$v\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \sim \tilde{u}\frac{\delta(x)}{x}\frac{\tilde{u}}{\delta(x)} \sim \frac{\tilde{u}^2}{x} \ll \frac{U_\infty \tilde{u}}{x},$$

de modo que el segundo sumando del primer miembro es despreciable frente al primero y la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right).$$

Como en esta última ecuación los dos términos son del mismo orden, se deduce

$$\frac{U_\infty \tilde{u}}{x} \sim \frac{\tilde{u}^2}{\delta(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(x)}{x} \sim \frac{\tilde{u}}{U_\infty}.$$

3.- Multiplicando la ecuación de cantidad de movimiento por dy e integrándola a través de la estela se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(-\overline{u'v'}\right) = 0,$$

ya que $\left(-\overline{u'v'}\right) \to 0$ en $y \to \pm\infty$ (fuera de la estela). Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}dy = -I,$$

donde I es una constante. De la relación anterior se obtiene: $\tilde{u}\delta(x) \sim I$.

4.- De las dos relaciones obtenidas anteriormente

$$\frac{\delta(x)}{x} \sim \frac{\tilde{u}(x,0)}{U_\infty}; \quad \tilde{u}(x,0)\,\delta(x) \sim I,$$

se deduce

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}; \quad \tilde{u}(x,0) \sim \sqrt{\frac{IU_\infty}{x}},$$

de modo que $C_1 = I/U_\infty$ y $C_2 = IU_\infty$.

EXAMEN 21/09/11

Turbulencia libre bidimensional:

- Ec. continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

- Ec. cant. de mov.: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})$

Estela lejana de un cuerpo bidimensional simétrico:

$u = U_\infty + \tilde{u}$, $\tilde{u} \ll U_\infty$

$\overline{u'v'} \sim \tilde{u}^2$

1) $$\frac{\partial(U_\infty+\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\tilde{u}}{x} \sim \frac{v}{\delta(x)} \rightarrow \boxed{v \sim \tilde{u}\cdot\frac{\delta(x)}{x}}$$

2) $$\underbrace{U_\infty\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}}_{\sim \frac{U_\infty \tilde{u}}{x}} + \underbrace{\underbrace{\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}}_{\sim\frac{\tilde{u}^2}{x}} + \underbrace{v\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}}_{\sim v\cdot\frac{\tilde{u}}{\delta(x)} \sim \frac{\tilde{u}^2}{x}}}_{\sim\frac{\tilde{u}^2}{x}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}_{\sim\frac{\tilde{u}^2}{\delta(x)}} \longrightarrow \boxed{U_\infty\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})}$$

$$\frac{U_\infty\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}}{\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}} \sim \frac{U_\infty \cancel{\tilde{u}}/\cancel{x}}{\tilde{u}^{\cancel{2}}/\cancel{x}} \sim \frac{U_\infty}{\tilde{u}} \ll 1$$

$$U_\infty\frac{\cancel{\tilde{u}}}{x} \sim \frac{\tilde{u}^{\cancel{2}}}{\delta(x)}$$

$\hookrightarrow \boxed{\delta(x) \sim x\left(\frac{\tilde{u}}{U_\infty}\right)}$

3) multiplicando la ecuación de cantidad de movimiento por dy e integrando:

$$U_\infty\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} d(-\overline{u'v'}) = 0 \longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}\,dy = -\frac{D}{\rho U_\infty} = -I}$$

no hay fluctuaciones fuera de la estela

$\boxed{\tilde{u}\cdot\delta(x) \sim I}$

4) $\left.\begin{array}{l}\delta(x) \sim \sqrt{C_1 x} \\ \tilde{u}(x) \sim \sqrt{C_2/x}\end{array}\right\} C_1, C_2 ?$

$$\tilde{u} \sim \frac{I}{\delta(x)} \rightarrow \delta(x) \sim \frac{I x}{U_\infty\delta(x)} \rightarrow \delta(x)^2 \sim \frac{Ix}{U_\infty} \rightarrow \delta(x) \sim \sqrt{\frac{Ix}{U_\infty}}$$

$\hookrightarrow \boxed{C_1 = I/U_\infty}$

$$\rightarrow \tilde{u} \sim \frac{I}{\sqrt{Ix/U_\infty}} \sim \sqrt{\frac{U_\infty I}{x}} \rightarrow \boxed{C_2 = U_\infty I}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO
MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

FLUJO TURBULENTO GASES

Mediante dos tuberías del mismo diámetro D se suministra gas desde el punto O a los puntos A y B. Las tuberías tienen un tramo común de longitud $L \gg D$, que une el punto O con uno intermedio M. A partir del punto M la tubería se bifurca en dos tramos. El tramo que une M con A tiene una longitud L y el que une M con B tiene una longitud $L/2$.

En el punto O se suministra el gas a la presión p_0 y temperatura T_0 conocidas, y se descarga en los puntos A y B a la presión ambiente p_a.

Se sabe:

a) El incremento de presión $p_0 - p_a \sim p_0$.

b) El movimiento por los tubos es turbulento a altos números de Reynolds, de modo que el coeficiente de fricción de Darcy, λ, es constante y conocido.

c) El parámetro adimensional $\lambda L/D$ es muy grande ($\lambda L/D \gg 1$).

d) La pared del tubo está a temperatura T_p constante y conocida.

e) Para determinar el flujo de calor en la pared del tubo es aplicable la analogía de Reynolds, de modo que el número de Stanton es $S_{ta} = \lambda/8$.

f) Las fuerzas másicas son despreciables.

Se pide:

1.1.- Simplificar la ecuación de cantidad de movimiento como consecuencia de que $\lambda L/D \gg 1$. Estimar el orden de magnitud del número de Mach del gas por el tubo.

1.2.- Mediante la ecuación de la energía mostrar, por estimaciones de órdenes de magnitud, que la temperatura del gas coincide con la de la pared del tubo T_p, salvo en una pequeña región a la entrada del tubo, cuyo orden de magnitud (relativo a L) se pide determinar.

2.- Haciendo uso de las simplificaciones del apartado 1, determinar el gasto de gas que circula por cada uno de los tramos y la presión en la bifurcación, p_M, admitiendo que la caída de presión en dicha bifurcación es despreciable frente a la caída a lo largo de las tuberías.

SOLUCIÓN

Las ecuaciones que determinan el movimiento turbulento a lo largo de un tubo son (véase capítulo XXIV de los apuntes)

$$\rho u = \frac{G}{A},$$

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda}{2D}\rho u^2,$$

$$\frac{d\left(h + \frac{1}{2}u^2\right)}{dx} = \frac{\lambda}{2D}\left[c_p T_p - \left(h + \frac{1}{2}u^2\right)\right],$$

donde ρ, p, $h = c_p T$ y u son la densidad, presión, entalpía y velocidad del gas respectivamente (T es la temperatura y c_p el calor específico a presión constante); G es el gasto másico, $A = \pi D^2/4$ el área del tubo y x la coordenada a lo largo del tubo.

1.1.- Si $\lambda L/D \gg 1$ el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento, referido al de fricción es

$$\frac{\rho u \frac{du}{dx}}{\frac{\lambda}{D}\rho u^2} \sim \frac{\rho u^2/L}{\frac{\lambda}{D}\rho u^2} \sim \frac{D}{\lambda L} \ll 1,$$

de modo que el término convectivo es despreciable frente al de fricción. En consecuencia, el término del gradiente de presiones debe ser del orden del de fricción, lo que proporciona

$$\Delta p \sim \frac{\lambda L}{D}\rho u^2,$$

y como los incrementos de presión son del orden de la propia presión

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\lambda L}{D}\frac{\rho u^2}{p} \sim \frac{\lambda L}{D}M^2 \sim 1,$$

resulta que el número de Mach es pequeño

$$M \sim \sqrt{\frac{D}{\lambda L}} \ll 1.$$

De acuerdo con todo lo anterior, la ecuación de cantidad de movimiento se simplifica a

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda}{2D}\rho u^2,$$

y haciendo uso de la ecuación de la continuidad se tiene

$$\rho\frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda}{2D}\left(\frac{G}{A}\right)^2.$$

1.2.- Dado que el número de Mach es pequeño, la relación

$$\frac{u^2}{h} \sim M^2 \ll 1,$$

permite despreciar la energía cinética frente a la térmica, de modo que la ecuación de la energía se reduce a

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\lambda}{2D}\left(c_p T_p - h\right).$$

Esta ecuación se puede integrar. Sin embargo, al ser $\lambda L/D \gg 1$, el término del segundo miembro es dominante frente al del primer miembro

$$\frac{\frac{dh}{dx}}{\frac{\lambda}{2D}\left(c_pT_p - h\right)} \sim \frac{D}{\lambda L} \ll 1,$$

y, en consecuencia, se tiene que

$$h = c_pT = c_pT_p, \text{ o bien } T = T_p.$$

Esto falla a distancias ℓ de la entrada en las que $\lambda\ell/D \sim 1$ o bien $\ell/L \sim D/\lambda L \ll 1$, es decir a distancias muy pequeñas frente a la longitud del tubo. En esta longitud ℓ se produce el cambio de la temperatura del gas desde T_0 a la temperatura de la pared T_p.

Obsérvese que en esta misma distancia la caída de presión es del orden de ρu^2, despreciable frente a la caída a lo largo del tubo.

De todos modos, la ecuación de la energía puede escribirse en la forma

$$\frac{dT}{T - T_p} = -\frac{\lambda dx}{2D}, \quad \text{que se integra para dar} \quad T - T_p = \left(T_0 - T_p\right)e^{-\frac{\lambda x}{2D}},$$

donde se ha impuesto la condición $T = T_0$ en $x = 0$. En la ecuación anterior puede observarse que T difiere de T_0 y de T_p mientras $\frac{\lambda x}{2D} \sim 1$, lo que implica distancias $\frac{x}{L} \sim \frac{D}{\lambda L} \ll 1$, como ya se había adelantado.

2.- Teniendo en cuenta que salvo en la región inicial pequeña la temperatura del gas coincide con la de la pared, la ecuación de la cantidad de movimiento, con $\rho = P/R_gT_p$, queda

$$P\frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda}{2D}R_gT_p\left(\frac{G}{A}\right)^2,$$

que se integra para dar

$$p^2 = C - \frac{\lambda x}{D}R_gT_p\left(\frac{G}{A}\right)^2,$$

donde C es una constante de integración.

Para el tramo común (de O a M) la presión en $x = 0$ es p_0, de modo que la constante es $C = p_0^2$, quedando en este tramo común

$$p^2 = p_0^2 - \frac{\lambda x}{D}R_gT_p\left(\frac{G}{A}\right)^2.$$

Particularizando esta ecuación en la bifurcación ($x = L$) donde $p = p_M$, se tiene

$$p_M^2 = p_0^2 - \frac{\lambda L}{D}R_gT_p\left(\frac{G}{A}\right)^2. \tag{1}$$

Para el tramo de M a A la presión es p_M en $x = 0$ (se inicia el origen de x en la bifurcación para cada uno de los dos últimos tramos), de modo que $C = p_M^2$, quedando pare este tramo M-A

$$p^2 = p_M^2 - \frac{\lambda x}{D}R_gT_p\left(\frac{G_A}{A}\right)^2,$$

donde G_A es el gasto másico por el tramo M-A. Al final del tramo, de longitud L, la presión es p_a, de modo que se tiene

$$p_a^2 = p_M^2 - \frac{\lambda L}{D}R_gT_p\left(\frac{G_A}{A}\right)^2. \tag{2}$$

En modo análogo, para el tramo M-B, cuya longitud es $L/2$ y el gasto G_B, se tiene

$$p_a^2 = p_M^2 - \frac{\lambda L}{2D} R_g T_p \left(\frac{G_B}{A}\right)^2. \tag{3}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) junto la de continuidad en la bifurcación

$$G = G_A + G_B, \tag{4}$$

es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: G, G_A, G_B y p_M; que permiten resolver el problema.

De (2) y (3) se obtiene

$$\left(\frac{G_B}{A}\right)^2 = 2\left(\frac{p_M^2 - p_a^2}{\frac{\lambda L}{D} R_g T_p}\right) = 2\left(\frac{G_A}{A}\right)^2,$$

de modo que

$$G_B = \sqrt{2} G_A,$$

que llevado a (4) proporciona

$$G = \left(1 + \sqrt{2}\right) G_A,$$

de modo que

$$G_A = \frac{G}{1+\sqrt{2}}; \; G_B = \frac{G\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$p_a^2 = p_0^2 - \frac{\lambda L}{D} R_g T_p \left[\left(\frac{G}{A}\right)^2 + \left(\frac{G_A}{A}\right)^2\right],$$

y sustituyendo el valor obtenido de G_A en función de G, se obtiene

$$\frac{G}{A} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} \sqrt{\frac{p_0^2 - p_a^2}{\frac{\lambda L}{D} R_g T_p}},$$

y con el valor de G conocido se obtienen los valores de G_A y G_B

$$\frac{G_A}{A} = \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} \sqrt{\frac{p_0^2 - p_a^2}{\frac{\lambda L}{D} R_g T_p}},$$

$$\frac{G_B}{A} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} \sqrt{\frac{p_0^2 - p_a^2}{\frac{\lambda L}{D} R_g T_p}}.$$

Sustituyendo el valor de G/A en (1) se obtiene la presión en la bifurcación

$$\frac{p_M}{p_a} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^2}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}}.$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO
MECÁNICA DE FLUIDOS AVANZADA

FLUJO TURBULENTO LÍQUIDOS

La figura representa un cambiador de calor por el que circula un líquido de densidad, viscosidad, conductividad térmica y calor específico constantes. Está formado por una bomba ideal de potencia W constante, una tubería circular de diámetro D, y un depósito de volumen mucho mayor que D^3. El líquido sale del depósito por la sección e y retorna al mismo por la sección 4. Todo el conjunto es adiabático excepto los tramos $1-2$ y $3-4$ de longitud L cada uno de ellos. El líquido se calienta en el tramo $1-2$ cuyas paredes tienen una temperatura T_c, y se enfría en el tramo $3-4$ cuyas paredes están a una temperatura T_f, ambas conocidas y constantes y que cumplen $(T_c - T_f)/T_c \sim 1$. La longitud de los tramos de tubería desde e a 1 y desde 4 hasta el depósito es despreciable frente a la longitud del resto. En la tubería (desde 1 a 4) el movimiento es turbulento con coeficiente de fricción de Darcy, λ, constante y tal que $\lambda L/D \sim 1$. El tramo $2-3$ está aislado térmicamente y tiene una longitud $L/2$. Suponiendo que el sistema funciona en régimen estacionario y en ausencia de fuerzas másicas se pide:

1.- Determinen la caída de presión entre las secciones 1 y 4 en función de la velocidad del líquido. Comparen esta caída de presión con la energía cinética del líquido.

2.- Determinen el caudal Q que circula por la tubería en función de la potencia W de la bomba.

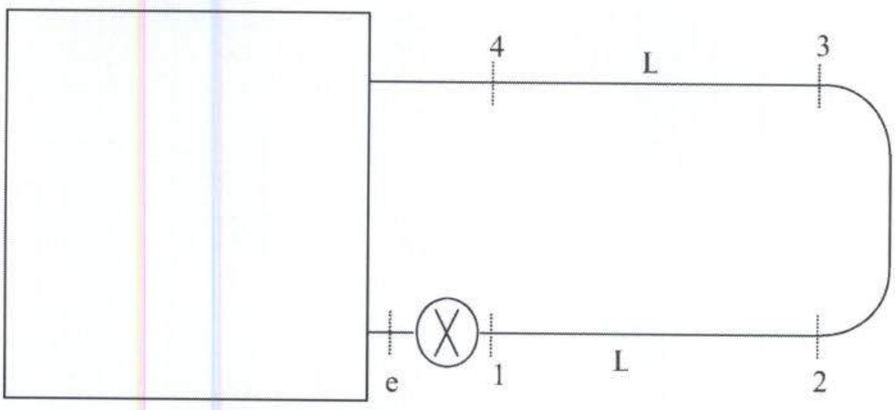
3.- Suponiendo que el calor q por unidad de superficie lateral de tubo y por unidad de tiempo, en los tramos $1-2$ y $3-4$, está dado por

$$q = \frac{\lambda}{8}\rho v c\,(T_p - T)\,,$$

donde T_p es la temperatura de la pared y c el calor específico del líquido, escriban la ecuación simplificada de la energía, teniendo en cuenta que en el movimiento de los líquidos es $v^2 \ll cT$. Tengan también en cuenta el resultado del apartado 1.

4.- Determinen la temperatura del líquido en el depósito, T_d, y la diferencia de temperaturas $T_2 - T_d$.

5.- Calor, por unidad de tiempo, transferido al líquido en el tramo $1-2$ en función de la potencia W de la bomba y de las temperaturas T_c y T_f.



SOLUCIÓN

1.- la ecuación de cantidad de movimiento para el conducto proporciona

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)=-\frac{\lambda}{2D}v^2,$$

que se integra para dar

$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)=\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)_1-\frac{\lambda s}{2D}v^2.$$

La condición de contorno en 4 ($s=5L/2$) proporciona

$$\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)_4=\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)_1-\frac{5\lambda L}{4D}v^2,$$

que relaciona la velocidad con las presiones en 1 y 4. De la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{p_1-p_4}{\frac{1}{2}\rho v^2}=\frac{5\lambda L}{2D}\sim 1.$$

2.- La potencia de la bomba está dada por

$$W=Q\left[\left(p+\frac{1}{2}\rho v^2\right)_1-\left(p+\frac{1}{2}\rho v^2\right)_e\right],$$

pero

$$\left(p+\frac{1}{2}\rho v^2\right)_e=p_d,$$

siendo p_d la presión en el depósito. De acuerdo con esto se tiene

$$\left(p+\frac{1}{2}\rho v^2\right)_1=p_d+\frac{W}{Q}.$$

Además, la condición de contorno en 4 proporciona $p_4=p_d$, de modo que sustituyendo en la ecuación del apartado 1 se obtiene

$$p_d+\frac{1}{2}\rho v^2=p_d+\frac{W}{Q}-\frac{5\lambda L}{4D}\rho v^2,$$

de modo que con $Q=v\pi D^2/4$, se tiene

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{5\lambda L}{2D}\right)v^3=\frac{4\,(W/\rho)}{\pi D^2}\ ;\ v=\left[\frac{8\,(W/\rho)}{\pi D^2\,(1+\frac{5\lambda L}{2D})}\right]^{\frac{1}{3}},$$

y el caudal es

$$Q=\frac{\pi D^2}{4}\left[\frac{8\,(W/\rho)}{\pi D^2\,(1+\frac{5\lambda L}{2D})}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

3.- La ecuación de la energía es

$$\rho v\frac{d}{ds}\left(h+\frac{1}{2}v^2\right)=\frac{q}{r_h},$$

pero $h = cT + p/\rho$ y, dado que las variaciones de presión en distancias del orden de L son del orden de ρv^2 (véase apartado 1) y que la energía cinética es despreciable frente a la térmica, se tiene

$$\frac{d}{ds}\left(h + \frac{1}{2}v^2\right) \approx c\frac{dT}{ds},$$

de modo que la ecuación de la energía, con la aproximación anterior y con el valor de q, se reduce a

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\lambda}{2D}\left(T_p - T\right).$$

4.- La integración de la ecuación anterior proporciona

$$T = T_p + Ke^{-\frac{\lambda s}{2D}},$$

donde la constante de integración K debe determinarse de la condición de contorno apropiada a cada caso. La temperatura en 1 es la del depósito porque le bomba funciona en régimen ideal, de modo que $T_1 = T_e$ y en la descarga del depósito también se conserva la entropía, de modo que $T_1 = T_e = T_d$. Por lo tanto, para el tramo $1-2$ se tiene $T_p = T_c$ y $T\left(s=0\right) = T_d$ de modo que $K = T_d - T_c$ y la solución queda

$$T = T_c + \left(T_d - T_c\right)e^{-\frac{\lambda s}{2D}} \text{ ; válida para el tramo } 1-2.$$

Al final del tramo, en 2, donde $s = L$, la temperatura T_2 es

$$T_2 = T_c + \left(T_d - T_c\right)e^{-\frac{\lambda L}{2D}}.$$

En el tramo $2-3$ el tubo está aislado térmicamente, de modo que la ecuación de la energía queda

$$\frac{dT}{ds} = 0 \Rightarrow T = T_2 \text{ ; válida para el tramo } 2-3.$$

En particular se tiene $T_3 = T_2$.

En el tramo $3-4$ vuelve a ser válida la ecuación

$$T = T_p + Ke^{-\frac{\lambda s}{2D}},$$

con $T_p = T_f$ y con la condición $T\left(s = s_3\right) = T_2$ se obtiene

$$K = \left(T_2 - T_f\right)e^{\frac{\lambda s_3}{2D}},$$

y la distribución de temperaturas queda

$$T = T_f + \left(T_2 - T_f\right)e^{\frac{\lambda(s_3 - s)}{2D}}.$$

En particular, en la sección 4, donde $s_3 - s_4 = -L$, se tiene

$$T_4 = T_f + \left(T_2 - T_f\right)e^{-\frac{\lambda L}{2D}}.$$

Dado que la entalpía de remanso en 4 es igual a la entalpía de remanso en e y esta a su vez es la del depósito, resulta que $T_4 = T_e = T_d$, por ser despreciable la energía cinética frente a la térmica y por ser el régimen estacionario. Por lo tanto, la última ecuación se puede escribir como

$$T_d = T_f + \left(T_2 - T_f\right)e^{-\frac{\lambda L}{2D}},$$

que junto con

$$T_2 = T_c + (T_d - T_c)\, e^{-\frac{\lambda s}{2D}},$$

se pueden determinar las dos incógnitas T_2 y T_d. Se obtiene

$$T_d = T_f + (T_c - T_f)\, \frac{e^{-\frac{\lambda L}{2d}}}{1 + e^{-\frac{\lambda L}{2d}}},$$

y

$$T_2 = T_d + (T_c - T_f)\, \frac{1 - e^{-\frac{\lambda L}{2d}}}{1 + e^{-\frac{\lambda L}{2d}}}.$$

5.- El calor pedido es

$$\Theta = \pi D \int_0^L q ds = \frac{\pi D^2}{4} \rho v c \int_0^L \frac{dT}{ds} ds = \frac{\pi D^2}{4} \rho v c\, (T_2 - T_d)\,,$$

por lo tanto

$$\Theta = \rho Q c\, (T_2 - T_d)\,,$$

Donde el valor de Q en función de W, y el de $T_2 - T_d$ en función de $T_c - T_f$, están dados más arriba.