

1 Espacios normados, métricos y Topología

Durante todo este curso “espacio vectorial” querrá decir “espacio vectorial real”, es decir que el cuerpo de escalares será siempre \mathbb{R} .

Informalmente la palabra “espacio” quiere decir “conjunto con alguna estructura”. El vacío \emptyset sí que es un conjunto, pero no se le pone ninguna estructura. Por lo tanto, a todos los tipos de espacio que se definan se les exigirá ser no vacíos.

1.1 Normas euclídeas

Recordemos que un **producto escalar** en un espacio vectorial \mathbb{V} es una función de dos variables

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

cumpliendo las siguientes condiciones:

1. Bilineal: lineal en la variable v cuando se congela el valor de w y lineal en w cuando se congela el valor de v .
2. Simétrica: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.
3. Definida positiva: $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \neq \mathbf{0}$.

En el caso particular $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, todos los productos escalares vienen dados por la siguiente fórmula (piénsese en x, y como vectores columna):

$$\langle x, y \rangle = x^t A y,$$

donde A es cualquier matriz $n \times n$ simétrica y definida positiva (es decir, con todos los autovalores estrictamente positivos). El **producto escalar estándar** en \mathbb{R}^n corresponde a $A = I_n$, es decir que si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ entonces:

$$x \cdot y = x^t y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Definición 1. La **longitud euclídea** o **norma euclídea** asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la siguiente función:

$$\| \cdot \| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

donde se toma la raíz cuadrada no negativa.

En particular la **norma euclídea estándar** en \mathbb{R}^n es $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Para todo producto escalar las siguientes propiedades son obvias:

1. $\|v\| \geq 0$,
2. $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$,
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,

v se les añaden otras dos, no tan obvias:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

iguales de los otros dos lados.

Cartagena99

La demostración algebraica de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se basa en el concepto de **matriz de Gram** de una sucesión de vectores v_1, \dots, v_k , que es simplemente la “tabla de multiplicar”

$$G = [\langle v_i, v_j \rangle]_{1 \leq i, j \leq k},$$

obviamente simétrica $k \times k$. Si v_1, \dots, v_k son linealmente independientes entonces G es definida positiva y por lo tanto con determinante positivo. En el caso particular de dos vectores v, w :

$$G = \begin{bmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{bmatrix}, \quad \det G = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

Por lo tanto, si v, w son linealmente independientes entonces $\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 > 0$ y en este caso la desigualdad de Cauchy-Schwarz es *estricta*: $|\langle v, w \rangle| < \|v\| \|w\|$. Es trivial ver que la desigualdad es una igualdad cuando v, w son linealmente dependientes.

Otra demostración del caso estricto de la desigualdad de Cauchy-Schwarz es la siguiente. Supuestos v, w linealmente independientes, les aplicamos el *proceso de Gram-Schmidt* y obtenemos dos vectores *ortonormales* v_1, v_2 tales que $v = a_1 v_1$, $w = b v_1 + a_2 v_2$ para ciertos números a_1, b, a_2 con $a_1, a_2 > 0$. Entonces:

$$|\langle v, w \rangle| = a_1 |b|, \quad \|v\| \|w\| = a_1 \sqrt{a_2^2 + b^2} > a_1 |b|.$$

Geoméricamente, en el plano vectorial generado por v, w hemos tomado unos *ejes ortogonales adaptados* al par v, w : el primer eje (el del vector v_1) contiene al vector v .

Como corolario de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene la demostración algebraica de la desigualdad triangular:

$$\langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|v\| \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

pero hay demostraciones más geométricas. Por ejemplo, empecemos por observar que si v_0 es la *proyección ortogonal* de un vector v sobre cualquier subespacio vectorial entonces $\|v_0\| \leq \|v\|$, es decir que las proyecciones ortogonales acortan longitudes (o las dejan igual). La desigualdad triangular es obvia si $v + w = \mathbf{0}$. Supuesto $v + w \neq \mathbf{0}$, sean v_0, w_0 las proyecciones ortogonales respectivas de v, w sobre la recta vectorial generada por $v + w$, con lo cual $v + w = v_0 + w_0$. Es fácil convencerse, con algunos dibujos, de que la longitud euclídea de $v + w = v_0 + w_0$ es igual a uno de los tres números siguientes:

$$\|v_0\| + \|w_0\|, \quad \|v_0\| - \|w_0\|, \quad \|w_0\| - \|v_0\|,$$

en todo caso un valor menor o igual que $\|v\| + \|w\|$.

1.2 Normas en general

Antes de definir el concepto de norma, introducimos una noción más básica que tiene mucha utilidad.

Definiciones 2. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión no nula y sea $f : \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar (que puede estar definida o no en el vector nulo).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplos. Todo polinomio homogéneo de grado k en n variables define una función homogénea de grado k en \mathbb{R}^n . La fórmula $f(x, y) = 1/\sqrt{|x| + |y|}$ define una función en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ que es positivamente homogénea de grado $-0'5$.

Cuando el grado es positivo (entero o fraccionario) extendemos esas funciones al origen poniendo $f(\mathbf{0}) = 0$. Entonces el **grafo** de f es el siguiente subconjunto de $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$:

$$\text{grafo}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{V}\}.$$

Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, entonces el grafo es un subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} .

Que f sea positivamente homogénea de grado 1 significa que su grafo es un **cono**: una unión de semirrectas en $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$ que salen del origen $(\mathbf{0}, 0)$. Que f sea homogénea de grado 1 significa que el grafo es un cono *simétrico* respecto de dicho origen: una unión de rectas pasando por $(\mathbf{0}, 0)$.

Definiciones 3. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión no nula. Una **norma** en \mathbb{V} es cualquier función

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\| \end{aligned}$$

cumpliendo las siguientes condiciones:

[1]. $\|\mathbf{0}\| = 0$ y $\|v\| > 0$ cuando $v \neq \mathbf{0}$.

[h]. Positivamente homogénea de grado 1: $\lambda > 0 \implies \|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

[2]. Función par: $\|-v\| = \|v\|$.

[3]. Desigualdad triangular: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Un **espacio normado** es un par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial \mathbb{V} y una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{V} .

Lo que esperamos de una norma es que sirva para *medir longitudes* de vectores. La propiedad [1] responde a dos ideas: (1) no queremos longitudes negativas, (2) un buen criterio para saber si un vector es nulo es mirar si su longitud es nula. Las propiedades [h] y [2] suelen juntarse en la siguiente fórmula:

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

pero aquí las mantendremos separadas mientras analizamos su significado.

Definiciones 4. Sean $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $r > 0$. La **bola abierta de centro el origen y radio r** es el conjunto:

$$B(\mathbf{0}, r) = \{v \in \mathbb{V} : \|v\| < r\},$$

y la **bola cerrada**, del mismo centro y radio, es el conjunto:

$$\overline{B}(\mathbf{0}, r) = \{v \in \mathbb{V} : \|v\| \leq r\}.$$

La **bola unidad abierta** es $B(\mathbf{0}, 1)$. La **bola unidad cerrada** es $\overline{B}(\mathbf{0}, 1)$, cuya "cáscara" es el conjunto $\{v \in \mathbb{V} : \|v\| = 1\}$ de los **vectores unitarios** para la norma $\|\cdot\|$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ser única, con $\lambda = \|v\|$ y, por lo tanto, con $\omega = v/\|v\|$.

Cartagena99

1.3 Las normas p en \mathbb{R}^n

Definiciones 5. Sea $1 < p < \infty$. La **norma p** en \mathbb{R}^n es la función $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left[\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

El **exponente conjugado** de p es el único número p' tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (1)$$

Es trivial obtener la fórmula $p' = \frac{p}{p-1}$. Por la simetría de la ecuación (1), si q es el conjugado de p entonces p es el conjugado de q . Eso equivale, a su vez, a que el grafo de la conjugación

$$\left\{ (p, p') = \left(p, \frac{p}{p-1} \right) : 1 < p < \infty \right\},$$

sea simétrico respecto de la diagonal principal del plano pp' . La ecuación (1) se transforma fácilmente en $(p-1)(p'-1) = 1$, luego dicho grafo es el resultado de trasladar la rama de hipérbola $\{xy = 1, x > 0, y > 0\}$ una unidad hacia la derecha y una unidad hacia arriba (y así se mantiene simétrico respecto de la diagonal principal). Otra consecuencia es que la conjugación es una biyección decreciente del intervalo $(1, \infty)$ consigo mismo. Cuando p tiende a 1 su conjugado tiende a ∞ y cuando p tiende a ∞ su conjugado tiende a 1. El exponente $p = 2$ es el único que es conjugado de sí mismo.

Teorema 6. Se cumplen las tres desigualdades siguientes:

Desigualdad de Young: $a, b > 0 \implies ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$.

Desigualdad de Hölder: $x, y \in \mathbb{R}^n \implies |x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$.

Desigualdad de Minkowski: $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Es fácil ver que la función $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades [1], [h] y [2] de la definición de norma. La desigualdad de Minkowski nos dice que también cumple la propiedad [3], luego es efectivamente una norma en \mathbb{R}^n .

La desigualdad de Young con $p = 2$ nos da $\sqrt{a^2 b^2} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, es decir la *desigualdad aritmético-geométrica* $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ con $(x, y) = (a^2, b^2)$ números positivos cualesquiera.

La norma $\|\cdot\|_2$ es la norma euclídea estándar en \mathbb{R}^n y la desigualdad de Hölder con $p = 2$ es la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Introducimos a continuación unas nociones necesarias para demostrar el teorema 6. Recordemos que, dados un espacio vectorial \mathbb{V} y puntos $x, y \in \mathbb{V}$, el **segmento rectilíneo** $[x, y]$ de extremos x, y admite la siguiente descripción:

$$[x, y] = \{ \lambda x + (1 - \lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1 \}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Que f sea convexa quiere decir que el **supergrafo** de f :

$$\{(x, t) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} : x \in E, t \geq f(x)\},$$

es un subconjunto convexo de $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$. Ejemplo: $E = \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Que f sea cóncava quiere decir que el **subgrafo** de f :

$$\{(x, t) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} : x \in E, t \leq f(x)\},$$

es un subconjunto convexo de $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$. Ejemplo: $E = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}, f(x) = \log x$.

Demostración de la desigualdad de Young. Hacemos $\lambda = \frac{1}{p} \in [0, 1]$, de donde $1 - \lambda = \frac{1}{p'}$. Por la concavidad del logaritmo neperiano:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(b^{p'}) = \log a + \log b = \log(ab),$$

y tomando exponenciales sale la desigualdad de Young.

Demostración de la desigualdad de Hölder. Es obvia cuando $x = \mathbf{0}$ o $y = \mathbf{0}$. Para $x \neq \mathbf{0} \neq y$ tomamos las descomposiciones polares, $x = \|x\|_p \alpha$ e $y = \|y\|_{p'} \beta$ con $\|\alpha\|_p = 1 = \|\beta\|_{p'}$, lo que convierte la desigualdad de Hölder en $\|x\|_p \|y\|_{p'} |\alpha \cdot \beta| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$. Basta, pues, con demostrar lo siguiente:

$$\|\alpha\|_p = 1 = \|\beta\|_{p'} \implies |\alpha \cdot \beta| \leq 1. \quad (2)$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, aplicamos la desigualdad de Young a cada producto $|\alpha_j \beta_j|$ y obtenemos:

$$|\alpha \cdot \beta| = \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j \beta_j| \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^p + \frac{1}{p'} \sum_{j=1}^n |\beta_j|^{p'} = \frac{1}{p} \cdot 1^p + \frac{1}{p'} \cdot 1^{p'} = 1,$$

lo que demuestra (2) y, por lo explicado, la desigualdad de Hölder en general.

Demostración rápida de la desigualdad de Minkowski.

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, definimos los siguientes vectores:

$$x' = (|x_1|, \dots, |x_n|), \quad y' = (|y_1|, \dots, |y_n|), \quad z = (|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1}).$$

Empezamos con la siguiente estimación:

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \leq \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|) |x_j + y_j|^{p-1} = x' \cdot z + y' \cdot z,$$

aplicamos la desigualdad de Hölder:

$$x' \cdot z + y' \cdot z \leq \|x'\|_p \|z\|_{p'} + \|y'\|_p \|z\|_{p'},$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Daremos también una demostración geométrica de la desigualdad de Minkowski. Con ese fin, haremos ahora un estudio válido para cualquier norma $\|\cdot\|$ en cualquier espacio vectorial \mathbb{V} , no solamente para las normas p en \mathbb{R}^n .

Hermann Minkowski (1864-1909) se planteó cómo determinar la norma $\|\cdot\|$ si sólo se conoce la bola unidad $\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1)$ como subconjunto de \mathbb{V} . Por supuesto $\|\mathbf{0}\| = 0$, luego lo que hay que determinar es la norma de los vectores no nulos. Dados $v \neq \mathbf{0}$ y $\lambda > 0$, observamos que:

$$\frac{v}{\lambda} \notin \bar{B} \text{ para } \lambda < \|v\| \quad \text{y} \quad \frac{v}{\lambda} \in \bar{B} \text{ para } \lambda \geq \|v\|.$$

Por lo tanto el siguiente conjunto de números:

$$\left\{ \lambda > 0 : \frac{v}{\lambda} \in \bar{B} \right\}, \quad (3)$$

es el intervalo $[\|v\|, +\infty)$. La norma $\|v\|$ se determina como el ínfimo de este intervalo.

Definición 8. Dado un subconjunto $\bar{B} \subset \mathbb{V}$ la **función de Minkowski** asociada a él es la función $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue. En primer lugar $\varphi(\mathbf{0}) = 0$. En segundo lugar:

$$v \neq \mathbf{0} \implies \left\{ \lambda > 0 : \frac{v}{\lambda} \in \bar{B} \right\} = [\varphi(v), +\infty).$$

Finalmente nos preguntamos cómo tiene que ser la geometría del conjunto \bar{B} para que su función de Minkowski sea una norma en \mathbb{V} . Primero pedimos que verdaderamente sea una función, es decir que para todo $v \neq \mathbf{0}$ se determine un valor $\varphi(v) > 0$. Esto requiere que el conjunto (3) sea un intervalo de la forma $[\lambda_0, +\infty)$ con $\lambda_0 > 0$. Poniendo $a = 1/\lambda$, es equivalente que el conjunto:

$$\{ av \in \bar{B} : a > 0 \},$$

sea de la forma $(0, a_0]v$ para algún a_0 finito y positivo. Como $(0, +\infty)v = \{av : a > 0\}$ es una *semirrecta* que emana del origen en \mathbb{V} , y con el origen quitado, tenemos:

Primer requisito: \bar{B} contiene al $\mathbf{0}$ e interseca cada semirrecta $(0, +\infty)v$ en un segmento $(0, a_0]v$ finito y no vacío.

Una vez que el conjunto \bar{B} cumple el primer requisito, la función de Minkowski asociada está definida en todo \mathbb{V} y cumple la condición [1] de la definición de norma. Es fácil ver que también cumple la condición [h], es decir que de hecho es positivamente homogénea de grado 1. *Ahora la podemos ver como la única función φ que tiene esa homogeneidad y cumple $\varphi^{-1}([0, 1]) = \bar{B}$.*

También es fácil ver que, cumplido el primer requisito, la función de Minkowski es par (o sea, cumple la condición [2] de la definición de norma) si y sólo si \bar{B} es *simétrico respecto del origen*:

Segundo requisito: $v \in \bar{B} \iff -v \in \bar{B}$.

Proposición 9. Si $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa entonces cada **conjunto de subnivel**:

$$f^{-1}((-\infty, c]) = \{v \in \mathbb{V} : f(v) \leq c\},$$

es o vacío o convexo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración del teorema 10. Ya sabemos que si se cumple el primer requisito entonces la función de Minkowski está definida en todo \mathbb{V} y cumple las propiedades [1] y [h] de la definición de norma. También hemos visto que los requisitos primero y segundo implican la propiedad [2]. Habremos terminado si vemos que los requisitos primero y tercero implican la desigualdad triangular (propiedad [3]). Dicha desigualdad es obvia si uno de los vectores x, y es nulo, por lo que suponemos $x \neq \mathbf{0} \neq y$. Tomamos las descomposiciones polares:

$$x = a\alpha, \quad y = b\beta, \quad a = \varphi(x) > 0, \quad b = \varphi(y) > 0, \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 1,$$

y haciendo $\lambda = a/(a+b) \in [0, 1]$ escribimos:

$$x + y = (a+b) \left(\frac{a}{a+b} \alpha + \frac{b}{a+b} \beta \right) = (a+b) (\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta).$$

Como es $\alpha, \beta \in \bar{B}$ y estamos suponiendo \bar{B} convexo, es $\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta \in \bar{B}$ y para la función de Minkowski φ se tiene $\varphi(\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta) \leq 1$. Luego, como φ tiene la propiedad [h]:

$$\varphi(x+y) \leq (a+b) \cdot 1 = a+b = \varphi(x) + \varphi(y),$$

que es la desigualdad triangular. □

Ahora tenemos interpretaciones geométricas de las cuatro propiedades en la definición de norma. Dar una función cumpliendo [1] y [h] equivale a dar un conjunto $\bar{B} \subset \mathbb{V}$ que contiene el origen $\mathbf{0}$ y corta a cada semirrecta $(0, +\infty)v$ en un segmento $(0, a]v$ finito y no vacío. Cumplido eso, la propiedad [2] equivale a la simetría de \bar{B} respecto del origen y la [3] a la convexidad de \bar{B} .

Demostración geométrica de la desigualdad de Minkowski. La función $\varphi(v) = \|v\|_p$ cumplirá la desigualdad triangular si el conjunto $\bar{B} = \varphi^{-1}([0, 1])$ es convexo. Este conjunto tiene la siguiente descripción alternativa:

$$\bar{B} = \{x = (x_1, \dots, x_n) : |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq 1\},$$

y, por la proposición 9, será convexo si la función $x \mapsto \|x\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j|^p$ es convexa.

Fijado $1 < p < \infty$ la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = |t|^p$ es convexa. Se sigue que las n funciones $f_j(x) = |x_j|^p$, $1 \leq j \leq n$, son todas convexas. Como la suma de funciones convexas es convexa, $\sum_{j=1}^n |x_j|^p$ es función convexa de $x = (x_1, \dots, x_n)$ y hemos terminado. □

Si en la fórmula que define las normas p en \mathbb{R}^n tomamos el valor extremo $p = 1$, resulta una función bien definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

y es obvio que se trata de una norma.

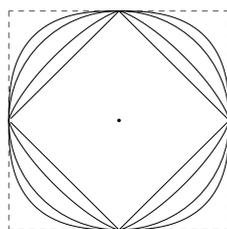
Mostramos a continuación dibujos de la bola unidad $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_p \leq 1\}$, para los valores (de izquierda a derecha) $p = 1$, $p = 1'3$, $p = 2$ y $p = 2'7$:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

A continuación mostramos esas mismas bolas superpuestas, y en línea de trazos la “forma límite” a la que tienden cuando $p \rightarrow \infty$:



Vemos que la bola aumenta en todas las direcciones a medida que p aumenta, excepto en las direcciones de los ejes coordenados en las que permanece igual. Esto se debe a una disminución monótona del valor de la norma:

Proposición 11. *Fijado un vector $v_0 \in \mathbb{R}^n$ que no esté en los ejes coordenados, el número $\|v_0\|_p$ es función estrictamente decreciente de p . Si por el contrario v_0 está en uno de los ejes coordenados, entonces ese número no depende de p .*

En ambos casos $p \mapsto \|v_0\|_p$ es una función monótona y tiene un límite finito (y no negativo) cuando $p \rightarrow \infty$. Es fácil demostrar que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \max(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

y el resultado define una norma en \mathbb{R}^n , que denotamos $\|\cdot\|_\infty$ y de manera natural llamamos “norma infinito” en \mathbb{R}^n :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

La bola unidad de $\|\cdot\|_\infty$ es el producto cartesiano $[-1, 1]^n$. Cuando $n = 2$ es el cuadrado límite que hemos mostrado más arriba.

Advertencia. La “cáscara” $\{v : \|v\| = 1\}$, que separa la bola unidad del espacio circundante, puede contener segmentos rectilíneos (ocurre, por ejemplo, con $\|\cdot\|_1$ y con $\|\cdot\|_\infty$). Repasando la demostración del teorema 10, vemos que si el segmento $[\alpha, \beta]$ está todo él contenido en dicha cáscara entonces $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, es decir que en este caso la desigualdad triangular no es estricta sino que es una igualdad para la pareja x, y , incluso si es una pareja linealmente independiente y el triángulo de lados $x, y, x + y$ es no degenerado.

Para las normas p con $1 < p < \infty$, y triángulos no degenerados, la desigualdad triangular es estricta.

Definición 12. *Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión finita n . Un **elipsoide** centrado en el origen es el conjunto imagen en \mathbb{V} de la bola estándar $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot x = 1\}$ por cualquier biyección lineal $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V}$.*

Definición equivalente: es la bola unidad de alguna norma euclídea en \mathbb{V} .

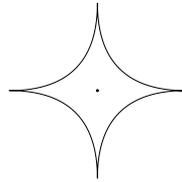
Los dibujos que hemos mostrado en el plano pueden entenderse como las intersecciones con el plano x_1x_2 de las bolas unidad de la norma p en \mathbb{R}^n . Es fácil demostrar que sólo para $p = 2$ es una elipse en el plano x_1x_2 , luego sólo la bola unidad de $\|\cdot\|_2$ es un elipsoide en \mathbb{R}^n .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cuando $0 < p < 1$ la fórmula $\varphi_p(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right]^{1/p}$ todavía tiene sentido y la función $\varphi_p(x)$ así definida tiene las propiedades [1], [h] y [2] de la definición de norma, pero no cumple la desigualdad triangular. Por ejemplo $\varphi_{1/2}(x) = \left[\sum_{j=1}^n \sqrt{|x_j|} \right]^2$ y el conjunto $\{(x_1, x_2) : \varphi_{1/2}(x_1, x_2) \leq 1\}$ tiene la siguiente forma no convexa:



1.4 Distancias y continuidad

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Dados dos puntos x, y , el vector $y - x$ puede entenderse como la flecha que sale de x y termina en y ; análogamente $x - y$. Es natural utilizar la longitud de este vector como *medida de lo apartados que están x, y* . Por lo tanto, definimos la **distancia de x a y** (respecto de la norma $\|\cdot\|$) como $d(x, y) = \|x - y\|$. Tiene las siguientes propiedades, que derivan respectivamente de las propiedades [1], [2] y [3] de la norma:

1. $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definiciones 13. Sea X un conjunto no vacío. Una **distancia** en X es cualquier función

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que cumpla las condiciones 1., 2. y 3., arriba indicadas, para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Un **espacio métrico** es un par (X, d) formado por un conjunto X y una distancia d en X .

La propiedad 1. significa que no queremos distancias negativas y que un buen *criterio de igualdad* para dos puntos es ver si están a distancia nula. La propiedad 2. se llama *simetría*. La propiedad 3. se llama, por razones obvias, *desigualdad triangular*.

Importante. Escritas así, las condiciones 1., 2. y 3. tienen sentido en cualquier conjunto X , sin necesidad de que tenga estructura de espacio vectorial o de cualquier otro tipo. En consecuencia, hay muchos más espacios métricos que espacios normados. Incluso en el caso de que X es un espacio vectorial, pueden darse en él muchas distancias que no vengan de ninguna norma.

Como primer ejemplo, todo espacio normado tiene la distancia particular $d(x, y) = \|x - y\|$.

Segundo ejemplo. Si (X, d) es un espacio métrico y $E \subseteq X$ es un subconjunto no vacío cualquiera, entonces la restricción

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Definiciones 14. Sea (X, d) un espacio métrico. La **bola abierta** con centro $x_0 \in X$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

La **bola cerrada** con centro x_0 y radio $r \geq 0$ (aquí permitimos el valor $r = 0$) es el conjunto

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Un subconjunto $E \subseteq X$ es **acotado** si está contenido en alguna bola, es decir si existen $x_0 \in X$ y $r \geq 0$ tales que $E \subseteq \bar{B}(x_0, r)$.

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Introducimos ahora el importante concepto de continuidad.

Definiciones 15. Decimos que f es **continua** en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir, para toda bola B' centrada en $f(x_0)$ hay una bola B , centrada en x_0 , que es enviada por f dentro de B' .

Decimos que f es **continua** si es continua en todo punto de X

Observación. Si reemplazamos la inclusión conjuntista en la definición 15 por una de éstas:

$f(\bar{B}(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$, $f(B(x_0, \delta)) \subseteq \bar{B}(f(x_0), \varepsilon)$ o $f(\bar{B}(x_0, \delta)) \subseteq \bar{B}(f(x_0), \varepsilon)$, resulta una definición equivalente. Por una parte, tomando cualquier $\delta' < \delta$, tenemos:

$$f(\bar{B}(x_0, \delta')) \subseteq f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq \bar{B}(f(x_0), \varepsilon).$$

Por otra parte, si $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ y $\bar{\delta}$ es tal que $f(\bar{B}(x_0, \bar{\delta})) \subseteq \bar{B}(f(x_0), \bar{\varepsilon})$ entonces:

$$f(B(x_0, \bar{\delta})) \subseteq \bar{B}(f(x_0), \bar{\varepsilon}) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Proposición 16. Sean espacios métricos $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ y aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Si f es continua en $x_0 \in X$ y g es continua en $f(x_0) \in Y$ entonces la compuesta $g \circ f$ es continua en x_0 .

Por lo tanto, si f, g son continuas entonces $g \circ f$ es continua.

Demostración. Sea $\varepsilon_3 > 0$. Como g es continua en $f(x_0)$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$g(B(f(x_0), \varepsilon_2)) \subseteq B(g(f(x_0)), \varepsilon_3) = B((g \circ f)(x_0), \varepsilon_3).$$

Como f es continua en x_0 , dado ε_2 existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f(B(x_0, \varepsilon_1)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon_2)$ y así:

$$(g \circ f)(B(x_0, \varepsilon_1)) = g(f(B(x_0, \varepsilon_1))) \subseteq g(B(f(x_0), \varepsilon_2)) \subseteq B((g \circ f)(x_0), \varepsilon_3).$$

Como ε_3 era arbitrario, queda probada la continuidad de $g \circ f$ en x_0 . □

1.5 Normas de operador

Sean $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}), (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ espacios normados y $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una aplicación lineal.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\|v\|_{\mathbb{V}} \leq 1 \implies \|L(v)\|_{\mathbb{W}} \leq M.$$

Cartagena99

Definición 18. A las L que cumplen esas condiciones se las llama **aplicaciones lineales acotadas**. El conjunto de todas ellas se denota por $\mathcal{L}((\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}), (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}}))$ o, cuando no hay duda de cuales son las normas, por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Recordemos que, fijado un vector $v_0 \in \mathbb{V}$, la **traslación por v_0** es la biyección:

$$T_{v_0} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad , \quad v \longmapsto v + v_0 \quad ,$$

que es *afín* pero no lineal (excepto si $v_0 = \mathbf{0}$, en cuyo caso es la identidad).

Dado $E \subseteq \mathbb{V}$, el **trasladado** $v_0 + E$ es la imagen $\{v + v_0 : v \in E\}$ de E por T_{v_0} .

Recordemos asimismo que, dada una constante $c > 0$, la **homotecia de razón c** centrada en el origen es:

$$\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad , \quad v \longmapsto cv \quad ,$$

y dado $E \subseteq \mathbb{V}$ denotamos por cE la imagen $\{cv : v \in E\}$ de E por esa homotecia. Informalmente, podemos entender cE como el mismo conjunto E visto a una escala diferente.

La identidad $L(v + v_0) = L(v) + L(v_0)$ nos dice que L *intercambia traslaciones* según la siguiente fórmula:

$$L \circ T_{v_0} = T_{L(v_0)} \circ L \quad .$$

Análogamente L intercambia homotecias: $L(cv) = cL(v)$.

Las traslaciones y homotecias transforman bolas en bolas, según las siguientes fórmulas (recuerda que $c > 0$), válidas también con bolas abiertas:

$$v_0 + \overline{B}(x_0, r) = \overline{B}(x_0 + v_0, r) \quad , \quad c\overline{B}(x_0, r) = \overline{B}(cx_0, cr) \quad .$$

Demostración de la proposición 17.

1. \iff 2. Como $L(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$, que L sea continua en $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$L(B(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, \delta)) \subseteq B(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, \varepsilon) \quad .$$

Aplicamos traslación por $L(v_0)$ a ambos lados de esa inclusión y resulta:

$$L(v_0) + L(B(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, \delta)) \subseteq L(v_0) + B(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, \varepsilon) \quad ,$$

que, por las observaciones anteriores, se convierte en:

$$L(v_0 + B(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, \delta)) = L(B(v_0, \delta)) \subseteq B(L(v_0), \varepsilon) \quad ,$$

y L es continua en v_0 , ya que ε era arbitrario.

1. \iff 3. Para cualesquiera $r_1, r_2 \geq 0$ y $c > 0$ se tiene:

$$L(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, r_1)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, r_2) \implies L(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, cr_1)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, cr_2) \quad , \quad (5)$$

porque se pasa de la izquierda a la derecha aplicando homotecia de razón c .

Si L es continua en $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$, existe un $\delta > 0$ con $L(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, \delta)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, 1)$. En la fórmula (5) hacemos $(r_1, r_2, c) = (\delta, 1, 1/\delta)$ y nos da $L(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, 1)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, 1/\delta)$, o sea que se cumple 3. con $M = 1/\delta$ como mayorante. Esto demuestra que 1. \implies 3.

Si $L(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, 1)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, M)$, dado cualquier $\varepsilon > 0$ en la fórmula (5) hacemos $(r_1, r_2, c) = (1, \varepsilon, 1/\varepsilon)$ y nos da $L(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, 1)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, M/\varepsilon)$, o sea que se cumple 1. con $\delta = 1/M\varepsilon$ como menorante.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Demostración. Dado $v \neq \mathbf{0}$, tomamos su descomposición polar $v = \|v\|\omega$ con $\|\omega\| = 1$ y, suponiendo que se cumpla 2., deducimos (omitimos subíndices):

$$\|L(v)\| = \|L(\|v\|\omega)\| = \|\|v\|L(\omega)\| = \|v\|\|L(\omega)\| \leq \|v\|M.$$

Luego 2. \implies 3., pues trivialmente $\|L(\mathbf{0})\| = 0 = M\|\mathbf{0}\|$. Como 1. \implies 2. y 3. \implies 1. son obvias, hemos terminado. \square

El lema nos dice que si L es lineal acotada entonces los tres números siguientes son iguales:

- la mínima cota superior para $\{\|L(v)\| : \|v\| \leq 1\}$,
- la mínima cota superior para $\{\|L(\omega)\| : \|\omega\| = 1\}$,
- la mínima constante $M \geq 0$ tal que $\|L(v)\| \leq M\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

Definición 20. Dada $L : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ lineal acotada, su **norma de operador** (respecto de las normas de vectores $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$) es el número:

$$\|L\| = \sup\{\|L(v)\|_{\mathbb{W}} : \|v\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} = \sup\{\|L(\omega)\|_{\mathbb{W}} : \|\omega\|_{\mathbb{V}} = 1\}.$$

Se verifica (omitidos subíndices):

$$\|L(v)\| \leq \|L\| \|v\| \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V}, \quad (6)$$

y no hay ninguna constante M menor que $\|L\|$ que nos dé $\|L(v)\| \leq M\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

Proposición 21. El conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ es cerrado para la suma y producto por constante, por lo tanto un espacio vectorial. La norma de operador es, efectivamente, una norma en este espacio vectorial.

Dados tres espacios normados $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ y aplicaciones $\mathbb{V}_1 \xrightarrow{L_1} \mathbb{V}_2 \xrightarrow{L_2} \mathbb{V}_3$ lineales acotadas, la compuesta $L_2 \circ L_1 : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_3$ es lineal acotada y se verifica:

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \|L_1\|. \quad (7)$$

La demostración de esta proposición es fácil y se deja como ejercicio.

Supongamos elegidas normas en tres espacios numéricos: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$, $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|'')$, $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|''')$ y sean dadas matrices $A \in M_{k \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Podemos verlas como operadores:

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') \xrightarrow{B} (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|'') \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|'''),$$

con lo cual cada una tiene su norma de operador (respecto de las correspondientes normas de vectores). Además existe el producto AB y podemos verlo como un operador

$$AB : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') \rightarrow (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|''').$$

Entonces:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (8)$$

Esta desigualdad es lo que hace útiles las normas de operador: la mayoría de las normas que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\|L_1 \circ L_2\| \leq \|L_1\| \|L_2\|$$

y también cumple $\|I_n\| = 1$, lo que refuerza la idea de que es una norma especial.

Terminamos este apartado dando una fórmula explícita para la norma de operador $\|A\|$ cuando A es una matriz *invertible* $n \times n$ y ponemos la norma euclídea estándar en salida y en llegada:

$$A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2).$$

Como A es invertible, la imagen $A \cdot \overline{B}(\mathbf{0}, 1)$ de la bola unidad estándar es un elipsoide $E \subset \mathbb{R}^n$. La norma de operador $\|A\|$ es el mínimo radio r tal que la bola estándar $\overline{B}(\mathbf{0}, r)$ contiene a E . Este radio coincide con el valor del **semieje principal máximo** del elipsoide E . Hallemos, pues, los semiejes principales de E .

Como A es invertible existe la inversa $B = A^{-1}$. Entonces:

$$v \in E = A \cdot \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \iff \|Bv\| \leq 1 \iff 1 \geq \|Bv\|^2 = (Bv)^t(Bv) = v^t(B^tB)v.$$

La desigualdad cuadrática $v^t(B^tB)v \leq 1$ define al elipsoide E . La matriz B^tB es simétrica y definida positiva, por lo tanto existe una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n que diagonaliza B^tB con autovalores μ_1, \dots, μ_n reales positivos. Escribiendo el vector general v en esa base ortonormal, obtenemos:

$$v = y_1u_1 + \dots + y_nu_n \implies v^t(B^tB)v = \mu_1y_1^2 + \dots + \mu_ny_n^2,$$

de donde:

$$y_1u_1 + \dots + y_nu_n \in E \iff 1 \geq \mu_1y_1^2 + \dots + \mu_ny_n^2 = \left(\frac{y_1}{1/\sqrt{\mu_1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{y_n}{1/\sqrt{\mu_n}}\right)^2.$$

Los semiejes principales de E son, pues, $\sqrt{1/\mu_1}, \dots, \sqrt{1/\mu_n}$.

Por otra parte B^tB es la inversa de la matriz AA^t , luego los autovalores de AA^t son:

$$\lambda_1 = 1/\mu_1, \dots, \lambda_n = 1/\mu_n,$$

y los semiejes principales de E son $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$. El mayor de ellos es la norma de operador $\|A\|$. Por último, la igualdad $A^{-1}(AA^t)A = A^tA$ muestra que AA^t y A^tA tienen los mismos autovalores.

Proposición 22. Si A es una matriz cuadrada invertible entonces su norma de operador, vista como $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, viene dada por $\|A\| = \sqrt{\lambda}$ donde λ es, indistintamente, el máximo autovalor de AA^t o de A^tA .

1.6 Abiertos y cerrados

Definición 23. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $U \subseteq X$ es un **abierto** (para la distancia d) si se cumple:

$$x \in U \implies \text{existe un } r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq U.$$

Dado un punto $x_0 \in X$, un **entorno** de x_0 es cualquier abierto U tal que $x_0 \in U$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración. Sea $(U_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de (X, d) , con el conjunto de índices I finito o infinito, y $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Por definición de unión, dado $x \in U$ existe un $i_0 \in I$ con $x \in U_{i_0}$. Al ser U_{i_0} un abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U,$$

y queda visto que U es un abierto.

Para demostrar que la intersección finita de abiertos es abierta, es suficiente demostrarlo para la intersección de dos. Sean, pues U_1, U_2 abiertos en (X, d) . Si $x \in U_1 \cap U_2$ entonces $x \in U_1$ y $x \in U_2$, luego existen radios $r_1, r_2 > 0$ con $B(x, r_1) \subseteq U_1$ y $B(x, r_2) \subseteq U_2$. Si $r = \min\{r_1, r_2\}$, entonces:

$$r > 0, \quad B(x, r) \subseteq U_1, \quad B(x, r) \subseteq U_2,$$

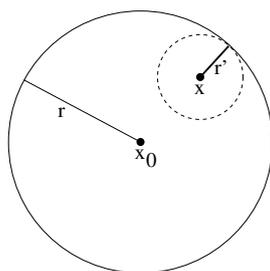
luego $B(x, r) \subseteq U_1 \cap U_2$. Esto prueba que $U_1 \cap U_2$ es un abierto de (X, d) □

Como primer ejemplo, el vacío \emptyset y el total X son abiertos en todo espacio métrico (X, d) . También son cerrados, porque cada uno es el complementario del otro.

Proposición 25. *Las bolas abiertas $B(x_0, r)$ son todos conjuntos abiertos.*

En consecuencia, una bola abierta es entorno de todos sus puntos.

Demostración. Dado $x \in B(x_0, r)$, se define un número positivo $r' > 0$ por la igualdad $r' = r - d(x, x_0)$. El siguiente dibujo, que representa esa situación en el plano euclídeo, sirve para guiar nuestra intuición pero no es una demostración, ya que hay espacios métricos muy diferentes del plano euclídeo.



Para probar que, sea cual sea el espacio métrico, se cumple $B(x, r') \subseteq B(x_0, r)$, razonamos así:

$$y \in B(x, r') \iff d(x, y) < r' \implies d(x_0, y) \stackrel{*}{\leq} d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r' = r,$$

donde se ha marcado con * el lugar donde se usa la desigualdad triangular. Esto prueba que $y \in B(x, r') \implies y \in B(x_0, r)$, es decir $B(x, r') \subseteq B(x_0, r)$. Como $r' > 0$ y x era un punto arbitrario de la bola $B(x_0, r)$, queda visto que dicha bola es un abierto.

Observa que la desigualdad triangular nos permite acotar distancias *por arriba*. □

Proposición 26. *Dado un espacio métrico (X, d) , un subconjunto $U \subseteq X$ es un abierto si y sólo si es una unión de bolas abiertas.*

Demostración. Ya hemos visto que las bolas abiertas son abiertos y que la unión de abiertos

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

En la recta real el intervalo (a, b) es abierto porque es la bola abierta de centro $(a + b)/2$ y radio $(b - a)/2$. Un intervalo $(-\infty, b)$ es abierto porque es unión de intervalos del tipo anterior, lo mismo para (a, ∞) . El intervalo $(-\infty, b]$ es cerrado porque su complemento (b, ∞) es abierto. Ese mismo intervalo $E = (-\infty, b]$ no es abierto porque $b \in E$ pero ninguna bola con centro en b está contenida en E . El intervalo $[a, b]$ es cerrado porque su complemento $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es abierto. Siguiendo así, se llega a las siguientes conclusiones:

- $(a, b), (-\infty, b), (a, \infty)$ abiertos, no cerrados.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ abierto y cerrado.
- $[a, a] = \{a\}, [a, b], (-\infty, b], [a, \infty)$ cerrados, no abiertos.
- $(a, b], [a, b)$ ni abiertos ni cerrados.

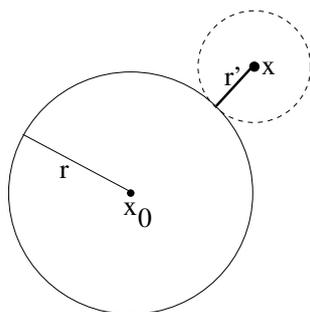
Fíjate: los subconjuntos de un espacio métrico no son “puertas”: pueden no ser ni abiertos ni cerrados. De hecho, *tanto los abiertos como los cerrados son subconjuntos muy especiales:* la inmensa mayoría de los subconjuntos no son de ninguno de esos dos tipos.

Proposición 27. Las bolas cerradas $\overline{B}(x_0, r)$, con $r \geq 0$, son subconjuntos cerrados.

Demostración. Hay que demostrar que el complemento

$$X \setminus \overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) > r\},$$

es un abierto: para cada x con $d(x, x_0) > r$ hay que hallar un $r' > 0$ tal que la bola abierta $B(x, r')$ esté toda ella contenida en $X \setminus \overline{B}(x_0, r)$. Dado un tal x , se define un número positivo $r' > 0$ por la fórmula $r' = d(x_0, x) - r$. El siguiente dibujo muestra esa situación en el plano euclídeo:



y sugiere que, con la definición que hemos dado de r' , se tiene $B(x, r') \subseteq X \setminus \overline{B}(x_0, r)$. Insistimos en que el dibujo guía nuestra intuición pero no es una demostración.

Sea $y \in B(x, r')$. Razonamos de la manera siguiente, usando la simetría y la desigualdad triangular:

$$d(x, y) < r' \implies d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x) < d(x_0, y) + r' \implies r = d(x_0, x) - r' < d(x_0, y).$$

en definitiva:

$$d(x, y) < r' \implies d(x_0, y) > r,$$

es decir $B(x, r') \subseteq X \setminus \overline{B}(x_0, r)$, como se quería demostrar.

Observa que la desigualdad triangular nos permite acotar distancias *por abajo*. □

Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subseteq X$ un subconjunto no vacío. La restricción d_Y es una distancia en Y que produce el nuevo espacio métrico (Y, d_Y) .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

5 y cerrados relativos de T .

1.7 Interior y cierre, caracterización mediante bolas

Definiciones 29. Sean (X, d) un espacio métrico y $E \subseteq X$.

Un punto $x \in X$ es **interior a E** si existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E$. El conjunto de estos puntos se llama **interior de E** y se denota $\text{int } E$.

Un punto $x \in X$ es **exterior a E** si es interior a $X \setminus E$: existe un $r > 0$ con $B(x, r) \cap E = \emptyset$. Decimos que $x \in X$ es un **punto adherente a E** si no es exterior a E , es decir si toda bola abierta centrada en x **corta a E** : para todo $r > 0$ tenemos $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$. El conjunto de estos puntos se denota \overline{E} y se llama **adherencia o cierre de E** .

Un punto $x \in X$ es un **punto frontera de E** si no es ni interior ni exterior a E . El conjunto de estos puntos se llama **frontera topológica de E** y se denota $\text{Fr } E$.

Por supuesto, todo punto interior a E pertenece a E , es decir $\text{int } E \subseteq E$. También es obvio que todo $x \in E$ es adherente a E , en definitiva:

$$\text{int } E \subseteq E \subseteq \overline{E},$$

y también $\text{Fr } E = \overline{E} \setminus \text{int } E$ por la definición de frontera topológica.

Intuitivamente, que x sea exterior a E significa que no sólo no está en E sino que además está “un poco alejado” de E . Combinando las definiciones de exterior y adherencia, vemos inmediatamente que:

$$\overline{E} = X \setminus \text{int}(X \setminus E).$$

Proposición 30. El interior de E es el abierto más grande contenido en E . El cierre de E es el cerrado más pequeño que contiene a E .

Por lo tanto, un subconjunto $E \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $\overline{E} = E$.

La frontera topológica es siempre un cerrado.

Demostración. Empecemos por observar lo siguiente:

$$U \text{ abierto y } U \subseteq E \implies U \subseteq \text{int } E. \quad (9)$$

En efecto, para cada $y \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B(y, r) \subseteq U$, luego $B(y, r) \subseteq E$ y por lo tanto $y \in \text{int } E$. Como y era cualquier punto de U , queda visto que $U \subseteq \text{int } E$.

Dado $x \in \text{int } E$, se verifica $B(x, r) \subseteq E$ para algún $r > 0$; pero hemos visto que una bola abierta es un abierto, luego por (9) sabemos que $B(x, r) \subseteq \text{int } E$. Como x era cualquier punto de $\text{int } E$, hemos probado que $\text{int } E$ es abierto. Pero (9) afirma que $\text{int } E$ contiene a cualquier abierto contenido en E , luego es el mayor abierto que cabe dentro de E .

En particular $\text{int}(X \setminus E)$ es un abierto, luego su complemento \overline{E} es un cerrado que, como ya hemos comentado, contiene a E .

Sea ahora C cualquier cerrado de (X, d) que contenga a E . El abierto $X \setminus C$ está contenido en $X \setminus E$, luego contenido en $\text{int}(X \setminus E)$. Razonamos así:

$$X \setminus C \subseteq \text{int}(X \setminus E) \implies C \supseteq X \setminus \text{int}(X \setminus E) = \overline{E},$$

y así $\overline{E} \subseteq C$: el cierre \overline{E} es el cerrado más pequeño en el que cabe E .

La igualdad $\text{Fr } E = \overline{E} \setminus \text{int } E = \overline{E} \cap (X \setminus \text{int } E)$ exhibe la frontera topológica como intersección de dos cerrados. luego $\text{Fr } E$ es un cerrado sea cual sea el subconjunto $E \subseteq X$. \square

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Dejamos como ejercicio probar que para todo punto $x \in \mathbb{V}$ y todo $r > 0$ se tiene:

$$\text{int } B(x, r) = \text{int } \overline{B}(x, r) = \overline{B}(x, r) \quad , \quad \overline{B(x, r)} = \overline{\overline{B}(x, r)} = \overline{B}(x, r) \quad ,$$

y por lo tanto la frontera topológica

$$\text{Fr } B(x, r) = \text{Fr } \overline{B}(x, r) = \{y : \|x - y\| = r\} \quad ,$$

es la “cáscara” que separa la bola del resto del espacio.

Comentarios. 1. La frontera topológica es una “cáscara separadora” para *conjuntos muy sencillos en espacios sencillos*, como es una bola en un espacio normado. Pero para conjuntos o espacios métricos más complicados eso ya no es así. Un ejemplo es el conjunto \mathbb{Q} de los racionales en la recta real (con la distancia usual); enseguida se ve que:

$$\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset \quad , \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad ,$$

luego $\text{Fr } \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ sí que es un cerrado (tal como afirma la proposición 30) pero no tiene nada que ver con la idea de una cáscara separadora.

2. En la recta real \mathbb{R} consideramos dos distancias: la usual $|x - y|$ y la $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$. Utilizamos B o \overline{B} para denotar las bolas de la distancia usual y B_d o \overline{B}_d para las bolas de la distancia d . Se comprueba que ambas distancias definen los mismos conjuntos abiertos, y por lo tanto el mismo concepto de interior y el mismo concepto de cierre para subconjuntos de \mathbb{R} . Entonces el conjunto $B(0, 1) = B_d(0, 1) = (-1, 1)$ tiene por cierre la bola $\overline{B}(0, 1) = [-1, 1]$, sin embargo $\overline{B}_d(0, 1) = \mathbb{R}$ es mucho más grande que el cierre de $B_d(0, 1)$. Así el espacio métrico (\mathbb{R}, d) nos presenta un fenómeno que no ocurre ni en el plano euclídeo ni en ningún espacio normado. Nos enseña que los dibujos en el plano euclídeo, si bien pueden ser de gran ayuda (como en las demostraciones de las proposiciones 25 y 27), no son una “garantía”: si queremos mostrar que algo es verdad en *todos* los espacios métricos, es obligatorio elaborar una demostración basada sólo en las propiedades de las distancias.

Dado un espacio métrico (X, d) y un punto $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado porque coincide con la bola cerrada $\overline{B}(x, 0)$. De hecho es un cerrado relativo de todo conjunto en el que esté x .

Definición 32. Sea $E \subseteq X$ un subconjunto. Decimos que $x \in E$ es un **punto aislado de E** si existe $r_x > 0$ (dependiente de x) tal que $B(x, r_x) \cap E = \{x\}$, es decir que el conjunto $\{x\}$ es, además de cerrado, un abierto relativo de E .

Decimos que E es **discreto** si todos sus puntos son aislados.

El conjunto $E = \{1/n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ es discreto en la recta real. En cambio $\overline{E} = E \cup \{0\}$ no es discreto porque 0 es un punto suyo que no es aislado en E . Vemos, de paso, que un conjunto discreto puede no ser cerrado.

Si (X, d) es un **espacio métrico discreto**, o sea que todos sus puntos son aislados en X , entonces cada conjunto de un solo elemento $\{x\}$ es abierto y, como la unión arbitraria de abiertos es abierta, en este caso *todos* los subconjuntos de X son abiertos.

Definición 33. Un subconjunto $E \subseteq X$ es **denso en X** si $\overline{E} = X$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$u \in B(x, r) \implies x_h \in B(x, r)$.

Cartagena99

Proposición 35. Si $\overline{B}(x, r) \cap \overline{B}(x', r')$ no es vacía entonces $d(x, x') \leq r + r'$. Tenemos la desigualdad estricta $d(x, x') < r + r'$ si una de las tres intersecciones siguientes es no vacía:

$$B(x, r) \cap B(x', r') \quad , \quad B(x, r) \cap \overline{B}(x', r') \quad , \quad \overline{B}(x, r) \cap B(x', r') .$$

La demostración se deja como ejercicio. Veamos, a partir de esta proposición, que **una sucesión no puede converger a dos puntos diferentes** $x_0 \neq y_0$. Hacemos $r = d(x_0, y_0)/3 > 0$ y, como $d(x_0, y_0) > r + r$, se tiene $B(x_0, r) \cap B(y_0, r) = \emptyset$. Si cada bola contuviese una cola:

$$x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots \in B(x_0, r) \quad , \quad x_h, x_{h+1}, x_{h+2}, \dots \in B(y_0, r) ,$$

entonces para $n = \max\{k, h\}$ el punto x_n tendría que estar en las dos bolas a la vez, imposible.

Concluimos que cada sucesión o bien no converge o lo hace a un único punto.

Definición 36. Una sucesión de puntos de (X, d) es **convergente en X** si existe un punto $x_0 \in X$ al cual converge. Entonces x_0 es único y se llama **límite** de la sucesión: $\lim x_n = x_0$

La unicidad es, precisamente, lo que da importancia al concepto de límite. Muchos objetos importantes en Matemáticas (números, funciones, conjuntos) se construyen como límites y, gracias a la unicidad, quedan perfectamente definidos por tal construcción.

Es fácil ver que $x_n \rightarrow x_0$ si y sólo si todo entorno de x_0 contiene una cola de la sucesión (x_n) . Por lo tanto, la clase de los abiertos en (X, d) determina qué sucesiones convergen así como el límite de cada una de ellas.

Notación: escribimos $(x_n) \subset E$ para indicar que $x_n \in E$ para todo n .

Proposición 37. Dado un subconjunto $E \subseteq X$ la adherencia \overline{E} es el conjunto de los límites de sucesiones $(x_n) \subset E$ convergentes en X . Por lo tanto E es cerrado si y sólo si contiene todos esos límites.

Demostración. Sea F el conjunto de esos límites. Dado $x_0 \in F$, hay una sucesión $(x_n) \subset E$ convergente a x_0 . Para cada $r > 0$ la bola $B(x_0, r)$ contiene una cola de la sucesión, luego contiene puntos de E y así $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$. Esto prueba que $x_0 \in \overline{E}$ y que $F \subseteq \overline{E}$.

Fijamos ahora un $y_0 \in \overline{E}$. Para cada entero positivo n tenemos $B(y_0, 1/n) \cap E \neq \emptyset$ y elegimos un punto x_n en esta intersección, formando así una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$. Dado ahora cualquier $r > 0$, hay un n tal que $1/n < r$, con lo cual:

$$m \geq n \implies d(x_m, y_0) < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} < r \implies x_m \in B(y_0, r) ,$$

luego $B(y_0, r)$ contiene la cola $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$. Así $(x_n) \rightarrow y_0 \in F$. Como y_0 era un punto arbitrario de \overline{E} , tenemos $\overline{E} \subseteq F$. □

Podemos explicar ahora por qué los conjuntos cerrados se llaman así. Primero, cuando un conjunto tiene una operación (suma, producto, etc) se dice que un subconjunto E es *cerrado para esa operación* si al operar con elementos de E siempre resulta un elemento de E . Por ejemplo, en un grupo los subgrupos son los subconjuntos cerrados para la multiplicación $(x, y) \mapsto xy$ y para la toma de inverso $x \mapsto x^{-1}$. Segundo, hay operaciones de más de dos argumentos, por ejemplo dados números $a, b, c \in \mathbb{R}$ el máximo $\max\{a, b, c\}$ es una operación que produce un número

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

1.9 Continuidad

El criterio más básico de si una aplicación $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es continua o no lo hemos dado en la definición 15 del apartado 1.4. Ahora daremos otros criterios que son de gran utilidad.

Teorema 38. Para una aplicación $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ son equivalentes:

1. f es continua.
2. Para todo abierto $V \subseteq Y$ la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto de X .
3. Para todo cerrado $C \subseteq Y$ la preimagen $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X .
4. Para todo $x_0 \in X$ y toda sucesión $(x_n) \subset X$ con $x_n \rightarrow x_0$ se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Demostración. Supongamos f continua y $V \subseteq Y$ abierto. Dado $x \in f^{-1}(V)$ es $f(x) \in V$ y existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq V,$$

luego $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$. Esto prueba que $f^{-1}(V)$ es abierto y que 1. \implies 2.

Supongamos ahora que f satisface 2. Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ es un abierto de X al que pertenece x . Por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que

$$B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)).$$

Aplicando f en ambos lados sale $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Luego f es continua y 2. \implies 1.

Para todo $A \subseteq Y$ se tiene $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. Si f satisface 2. y C es un cerrado de Y , entonces $Y \setminus C$ es abierto de Y y su preimagen $X \setminus f^{-1}(C)$ es abierto de X , luego $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X . Esto prueba que 2. \implies 3. Análogamente 3. \implies 2.

Sea ahora f continua y $x_n \rightarrow x_0$ en X . Dado $r > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(B(x_0, \varepsilon)) \subseteq B(f(x_0), r)$. A su vez la bola $B(x_0, \varepsilon)$ contiene una cola $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ de la sucesión (x_n) y, aplicando f :

$$f(x_n), f(x_{n+1}), f(x_{n+2}), \dots \in f(B(x_0, \varepsilon)) \subseteq B(f(x_0), r),$$

es decir que para todo $r > 0$ la bola $B(f(x_0), r)$ contiene una cola de la sucesión $(f(x_n))$, lo cual equivale a $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Esto prueba que 1. \implies 4.

Supongamos, por último, que f satisface 4. pero hay un punto $x_0 \in X$ en el que es discontinua. Entonces habrá un $\varepsilon_0 > 0$ "malo", en el sentido de que para ningún $\delta > 0$ estará la imagen $f(B(x_0, \delta))$ contenida en $B(f(x_0), \varepsilon_0)$. En particular

$$f(B(x_0, 1/n)) \not\subseteq B(f(x_0), \varepsilon_0) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada entero positivo n podremos elegir un $x_n \in B(x_0, 1/n)$ tal que $f(x_n) \notin B(f(x_0), \varepsilon_0)$. Estas elecciones formarán una sucesión $(x_n) \subset X$ con $x_n \rightarrow x_0$, mientras que la bola $B(f(x_0), \varepsilon_0)$ no contendrá ningún elemento de la sucesión $(f(x_n))$, con lo cual $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ y f no satisfará 4., contradicción. Por reducción al absurdo, tal punto x_0 no existe y f es continua. Esto prueba que 4. \implies 1. \square

Corolario 39. Si $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es una aplicación...

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Proposición 40. Dadas funciones escalares $f_1, \dots, f_k : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$, la correspondiente función vectorial

$$f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \quad , \quad x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad ,$$

es continua si y sólo si las f_1, \dots, f_k son todas continuas.

Una sucesión de vectores $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ converge a x en $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ si y sólo si para $i = 1, \dots, n$ la sucesión $(x_n^i)_{n=1}^\infty$ de las i -ésimas coordenadas de los x_n converge a la i -ésima coordenada de x .

La demostración se deja como ejercicio.

Si en cada subconjunto de \mathbb{R} ponemos la distancia $|x - y|$ y en cada subconjunto de \mathbb{R}^2 ponemos la distancia $\|x - y\|_\infty$, entonces las siguientes funciones son todas continuas:

Suma: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.

Multiplicación: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$.

División: $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

Directas: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x = \exp(x)$, $\text{sen } x$, $\text{cos } x$,

Logaritmo: $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$.

Seno inversa: $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, $x \mapsto \arcsen x$.

Coseno inversa: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $x \mapsto \arccos x$.

Raíz impar: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n = 3, 5, 7, \dots$

Raíz positiva: $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

Valor absoluto: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

A esa lista se podrían añadir muchas más. Combinando ahora la proposición 40 con la 16 del apartado 1.4 (la compuesta de continuas es continua), obtenemos:

Si $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas entonces $f + g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Si $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas entonces $fg : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Si $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y g nunca se anula entonces $\frac{f}{g} : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Si $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $e^f, \text{sen } f, \text{cos } f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas.

Si $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y siempre positiva entonces $\log f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Si $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y f siempre positiva entonces $f^g = \exp(g \log f)$ es continua.

Si $f : (X, d) \rightarrow [-1, 1]$ es continua entonces $\arcsen f : (X, d) \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ es continua.

Si $f : (X, d) \rightarrow [-1, 1]$ es continua entonces $\arccos f : (X, d) \rightarrow [0, \pi]$ es continua.

Si $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y n es impar entonces $\sqrt[n]{f} : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Si $f : (X, d) \rightarrow [0, +\infty)$ es continua entonces $\sqrt[n]{f} : (X, d) \rightarrow [0, +\infty)$ es continua.

Si $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $|f| : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Haciendo combinaciones sucesivas de esos casos se consigue lo siguiente:

Sea $\mathcal{A}(x)$ una fórmula elemental en las variables $x = (x_1, \dots, x_n)$, que en un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ no plantea ningún problema:

cuando $x \in E$ entonces cada vez que en $\mathcal{A}(x)$ hay un cociente el denominador es no nulo, cada vez que hay un logaritmo el logaritmando es estrictamente positivo, cada vez que hay una raíz de índice par el radicando es no negativo, etc.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

jercicio.

Cartagena99

1.10 Compacidad

Definiciones 42. Las subsucesiones de una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ son el resultado de tomar una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ y quedarse sólo con los correspondientes términos $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$. Obsérvese que $n_k \geq k$ para todo k .

Dado un subconjunto $K \subseteq X$ los **recubrimientos** de K son las familias $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tales que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Teorema-definición 43. Sea (X, d) un espacio métrico. Dado un subconjunto $K \subset X$, consideremos las dos propiedades siguientes:

Propiedad de sucesiones: Toda sucesión $(x_n) \subset K$ tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente a algún punto de K .

Propiedad de recubrimiento: Todo recubrimiento $(U_i)_{i \in I}$ de K por abiertos de X tiene una subfamilia finita U_{i_1}, \dots, U_{i_N} que también recubre K , es decir $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$.

Estas dos propiedades son equivalentes. Si se cumplen decimos que K es **compacto**.

En la demostración de este teorema necesitaremos el resultado siguiente.

Lema 44. Sea $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento de K por abiertos de X . Si K tiene la propiedad de sucesiones entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in K$ hay un índice $i \in I$ (dependiente de x) tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$.

De un número $\varepsilon > 0$ que cumpla eso decimos que es un **número de Lebesgue** del recubrimiento, propiedad que admite dos interpretaciones:

- Para cada “punto gordo” $B(x, \varepsilon)$ con $x \in K$ hay un abierto U_i que lo contiene.
- Los “abiertos adelgazados” $U_i^\varepsilon = \{x \in U_i : B(x, \varepsilon) \subseteq U_i\}$ también recubren K .

Demostración del lema. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que para cada entero positivo n el inverso $1/n$ no es número de Lebesgue del recubrimiento dado, es decir que existe un $x_n \in K$ tal que la bola $B(x_n, 1/n)$ no está contenida en ninguno de los abiertos U_i . Esto genera una sucesión (x_n) de puntos de K con la siguiente propiedad:

para ningún n está la bola $B(x_n, 1/n)$ contenida en ninguno de los abiertos U_i . (10)

La propiedad de sucesiones dice que hay una subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x_0 \in K$. Habrá un abierto U_{i_0} del recubrimiento con $x_0 \in U_{i_0}$. El abierto U_{i_0} contiene una bola $B(x_0, r)$ con $r > 0$. Elegimos un n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{r}{2}$ y un s tal que la “bola mitad” $B(x_0, \frac{r}{2})$ contiene la cola $(x_{n_j})_{j \geq s}$ de la subsucesión. Haciendo $m = \max\{n_0, s\}$ tenemos:

$$\frac{1}{n_m} \leq \frac{1}{m} < \frac{r}{2}, \quad x_{n_m} \in B\left(x_0, \frac{r}{2}\right),$$

y entonces la desigualdad triangular nos permite concluir que

$$B\left(x_0, \frac{1}{n_m}\right) \subset B\left(x_0, \frac{r}{2} + \frac{1}{n_m}\right) = B(x_0, r) \subset U_{i_0}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$1 \leq i < j \leq N$ sea $D(x_i, r) \cap D(x_j, r) = \emptyset$ (bolas en X).

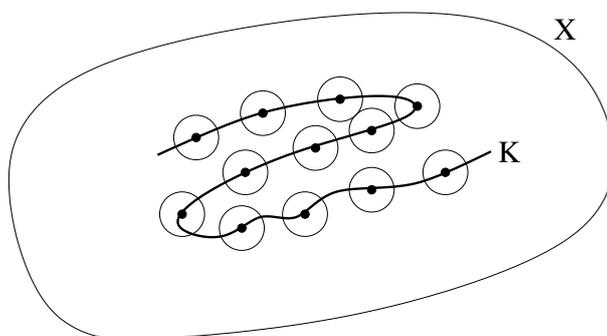
Cartagena99

Afirmamos que hay uno maximal entre los conjuntos que tienen esta propiedad. Si no lo hubiera, podríamos construir una sucesión infinita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ de puntos de K tal que las bolas $B(x_n, r)$ fuesen disjuntas dos a dos en X . Esto implica $d(x_n, x_m) \geq r$ siempre que $n \neq m$ y, en consecuencia, *ninguna* subsucesión de (x_n) puede ser de Cauchy (ver el apartado 1.14) ni convergente. Pero hemos supuesto que K tiene la propiedad de sucesiones y, por reducción al absurdo, el conjunto maximal existe, es decir que hay un $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq K$ tal que para todo $x \in K$ la bola $B(x, r)$ corta a alguna de las $B(x_1, r), \dots, B(x_N, r)$.

La idea intuitiva de la construcción del conjunto $\{x_1, \dots, x_N\}$ es la siguiente. Al espacio X le vamos arracando bolas cumpliendo siempre dos reglas:

- Tienen que ser de radio r y estar centradas en puntos de K .
- No se permite arrancar un punto de X más de una vez, es decir que después de cada extracción de bolas el conjunto que queda debe contener *entera* la siguiente bola.

Hemos probado que este proceso no puede seguir indefinidamente; se detiene cuando ya no es posible arrancar una bola más cumpliendo esas dos reglas. En ese momento el conjunto $Q = X \setminus (B(x_1, r) \cup \dots \cup B(x_N, r))$ es un “gruyère” con los agujeros tan juntos que en el queso situado entre ellos ya no cabe ninguna bola con centro en K y radio r .



Advertencia. Al haber hallado $\{x_1, \dots, x_N\}$ por reducción al absurdo, que es un método no constructivo, no tenemos ningún control sobre el tamaño N de este conjunto. Más abajo damos un ejemplo de lo enorme que puede ser.

Segundo paso. Hacemos uso de un truco inventado por Giuseppe Vitali (1875-1932):

Las bolas de radio doble recubren todo K , es decir $K \subseteq B(x_1, 2r) \cup \dots \cup B(x_N, 2r)$.

Esto es así porque si hubiera un punto $x_0 \in K$ fuera de todas esas bolas tendríamos $d(x_0, x_i) \geq 2r$ para $i = 1, \dots, N$ y, por la proposición 35 del apartado 1.8, la bola $B(x_0, r)$ sería disjunta de cada una de las $B(x_1, r), \dots, B(x_N, r)$ y el conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subseteq K$ tendría la propiedad \mathcal{P} , en contradicción con la maximalidad de $\{x_1, \dots, x_N\}$.

Tercer paso. Sea ahora un recubrimiento $(U_j)_{j \in J}$ de K por abiertos de X . Tomamos un número de Lebesgue ε para él y hacemos $r = \varepsilon/2$ en los pasos primero y segundo. Obtenemos un conjunto finito de bolas $\{B(x_1, 2r), \dots, B(x_N, 2r)\} = \{B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_N, \varepsilon)\}$ centradas en

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Paso auxiliar. Fijada una tal (x_n) , demostremos (también por reducción al absurdo) que para cada punto $y \in K$ existe un $r_y > 0$ tal que el conjunto J_{y,r_y} es finito, siendo:

$$J_{y,r} \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(y,r)\}.$$

Lo contrario sería que hubiese un $y_0 \in K$ con el conjunto $J_{y_0,r}$ infinito para todo $r > 0$. En particular serían infinitos $J_{y_0,1}, J_{y_0,1/2}, J_{y_0,1/3}, \dots$ y estas infinidades nos permitirían elegir sucesivamente

$$n_1 \in J_{y_0,1} \quad , \quad n_2 \in J_{y_0,1/2} \quad \text{con} \quad n_2 > n_1 \quad , \quad n_3 \in J_{y_0,1/3} \quad \text{con} \quad n_3 > n_2 \quad , \quad \dots$$

y así $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Entonces $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ sería una subsucesión de (x_n) verificando $x_{n_k} \in B(y_0, 1/k)$ para todo k , luego $(x_{n_k}) \rightarrow y_0$ en contradicción con la hipótesis sobre la sucesión (x_n) . Por reducción al absurdo, para cada $y \in K$ hay un radio $r_y > 0$ con J_{y,r_y} finito.

Si existiera la sucesión $(x_n) \subset K$ sin subsucesiones convergentes en K , el paso auxiliar produciría un recubrimiento $(B(y,r_y))_{y \in K}$ de K por abiertos de X . Como estamos suponiendo que K tiene la propiedad del recubrimiento, habría una subfamilia finita $B(y_1,r_{y_1}), \dots, B(y_N,r_{y_N})$ recubriendo todo K y por lo tanto recubriendo $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Esto implica que cada $n \in \mathbb{N}$ pertenecería a algún $J_{y_k,r_{y_k}}$, $k = 1, \dots, N$, y entonces \mathbb{N} se pondría como unión finita de conjuntos finitos, imposible. Por reducción al absurdo la sucesión (x_n) no puede existir y K tiene la propiedad de sucesiones. \square

El ejemplo. Para $(X,d) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y $K = \overline{B}(\mathbf{0},1)$, el número máximo de bolas abiertas disjuntas dos a dos y de radio $r = 1/k$ es $N(r) = k^n = (1/r)^n$, dependiente de r y de la dimensión. En \mathbb{R}^{333} es $N(1/2) = 2^{333} > 10^{100}$ y $N(1/4) > 10^{200}$, o sea $N(1/4)$ es como 10^{100} veces $N(1/2)$.

Una consecuencia del teorema 43 es que una vez que conocemos los abiertos de (X,d) ya sabemos qué subconjuntos suyos son compactos y cuáles no.

Teorema 45. Si $K \subseteq X$ es compacto entonces es cerrado y acotado en X .

En $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

Demostración. Sean $K \subseteq X$ compacto y $(x_n) \subset K$ sucesión con $x_n \rightarrow x \in X$. Existe una subsucesión (x_{n_k}) convergente a un punto $y \in K$. Como esta subsucesión también converge a x , tenemos $x = y \in K$. Es decir que K es cerrado para el paso al límite, luego es cerrado.

La familia de bolas $(B(x,1))_{x \in K}$ es un recubrimiento de K por abiertos de X . Tomamos un subrecubrimiento finito $K \subseteq \overline{B}(x_1,1) \cup \dots \cup \overline{B}(x_N,1)$ y haciendo

$$r = 1 + \max\{d(x_1,x_2) \dots, d(x_1,x_N)\},$$

se llega a $K \subseteq B(x_1,r)$, luego K es acotado.

Sean ahora $K \subset \mathbb{R}^n$, cerrado y acotado, y $(x_j)_{j=1}^\infty \subset K$. Para $i = 1, \dots, n$ la sucesión $(x_j^i)_{j=1}^\infty$ de las i -ésimas coordenadas de los x_j es acotada en \mathbb{R} . La primera sucesión (x_j^1) tiene una subsucesión $(x_{j_k}^1)$ convergente en \mathbb{R} a un número x^1 . Dada ahora la sucesión (x_j^2) de las segundas coordenadas, consideramos la subsucesión $(x_{j_k}^2)$ correspondiente a la misma sucesión de índices

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Teorema 46. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y $K \subseteq X$ es compacto, entonces $f(K) \subseteq Y$ es compacto.

Si $K \subseteq X$ es compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (para la distancia usual en \mathbb{R}), entonces f alcanza su máximo y su mínimo. Es decir que existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

Demostración. La primera parte es por la caracterización de los compactos por sucesiones y la propiedad $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$ de las aplicaciones continuas.

Para la segunda parte definimos el conjunto de números $A = f(K) \subset \mathbb{R}$, del que sabemos que es cerrado y acotado. Al ser acotado existen $\inf A, \sup A$ y son valores finitos. Además son límites de sucesiones en A y, como A también es cerrado, resulta $\inf A, \sup A \in A$. Es decir que existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $f(x_1) = \inf A$ y $f(x_2) = \sup A$, luego $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$. \square

1.11 Normas equivalentes

Teorema-definición 47. Dos normas $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ en un espacio vectorial \mathbb{V} son **equivalentes** si dan lugar a los mismos conjuntos abiertos en \mathbb{V} .

Esto resulta ser equivalente a la existencia de constantes $c, C > 0$ tales que

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\| \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V}.$$

Por lo tanto, dos normas equivalentes también definen los mismos conjuntos acotados.

Demostración. Veamos que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

1. Todo abierto para $\|\cdot\|'$ es un abierto para $\|\cdot\|$.
2. Existe una $C > 0$ tal que $\|v\|' \leq C\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

Sea $\text{id} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la identidad $v \mapsto v$. Expresando la condición 1. así:

Si U es un abierto en $(\mathbb{V}, \|\cdot\|')$ entonces $\text{id}^{-1}(U)$ es abierto en $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, vemos que equivale a que id sea continua vista como $(\mathbb{V}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{V}, \|\cdot\|')$ y, por lo tanto, lineal acotada (véase el apartado 1.5) que es lo que expresa la condición 2.

Intercambiando $\|\cdot\|$ con $\|\cdot\|'$, sabemos también que la existencia de una $C' > 0$ tal que $\|v\| \leq C'\|v\|'$ para todo $v \in \mathbb{V}$ equivale a que todo abierto para $\|\cdot\|$ sea un abierto para $\|\cdot\|'$. Poniendo $c = 1/C'$, esto último equivale a su vez a tener $c\|v\| \leq \|v\|'$ para todo $v \in \mathbb{V}$. \square

Teorema-definición 48. En \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes entre sí.

Llamamos **abiertos estándar** de \mathbb{R}^n a los definidos por cualquier norma.

Otra consecuencia útil es que las funciones y aplicaciones $\mathbb{R}^n \supseteq E \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ que hemos llamado *elementales* en el apartado 1.9 son continuas respecto de cualesquiera normas que pongamos en \mathbb{R}^n y en \mathbb{R}^m .

Demostración del teorema 48. Basta con probar que toda norma es equivalente a la $\|\cdot\|_\infty$. Denotaremos por $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base estándar de \mathbb{R}^n . Para cualquier norma $\|\cdot\|$ se tiene:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

donde B denota bolas abiertas respecto de $\|\cdot\|_\infty$. Esto nos dice que $f \equiv \|\cdot\|$ es una función escalar continua respecto de $\|\cdot\|_\infty$.

La cáscara $K = \{\omega : \|\omega\|_\infty = 1\}$ es un conjunto cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, luego compacto por el teorema 45. Por el teorema 46 existe un $\omega_0 \in K$ tal que $c = f(\omega_0)$ es el mínimo de f en K . Entonces c cumple las dos condiciones siguientes:

$$c > 0 \quad , \quad \|\omega\|_\infty = 1 \implies \|\omega\| \geq c .$$

Por el truco habitual de la descomposición polar, obtenemos $\|x\| \geq c\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En definitiva $c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como se quería demostrar. \square

1.12 Conexión

Definiciones 49. Un camino en un espacio métrico (X, d) es cualquier aplicación continua $\alpha : I \rightarrow X$ cuyo dominio I es un intervalo de la recta real.

Un subconjunto no vacío $E \subseteq X$ es **conexo por caminos** o **conexo por arcos** si cada par de puntos $p, q \in E$ se puede unir por un camino en E , es decir existe un camino $\alpha(t) : [0, 1] \rightarrow E$ contenido en E , que empieza en p y termina en q : $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$.

Proposición 50. 1. Los subconjuntos conexos por caminos de la recta real son los intervalos y los de un elemento $\{a\}$.

2. La imagen de un conexo por caminos por una aplicación continua es conexa por caminos.

3. La unión no disjunta de dos conexos por caminos es conexa por caminos.

4. Si E es conexo por caminos entonces sólo \emptyset y E son a la vez abierto relativo y cerrado relativo de E (conceptos definidos al final del apartado 1.6).

Dado un punto $p \in E$, el más grande subconjunto de E conexo por caminos y conteniendo a p es el conjunto:

$$\{q \in E : p \text{ se une con } q \text{ por un camino contenido en } E\} .$$

Estos conjuntos se llaman **componentes conexas por caminos** de E . La propiedad 3. de la proposición 50 hace que estas componentes formen una **partición**: su unión es todo E y dos cualesquiera que sean distintas son disjuntas.

Proposición 51. Si U es un abierto de \mathbb{R}^n entonces sus componentes conexas por caminos son abiertos y a lo más hay una cantidad numerable de ellas. De este modo todo abierto de \mathbb{R}^n tiene una única partición en abiertos conexos por caminos, en cantidad finita o numerable.

Aviso. Es importante no confundir las palabras “conexo” y “convexo”. Todo subconjunto convexo de \mathbb{R}^n es conexo por caminos (cualquier par de puntos suyos se une por un segmento rectilíneo que no se sale del conjunto) pero la mayoría de los conexos por caminos no son convexos (por ejemplo, un abierto del plano con la forma de la letra C).

1.13 Continuidad uniforme

Definición 52. Una aplicación $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es **uniformemente continua** si

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración. Fijamos un $\varepsilon > 0$ y para cada $x \in X$ definimos el conjunto:

$$U_x = \{x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon/2\}.$$

La familia que resulta $(U_x)_{x \in X}$ es un recubrimiento de X por abiertos de X . Como X es compacto podemos aplicar el lema 44 y hay un número de Lebesgue δ para ese recubrimiento. Sean ahora x_1, x_2 puntos de X con $d_X(x_1, x_2) < \delta$. La bola $B(x_1, \delta)$ contiene tanto a x_1 como a x_2 y, por ser δ un número de Lebesgue, existe un $x \in X$ tal que $B(x_1, \delta) \subseteq U_x$. En particular $x_1, x_2 \in U_x$, de donde:

$$d_Y(f(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d_Y(f(x), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y un uso fácil de la simetría de d y la desigualdad triangular da:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

1.14 Completitud

Definición 54. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $(x_n) \subset X$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Es fácil ver que toda sucesión convergente es de Cauchy. El recíproco no es cierto en espacios métricos cualesquiera. Por ejemplo, es fácil dar sucesiones $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ convergentes a un número irracional, con lo cual son de Cauchy pero no son convergentes en \mathbb{Q} .

Definiciones 55. Un espacio métrico X es **completo** si toda sucesión $(x_n) \subset X$ que sea de Cauchy es convergente en X . Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo.

Todo cerrado $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es completo con la distancia inducida de \mathbb{R}^n . En cambio \mathbb{Q} no es completo.

1.15 Topologías

Sea d una distancia en un conjunto no vacío X

La **topología** (con minúscula) **asociada a d** es la familia de los abiertos de (X, d) .

La **Topología** (con mayúscula) es una parte de las Matemáticas. Estudia lo expuesto en este capítulo y más cosas.

Definiciones 56. Una **propiedad topológica** es la que puede decidirse cuando se conoce la topología del espacio involucrado, o las topologías de los espacios involucrados.

Una **construcción topológica** es la que se puede hacer una vez que se conoce la topología.

Son propiedades topológicas:

- ser cerrado en X
- ser abierto o cerrado *relativo* en un subconjunto $Y \subset X$,

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Son construcciones topológicas

- el interior de cada $E \subseteq X$,
- la adherencia de cada $E \subseteq X$,
- el límite de cada sucesión convergente $(x_j) \subset X$.

Veamos, mediante un ejemplo, que las siguientes propiedades no son topológicas:

- ser conjunto acotado,
- continuidad uniforme,
- completitud.

Consideramos en $X = (0, 1]$ las distancias $d_{\text{estándar}}(x, y) = |x - y|$ y $d(x, y) = |\log x - \log y|$, que definen los mismos abiertos. El espacio métrico $(X, d_{\text{estándar}})$ es acotado pero el (X, d) no. La función escalar $x \mapsto \log x$ es uniformemente continua en (X, d) pero no lo es en $(X, d_{\text{estándar}})$. El espacio métrico (X, d) es completo mientras que $(X, d_{\text{estándar}})$ no lo es.

Los tres ejemplos siguientes muestran propiedades que, en algún sentido que vamos a explicar, tienen menos calidad que la compacidad:

- La función $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, con $f((0, 1]) = [1, +\infty)$, muestra que la imagen de un conjunto acotado por una función continua, puede que no sea acotada.
- La función $g(x) = x^2$, con $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$, muestra que la imagen continua de un abierto puede que no sea abierta.
- La función $h(x, y) = x$ y el cerrado $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$, con $h(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, muestran que la imagen continua de un cerrado puede que no sea cerrada.

El teorema 46 dice que la compacidad es “robusta”: no desaparece al efectuar una transformación continua. En cambio acabamos de ver que la acotación, ser abierto y ser cerrado son propiedades que pueden desaparecer al efectuar una transformación continua y son, en este sentido, “de menos calidad” que la compacidad.

Otra propiedad que también permanece al efectuar transformaciones continuas es la conexión por caminos. Es lo que afirma la parte 2. de la proposición 50.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The text is set against a light blue, arrow-shaped background that points to the right. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

2 Diferenciabilidad

2.1 Diferencial en un punto

Notación. Dados espacios normados E, F , denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales acotadas, es decir $T : E \rightarrow F$ lineales con $\|Tv\| \leq C \|v\|$ para alguna constante C .

Definición 57. Sean: E, F espacios normados, un punto $x_0 \in E$ y un abierto $U \subseteq E$ entorno de x_0 . Decimos que $f : U \rightarrow F$ es **diferenciable en x_0** si existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{\|h\|} = \vec{0}_F. \quad (11)$$

El límite en esa fórmula significa lo siguiente: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|h\| < \delta \implies \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\|}{\|h\|} < \varepsilon, \quad (12)$$

de donde: $\|h\| < \delta \implies \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\| \leq \varepsilon \|h\|$.

Primeras propiedades:

- T es única si existe, en cuyo caso se llama **diferencial** de f en x_0 y se denota $(df)_{x_0}$.
- Si f es diferenciable en x_0 entonces es continua en x_0 .
- Toda $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es diferenciable en todo punto y coincide con sus diferenciales.
- Si f es constante entonces es diferenciable en todo punto con diferencial nula.

Demostración de a). Sean T_1, T_2 cumpliendo (11). Definimos $T = T_1 - T_2$, que es lineal y tal que $\lim_{h \rightarrow \vec{0}_E} (Th)/\|h\| = \vec{0}_F$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ tal que $0 < \|h\| < \delta \implies \frac{\|Th\|}{\|h\|} < \varepsilon$.

A cada vector unitario ω le asociamos $h = (\delta/2)\omega$, que cumple $\|h\| < \delta$, y entonces:

$$\varepsilon > \frac{\|T(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|(\delta/2)T(\omega)\|}{\|(\delta/2)\omega\|} = \frac{(\delta/2)\|T(\omega)\|}{\delta/2} = \|T(\omega)\|,$$

es decir $\|T(\omega)\| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $\|T(\omega)\| = 0$ y, como esto último se cumple para todos los vectores unitarios ω , tenemos $T \equiv 0$ y $T_1 = T_2$.

Demostración de b). Sea $T = (df)_{x_0}$. Tomamos el valor δ_1 tal que se cumple (12) con $\varepsilon = 1$:

$$\|h\| < \delta_1 \implies \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - (df)_{x_0}h\|}{\|h\|} < 1 \implies \|f(x_0 + h) - f(x_0) - (df)_{x_0}h\| \leq \|h\|,$$

de donde:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Importante. En el caso especial $E = \mathbb{R}^n$ y $F = \mathbb{R}^m$, sabemos que todas las normas en E son equivalentes y lo mismo para F (apartado 1.11). En este caso, pues, tanto la diferenciabilidad de f en x_0 como la diferencial $(df)_{x_0}$ son independientes de qué normas se elijan en E y en F .

Por supuesto, no toda aplicación continua en x_0 es diferenciable en x_0 : la diferenciabilidad es una propiedad estrictamente más exigente que la continuidad.

Caso particular: $E = F = \mathbb{R}$. Cada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ está dada por una constante real m , de manera que $T(h) = mh$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Dado un entorno U de x_0 en \mathbb{R} , una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 si y sólo si existe una constante real m tal que:

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - mh}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m \right|,$$

es decir si y sólo si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe y es igual a m . Esto equivale a que f sea derivable en x_0 con derivada finita $f'(x_0) = m$; dicho de otra manera, el grafo de f tiene en $x = x_0$ tangente no vertical, con pendiente finita m .

Como hay muchas funciones continuas no derivables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, queda claro que continuidad no implica diferenciabilidad.

Proposición 58. Una función vectorial $f \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$, con valores en \mathbb{R}^m , es diferenciable en x_0 si y sólo si las funciones escalares f_1, \dots, f_m son todas diferenciables en x_0 , en cuyo caso para todo $h \in E$ la imagen $(df)_{x_0}h$ es el vector de \mathbb{R}^m cuyas entradas son los números $(df_1)_{x_0}h, \dots, (df_m)_{x_0}h$.

Proposición 59. (Linealidad). Con E, F, x_0, U como antes, sean $U \xrightarrow{f} F$ ambas diferenciables en x_0 y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f + g : U \rightarrow F$ y $cf : U \rightarrow F$ son diferenciables en x_0 , además:

$$d(f + g)_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0} \quad \text{y} \quad (d(cf))_{x_0} = c(df)_{x_0}$$

Las demostraciones de las proposiciones 58 y 59 se dejan como ejercicio.

Proposición 60. (Regla del producto). Sean $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diferenciables en x_0 . La función producto $fg : U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $(fg)(v) = f(v)g(v)$, es diferenciable en x_0 y

$$d(fg)_{x_0} = (df)_{x_0}(\cdot)g(x_0) + f(x_0)(dg)_{x_0}$$

Esto también funciona para $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow F$ y $fg : U \rightarrow F$.

El caso de f y g escalares lo demostramos en el apartado 2.5.

Proposición 61. (Regla de la cadena). Sean E, F, G tres espacios normados, $x_0 \in E$, U abierto de E y entorno de x_0 , $f : U \rightarrow F$ diferenciable en x_0 . Hacemos $y_0 = f(x_0) \in F$, tenemos un abierto V de F entorno de y_0 y $g : V \rightarrow G$ diferenciable en y_0 . Como hemos visto

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Entonces:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + (df)_{x_0}h + R_1h = y_0 + k, \text{ donde } k = (df)_{x_0}h + R_1h, \\ g \circ f(x_0 + h) &= g(y_0 + k) = g(y_0) + (dg)_{y_0}k + R_2k = g \circ f(x_0) + (dg)_{y_0}k + R_2k, \\ g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0) &= (dg)_{y_0}k + R_2k = (dg)_{y_0}((df)_{x_0}h + R_1h) + R_2((df)_{x_0}h + R_1h) = \\ &= (dg)_{y_0}(df)_{x_0}h + (dg)_{y_0}R_1h + R_2((df)_{x_0}h + R_1h), \end{aligned}$$

así llegamos a $g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0) - ((dg)_{y_0} \circ (df)_{x_0})h = Rh$, donde:

$$Rh = (dg)_{y_0}R_1h + R_2((df)_{x_0}h + R_1h), \quad (13)$$

y sólo queda ver que $\frac{Rh}{\|h\|} \rightarrow \vec{0}_G$ cuando $h \rightarrow \vec{0}_E$.

Sean C_1, C_2 las constantes tales que $\|(df)_{x_0}(h)\| \leq C_1\|h\|$ y $\|(dg)_{y_0}(k)\| \leq C_2\|k\|$. Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ cualesquiera, existen $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$ y $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2)$ ambos positivos y cumpliendo:

$$\|h\| < \delta_1 \implies \|R_1h\| \leq \varepsilon_1\|h\|, \quad \|k\| < \delta_2 \implies \|R_2k\| \leq \varepsilon_2\|k\|.$$

Definimos $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \min \left\{ \delta_1(\varepsilon_1), \frac{\delta_2(\varepsilon_2)}{C_1 + \varepsilon_1} \right\} > 0$. Para $\|h\| < \delta$, por una parte tenemos:

$$\|(dg)_{y_0}R_1h\| \leq C_2\|R_1h\| \leq C_2\varepsilon_1\|h\|, \quad (14)$$

y por otra parte:

$$\|(df)_{x_0}h + R_1h\| \leq C_1\|h\| + \varepsilon_1\|h\| = (C_1 + \varepsilon_1)\|h\| < \delta_2,$$

de donde:

$$\|R_2((df)_{x_0}h + R_1h)\| \leq \varepsilon_2\|(df)_{x_0}h + R_1h\| \leq \varepsilon_2(C_1 + \varepsilon_1)\|h\|. \quad (15)$$

Juntando (13), (14) y (15), llegamos a:

$$0 < \|h\| < \delta \implies \frac{\|Rh\|}{\|h\|} \leq C_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2C_1 + \varepsilon_2\varepsilon_1.$$

Dado cualquier $\varepsilon > 0$, elegimos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ que cumplan $C_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2C_1 + \varepsilon_2\varepsilon_1 < \varepsilon$. El correspondiente número $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ es positivo y nos da:

$$0 < \|h\| < \delta \implies \frac{\|Rh\|}{\|h\|} < \varepsilon,$$

y efectivamente $Rh/\|h\| \rightarrow \vec{0}_G$ cuando $h \rightarrow \vec{0}_E$. □

2.2 Derivada respecto de un vector

Definición 62. Sean E, F espacios normados, $x_0 \in E$ y U entorno de x_0 en E . Sean $f : U \rightarrow F$ y $v \in E$. La **derivada en x_0 de f respecto de v** es el siguiente límite, si es que existe:

d | 1

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

c) Si f es diferenciable en x_0 entonces en x_0 hay derivada respecto de cualquier vector y :

$$D_v f(x_0) = (df)_{x_0} v .$$

Demostración de b). Es trivial para $c = 0$. Supongamos $c \neq 0$. Entonces podemos escribir:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + tcv) - f(x_0)) = c \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{ct} (f(x_0 + ctv) - f(x_0)) ,$$

y definiendo $t' = ct$ nos queda:

$$D_{cv} f(x_0) = c \cdot \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{1}{t'} (f(x_0 + t'v) - f(x_0)) = c \cdot D_v f(x_0) .$$

Demostración de c). Es trivial para $v = \vec{0}_E$. Supongamos v no nulo. Definimos el resto:

$$R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - (df)_{x_0} h ,$$

y razonamos así:

$$\begin{aligned} D_v f(x_0) - (df)_{x_0} v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + tv) - f(x_0)) - (df)_{x_0} v = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(df)_{x_0}(tv) + R(tv)] - (df)_{x_0} v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} R(tv) . \end{aligned}$$

Introducimos la identidad $\frac{1}{t} = (\text{sig } t) \frac{1}{|t|}$ y llegamos a:

$$D_v f(x_0) - (df)_{x_0} v = \|v\| \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (\text{sig } t) \frac{R(tv)}{\|tv\|} ,$$

pero $\text{sig } t$ es función acotada de t (sólo toma los valores 1 y -1) mientras que $R(tv)/\|tv\| \rightarrow \vec{0}_F$ cuando $t \rightarrow 0$, luego el límite es nulo:

$$D_v f(x_0) - (df)_{x_0} v = \|v\| \cdot \vec{0}_F = \vec{0}_F .$$

□

2.3 Jacobianas y regla de la cadena

Ahora tenemos U abierto de \mathbb{R}^n , una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto $x_0 \in U$. Tanto la diferenciabilidad de f en x_0 como la diferencial $(df)_{x_0}$ son independientes de qué normas se utilicen en \mathbb{R}^n y en \mathbb{R}^m , gracias al teorema 48 del apartado 1.11.

Considerando la base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , cada derivada $D_{e_i} f(x_0)$ es, en realidad, la i -ésima derivada parcial de f en x_0 . En las diversas notaciones que se utilizan:

$$D_{e_i} f(x_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{x_0} f = f_{x_i}(x_0) = \partial_{x_i} f(x_0) = D_i f(x_0) ,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

es decir la aplicación lineal $v \mapsto Av$, siendo A la matriz $m \times n$ siguiente:

$$A = Df_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} [f_{x_1}(x_0) | f_{x_2}(x_0) | \cdots | f_{x_n}(x_0)]_{m \times n},$$

que conocemos con el nombre de **matriz jacobiana de f en x_0** .

Recuerda: las derivadas parciales de f se meten en la matriz jacobiana *como columnas*.

Si $f \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$ entonces las *filas de Df* son las jacobianas de las componentes f_1, \dots, f_m de f :

$$Df = \begin{bmatrix} Df_1 \\ \hline Df_2 \\ \hline \vdots \\ \hline Df_m \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Explicado esto, la tercera condición de diferenciabilidad dice: la matriz Df_{x_0} , además de existir, debe cumplir que $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Df_{x_0}h}{\|h\|}$ tienda a $\mathbf{0}$ (en \mathbb{R}^m) cuando $h \rightarrow \mathbf{0}$ (en \mathbb{R}^n). Las **oes de Landau** proporcionan una manera conveniente de escribir esto último.

Definición 63. (Oes de Landau). Sean f, g dos funciones definidas en un entorno de x_0 ; la g escalar y positiva en $x \neq x_0$; la f escalar o vectorial.

Decimos que f pertenece a la **clase o pequeña de g** (se escribe $f = o(g)$) si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \mathbf{0}$.

Decimos que f pertenece a la **clase o grande de g** (se escribe $f = O(g)$) si existe una constante C tal que $\|f\| \leq Cg$ en un entorno de x_0 .

Notación: por tradición, $o(g)$ y $O(g)$ no denotan esas clases de funciones sino que denotan un elemento cualquiera dentro de la clase, por eso se escribe $f = o(g)$ o bien $f = O(g)$ para indicar que f pertenece a una u otra clase.

Con la notación de las oes de Landau, la tercera condición para que f sea diferenciable en x_0 podemos escribirla así:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Df_{x_0}h = o(\|h\|) \quad \text{o bien} \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + Df_{x_0}h + o(\|h\|).$$

La fórmula $f = O(1)$ significa que f es acotada en un entorno de x_0 , mientras que $f = o(1)$ significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{0}$. Si $\beta > \alpha$ entonces $\varphi = O(\|x - x_0\|^\beta) \implies \varphi = o(\|x - x_0\|^\alpha)$. En particular, si $\beta > 1$ entonces $\varphi = O(\|x - x_0\|^\beta) \implies \varphi = o(\|x - x_0\|)$, luego una condición suficiente (no necesaria) para que f sea diferenciable en x_0 es:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Df_{x_0}h = O(\|h\|^\beta) \quad \text{para algún } \beta > 1.$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Todo camino tiene una descripción $x(t) \equiv (x_1(t), \dots, x_n(t))$, siendo $x_1(t), \dots, x_n(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalares diferenciables en todo $t \in I$. Este caso es excepcional por dos razones:

- Permitimos algunos dominios no abiertos, como por ejemplo $I = [a, b)$.
- Dado $t_0 \in I$, que existan las derivadas $x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)$ es suficiente para que $x(t)$ sea diferenciable en t_0 .

La matriz jacobiana es una *columna*: $Dx_{t_0} = x'(t_0) = \begin{bmatrix} x'_1(t_0) \\ \vdots \\ x'_n(t_0) \end{bmatrix}$, es decir un vector de \mathbb{R}^n , que

llamamos **vector derivada** o **vector velocidad**. Los **vectores tangentes** al camino en $t = t_0$ son los múltiplos $c x'(t_0)$ con $c \in \mathbb{R}$.

Sean ahora $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y sea $y(t) : I \rightarrow V$ un camino diferenciable en V . Sea también $g(y_1, \dots, y_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función de m variables diferenciable en cada punto $y(t) \in y(I)$. La compuesta $g \circ y : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ es a su vez un camino diferenciable en \mathbb{R}^k y la regla de la cadena $d(g \circ y)_{t_0} = (dg)_{y(t_0)} \circ (dy)_{t_0}$ se traduce en la igualdad matricial $D(g \circ y)_{t_0} = (Dg)_{y(t_0)} Dy_{t_0}$, es decir *columna = rectángulo · columna*:

$$\mathbb{R}^k \ni (g \circ y)'(t_0) = (Dg)_{y(t_0)} \cdot y'(t_0) = [g_{y_1} \mid g_{y_2} \mid \dots \mid g_{y_m}]_{k \times m} \begin{pmatrix} y'_1(t_0) \\ \vdots \\ y'_m(t_0) \end{pmatrix},$$

y recuperamos una de las expresiones habituales de la regla de la cadena:

$$\boxed{\frac{d}{dt} g(y_1(t), \dots, y_m(t)) = y'_1(t) g_{y_1}(y(t)) + \dots + y'_m(t) g_{y_m}(y(t)) \in \mathbb{R}^k} \quad (17)$$

Supongamos que el camino en (17) es rectilíneo de velocidad constante, es decir $y(t) = y_0 + tv$ con $v = (a_1, \dots, a_m)$ un vector fijado. Observemos que en este caso:

$$y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = v \quad , \quad \left. \frac{d}{dt} g(y(t)) \right|_{t=0} = D_v g(y_0) ,$$

la tercera igualdad es por la misma definición de la derivada en y_0 respecto del vector v , luego en este caso particular la regla de la cadena dice que $D_v g(y_0) = (Dg)_{y_0} v$, es decir:

$$D_{a_1 e_1 + \dots + a_m e_m} g(y_0) = a_1 D_{e_1} g(y_0) + \dots + a_m D_{e_m} g(y_0) .$$

Dicho de otra manera:

*Pedir que $v \mapsto D_v g(y_0)$ sea una función lineal $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ no es otra cosa que pedir que g cumpla la regla de la cadena (17) para **caminos rectilíneos**.*

Recordemos que ésta era la segunda condición para que g sea diferenciable en y_0 . Si además se satisface la tercera condición (la que involucra $o(\|h\|)$) entonces la regla (17) también se cumple para caminos curvilíneos.

Ahora mostraremos que el caso general de la regla de la cadena consiste en realidad en varios casos particulares de (17). Además de la función $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, ahora tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función de n variables $f(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow V$ diferenciable en todo punto de U , es decir

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

www|t=0

Cartagena99

es decir, pedir que sea $(g \circ f)_{x_i}(x_0) = (Dg)_{y_0} f_{x_i}(x_0)$ para $i = 1, \dots, n$, es exactamente lo mismo que pedir la siguiente igualdad matricial:

$$[(g \circ f)_{x_1} | \dots | (g \circ f)_{x_n}]_{x_0} = (Dg)_{y_0} [f_{x_1} | \dots | f_{x_n}]_{x_0},$$

que es la fórmula (16), la regla general de la cadena para matrices jacobianas.

La manera práctica de expresar esto es con la siguiente fórmula, en la que el índice \mathbf{i} va desde 1 hasta n :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{i}}} \right|_{x_0} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = g_{y_1}(f(x_0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mathbf{i}}}(x_0) + \dots + g_{y_m}(f(x_0)) \frac{\partial f_m}{\partial x_{\mathbf{i}}}(x_0) \quad (18)$$

Comentarios. (1) La regla (18) es la (17) con la operación $\left. \frac{d}{dt} \right|_0$ reemplazada por la $\left. \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{i}}} \right|_{x_0}$ en todas partes, resultado natural porque $\left. \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{i}}} \right|_{x_0}$ es la derivada respecto de t a lo largo de $x_0 + t \mathbf{e}_i$.

(2) Ahora sabemos que (16) equivale a lo siguiente: f es diferenciable en x_0 y g cumple la regla (17) a lo largo de caminos diferenciables *cualesquiera* (rectilíneos o curvilíneos).

(3) Es muy importante la siguiente interpretación de (17): fijada g , la derivada $(g \circ y)'(0)$ de g a lo largo del camino $y(t)$ sólo depende de y_0 y el vector velocidad $v = y'(0)$, de manera que si tenemos dos caminos $y(t), \tilde{y}(t)$ pasando por y_0 con velocidad v :

$$y(0) = y_0 = \tilde{y}(0) \quad , \quad y'(0) = v = \tilde{y}'(0) \quad ,$$

entonces $(g \circ y)'(0) = (g \circ \tilde{y})'(0)$ y este vector es igual a $D_v g(y_0)$, es decir el resultado $(g \circ y_0)'(0)$ donde $y_0(t)$ es el camino rectilíneo $y_0(t) = x_0 + t v$.

En definitiva, pues, la regla de la cadena afirma dos cosas:

- Fijados g, y_0, v , los infinitos caminos $y(t)$ que pasan por y_0 con velocidad v dan todos *el mismo resultado* en la derivada $(g \circ y)'(0)$. Esto incluye al camino rectilíneo.
- Fijada g y fijado $y_0 = y(0)$, el vector $(g \circ y)'(0)$ depende *linealmente* del vector $y'(0)$.

2.4 Ejemplos especiales

El propósito de este apartado es aportar evidencia de que la diferenciabilidad de f en un punto x_0 es una propiedad muy exigente. Las dos condiciones siguientes son necesarias, pero no suficientes, para dicha diferenciabilidad:

(1) que $D_v f(x_0)$ exista para todo v y dependa linealmente de v (es decir, que se cumpla la regla de la cadena a lo largo de caminos rectilíneos),

(2) que f sea continua en x_0 .

Empecemos por $f(x, y) \equiv \sqrt[3]{x^3 + y^3} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Esta función es homogénea de grado 1, con lo cual existe la derivada en el origen respecto de cualquier vector y además:

$$D_v f(\mathbf{0}) = f(v) \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^2 .$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Para esta función $D_v g(\mathbf{0})$ existe para todo $v \in \mathbb{R}^2$ y depende linealmente de v ... por la sencilla razón de que es siempre nula: $D_v g(0,0) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Si $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$, entonces $g(tv) \equiv 0$ luego $\frac{g(tv) - f(0,0)}{t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$.

Si $a \neq 0 \neq b$, entonces:

$$\frac{g(ta, tb) - g(0,0)}{t} = \frac{a^3 b t^4}{t(a^6 t^6 + b^2 t^2)} = \frac{a^3 b}{a^6 t^4 + b^2} \cdot t \rightarrow \frac{a^3}{b} \cdot 0 = 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0.$$

Sin embargo esta g es discontinua en $(0,0)$: resulta que es constante a lo largo de los caminos $\gamma(t) = (t, c \cdot t^3)$, $t > 0$. Por ejemplo $f(t, t^3) = 1/2$ mientras que $f(t, 2t^3) = 2/5$ para todo $t > 0$. Como estos caminos tienden al punto $(0,0)$ cuando $t \rightarrow 0$, ni siquiera existe el *límite de dos variables* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$.

Tercer ejemplo:
$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se demuestra, igual que hemos hecho en el segundo ejemplo, que $D_v h(0,0)$ existe y es nula para todo $v \in \mathbb{R}^2$, luego función lineal de v . Por lo explicado en el apartado 2.3, la función h cumple la regla de la cadena a lo largo de rectas al pasar por $(0,0)$.

Esta h sí es continua en $(0,0)$. Tenemos $|x^2 y| \leq \frac{x^4 + y^2}{2}$ por la desigualdad aritmético-geométrica (es decir, Young para $p = 2$), luego $|h| \leq |x|/2 \leq \|(x,y)\|/2$ en todo el plano \mathbb{R}^2 . Al ser $h = O(\|(x,y)\|)$, se tiene $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Pero h no es diferenciable en $(0,0)$. Consideramos los caminos $\alpha(t) = (t,0)$ y $\gamma(t) = (t,t^2)$, que cuando $t = 0$ pasan por $(0,0)$ con la misma velocidad $(1,0)$. Como α es rectilíneo, se tiene $(h \circ \alpha)'(0) = D_{(1,0)} h(0,0) = 0$, en cambio $(h \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Lo que le ocurre a h es lo siguiente: cumple la regla de la cadena a lo largo de rectas, pero no a lo largo de otras curvas cuando pasan por $(0,0)$, por ejemplo:

$$(h \circ \gamma)'(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = [0 \ 0] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (Dh_{(0,0)}) \gamma'(0).$$

2.5 Derivadas continuas

Los tres ejemplos del apartado anterior nos avisan de que hay situaciones en las que es delicado decidir si una función de varias variables es diferenciable o no. El siguiente teorema es inmensamente útil porque describe una situación (bastante frecuente) en la que desaparecen esas dificultades.

Teorema 65. *Sea U abierto de \mathbb{R}^n y $x_0 \in U$. Para que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sea diferenciable en x_0 es suficiente (no necesario) que en un entorno de x_0 existan f_{x_1}, \dots, f_{x_n} y sean continuas en x_0 .*

Demostración. Veamos primero que el caso $m = 1$ implica el caso general. Pongamos $f \equiv (f_1, \dots, f_m)$. Si las funciones vectoriales f_{x_1}, \dots, f_{x_n} son continuas en x_0 entonces para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ las derivadas escalares $f_{jx_1}, \dots, f_{jx_n}$ son continuas en x_0 y, por el caso $m = 1$ del teorema, cada f_j es diferenciable en x_0 y por lo tanto también f .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



En esta demostración utilizamos una norma $\| \cdot \|$ que cumpla lo siguiente:

$$\|x\| = \|(x, 0)\| \leq \|(x, y)\| \geq \|(0, y)\| = |y| \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (19)$$

Esta propiedad la tienen muchas normas, entre otras las normas p . Una vez que se cumple (19), la bola $\overline{B}(x_0, \|x'' - x_0\|)$ contiene los tres vértices x_0, x', x'' del camino poligonal y, como es convexa, contiene el camino entero y así f está definida en todos los puntos de dicho camino.

La restricción $f|_{\text{segmento horizontal}}$ es la función de una variable $f(t, b)$ con t entre a y c . Le aplicamos el teorema de los incrementos finitos y resulta un punto $z_1 = (\theta_1, b)$, situado en el segmento horizontal, tal que $f(x') - f(x_0) = (c - a) f_{x_1}(\theta_1, b) = (c - a) f_{x_1}(z_1)$.

La restricción $f|_{\text{segmento vertical}}$ es la función de una variable $f(c, t)$ con t entre b y d . Le aplicamos el teorema de los incrementos finitos y resulta un punto $z_2 = (c, \theta_2)$, situado en el segmento vertical, tal que $f(x'') - f(x') = (d - b) f_{x_2}(c, \theta_2) = (d - b) f_{x_2}(z_2)$.

El incremento de f a lo largo del camino poligonal es la suma de los incrementos a lo largo de sus segmentos:

$$f(x'') - f(x_0) = (f(x') - f(x_0)) + (f(x'') - f(x')) = (c - a) f_{x_1}(z_1) + (d - b) f_{x_2}(z_2). \quad (20)$$

Escribamos ahora:

$$f_{x_1}(z_1) = f_{x_1}(x_0) + \text{error}_1, \quad f_{x_2}(z_2) = f_{x_2}(x_0) + \text{error}_2. \quad (21)$$

Como la bola $\overline{B}(x_0, \|x'' - x_0\|)$ contiene el camino poligonal, contiene los puntos intermedios z_1, z_2 . A medida que x'' se acerca a x_0 , el radio $\|x'' - x_0\|$ de esa bola tiende a cero y los puntos z_1, z_2 tienden ambos a x_0 . Como las funciones f_{x_1}, f_{x_2} son continuas en x_0 , tenemos:

$$\text{error}_1 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \text{error}_2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x'' \rightarrow x_0.$$

Por otra parte, juntanto (20) con (21) y definiendo $\text{error} = \text{error}_1 (c - a) + \text{error}_2 (d - b)$ sale:

$$\begin{aligned} f(x'') - f(x_0) &= f_{x_1}(x_0) (c - a) + \text{error}_1 (c - a) + f_{x_2}(x_0) (d - b) + \text{error}_2 (d - b) = \\ &= [f_{x_1}(x_0) \quad f_{x_2}(x_0)] \begin{pmatrix} c - a \\ d - b \end{pmatrix} + \text{error} = \\ &= Df_{x_0} \cdot (x'' - x_0) + \text{error}. \end{aligned}$$

Ya sólo nos falta ver que $\text{error} = o(\|x'' - x_0\|)$. Ahora bien, por la condición (19) se tiene:

$$\frac{|c - a|}{\|(c - a, d - b)\|} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{|d - b|}{\|(c - a, d - b)\|} \leq 1,$$

de donde:

$$\frac{|\text{error}|}{\|x'' - x_0\|} < \frac{|\text{error}_1| \cdot |c - a| + |\text{error}_2| \cdot |d - b|}{\|x'' - x_0\|} < |\text{error}_1| \cdot 1 + |\text{error}_2| \cdot 1 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x'' \rightarrow x_0.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

La función $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ es diferenciable en $(0, 0)$ pero tiene f_{x_1}, f_{x_2} discontinuas en ese punto, mostrando así que la condición suficiente proporcionada por el teorema anterior no es una condición necesaria.

Definición 66. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **de clase \mathcal{C}^1 en U** , y se indica por $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ o simplemente $f \in \mathcal{C}^1(U)$, si f_{x_1}, \dots, f_{x_n} existen y son continuas en todo U .

Las funciones de clase \mathcal{C}^1 son diferenciables en todo punto de su dominio.

Demostración de la proposición 60, caso escalar. La función producto $\operatorname{prod} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $(x, y) \mapsto xy$, tiene jacobiana $D \operatorname{prod} = [y \ x]$, claramente continua, luego $\operatorname{prod} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 . Dados un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in U$, el producto se describe como compuesta $fg \equiv \operatorname{prod} \circ \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ y podemos aplicar la regla de la cadena:

$$D(fg)_{x_0} = D \operatorname{prod}_{(x,y)=(f(x_0),g(x_0))} \cdot \begin{bmatrix} Df \\ Dg \end{bmatrix}_{x_0} = [y \ x]_{(x,y)=(f(x_0),g(x_0))} \cdot \begin{bmatrix} Df_{x_0} \\ Dg_{x_0} \end{bmatrix},$$

resultando la regla del producto: $D(fg)_{x_0} = (Df_{x_0})g(x_0) + f(x_0)Dg_{x_0}$. □

De las propiedades que hemos visto para la diferencial (suma de funciones, producto de funciones, etc.) y las que hemos visto para las funciones continuas, se deducen:

- (1) $f \equiv (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase \mathcal{C}^1 si y sólo si las f_j son todas de clase \mathcal{C}^1 .
- (2) Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ son de clase \mathcal{C}^1 y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y cf son de clase \mathcal{C}^1 .
- (3) Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase \mathcal{C}^1 , entonces fg es de clase \mathcal{C}^1 .
- (4) La compuesta de aplicaciones \mathcal{C}^1 es \mathcal{C}^1 (ver apartado 2.7).

En particular, toda aplicación polinómica es de clase \mathcal{C}^1 . Más aún, combinando (1), (2), (3) y (4) tantas veces como sea necesario, es fácil deducir que si f viene dada (componente a componente) por una *fórmula elemental* que no plantee ningún problema en el abierto U (es decir, ningún denominador se hace cero, los radicandos y logaritmandos se mantienen estrictamente positivos, las cantidades dentro de un valor absoluto o de la función sig no se anulan) entonces $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Como primer uso de estas ideas, las dos fracciones del apartado 2.4 son de clase \mathcal{C}^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e igual el ejemplo que acabamos de dar $(x^2 + y^2) \operatorname{sen} (1/(x^2 + y^2))$, luego son diferenciables en cada punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sin que haga falta analizarlos más.

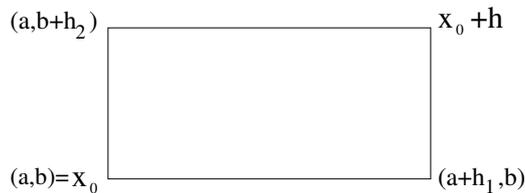
La función $f = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ tiene radicando nulo (solamente) a lo largo de la recta $L = \{x + y = 0\}$ y por lo tanto es \mathcal{C}^1 en el abierto $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Veamos que no es diferenciable en ningún punto de L . Para el punto $(0, 0)$ ya lo hemos visto en el apartado 2.4. Para $x_0 = (a, -a)$, con $a \neq 0$, consideramos el camino $\gamma(t) \equiv x_0 + (t, t)$ y vemos que $f \circ \gamma(t) \equiv \sqrt[3]{2t(3a^2 + t^2)}$ tiene derivada infinita en $t = 0$, que es cuando $\gamma(t)$ pasa por x_0 , luego f no es diferenciable en ese punto. Es, sin embargo, continua en todo \mathbb{R}^2 porque es compuesta de funciones continuas.

2.6 Derivadas cruzadas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\dots, (a, 0 + t_2), (a + t_1, 0 + t_2) = x_0 + t_1$.

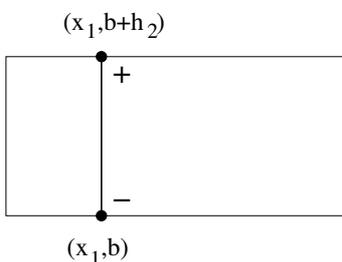


Para h pequeño todo el rectángulo está contenido en el entorno de x_0 donde existen $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_1x_2}$. Definimos:

$$\Sigma(h) \stackrel{\text{def}}{=} f(a, b) - f(a + h_1, b) - f(a, b + h_2) + f(a + h_1, b + h_2) .$$



Fijado h , definimos la función $g(x_1) = f(x_1, b + h_2) - f(x_1, b)$,



que tiene derivada $g'(x_1) = f_{x_1}(x_1, b + h_2) - f_{x_1}(x_1, b)$. Además esta función permite escribir:

$$\Sigma(h) = g(a + h_1) - g(a) ,$$

luego existe $\xi = \xi(h)$, número intermedio entre a y $a + h_1$, tal que:

$$\Sigma(h) = h_1 \cdot g'(\xi) = h_1 \cdot (f_{x_1}(\xi, b + h_2) - f_{x_1}(\xi, b)) .$$

Como $f_{x_1x_2}$ existe en todo el rectángulo, hay un número $\eta = \eta(h)$ entre b y $b + h_2$, tal que

$$f_{x_1}(\xi, b + h_2) - f_{x_1}(\xi, b) = h_2 \cdot f_{x_1x_2}(\xi, \eta) ,$$

de donde:

$$\Sigma(h) = h_1 h_2 f_{x_1x_2}(\xi, \eta) .$$

El punto (ξ, η) es interior al rectángulo, cuyo punto más alejado de x_0 es $x_0 + h$ (porque estamos utilizando la norma euclídea estándar), por lo tanto $(\xi, \eta) \rightarrow x_0$ cuando $h \rightarrow (0, 0)$ y, como $f_{x_1x_2}$ es continua en x_0 , tenemos:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow (0,0) \\ h_1 \neq 0 \\ h_2 > 0}} \frac{\Sigma(h)}{h_1 h_2} = f_{x_1x_2}(x_0) . \quad (22)$$

Sea $\omega(h) = \Sigma(h)/(h_1 h_2)$ definida en $\{h : h_1 \neq 0, h_2 > 0\}$. Cuando un límite de dos va-

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Gracias a esto, (22) implica que existe $\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f_{x_2}(a+h_1, b) - f_{x_2}(a, b)}{h_1}$ y es igual a $f_{x_1 x_2}(x_0)$, lo que significa que existe $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{x_0} f_{x_2}$ y es igual a $f_{x_1 x_2}(x_0)$, que es lo afirmado por el teorema. \square

Consideremos $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ Esta función es diferenciable en $(0, 0)$

con derivadas parciales nulas en dicho punto, porque $|f| \leq x^2/2 = O(\|(x, y)\|^2)$ y por lo tanto:

$$f(x, y) - f(0, 0) - 0 \cdot x - 0 \cdot y = O(\|(x, y)\|^2) = o(\|(x, y)\|).$$

Derivando en $(x, y) \neq (0, 0)$ y añadiendo los valores $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, calculamos:

$$f_x(0, y) = 0 \text{ para todo } y, \quad f_y(x, 0) = x \text{ para todo } x,$$

de donde $f_{xy}(0, 0) = 0$, mientras que $f_{yx}(0, 0) = 1$. Ahora sabemos que tanto f_{xy} como f_{yx} son discontinuas en $(0, 0)$ (ya no lo vamos a comprobar), pues el teorema de Schwarz dice que tendrían el mismo valor en $(0, 0)$ si una de ellas fuera continua en dicho punto.

2.7 Derivadas de orden mayor

Definición 68. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Se dice que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **de clase \mathcal{C}^k en U** si existen y son continuas en todo U las derivadas parciales de f de órdenes desde cero hasta k (entendiendo que la derivada de orden cero es la propia f).

Decimos que f es \mathcal{C}^∞ , o que es **suave**, si es \mathcal{C}^k para todo k .

Decir $f \in \mathcal{C}^0$ es lo mismo que decir que f es continua.

El teorema de Schwarz implica que si f es \mathcal{C}^2 entonces se tiene $f_{x_i x_j} \equiv f_{x_j x_i}$ para i, j cualesquiera, es decir que para tal función el orden de derivación no importa en las derivadas segundas.

Si f es \mathcal{C}^3 , aplicando el teorema de Schwarz varias veces deducimos identidades como las siguientes:

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyz} = \begin{cases} f_{xzy} = f_{zxy} \\ f_{yxz} = f_{yzx} = f_{zyx} \end{cases}$$

y para una tal f el orden de derivación tampoco importa en las derivadas terceras.

Ahora bien, la mayoría de las funciones \mathcal{C}^3 nos darán $f_{xxy} \neq f_{xyy}$, lo que significa que es importante cuántas veces se ha derivado respecto de cada variable independiente.

En general, si f es \mathcal{C}^k entonces en las derivadas hasta orden k no importa el orden de derivación pero sí importa (y mucho) el número de veces que se ha derivado respecto de cada variable. Para codificar esto es a veces cómoda la notación de los **multíndices**. Para una función de n variables independientes, un multíndice es una n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de enteros no negativos. Por ejemplo, a una función de cuatro variables $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ y al multíndice $\alpha = (0, 3, 0, 2)$ les corresponde la siguiente derivada parcial quinta:

(α) $^\alpha$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

($\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$)



Esta notación puede ser desventajosa para derivadas de orden pequeño, pero es útil para las de orden alto.

Propiedades (se incluye el caso $k = \infty$):

- (1) $f \equiv (f_1, \dots, f_m)$ es \mathcal{C}^k si y sólo si cada f_j es \mathcal{C}^k .
- (2) Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ son \mathcal{C}^k y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y cf son \mathcal{C}^k .
- (3) Todo polinomio es \mathcal{C}^∞ (sus derivadas de todos los órdenes existen y son polinomios).
- (4) Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ son \mathcal{C}^k , entonces fg es \mathcal{C}^k .
- (5) La compuesta de aplicaciones \mathcal{C}^k es \mathcal{C}^k .

Demostramos (5) por inducción sobre k . Es cierto para $k = 0$, en cuyo caso dice que la compuesta de continuas es continua. Sea ahora $k \geq 1$ y supongámoslo cierto para $k - 1$. Dadas f, g de clase \mathcal{C}^k , en particular son \mathcal{C}^1 y diferenciables en todo punto. La regla de la cadena nos da entonces la siguiente identidad entre funciones matriz:

$$D(g \circ f) \equiv [(Dg) \circ f] Df .$$

El primer factor $(Dg) \circ f$ es la compuesta de una función \mathcal{C}^k con una función matriz de clase \mathcal{C}^{k-1} , luego es \mathcal{C}^{k-1} por la hipótesis de inducción. El segundo factor Df es otra función matriz de clase \mathcal{C}^{k-1} . Si podemos argumentar que el producto de funciones matriz de clase \mathcal{C}^{k-1} es \mathcal{C}^{k-1} , tendremos $D(g \circ f) \in \mathcal{C}^{k-1}$, de donde $g \circ f \in \mathcal{C}^k$. La multiplicación de matrices es una función vectorial $\mathbb{R}^{sm} \times \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^{sn}$ cuyas sn componentes son polinomios cuadráticos, luego es una función \mathcal{C}^∞ . Si $A(x), B(x)$ son funciones matriz \mathcal{C}^{k-1} , entonces el producto $A(x)B(x)$ es la compuesta de $(A(x), B(x)) \in \mathcal{C}^{k-1}$ con la multiplicación, y por lo tanto es \mathcal{C}^{k-1} por la hipótesis de inducción. Esto completa la prueba de (5).

Vale decir lo mismo que para la clase \mathcal{C}^1 : una fórmula elemental define una aplicación \mathcal{C}^∞ en el abierto en el que no se anule ningún denominador, los radicandos y logaritmandos permanezcan positivos y las cantidades dentro de un valor absoluto o de la función sig no se anulen.

En particular, las dos fracciones del apartado 2.4 y $(x^2 + y^2) \operatorname{sen}(1/(x^2 + y^2))$ definen funciones \mathcal{C}^∞ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La función vista al final del apartado 2.6 es \mathcal{C}^∞ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, luego el origen $(0, 0)$ es el único punto donde presenta el fenómeno $f_{xy} \neq f_{yx}$.

El espacio $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de las matrices $n \times n$ puede identificarse con \mathbb{R}^{n^2} y entonces la función determinante $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio (de grado n) y es \mathcal{C}^∞ .

El conjunto $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ de las matrices invertibles $n \times n$ es la preimagen del abierto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por la función determinante, luego es un abierto de \mathbb{R}^{n^2} . En este abierto la función $A \mapsto A^{-1}$, que lleva cada matriz a su inversa, es \mathcal{C}^∞ porque cada una de sus n^2 funciones componentes es un cociente de dos polinomios y el denominador no se anula en el abierto.

2.8 Desarrollo cuadrático de Taylor

Definición 69. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $a \in U$. Sea $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ una función escalar. La **matriz hessiana** de f en a es el cuadrado formado por la derivadas segundas de f en a :

$$\operatorname{Hess}(f)_a = [f_{x_i x_j}(a)]_{n \times n} ,$$

que, por el teorema de Schwarz, es una matriz simétrica. La **forma hessiana** de f en a es

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Si f es un $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ y g es un $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ si f es al menos \mathcal{C}^2 .

Cartagena99

Demostración. Como todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes, la clase $o(\|h\|^k)$ es la misma para todas ellas. Igual ocurre con $O(\|h\|^k)$. Basta elegir una norma y demostrar el teorema para ella. En esta demostración $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea estándar en \mathbb{R}^n .

Fijamos una bola $B(a, r)$ contenida en el dominio de f . Dado $x = a + h \in B(a, r)$, el segmento rectilíneo $[a, x]$ está contenido en $\overline{B}(a, \|h\|)$ y a fortiori en $B(a, r)$. Esto permite definir la siguiente función escalar de una variable:

$$g(t) = f(a + th) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

Como f es al menos \mathcal{C}^2 , tenemos $g(t) \in \mathcal{C}^2[0, 1]$. El teorema de Taylor para funciones de una variable nos dice que existe un valor intermedio $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$g(1) - g(0) = (1 - 0) g'(0) + \frac{1}{2!} (1 - 0)^2 g''(\theta) ,$$

es decir $f(a + h) - f(a) = g'(0) + (1/2) g''(\theta) = (df)_a h + (1/2) g''(\theta)$. Calculamos:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} f(a + th) = \frac{d}{dt} \sum_{1 \leq i \leq n} h_i f_{x_i}(a + th) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} h_i \frac{d}{dt} f_{x_i}(a + th) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j f_{x_i x_j}(a + th) , \end{aligned}$$

luego $g''(\theta) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j f_{x_i x_j}(z)$, con $z = a + \theta h \in \overline{B}(a, \|h\|)$. En definitiva:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + (df)_a h + \frac{1}{2} \text{Hess}(f)_z(h) = \\ &= f(a) + (df)_a h + \frac{1}{2} \text{Hess}(f)_a(h) + R , \end{aligned}$$

donde $R = (1/2) \text{Hess}(f)_z(h) - (1/2) \text{Hess}(f)_a(h) = (1/2) \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j (f_{x_i x_j}(z) - f_{x_i x_j}(a))$. Por otra parte, como para todo i es $|h_i| \leq \|h\|$, tenemos $|h_i h_j| / \|h\|^2 \leq 1$ para todo i, j , luego:

$$\frac{|R|}{\|h\|^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 \cdot |f_{x_i x_j}(z) - f_{x_i x_j}(a)| .$$

Como $z \in \overline{B}(a, \|h\|)$, se tiene $z \rightarrow a$ cuando $h \rightarrow \mathbf{0}$ y, como cada $f_{x_i x_j}$ es continua:

$$f_{x_i x_j}(z) - f_{x_i x_j}(a) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow \mathbf{0} \quad , \quad \text{para todo } i, j ,$$

y deducimos que $R/\|h\|^2 \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow \mathbf{0}$, es decir $R = o(\|h\|^2)$.

Supongamos ahora que f es al menos \mathcal{C}^3 . Entonces $g(t)$ es \mathcal{C}^3 y, de nuevo por el teorema de Taylor para funciones de una variable, existe un valor intermedio $\tilde{\theta} \in (0, 1)$ tal que:

$$g(1) - g(0) = (1 - 0) g'(0) + \frac{1}{2!} (1 - 0)^2 g''(0) + \frac{1}{3!} (1 - 0)^3 g'''(\tilde{\theta}) .$$

Ahora calculamos $g'''(t) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} h_i h_j h_k f_{x_i x_j x_k}(a + th)$, y así:

$$f(a + h) - f(a) = (df)_a h + \frac{1}{2} \text{Hess}(f)_a(h) + \tilde{R} ,$$

donde $\tilde{R} = (1/6) \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} h_i h_j h_k f_{x_i x_j x_k}(\tilde{z})$ y $\tilde{z} = a + \tilde{\theta} h$ está en $\overline{B}(a, \|h\|)$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

2.9 Extremos locales

Definición 71. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $a \in U$. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en a . Decimos que a es un **punto crítico** de f si $(df)_a = 0$.

El punto a es un **máximo local** si existe un entorno V de a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in V$; es, además, **estricto** si V puede elegirse tal que $f(x) < f(a)$ para todo $x \in V \setminus \{a\}$.

El punto a es un **mínimo local** si existe un entorno V de a tal que $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in V$; es, además, **estricto** si V puede elegirse tal que $f(x) > f(a)$ para todo $x \in V \setminus \{a\}$.

Lema 72. Si f es diferenciable en a y $(df)_a \neq 0$, entonces a no es máximo local ni mínimo local de f .

Sean $f \in \mathcal{C}^2$ y $a \in U$ crítico. Si existe un vector v con $\text{Hess}(f)_a(v) > 0$ entonces a no es máximo local. Si existe un vector w tal que $\text{Hess}(f)_a(w) < 0$ entonces a no es mínimo local.

Demostración. Supongamos f diferenciable en a y que hay un vector v tal que el número $(df)_a(v)$ es no nulo. Consideramos la función escalar $g(t) = f(a + tv)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se tiene $g(0) = f(a)$ y $g'(0) = (df)_a(v) \neq 0$, digamos por ejemplo $g'(0) > 0$. Para ε suficientemente pequeño, es $g(t) > g(0)$ en $t \in (0, \varepsilon)$ y $g(t) < g(0)$ en $t \in (-\varepsilon, 0)$. Encontramos así puntos $x = a + tv$ arbitrariamente cercanos al punto a , algunos con $f(x) > f(a)$ y otros con $f(x) < f(a)$. Luego a no es ni máximo local ni mínimo local. El caso $g'(0) < 0$ es análogo.

Supongamos ahora $f \in \mathcal{C}^2$ y $(df)_a = 0$. Ahora es $g(0) = f(a)$ y $g'(0) = 0$ para la función $g(t)$ construida a partir de cualquier vector v . Pero si $\text{Hess}(f)_a(v) > 0$ entonces la correspondiente función g tiene $g''(0) > 0$, con lo cual $g(t) > g(0)$ para $t \neq 0$ pequeño (positivo o negativo). Los puntos $x = a + tv$, con $t \neq 0$ pequeño, son arbitrariamente cercanos al punto a y en ellos f vale más que en a , que no es, pues, máximo local. Del mismo modo, si un vector w cumple $\text{Hess}(f)_a(w) < 0$ entonces hay puntos $x = a + tw$ arbitrariamente cercanos al punto a en los que f vale menos que en a , que por lo tanto no es mínimo local. \square

Corolario 73. Si f es diferenciable en a , para que a sea máximo local o mínimo local es necesario (no suficiente) que sea punto crítico.

Sea f de clase \mathcal{C}^2 y $a \in U$ un punto crítico de f . Para que a sea máximo local es necesario (no suficiente) que $\text{Hess}(f)_a$ sea **semidefinida negativa**: $\text{Hess}(f)_a(v) \leq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Para que a sea mínimo local es necesario (no suficiente) que $\text{Hess}(f)_a$ sea **semidefinida positiva**: $\text{Hess}(f)_a(v) \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Si $\text{Hess}(f)_a$ es **indefinida** (degenerada o no) entonces a no es ni máximo local ni mínimo local.

La función $f(x, y) = x^2 + y^3$ proporciona un ejemplo en el que $\text{Hess}(f)_{(0,0)}$ es semidefinida positiva pero $(0, 0)$ no es mínimo local: el término cúbico y^3 no afecta a la diferencial ni a la hessiana, pero hace que para $y < 0$ sea $f(0, y) < f(0, 0)$, no importa lo pequeño que sea y .

Teorema 74. Sea f de clase \mathcal{C}^2 y $a \in U$ un punto crítico suyo.

Para que a sea un máximo local estricto es suficiente (no necesario) que $\text{Hess}(f)_a$ sea definida negativa. Para que a sea un mínimo local estricto es suficiente (no necesario) que $\text{Hess}(f)_a$ sea definida positiva.

Demostración. Escribamos $Q(\cdot) = \text{Hess}(f)_a(\cdot)$ y supongamos $Q(\cdot)$ definida positiva. La esfera

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Se cumple para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$, no solo para $\|v\| = 1$.

Cartagena99

Dado el desarrollo de Taylor $f(a+h) = f(a) + 0 + (1/2)Q(h) + R(h)$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|h\| < \delta$ entonces $|R(h)| \leq \varepsilon \|h\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} Q(h)$. Tomamos ε menor que $\lambda/2$, por ejemplo $\varepsilon = \lambda/10$, y el δ correspondiente. Entonces:

$$\|h\| < \delta \implies |R(h)| \leq (0'1)Q(h) \implies (0'4)Q(h) \leq (1/2)Q(h) + R(h) \leq (0'6)Q(h).$$

Sumando $f(a)$ a los tres miembros de esta última desigualdad y poniendo $x = a+h$, obtenemos:

$$f(a) + (0'4)Q(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + (0'6)Q(x-a), \quad \text{para } \|x-a\| < \delta.$$

Para $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ se tiene

$$Q(x-a) > 0 \quad \text{y} \quad f(x) \geq f(a) + (0'4)Q(x-a) > f(a),$$

luego a es mínimo local estricto de f .

Si $Q(\cdot)$ es definida negativa se procede de manera análoga. □

Ejemplo de que la condición no es necesaria: la hessiana en $(0,0)$ de la función $f(x,y) = x^2 + y^4$ es degenerada, sin embargo $(0,0)$ sí es mínimo local estricto de f .

2.10 Polinomios de Taylor

Definición 75. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C^k(U)$. Dado un punto $a \in U$, el **polinomio de Taylor de orden k de f en a** es el único polinomio de n variables $P_k(x) = P_k(x_1, \dots, x_n)$ que tiene grado $\leq k$ y cumple lo siguiente:

$$0 \leq |\alpha| \leq k \implies D^\alpha P_k(a) = D^\alpha f(a), \tag{23}$$

es decir, cada derivada en a de orden entre 0 y k da el mismo resultado para P_k que para f .

Se puede calcular el polinomio de Taylor por el **método de los coeficientes indeterminados**, o sea tratando a los coeficientes de P_k como incógnitas. Entonces (23) se convierte en un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (concretamente $\binom{n+k}{n}$, si f es una función escalar). La matriz de dicho sistema (cuadrada e invertible) es muy fea si como base del espacio de polinomios elegimos los productos de potencias de x_1, \dots, x_n . Es, en cambio, muy sencilla si como base del espacio de polinomios elegimos los productos de potencias de $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$. Esto quiere decir que planteamos:

$$P_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n},$$

y entonces la contribución a $D^\alpha P(a)$ de los términos $c_{\beta_1 \dots \beta_n} (x_1 - a_1)^{\beta_1} \cdots (x_n - a_n)^{\beta_n}$ con $\beta \neq \alpha$ es nula, con lo cual cada una de las condiciones (23) sólo contiene una incógnita y el sistema queda así:

$$0 \leq |\alpha| \leq k \implies \alpha_1! \cdots \alpha_n! c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = D^\alpha f(a).$$

Llegados a este punto se puede elegir entre *dos maneras equivalentes de escribir el polinomio de*

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

distintas expresiones que resultan de reordenar los factores de primer grado $x_i - a_i$ y repartir el coeficiente constante a partes iguales entre ellas. Ejemplos:

$$\begin{aligned} 7(x_1 - a_1)^2(x_5 - a_5) &= \\ &= \frac{7}{3}(x_1 - a_1)^2(x_5 - a_5) + \frac{7}{3}(x_1 - a_1)(x_5 - a_5)(x_1 - a_1) + \frac{7}{3}(x_5 - a_5)(x_1 - a_1)^2, \\ -11(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3) &= \sum_{\sigma \in S_3} \frac{-11}{3!} (x_{\sigma(1)} - a_{\sigma(1)}) (x_{\sigma(2)} - a_{\sigma(2)}) (x_{\sigma(3)} - a_{\sigma(3)}) . \end{aligned}$$

Supuesto $|\alpha| = s$, al reordenar los factores de primer grado de $(x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$ salen $\frac{s!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$ expresiones $(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_s} - a_{i_s})$ diferentes. Por tanto:

$$c(x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n} = \sum c \cdot \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{s!} (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_s} - a_{i_s}),$$

donde la suma se extiende a todas las posibles sucesiones i_1, \dots, i_s en las que el índice 1 aparece α_1 veces, el índice 2 aparece α_2 veces, ... y el índice n aparece α_n veces. Como en realidad el coeficiente c era igual a $D^\alpha f(a)/\alpha_1! \cdots \alpha_n!$, tenemos que:

$$c \cdot \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{s!} = \frac{1}{s!} D^\alpha f(a).$$

La segunda manera de escribir el polinomio de Taylor de orden k en a es, pues, la siguiente:

$$P_k(x) = \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n} f_{x_{i_1} \dots x_{i_s}}(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_s} - a_{i_s}). \quad (25)$$

Ambas fórmulas (24) y (25) son válidas tanto si f es escalar como si es vectorial $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Insistimos en que ambas definen el mismo polinomio (el único de grado k que cumple (23)) sólo que en (24) ningún monomio se repite mientras que en (25) cada monomio se repite tantas veces como distintas expresiones resultan de reordenar sus factores $x_i - a_i$.

Ejemplo. Si $k = 1$ las fórmulas (24) y (25) dan ambas el siguiente resultado:

$$P_1(x) = f(a) + (Df)_a(x - a),$$

y el hecho de que el correspondiente resto $R(x) = f(x) - P_1(x)$ sea un $o(\|x - a\|)$ equivale a la definición dada en el apartado 2.1 de que f sea diferenciable en el punto a .

Ejemplo. Sea $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$ función de dos variables y sea $a = (0, 5)$. Para cada múltiple $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, escribimos f_{α_1, α_2} para denotar $D^\alpha f(0, 5)$. Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 de f en a queda de la siguiente manera según la fórmula (24):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{0!0!} f_{0,0} + \frac{1}{1!0!} f_{1,0}x + \frac{1}{0!1!} f_{0,1}(y - 5) + \frac{1}{2!0!} f_{2,0}x^2 + \frac{1}{1!1!} f_{1,1}x(y - 5) + \frac{1}{0!2!} f_{0,2}(y - 5)^2 = \\ &= f_{0,0} + f_{1,0} \cdot x + f_{0,1} \cdot (y - 5) + \frac{1}{2} f_{2,0} \cdot x^2 + f_{1,1} \cdot x(y - 5) + \frac{1}{2} f_{0,2} \cdot (y - 5)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

mientras que según la fórmula (25) queda así:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

... Estas imágenes son las distintas expresiones que pueden salir como

Cartagena99

resultado de reordenar los factores x e $y - 5$ en $f_{1,1} \cdot x(y - 5)$, divididas por el número 2 de tales resultados.

Vemos que, cuando f es escalar, la expresión de $P_2(\mathbf{x})$ según (25) es:

$$f(a) + Df_a \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x - 0 \quad y - 5] \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,1} & f_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 5 \end{bmatrix},$$

es decir el polinomio del teorema 70 del apartado 2.8:

$$f(a) + Df_a(\mathbf{x} - a) + (1/2) (\mathbf{x} - a)^t \text{Hess}(f)_a (\mathbf{x} - a).$$

Igual para funciones escalares de n variables y cualquier otro punto a . El teorema 70 afirma, pues, que si $P_2(x)$ es el polinomio de la definición 75 con $k = 2$ entonces:

$$f(x) - P_2(x) = \begin{cases} o(\|x - a\|^2) & \text{si } f \in \mathcal{C}^2, \\ O(\|x - a\|^3) & \text{si } f \in \mathcal{C}^3. \end{cases}$$

Ejemplo. Sean de nuevo $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$ y $a = (0, 5)$. El polinomio de Taylor de orden 3 de f en a queda de la siguiente manera según la fórmula (24):

$$f_{0,0} + f_{1,0}x + f_{0,1}(y - 5) + \frac{1}{2}f_{2,0}x^2 + f_{1,1}x(y - 5) + \frac{1}{2}f_{0,2}(y - 5)^2 + \frac{1}{3!}f_{3,0}x^3 + \frac{1}{2!1!}f_{2,1}x^2(y - 5) + \frac{1}{1!2!}f_{1,2}x(y - 5)^2 + \frac{1}{0!3!}f_{0,3}(y - 5)^3,$$

es decir:

$$f_{0,0} + f_{1,0} \cdot x + f_{0,1} \cdot (y - 5) + \frac{1}{2}f_{2,0} \cdot x^2 + f_{1,1} \cdot x(y - 5) + \frac{1}{2}f_{0,2} \cdot (y - 5)^2 + \frac{1}{6}f_{3,0} \cdot x^3 + \frac{1}{2}f_{2,1} \cdot x^2(y - 5) + \frac{1}{2}f_{1,2} \cdot x(y - 5)^2 + \frac{1}{6}f_{0,3} \cdot (y - 5)^3, \quad (27)$$

mientras que según la fórmula (25) queda así:

$$f_{0,0} + f_{1,0} \cdot x + f_{0,1} \cdot (y - 5) + \frac{1}{2} \left(f_{2,0} \cdot x^2 + f_{1,1} \cdot x(y - 5) + f_{1,1} \cdot (y - 5)x + f_{0,2} \cdot (y - 5)^2 \right) + \frac{1}{6} \left(f_{xxx}(0, 5) \cdot x^3 + f_{yyy}(0, 5) \cdot (y - 5)^3 \right) + \frac{1}{6} \left(f_{xxy}(0, 5) \cdot x^2(y - 5) + f_{xyx}(0, 5) \cdot x(y - 5)x + f_{yxx}(0, 5) \cdot (y - 5)x^2 \right) + \frac{1}{6} \left(f_{xyy}(0, 5) \cdot x(y - 5)^2 + f_{yxy}(0, 5) \cdot (y - 5)x(y - 5) + f_{yyx}(0, 5) \cdot (y - 5)^2x \right),$$

exactamente igual que la fórmula (27), sólo que con el término $f_{1,1} \cdot x(y - 5)$ repartido en dos mitades iguales y cada uno de los términos $(1/2) f_{2,1} \cdot x^2(y - 5)$ y $(1/2) f_{1,2} \cdot x(y - 5)^2$ repartidos en tres partes iguales.

El siguiente teorema es un resultado útil. Demuestra que si f es una función escalar de n variables...

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

..., entonces la función $f(x)$ es un $O(\|x - a\|^k)$ cerca de a .

Cartagena99

El caso particular $k = 2, m = 1$ de la implicación $1. \implies 2.$ es el teorema 70 para $f \in \mathcal{C}^2$.

Demostración del teorema 76.

$1. \implies 2.$ Sea $h = x - a$. Definimos la función auxiliar de una variable $g(t) = f(a + th)$, consideramos el siguiente desarrollo de Taylor:

$$g(1) - g(0) = (1-0)g'(0) + \frac{1}{2!}(1-0)^2 g''(0) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}(1-0)^{k-1} g^{(k-1)}(0) + \frac{1}{k!}(1-0)^k g^{(k)}(\theta),$$

donde $0 < \theta < 1$, y desarrollamos:

$$g^{(s)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n} f_{x_{i_1} \dots x_{i_s}}(a + th) h_{i_1} \dots h_{i_s}, \quad \text{para } s = 1, \dots, k.$$

Entonces, teniendo en cuenta la fórmula (25) para P_k , conseguimos llegar a la expresión:

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} (f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(y) - f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(a)) h_{i_1} \dots h_{i_k}, \quad \text{con } y = a + \theta h,$$

de donde:

$$\frac{|R_k|}{\|h\|^k} \leq \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} |f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(y) - f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(a)| = o(1),$$

luego $R_k(x) = o(\|h\|^k)$.

$2. \implies 1.$ Sean $P(x)$ un polinomio de grado $\leq k$ que cumple 2. y $P_k(x)$ el polinomio de Taylor de orden k de f en a . Sabemos que $f(x) = P_k(x) + o(\|x - a\|^k)$ por la primera parte de la demostración, de donde $P(x) - P_k(x) = (P(x) - f(x)) + o(\|x - a\|^k)$. Luego $P(x)$ cumple 2. si y sólo si $P(x) - P_k(x)$ es un $o(\|x - a\|^k)$.

Hacemos de nuevo $h = x - a$ y utilizamos como base del espacio de polinomios los productos de potencias de h_1, \dots, h_n . Como $P(x) - P_k(x)$ tiene grado $\leq k$, hay una identidad:

$$P(x) - P_k(x) = Q_0 + Q_1(h) + Q_2(h) + \dots + Q_k(h),$$

donde Q_0 es una constante, $Q_1(h)$ es una forma lineal en h , $Q_2(h)$ es una forma cuadrática en h, \dots y $Q_k(h)$ es un polinomio homogéneo de grado k en h .

Haremos uso de lo siguiente, que es muy fácil de demostrar:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(h) \text{ homogénea de grado } s \text{ en } h \\ \varphi(h) = o(\|h\|^s) \end{array} \right\} \implies \varphi(h) \equiv 0. \quad (28)$$

Supongamos que $P(x)$ cumple 2. Empezamos razonando así:

$$Q_0 = (P(x) - P_k(x)) - (Q_1(h) + \dots + Q_k(h)) = o(\|h\|^k) + o(1) = o(1),$$

y, haciendo $s = 0$ en (28), deducimos $Q_0 = 0$. Pero entonces:

$$Q_1(h) = (P(x) - P_k(x)) - (Q_2(h) + \dots + Q_k(h)) = o(\|h\|^k) + o(\|h\|) = o(\|h\|),$$

y, haciendo $s = 1$ en (28), deducimos $Q_1(h) \equiv 0$. Este proceso continúa sin problema hasta

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$2! \dots k! \dots (k+1)!$

Cartagena99

donde $0 < \tilde{\theta} < 1$. Desarrollando cada $g^{(s)}(t) = \frac{d^s}{dt^s} f(a + th)$ y evaluando en $t = 0$ o en $t = \tilde{\theta}$, según proceda, obtenemos:

$$f(x) - P_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{k+1} \leq n} f_{x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}}}(z) h_{1_1} \dots h_{1_{k+1}}, \quad \text{con } z = a + \tilde{\theta}h,$$

y es muy fácil ver que $f(x) - P_k(x) = O(\|h\|^{k+1}) = O(\|x - a\|^{k+1})$, para x cercano al punto a . \square

La utilidad de la parte 1. \implies 2. del teorema 76 es obvia: generaliza y refuerza el teorema 70 del apartado 2.8. Vamos a mostrar, con un ejemplo, que la parte 2. \implies 1. es también muy útil.

Consideramos la función $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{1 - y^2}$, que es C^∞ cerca de $(0, 0)$. El cálculo elemental de las derivadas parciales sucesivas de un cociente da lugar a expresiones sumamente largas (si no lo crees, prueba a hallar las derivadas sucesivas de $\tan t = \sin t / \cos t$). Sin embargo, con muy pocos cálculos vamos a ver que se tienen los siguientes valores:

$$f(0, 0) = 1, \quad f_{xy}(0, 0) = 1, \quad f_{yy}(0, 0) = 2, \quad f_{xxyy}(0, 0) = 2, \quad f_{xyyy}(0, 0) = 6, \quad f_{yyyy}(0, 0) = 24,$$

y todas las demás derivadas de órdenes de 0 a 5 de f en $(x, y) = (0, 0)$ son nulas. Empezamos por recordar el desarrollo $e^t = 1 + t + (1/2)t^2 + O(|t|^3)$, que nos da:

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + O(|xy|^3) = 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + O(\|(x, y)\|^6).$$

Recordamos también que $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + O(|t|^3)$, de donde:

$$\frac{1}{1-y^2} = 1 + y^2 + y^4 + O(|y|^6) = 1 + y^2 + y^4 + O(\|(x, y)\|^6).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left[1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + O(\|(x, y)\|^6) \right] \cdot \left[1 + y^2 + y^4 + O(\|(x, y)\|^6) \right] = \\ &= 1 + xy + y^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + y^4 + O(\|(x, y)\|^6) = \\ &= 1 + xy + y^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + y^4 + o(\|(x, y)\|^5). \end{aligned}$$

Entonces la parte 2. \implies 1. del teorema 76 nos dice que el polinomio de Taylor de orden 5 de f en $(0, 0)$ es el siguiente:

$$P_5(x, y) = 1 + xy + y^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + y^4,$$

y ahora sabemos que los valores en $(0, 0)$ de las derivadas de f de órdenes de 0 a 5 son los arriba indicados, sin necesidad de haber calculado ninguna derivada.

Aviso. La hipótesis $f \in C^k$ en el enunciado del teorema 76 es muy importante. Esto ya se ve

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

to cual f y j ni siquiera existen en ese punto.

Cartagena99

3 Funciones inversas e implícitas

3.1 Sucesiones de Cauchy

Definición 77. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k = k(\varepsilon)$ tal que:

$$n, m \geq k \implies d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Esta definición generaliza a cualquier espacio métrico la noción de sucesión de Cauchy de números reales (que es el caso $X = \mathbb{R}$). Recordemos que, en tal caso particular, la utilidad que tiene es que podamos decir si una sucesión de números es convergente o no *sin necesidad de saber cuál es el límite*. Nos hace el mismo servicio en cada espacio de dimensión finita.

Proposición 78. Una sucesión en \mathbb{R}^n es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Demostración. Si $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la sucesión de las i -ésimas coordenadas $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots$ es de Cauchy en \mathbb{R} , luego convergente a un número a_i . Se sigue que $\{x_k\}$ converge a (a_1, \dots, a_n) . El recíproco es aún más fácil de demostrar. \square

Definición 79. Un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X tiene un límite en X .

Son completos: \mathbb{R}^n , cualquier espacio métrico compacto.

Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es completo (con la distancia inducida de \mathbb{R}^n) si y sólo si es un cerrado; esto proporciona infinidad de ejemplos de espacios completos, muchos de ellos no compactos; también proporciona infinidad de ejemplos de espacios no completos.

3.2 Aplicaciones de Lipschitz

Definición 80. Una aplicación entre espacios métricos $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es **de Lipschitz** si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leq K d_X(x, x') \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, x' \in X.$$

Las K que cumplen esta condición son las **constantes de Lipschitz** de f .

Toda aplicación Lipschitz es continua pero, por ejemplo, $f(x) \equiv \sqrt[3]{x}$ es continua y no Lipschitz. El siguiente resultado es útil para obtener una constante de Lipschitz a partir de una cota de las derivadas primeras.

Proposición 81. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase \mathcal{C}^1 . Dadas normas cualesquiera en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , consideremos la norma de operador en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ correspondiente. Si $\|(df)_x\| \leq K$ para todo $x \in U$, entonces f es de Lipschitz con constante K .

Demostración. Sean $x, x' \in U$ y pongamos $h = x' - x$. Al ser U convexo, todo el segmento $[x, x'] = \{x + th : t \in [0, 1]\}$ está contenido en U y tenemos la siguiente igualdad:

$$f(x') - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + th) dt = \int_0^1 (Df_{x+th})h dt.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.3 Aplicaciones contractivas

Definición 82. Una **contracción** o **aplicación contractiva** es una aplicación f que cumple las dos condiciones siguientes, siendo ambas igual de importantes:

1. f es de Lipschitz y admite una constante de Lipschitz $K < 1$.
2. Dominio y codominio coinciden, distancias incluidas: $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$.

Teorema 83. (Teorema de la aplicación contractiva). Si $f : X \rightarrow X$ es contractiva y X es completo, entonces f tiene un único **punto fijo**, es decir que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Demostración.

Existencia. Empecemos con cualquier punto $a \in X$ y construyamos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por las condiciones: $x_1 = f(a)$ y $x_{n+1} = f(x_n)$, es decir $x_n = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ factores}}(a)$.

Sea $K < 1$ una constante de Lipschitz para f . Se tiene:

$$d(x_1, x_2) = d(f(a), f(x_1)) \leq K d(a, x_1),$$

del mismo modo $d(x_2, x_3) \leq K d(x_1, x_2) \leq K^2 d(a, x_1)$. En general $d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(a, x_1)$ para todo n . Estimemos la distancia entre dos términos de la sucesión no necesariamente consecutivos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \\ &\leq (K^n + K^{n+1} + \dots + K^{n+k-1}) d(a, x_1) \leq d(a, x_1) \sum_{j=n}^{\infty} K^j = d(a, x_1) \frac{K^n}{1-K}. \end{aligned}$$

Vemos que $d(x_n, x_{n+k})$ desciende a cero como $\text{cte} \cdot K^n$, luego $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y, como X es completo por hipótesis, hay un punto $x \in X$ con $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

La aplicación f , siendo contractiva, es continua. Entonces de $x_n \rightarrow x$ se deduce $f(x_n) \rightarrow f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pero esto último es $f(x) = \lim x_{n+1}$ y, como $\{x_{n+1}\}$ es una cola de $\{x_n\}$, se tiene $\lim x_{n+1} = \lim x_n = x$. Finalmente $f(x) = x$, lo que prueba la existencia de punto fijo.

Unicidad. Sea $x' \in X$ "otro" punto fijo: $f(x') = x'$. Razonamos así:

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq K d(x, x'),$$

de donde $(1-K) d(x, x') \leq 0$ pero, como es $1-K > 0$, se deduce $d(x, x') \leq 0$, es decir $d(x, x') = 0$ y por lo tanto $x' = x$. \square

Es interesante que esta demostración es *constructiva*: el punto fijo se aproxima, a velocidad exponencial, por los puntos $x_n = f^n(a)$.

Es importante que el teorema funcione en cualquier espacio métrico, a condición de que sea completo. Aquí lo vamos a aplicar al caso de una bola cerrada $X = \overline{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, pero en otros contextos se lo utiliza con espacios de dimensión infinita.

Concentrándonos en el caso de dimensión finita n , el teorema nos proporciona una clase muy

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.4 Aplicaciones coercivas

Definición 84. Una función entre espacios métricos $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es **coerciva** si existe una constante $\lambda > 0$ tal que $d_Y(f(x'), f(x)) \geq \lambda d_X(x', x)$ para cualesquiera $x, x' \in X$. Las constantes λ que cumplen esto se llaman **constantes de coercividad** de f .

La coercividad es una propiedad *estrictamente más fuerte* que la inyectividad. Toda aplicación coerciva es inyectiva:

$$x \neq x' \implies d(x, x') > 0 \implies d_Y(f(x), f(x')) \geq \lambda d(x, x') > 0 \implies f(x) \neq f(x'),$$

pero, por ejemplo, la exponencial $f(x) = e^x$ es una función inyectiva pero no coerciva.

Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva y veamos qué más tiene que cumplir para ser coerciva. Una vez que es inyectiva, la función f induce una “biyección a la imagen”

$$f_{\text{im}} : X \rightarrow f(X) \quad , \quad x \mapsto f(x) \quad ,$$

y también tenemos en el conjunto imagen la distancia $d_{f(X)}$ inducida por la d_Y ; entonces f es coerciva, con constante de coercividad λ , si y sólo si la “inversa desde la imagen”

$$f_{\text{im}}^{-1} : (f(X), d_{f(X)}) \rightarrow (X, d_X) \quad , \quad f(x) \mapsto x \quad ,$$

es de Lipschitz con constante de Lipschitz $1/\lambda$. La exponencial $y = e^x$ no es coerciva porque su inversa desde la imagen $(0, +\infty) \ni y \mapsto \log y$ no es de Lipschitz.

Teorema 85. Supongamos elegida una norma en \mathbb{R}^n y sea $g : \overline{B}(\mathbf{0}, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de Lipschitz con constante de Lipschitz $\varepsilon < 1$ y tal que $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Entonces la función $f(x) \equiv x + g(x)$ tiene las dos propiedades siguientes:

(a) f es inyectiva en $\overline{B}(\mathbf{0}, r)$.

(b) $f(B(\mathbf{0}, r)) \supset B(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r)$.

Demostración.

Propiedad (a). En realidad f es mejor que inyectiva: fácilmente se ve que es coerciva con constante de coercividad $1 - \varepsilon$.

Propiedad (b). Queremos ver que si y_0 es lo bastante cercano a $\mathbf{0}$ entonces el sistema $f(x) = y_0$ tiene solución $x_0 \in B(\mathbf{0}, r)$ (necesariamente única, por la inyectividad). Lo primero que hacemos es convertir ese sistema en uno de punto fijo:

$$f(x) = y_0 \iff x + g(x) = y_0 \iff x = -g(x) + y_0 \quad ,$$

es decir, queremos que la función $F_{y_0}(x) \equiv -g(x) + y_0$ tenga un punto fijo $x_0 \in B(\mathbf{0}, r)$. Ahora aplicamos la observación hecha al final del apartado 3.3: como $-g$ es de Lipschitz con constante ε , al sumarle el vector constante y_0 resulta F_{y_0} que admite la misma constante de Lipschitz. En vista del teorema 83, si F_{y_0} lleva la bola $\overline{B}(\mathbf{0}, r)$ dentro de sí misma entonces tendrá un punto fijo $x_0 \in \overline{B}(\mathbf{0}, r)$. De hecho se cumple algo un poco más fuerte:

$$\text{Para } y_0 \text{ cercano a } \mathbf{0}, \text{ se cumple } F_{y_0}(\overline{B}(\mathbf{0}, r)) \subseteq B(\mathbf{0}, r) \quad . \quad (29)$$

Entonces tendremos que el punto fijo $x_0 = F_{y_0}(x_0)$ está en la bola abierta $B(\mathbf{0}, r)$ y habremos conseguido un $x_0 \in B(\mathbf{0}, r)$ tal que $y_0 = f(x_0)$. Para probar (29) hacemos una estimación:

$$z \in \overline{B}(\mathbf{0}, r) \implies \|F_{y_0}(z)\| = \|-g(z) + y_0\| \leq \|g(\mathbf{0}) - g(z)\| + \|y_0\| \leq \varepsilon r + \|y_0\| \quad ,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ningún cambio en la demostración.

Cartagena99

3.5 Teorema de la función inversa: espacios normados

Teorema 86. (Teorema de la función inversa). Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sean $U_0 \subseteq \mathbb{V}$ un abierto y $f : U_0 \rightarrow \mathbb{V}$ función de clase \mathcal{C}^1 . Si en un punto $x^0 \in U_0$ la diferencial $L = (df)_{x^0}$ es un elemento invertible de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, es decir que L es lineal acotada, biyectiva y con inversa L^{-1} también acotada, entonces existen abiertos $U \ni x^0$ y $V \ni y^0 = f(x^0)$ tales que f es biyectiva de U a V . Además, en ese caso la inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es diferenciable en y^0 y su diferencial en y^0 es la que predice la regla de la cadena.

Varios comentarios antes de pasar a la demostración.

(1) La condición $f \in \mathcal{C}^1$ significa que f es diferenciable en todo punto de U_0 y que la aplicación

$$U_0 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \quad , \quad x \longmapsto (df)_x \quad ,$$

es continua cuando en $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ ponemos la norma de operador asociada a la de \mathbb{V} .

(2) En el caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, las dimensiones de salida y de llegada son iguales. Esto es imprescindible para que la matriz jacobiana sea *cuadrada*, condición sin la cual no puede ser invertible.

(3) Si ya hemos probado que la inversa f^{-1} existe y es diferenciable en $y^0 = f(x^0)$, entonces es correcto aplicar la regla de la cadena a las identidades

$$x \equiv (f^{-1} \circ f)(x) \quad , \quad y \equiv (f \circ f^{-1})(y) \quad ,$$

y deducir las siguientes igualdades:

$$\text{id}_{\mathbb{V}} = (d(\text{id}_{\mathbb{V}}))_{x^0} = (d(f^{-1}))_{y^0} \circ (df)_{x^0} \quad , \quad \text{id}_{\mathbb{V}} = (d(\text{id}_{\mathbb{V}}))_{y^0} = (df)_{x^0} \circ (d(f^{-1}))_{y^0} \quad ,$$

o sea, para que f^{-1} sea diferenciable en y^0 es necesario que $(df)_{x^0}$ sea invertible, y en tal caso

$$\boxed{(d(f^{-1}))_{y^0} = [(df)_{x^0}]^{-1}} \tag{30}$$

De este modo la regla de la cadena predice un único valor posible para la diferencial de f^{-1} en $y^0 = f(x^0)$, caso de que f^{-1} exista y sea diferenciable en y^0 .

(4) Es de señalar que a veces f^{-1} puede existir cerca de y^0 aunque $(df)_{x^0}$ no sea invertible, pero en tal caso f^{-1} definitivamente no es diferenciable en y^0 . Por ejemplo $f(x) \equiv x^3$ tiene $f'(0) = 0$ y la inversa $f^{-1}(y) \equiv \sqrt[3]{y}$ existe pero no es diferenciable en $y = f(0) = 0$.

(5) De las dos funciones f y f^{-1} una puede ser elemental y la otra no. Por ejemplo $f(x) \equiv x + e^x$, que es biyectiva $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y con derivada siempre positiva, es elemental pero su inversa no lo es.

(6) La hipótesis “ f de clase \mathcal{C}^1 ” del teorema no se puede debilitar a “ f diferenciable en todo punto”. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \text{sen} \frac{1}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable en todo punto de \mathbb{R} y tiene $f'(0) = 1$, pero cambia infinitas veces de creciente a decreciente en cualquier entorno de $x = 0$. Esto le impide ser inyectiva en tales entornos.

Demostración del teorema 86.

Caso cero: $x^0 = u^0 = 0$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}$, $(df)_0 \equiv \text{id}_{\mathbb{V}}$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$x \in D(0, r) \implies \|(dx)_x\| \leq \epsilon.$$



Como las bolas son convexas, la siguiente estimación:

$$\|g(x') - g(x)\| \leq \varepsilon \|x' - x\| \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, x' \in \overline{B(\mathbf{0}, r)} ,$$

está garantizada en el caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. También para \mathbb{V} general porque, aunque no lo vamos a probar, la proposición 81 del apartado 3.2 es válida en todos los espacios de Banach.

El teorema 85 se aplica directamente y nos dice que f es inyectiva en $\overline{B(\mathbf{0}, r)}$ y que la imagen inyectiva $f(B(\mathbf{0}, r))$ contiene a la bola abierta $B(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r)$. Definimos los abiertos:

$$V = B(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r) \quad , \quad U = \{x \in B(\mathbf{0}, r) : f(x) \in V\} = (f|_{B(\mathbf{0}, r)})^{-1}(V) .$$

y es obvio, por la construcción de U y V , que f lleva U biyectivamente a V y que ambos abiertos son entornos de $\mathbf{0}$. Tenemos, pues, una inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$.

Como $f(x) = x + g(x)$ es coerciva con constante de coercividad $1 - \varepsilon$ en $B(x^0, r)$, la inversa f^{-1} es de Lipschitz con constante de Lipschitz $\frac{1}{1 - \varepsilon}$ y en particular $\|x\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \|y\|$ para $y \in V$ y $x = f^{-1}(y)$. Veamos que f^{-1} es diferenciable en $y = \mathbf{0}$ con $(d(f^{-1}))_{\mathbf{0}} = \text{id}_{\mathbb{V}}$. En primer lugar:

$$\begin{aligned} y \neq \mathbf{0} \implies 0 &\leq \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\mathbf{0}) - \text{id}_{\mathbb{V}}(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|f^{-1}(y) - \mathbf{0} - y\|}{\|y\|} = \frac{\|x - f(x)\|}{\|y\|} = \\ &= \frac{\| -g(x)\|}{\|x\|} \frac{\|x\|}{\|y\|} \leq \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \frac{1}{1 - \varepsilon} . \end{aligned}$$

En segundo lugar, cuando $y \rightarrow \mathbf{0}$ se tiene $x = f^{-1}(y) \rightarrow \mathbf{0}$ y $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$ por (31), luego

$$\lim_{y \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\mathbf{0}) - \text{id}_{\mathbb{V}}(y)\|}{\|y\|} = 0 ,$$

y, por definición, la inversa f^{-1} es diferenciable en $y = \mathbf{0}$ con $(d(f^{-1}))_{\mathbf{0}} = \text{id}_{\mathbb{V}}$.

Caso general: x^0 e $y^0 = f(x^0)$ puntos cualesquiera, $L = (df)_{x^0}$ lineal acotada y biyectiva, con la inversa L^{-1} también acotada.

Para cualquier vector constante $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ definimos la **traslación** $T_{\mathbf{c}}(x) = x + \mathbf{c}$, aplicación afín cuya diferencial en todo punto es $\text{id}_{\mathbb{V}}$. Utilizamos esto para modificar f ligeramente, de manera que volvamos al caso cero. En primer lugar, la función

$$h \longmapsto \bar{f}(h) \equiv f(x^0 + h) - y^0 ,$$

es \mathcal{C}^1 y cumple que $\bar{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. De $\bar{f} \equiv T_{-y^0} \circ f \circ T_{x^0}$ sale que $(d\bar{f})_{\mathbf{0}} = \text{id}_{\mathbb{V}} \circ L \circ \text{id}_{\mathbb{V}} = L$, luego \bar{f} todavía no está en la hipótesis del caso cero. Lo solucionamos definiendo $\tilde{f}(h) \equiv L^{-1} \circ \bar{f}(h)$, con lo cual $\tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $(d\tilde{f})_{\mathbf{0}} = \text{id}_{\mathbb{V}}$. Aplicando el caso cero a \tilde{f} , encontramos $r > 0$ y $0 < \varepsilon < 1$ tales que \tilde{f} es inyectiva en $B(\mathbf{0}, r)$ y la imagen inyectiva $\tilde{f}(B(\mathbf{0}, r))$ contiene a $B(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r)$. Si ahora recuperamos f a partir de \tilde{f} : $f(x) \equiv y^0 + L \circ \tilde{f}(x - x^0)$, vemos de inmediato que f es inyectiva en $B(x^0, r)$ y que:

$$f(B(x^0, r)) \supset y^0 + L(B(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r)) .$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

tenemos que $x^0 \in U$ y que f es biyectiva de U a V .

Si la función inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es diferenciable en y^0 , ya hemos comentado que su diferencial en y^0 sólo puede ser L^{-1} , debido a la regla de la cadena. Para demostrar tal diferenciabilidad, expresemos f^{-1} en términos de $\tilde{f}^{-1}(h)$ que, por el caso cero, sabemos es diferenciable en $h = \mathbf{0}$. A partir de $y = f(x) = y^0 + L \circ \tilde{f}(x - x^0)$, una sencilla manipulación nos da:

$$f^{-1}(y) = x = x^0 + \tilde{f}^{-1}(L^{-1}(y - y^0)),$$

identidad que puede expresarse de la manera siguiente:

$$f^{-1} \equiv T_{x^0} \circ \tilde{f}^{-1} \circ L^{-1} \circ T_{-y^0}.$$

Como además $(L^{-1} \circ T_{-y^0})(y^0) = \mathbf{0}$, punto en el que \tilde{f}^{-1} es diferenciable con diferencial id_V , la regla de la cadena nos dice que f^{-1} es diferenciable en y^0 con la siguiente diferencial:

$$(d(f^{-1}))_{y^0} = \text{id}_V \circ (d(\tilde{f}^{-1}))_{\mathbf{0}} \circ L^{-1} \circ \text{id}_V = \text{id}_V \circ \text{id}_V \cdot L^{-1} \circ \text{id}_V = L^{-1},$$

o sea f^{-1} es diferenciable en y^0 con $(d(f^{-1}))_{y^0} = [(df)_{x^0}]^{-1}$, tal como predice la regla de la cadena. \square

Bien entendido que en esta demostración ha quedado pendiente un detalle: cuando V es un espacio de Banach de dimensión infinita, se necesita probar el análogo para V de la proposición 81 del apartado 3.2.

La demostración, por otra parte, está completa cuando $V = \mathbb{R}^n$. Es de destacar que es válida para *cualquier* norma que se utilice en \mathbb{R}^n . Ahora concretamos al caso de norma euclídea estándar $\|\cdot\|_2$ y vamos a escribir las fórmulas con la matriz jacobiana $A = Df_{x_0}$ en representación de la diferencial de f en x_0 . Entonces el abierto V_0 , que hemos definido durante la demostración, admite la descripción $V_0 = A \cdot B_{\text{estándar}}(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r)$ y es un **elipsoide** abierto centrado en $\mathbf{0}$. Luego el abierto $V = y^0 + V_0$ es un elipsoide abierto centrado en y^0 . Así, la demostración que hemos hecho aquí proporciona un elipsoide abierto V en el que existe la inversa f^{-1} , la cual además toma todos sus valores dentro de la bola $B_{\text{estándar}}(x_0, r)$.

3.6 Inversas locales

Definición 87. Dado un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **regular en** $x^0 \in U_0$ si es de clase C^1 en algún entorno de x^0 y la diferencial $(df)_{x^0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene el máximo rango que puede tener, que es $\min(n, m)$. Decimos que f es **regular** si cumple esto en todo punto de U_0 .

En este apartado nos centramos en el caso $n = m$. Entonces f es regular si es C^1 y todas sus jacobianas son matrices invertibles. En esa situación el teorema de la función inversa proporciona, para cada x del dominio de f , una bola $B(x, r)$, en la que f es inyectiva, y un elipsoide V centrado en $f(x)$ y totalmente cubierto por la imagen $f(B(x, r))$.

Definición 88. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es **abierto** si para todo abierto $U \subseteq X$ la imagen directa $f(U)$ es un abierto de Y .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Demostración. Sea $x^0 \in E$. Existe un entorno $U_1 \subseteq U_0$ de x^0 en el cual f es de clase \mathcal{C}^1 . Como la función $U_1 \ni x \mapsto \det Df_x$ es continua, el conjunto $U_2 = \{x \in U_1 : \det Df_x \neq 0\}$ es un entorno de x^0 contenido en E . Esto indica que x_0 es interior a E y, como x^0 era cualquier punto de E , el conjunto E es un abierto (puede ser vacío).

Tomamos un subconjunto abierto $U \subseteq E$, la imagen directa $f(U)$ y un punto $y^0 \in f(U)$. Elegimos una preimagen, o sea un $a \in U$ tal que $y^0 = f(a)$. Como $a \in E$, es $\det Df_a \neq 0$ y el teorema de las funciones inversas proporciona un abierto $U^a \subseteq U$ y un elipsoide abierto V , centrado en y^0 , tales que f es biyectiva de U^a a V . Entonces

$$y^0 = f(a) \in V = f(U^a) \subseteq f(U),$$

o sea $y^0 \in V \subseteq f(U)$, luego el punto y^0 es interior a $f(U)$. Al ser todo punto $y^0 \in f(U)$ interior, la imagen $f(U)$ es un abierto. \square

Definición 90. Sean $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las **inversas locales de f** son las funciones $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow U$, donde $U \subseteq U_0$ es cualquier abierto tal que $f(U)$ es abierto y $f|_U$ es inyectiva.

Proposición 91. Sean $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si f es regular, entonces las inversas locales de f heredan el grado de suavidad de f : si f es \mathcal{C}^1 entonces ellas son \mathcal{C}^1 , si f es \mathcal{C}^k entonces ellas son \mathcal{C}^k , si f es \mathcal{C}^∞ entonces ellas son \mathcal{C}^∞ .

Demostración. Sea $U \subseteq U_0$ cualquier abierto en el que f es regular e inyectiva. Por la proposición 89 sabemos que $V = f(U)$ es un abierto. Además f es biyectiva de U a V . Denotemos por $g : V \rightarrow U$ la correspondiente inversa local de f . Sabemos, por el teorema 86, que g es diferenciable en todo punto de V . A fortiori g es continua.

La fórmula (30) del apartado 3.5 da lugar a: $(Dg)_{f(x)} = [Df_x]^{-1}$ para todo $x \in U$, que también puede ponerse en la siguiente forma:

$$Dg_y = [(Df)_{g(y)}]^{-1}, \quad \text{para todo } y \in V. \quad (32)$$

Sea ahora $\text{inv} : \text{GL}(\mathbb{R}, n) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}, n)$ la función dada por $A \mapsto A^{-1}$. En el apartado 2.7 del capítulo 2 vimos que $\text{inv} \in \mathcal{C}^\infty$. La fórmula (32) es lo mismo que la siguiente identidad entre funciones con valores matrices, es decir funciones $V \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$Dg \equiv \text{inv} \circ Df \circ g. \quad (33)$$

Si f es \mathcal{C}^1 entonces Df es continua y los tres factores en el lado derecho de (33) son continuos, con lo cual la función Dg es continua y g es \mathcal{C}^1 .

Sea ahora f de clase \mathcal{C}^2 . En particular es \mathcal{C}^1 y ya hemos visto que g es también \mathcal{C}^1 . Pero entonces los tres factores en el lado derecho de (33) son \mathcal{C}^1 , luego la función Dg es \mathcal{C}^1 y por lo tanto g es \mathcal{C}^2 .

Este proceso continúa indefinidamente y prueba, para todo k , que si f es \mathcal{C}^k entonces g es \mathcal{C}^k . Si f es \mathcal{C}^∞ entonces es \mathcal{C}^k para todo k , con lo cual g es \mathcal{C}^k para todo k y por lo tanto es \mathcal{C}^∞ . \square

Atención. Insistimos en que la condición $\det Df \neq 0$ es imprescindible para que la suavidad de f la hereden sus inversas locales. Recordemos que $f(x) = x^3$ es \mathcal{C}^∞ pero $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ ni siquiera es derivable en $y = 0 = f(0)$ por culpa de la anulación de $f'(0)$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$x \in D(x, \epsilon) \implies \|x - (Df_x^{-1})\| \leq \epsilon.$

Cartagena99

Si utilizamos la norma $\|\cdot\|_2$ para vectores de \mathbb{R}^n entonces $V = y^0 + A \cdot B(\mathbf{0}, (1 - \varepsilon)r)$ es un elipsoide, pero el cálculo de la norma de la matriz variable $A^{-1}(Df - A)$ es muy difícil porque involucra cálculo de autovalores. Si utilizamos la norma $\|\cdot\|_1$ o la $\|\cdot\|_\infty$ para vectores de \mathbb{R}^n el cálculo de $\|A^{-1}(Df - A)\|$ se hace llevadero, pero entonces el entorno V es un *poliedro* algunas de cuyas esquinas pueden ser muy afiladas: ganamos por un lado y perdemos por otro.

En este apartado damos un método alternativo para obtener una bola euclídea $B(x^0, r)$, centrada en x^0 y en la que f es inyectiva, y otra centrada en y^0 en la que está definida la inversa local. Además tendremos una descripción satisfactoria de toda la imagen $f(B(x^0, r))$.

Definición 92. Sea A una matriz real $n \times n$. Decimos que A es **coerciva** si existe una constante $\lambda > 0$ tal que:

$$\text{para todo } v \in \mathbb{R}^n \quad v^t A v \geq \lambda \|v\|_2^2. \quad (34)$$

Las constantes λ que cumplen (34) se llaman **constantes de coercividad de A** .

Este concepto tiene interés en el contexto actual debido al siguiente resultado.

Lema 93. Sean dados un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y un subconjunto convexo $B \subset U_0$. Si existen una matriz ortogonal $P \in O(n)$ y una constante $\lambda > 0$ tales que para todo $z \in B$ la matriz $(Df)_z P$ es coerciva con constante de coercividad λ , entonces $f|_B$ es coerciva con esa misma constante de coercividad.

Demostración. Supongamos primero que $P = I_n$, es decir:

$$\text{para todo } z \in B \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^n, \quad v^t Df_z v \geq \lambda \|v\|_2^2. \quad (35)$$

Dados $x, x' \in B$ con $x \neq x'$, el segmento $[x, x']$ está contenido en B y por lo tanto en U_0 , luego tenemos definida para $t \in [0, 1]$ la siguiente función escalar:

$$\varphi(t) = (x' - x) \cdot f(x + t(x' - x)) = (x' - x)^t f(x + t(x' - x)),$$

que es diferenciable con $\varphi'(t) = (x' - x)^t Df_{x+t(x'-x)}(x' - x)$. Existe un $\theta \in (0, 1)$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0) \varphi'(\theta) = \varphi'(\theta)$, igualdad que se desarrolla en la siguiente:

$$(x' - x) \cdot (f(x') - f(x)) = (x' - x)^t Df_z (x' - x) \quad , \quad \text{con } z = x + \theta(x' - x) \in E,$$

que junto con (35) nos da:

$$(x' - x) \cdot (f(x') - f(x)) \geq \lambda \|x' - x\|_2^2.$$

Utilizando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz, llegamos a:

$$\|x' - x\|_2 \|f(x') - f(x)\|_2 \geq (x' - x) \cdot (f(x') - f(x)) \geq \lambda \|x' - x\|_2^2,$$

y dividiendo por $\|x' - x\|_2$ deducimos $\|f(x') - f(x)\|_2 \geq \lambda \|x' - x\|_2$. Como esta última desigualdad se cumple de manera trivial en el caso $x = x'$, la función $f|_B$ es coerciva con λ como constante de coercividad.

Para el caso de P general consideramos el abierto $\tilde{U} = P^t \cdot U_0$, que contiene al convexo $\tilde{B} = P^t \cdot B$, y la función:

$$\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \tilde{f}(x) = f(Px)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Nota. Si A es coerciva entonces $Av = \mathbf{0} \implies v = \mathbf{0}$, luego una tal A es forzosamente invertible. Se sigue que una función f en las hipótesis del lema 93 es regular en cada punto $z \in B$.

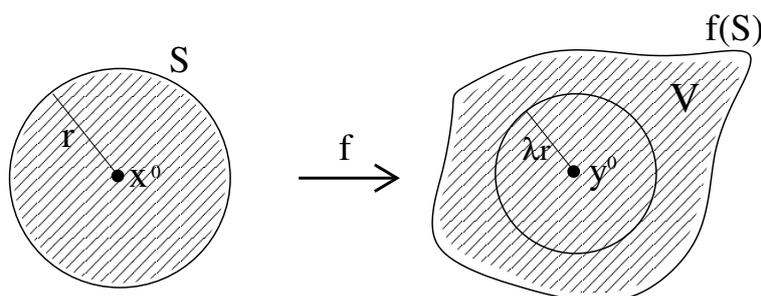
Teorema 94. Sean $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ función \mathcal{C}^1 . Dado un punto $x^0 \in U_0$, supongamos que existen una matriz ortogonal $P \in O(n)$, una bola $\overline{B}(x^0, r) \subset U_0$ y una constante $\lambda > 0$ tales que:

$$\text{para todo } x \in \overline{B}(x^0, r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^n, \quad v^t (Df_x) P v \geq \lambda \|v\|_2^2. \quad (36)$$

Sean, además $y^0 = f(x^0)$ el punto imagen y $S = \{x : \|x - x^0\|_2 = r\}$ la esfera euclídea de centro x^0 y radio r . Entonces:

$$B(y^0, \lambda r) \subseteq f(B(x^0, r)) = V,$$

donde V es la componente conexa por caminos del abierto $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ que contiene al punto y^0 .



Demostración.

Paso preliminar. El conjunto $f(S)$ es compacto y por lo tanto cerrado, luego $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ es un abierto y sus componentes conexas por caminos son abiertos.

Aplicamos el lema 93 con $B = \overline{B}(x^0, r)$ y deducimos que $f|_B$ es coerciva con constante de coercividad λ . En particular, f es inyectiva en B .

La bola $B = \overline{B}(x^0, r)$ es unión *disjunta* de $B(x^0, r)$ y S . Al ser f inyectiva en B , las imágenes $f(B(x^0, r))$ y $f(S)$ son disjuntas. De manera equivalente:

$$f(B(x^0, r)) \subset \mathbb{R}^n \setminus f(S).$$

Como a bola $B(x^0, r)$ es conexa por caminos, resulta que $f(B(x^0, r))$ es un subconjunto conexo por caminos de $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ conteniendo a $y^0 = f(x^0)$. Por lo tanto, se tiene $y^0 \in f(B(x^0, r)) \subseteq V$.

Paso 1. La imagen $f(B(x^0, r))$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

Como estamos haciendo una prueba nueva del teorema de la función inversa, no podemos hacer uso de la proposición 89, de la que hemos dada una demostración basada en dicho teorema.

Definición 95. La **distancia a un conjunto no vacío** E es la función $\text{dist}(\cdot, E)$ que se define de la manera siguiente:

$$\text{dist}(p, E) = \inf \{ \|p - q\|_2 : q \in E \}. \quad (37)$$

Es fácil ver que esta función es de Lipschitz con constante de Lipschitz 1, luego continua.

Sea $x \in B(x^0, r)$. Como $f(S)$ es compacto, el ínfimo que define $\text{dist}(f(x), f(S))$ es un mínimo y

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

en punto arbitrario suyo.

Cartagena99

Sea $y \in U^{f(x)}$. La fórmula (38), que estamos intentando demostrar, dice que una solución x' de la ecuación $y = f(x')$ se halla en la bola $B(x^0, r)$. Busquemos un x' que sea una **solución aproximada**, de manera que el “error” $\|y - f(x')\|_2$ sea lo menor posible. Con ese propósito, definimos la función:

$$\varphi_y : \overline{B}(x^0, r) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \varphi_y(x') = \|y - f(x')\|_2 ,$$

que es continua y alcanza su mínimo en algún punto $a \in \overline{B}(x^0, r)$. Por definición de $U^{f(x)}$, el punto y está más cerca de $f(x)$ que de cualquier punto $f(x'')$ con $x'' \in S$, es decir $\varphi_y(x) < \varphi_y(x'')$ para todo $x'' \in S$, y por lo tanto el mínimo de φ_y *no se alcanza en la esfera S* . Aunque se necesitaba la compacidad de $\overline{B}(x^0, r)$ para asegurar que φ_y alcanza un mínimo, ha resultado que dicho mínimo *se alcanza en el interior*, o sea en la bola abierta:

$$a \in \overline{B}(x^0, r) \setminus S = B(x^0, r) .$$

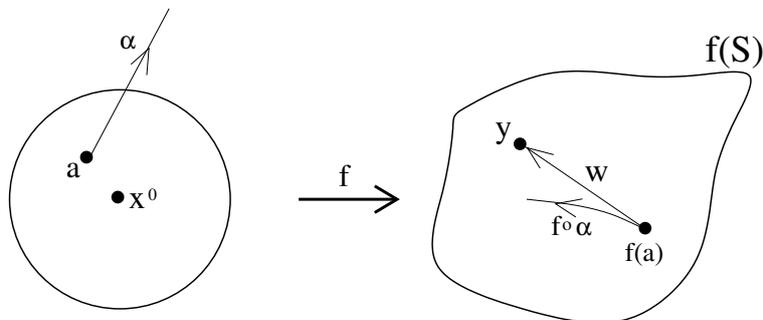
Ahora probaremos que dicho valor mínimo es nulo, es decir que $\|y - f(a)\|_2 = 0$ y la solución aproximada a es una solución de verdad: $f(a) = y$. Lo vamos a probar por reducción al absurdo: suponemos que $\|y - f(a)\|_2 > 0$ y deducimos una contradicción.

Suponemos, pues, que el vector $w = y - f(a)$ es distinto del $\mathbf{0}$. La matriz Df_a , siendo coerciva, es invertible. Existe, pues, un vector v tal que $Df_a v = w$ y definimos el camino $\alpha(t) = a + tv$. Consideremos la función $\varphi_y \circ \alpha(t) = \varphi_y(a + tv)$ y calculemos su derivada. Para ello recordemos que $g(\cdot) = \|\cdot\|_2$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, con las siguientes derivadas:

$$\text{para cualesquiera } z, w \in \mathbb{R}^n \text{ con } z \neq \mathbf{0} \quad , \quad D_w g(z) = \frac{z \cdot w}{\|z\|_2} .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_y \circ \alpha(t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(y - f \circ \alpha(t)) = \frac{[y - f(\alpha(0))] \cdot (-(f \circ \alpha)'(0))}{\|y - f(\alpha(0))\|_2} = \\ &= \frac{(y - f(a)) \cdot (-Df_a v)}{\|y - f(a)\|_2} = \frac{w \cdot (-w)}{\|w\|_2} = -\|w\|_2 < 0 , \end{aligned}$$



Gracias a que a está en la bola abierta, para t pequeño se cumple $\alpha(t) \in B(x^0, r)$ (esto podría ser falso si a hubiese estado en la esfera S) y además se tiene:

$$\varphi_y(\alpha(t)) < \varphi_y(\alpha(0)) = \varphi_y(a) .$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Paso 3. Se completa la demostración.

El conjunto $f(B(x^0, r))$ es no vacío y es a la vez abierto relativo y cerrado relativo de V . Como V es conexo por caminos por definición, tiene que ser $f(B(x^0, r)) = V$.

Como f es coerciva en $\bar{B}(x^0, r)$ con constante de coercividad λ , en particular:

$$x'' \in S \implies \|f(x'') - y^0\|_2 = \|f(x'') - f(x^0)\|_2 \geq \lambda \|x'' - x^0\|_2 = \lambda r,$$

por lo tanto $f(S) \cap B(y^0, \lambda r) = \emptyset$, que equivale a $B(y^0, \lambda r) \subset \mathbb{R}^n \setminus f(S)$. Al ser $B(y^0, \lambda r)$ un subconjunto conexo por caminos de $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ y conteniendo a y^0 , tiene ser parte de la componente conexa por caminos que contiene a y^0 , es decir

$$B(y^0, \lambda r) \subseteq V = f(B(x^0, r)).$$

□

Para validar el teorema 94 como una versión del teorema de la función inversa, falta probar que dada una matriz invertible A siempre hay matrices ortogonales P tales que AP es coerciva. Antes de demostrar eso en general veamos, con varios ejemplos, un procedimiento práctico para encontrar P y λ , primero para una matriz constante y luego para la matriz variable Df .

Toda matriz cuadrada A se descompone $A = M + N$, con $M = (1/2)(A + A^t)$ la **parte simétrica** y $N = (1/2)(A - A^t)$ la **parte antisimétrica**. Además $v^t N v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, luego se tiene la identidad $v^t A v \equiv v^t M v$ y la desigualdad (34) dice que la parte simétrica de A es definida positiva con autovalores acotados inferiormente por λ . Por lo tanto, el valor óptimo (el más grande) de λ que cumple (34) es el mínimo de los autovalores de la parte simétrica de A . En la búsqueda de λ y P que cumplan (36), vamos a seguir tres ideas:

1. Nos vamos a conformar con un valor no óptimo de λ , pero que se pueda hallar sin calcular autovalores.
2. Una condición suficiente para que A sea coerciva es que las entradas de su diagonal sean positivas y, en cierto modo, mayores que las otras entradas: que en la forma cuadrática $Q(v) = v^t A v$ los cuadrados “dominen” a los términos mixtos.
3. Si $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ es un permutación de la base estándar, y si $P = [\pm e_{i_1} \mid \pm e_{i_2} \mid \dots \mid \pm e_{i_n}]$, entonces la operación $A \mapsto AP$ consiste en aplicar la misma permutación a las columnas de A y multiplicar algunas por -1 .

Ejemplo 1. Vamos a usar las dos primeras ideas con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Calculamos $v^t A v$, confrontando los cuadrados con el término mixto:

$$[x \ y] A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 5y^2 + 4xy \geq x^2 + 5y^2 - |4xy|.$$

Se saca más partido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz $2|ab| \leq a^2 + b^2$ intercalando $\frac{1}{c}$ como sigue:

$$2|ab| = 2 \left| (ca) \frac{b}{c} \right| \geq c^2 a^2 + \frac{b^2}{c^2},$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

(092)

y el resultado tiene coeficientes positivos (si bien uno de ellos es bastante pequeño). Aceptamos la estimación $x^2 + 5y^2 + 4xy \geq 0'061(x^2 + y^2)$, es decir $v^t A v \geq 0'061 \|v\|_2^2$. Esto proporciona la constante de coercividad $\lambda = 0'061$.

La parte simétrica de A es $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, con autovalor mínimo $3 - 2\sqrt{2} = 0'1716$ que, por supuesto, es más grande. Pero nos conformamos con el valor $0'061$ hallado sin autovalores.

Ejemplo 2. Vamos a usar la tercera idea con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Las entradas de la diagonal son pequeñas y las otras grandes. Intercambiamos las columnas multiplicando por $P = [\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1]$:

$$AP = A[\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

y estimamos:

$$v^t (AP) v = 2x^2 + 3y^2 + 2xy \geq 2x^2 + 3y^2 - 2|xy| \geq (2-1)x^2 + (3-1)y^2 = x^2 + 2y^2.$$

Llegamos a $v^t (AP) v \geq \|v\|_2^2$ y aceptamos la constante de coercividad $\lambda = 1$ para AP .

La matriz A , antes de multiplicar por P , no es coerciva porque su parte simétrica $\begin{bmatrix} 1 & 2'5 \\ 2'5 & 1 \end{bmatrix}$ es indefinida. Luego en este ejemplo es inevitable utilizar una matriz $P \neq I_2$.

Ejemplo 3. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ probamos con $P = [\mathbf{e}_2 | -\mathbf{e}_1]$:

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

y estimamos:

$$v^t (AP) v = x^2 + 5y^2 + xy \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(5 - \frac{1}{2}\right)y^2 = 0'5x^2 + 4'5y^2,$$

y $\lambda = 0'5$ es una constante de coercividad para AP .

Ejemplo 4. Veamos ahora un ejemplo donde A es una jacobiana, o sea una matriz variable:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 \operatorname{sen} x + e^{-y} \\ x + 3y + y^2 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^0 = f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Probemos con $r = 1/2$ y $P = I_2$. Calculamos y estimamos:

$$\begin{aligned} v^t (Df) v &= 5(\cos x) v_1^2 + (1 - e^{-y}) v_1 v_2 + (3 + 2y) v_2^2 \geq \\ &\geq \left[5 \cos x - \frac{|1 - e^{-y}|}{2} \right] v_1^2 + \left[3 + 2y - \frac{|1 - e^{-y}|}{2} \right] v_2^2. \end{aligned}$$

Si $\|(x, y)\| \leq 1/2$ entonces $|x|, |y| \leq 1/2$. Ahora bien:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Tomando el menor de los dos coeficientes:

$$\|(x, y)\| \leq 1/2 \implies v^t Df_{(x,y)} v \geq 1'67 \|v\|_2^2.$$

Para $(x, y) \in B((0, 0), 1/2)$ la matriz $Df_{(x,y)}$ es coerciva con constante de coercividad 1'67. Dada la circunferencia $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = (1/2)^2\}$, el teorema 94 nos dice que f es inyectiva en $U = B((0, 0), 1/2)$ y que el dominio de definición de la inversa local $(f|_U)^{-1}$ (la componente conexa V de $\mathbb{R}^2 \setminus f(S)$ con $(1, 0) \in V$) contiene a la bola euclídea $B((1, 0), (1'67)(1/2)) = B((1, 0), 0'835)$.

Terminamos este apartado demostrando que para toda A invertible hay una matriz ortogonal P tal que AP es coerciva.

Teorema 96. (Descomposición polar). Si A es una matriz real invertible entonces existen una matriz simétrica definida positiva S y una matriz ortogonal Q tales que $A = SQ$.

Tomando $P = Q^t$ tenemos que $AP = S$ es simétrica definida positiva, por lo tanto coerciva.

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de autovectores de $A^t A$, con autovalores respectivos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Tenemos $A^t A u_j = \lambda_j u_j$ para $j = 1, \dots, n$. Los vectores imagen $w_j = A u_j$ resultan ser ortogonales dos a dos:

$$i \neq j \implies (A u_i) \cdot (A u_j) = (A u_i)^t (A u_j) = u_i^t A^t A u_j = u_i^t (\lambda_j u_j) = \lambda_j (u_i \cdot u_j) = 0.$$

Nota. Esto es un poco milagroso: la transformación $v \mapsto Av$ no conserva el ángulo recto en general, pero hay ciertos vectores ortonormales u_1, \dots, u_n cuyas imágenes sí son ortogonales. De hecho los w_j son los semiejes principales del elipsoide $A \cdot B(\mathbf{0}, 1)$, imagen de la bola euclídea unidad por la transformación $v \mapsto Av$.

El cálculo análogo con $i = j$ nos da que $w_j \cdot w_j = \lambda_j$, por lo tanto $\|w_j\|_2 = \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \dots, n$. Los vectores ortonormales $v_j = w_j / \|w_j\|_2 = w_j / \sqrt{\lambda_j}$ son tales que:

$$A u_j = \sqrt{\lambda_j} v_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

lo que matricialmente se expresa así:

$$A [u_1 | u_2 | \dots | u_n] = [v_1 | v_2 | \dots | v_n] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix},$$

es decir $AQ_2 = Q_1 D$ donde $Q_1, Q_2 \in O(n)$ y D es una matriz diagonal definida positiva. Despejamos:

$$A = Q_1 D Q_2^t = (Q_1 D Q_1^t) (Q_1 Q_2^t) = S Q,$$

donde $S = Q_1 D Q_1^t$ es simétrica definida positiva y $Q = Q_1 Q_2^t$ es ortogonal. \square

3.8 Consideraciones globales¹

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

1. Contenido de una primera lectura.

Cartagena99

Inyectividad en dimensión=1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un **intervalo** y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ regular. Esto significa que f' no se anula nunca en I y, como es continua, tiene que ser positiva en todo I o negativa en todo I . Luego f ha de ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Esto hace que f sea inyectiva en todo el intervalo I , no importa cuán largo sea éste.

Suprayectividad en dimensión=1. Una función regular $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ puede no ser suprayectiva. Un ejemplo es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, regular en todo \mathbb{R} pero con imagen $J = f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ acotada. La función está lejos de ser suprayectiva porque no tiene ningún valor $y \leq -1$ ni tampoco $y \geq 1$.

En vista de eso, nos hacemos la siguiente pregunta: dada $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, función de clase \mathcal{C}^1 pero no necesariamente regular ¿cuáles son los intervalos más largos en los que está definida una inversa local diferenciable?

Fijamos un y^0 que admite una preimagen $x^0 \in I$ en la que f es regular, es decir $f(x^0) = y^0$ y $f'(x^0) \neq 0$. Definamos a como el mínimo valor tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in (a, x^0)$ (se admite aquí la posibilidad $a = -\infty$). De igual modo definamos b como el máximo valor tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in (x^0, b)$ (se admite la posibilidad $b = +\infty$). Entonces $(a, b) \subseteq I$ es un intervalo abierto con las siguientes propiedades:

- (1) contiene a x^0 ,
- (2) f es regular en él,
- (3) cualquier otro intervalo con las dos primeras propiedades es subconjunto suyo,

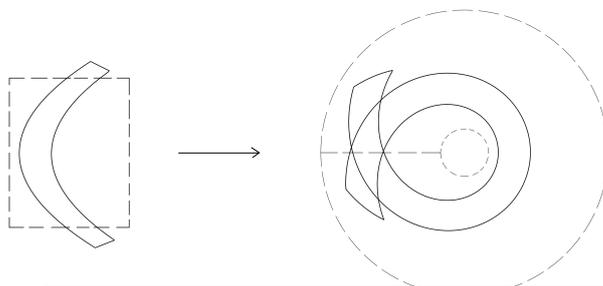
en este sentido es el **máximo** intervalo con las dos primeras propiedades. La imagen $J = f((a, b))$ es un intervalo abierto conteniendo a y^0 y es el máximo dominio, conteniendo a y^0 , de una inversa local diferenciable $f^{-1}(y)$ que lleve $y^0 \mapsto x^0$. Dicho de otra manera, tenemos $f^{-1}(y) : J \rightarrow (a, b)$ que es **“la más amplia inversa local diferenciable que lleva $y^0 \mapsto x^0$ ”**. Cualquier otra inversa local diferenciable que lleve $y^0 \mapsto x^0$ es una restricción de ésta.

Inyectividad en dimensión ≥ 2 . Una función regular f de un abierto de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n puede no ser globalmente inyectiva porque **“tiene sitio para dar la vuelta”**. Es lo que hace, por ejemplo, la *función cambio a polares*:

$$CP : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad CP(r, \theta) \equiv (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad ,$$

que es regular porque tiene $\det D(CP) = r$, positivo en todo punto de su dominio.

La siguiente figura muestra cómo la imagen por CP de una región en forma de letra C (y de altura mayor que 2π) “da la vuelta y se solapa consigo misma”



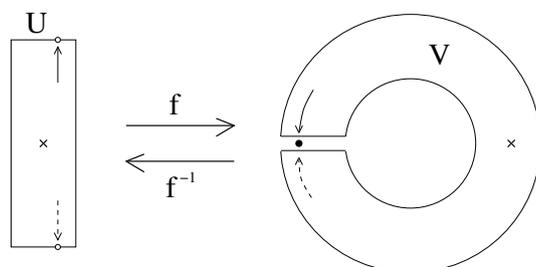
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

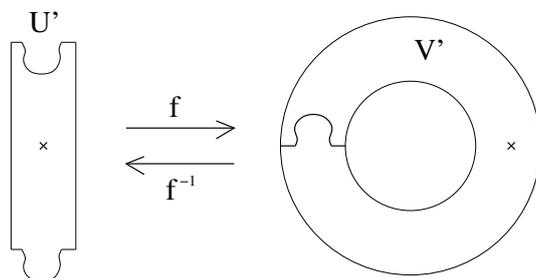
Cartagena99

acotada $f(\mathbb{R}^2) = B(\mathbf{0}, 1)$. En vista de esto, nos hacemos la misma pregunta que para dimensión 1: dado un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 pero no necesariamente regular ¿cuáles son los dominios más grandes en los que está definida una inversa local diferenciable?

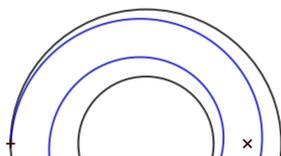
Más en concreto, planteamos esa cuestión para $f(r, \theta) = (r \cos(2\theta), r \sin(2\theta))$, $(r, \theta) \in (1, 2) \times \mathbb{R}$. El conjunto imagen de f es la corona circular $E = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. En esta corona tomamos el punto $y^0 = (3/2, 0)$ y fijamos la preimagen $x^0 = (3/2, 0)$. Como f es biyectiva del rectángulo abierto $U = (1, 2) \times (-\pi/2, \pi/2) \ni x^0$ al abierto $V = E \setminus (-2, -1) \times \{0\} \ni y^0$, hay una inversa local $V \rightarrow U$. La siguiente figura muestra la situación, con x^0, y^0 representados por aspas.



Se ve que es imposible extender f^{-1} a ningún conjunto mayor que V : si se la intenta extender a un punto $a \in (1, 2) \times \{0\}$ la extensión es discontinua en a , porque f^{-1} tiene límites distintos en a según nos acerquemos desde arriba (en la figura, flecha curvada continua) o desde abajo (flecha curvada a trazos). Esto significa que V , resultado de “hacerle un corte” a E a lo largo de un segmento, es un dominio **maximal** de definición de una inversa local. Pero hay infinitos otros dominios que contienen a y^0 y presentan esa misma maximalidad: los que resultan de hacerle un corte a E a lo largo de cualquier arco que vaya de la circunferencia interior a la exterior sin pasar por y^0 .



Conviene advertir, asimismo, que el arco que une las dos circunferencias puede dar muchas vueltas (lo único que se le exige es que esquive al punto y^0). En tal caso el dominio que resulta es “delgado y arrollado” y su imagen por la correspondiente inversa local puede ser muy alta (es decir, tener una proyección muy larga sobre el eje vertical, que es el de la variable θ).

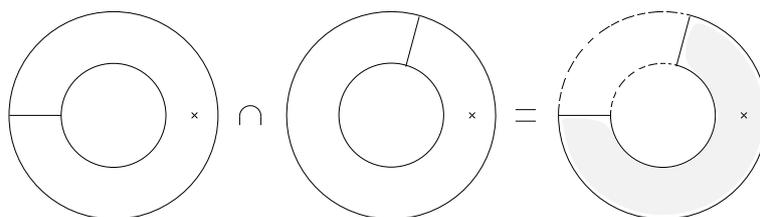


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Dados dos dominios maximales distintos $V_1, V_2 \ni y^0$, las correspondientes inversas locales son distintas pero coinciden en la componente conexa por caminos de $V_1 \cap V_2$ que contiene a y^0 . La siguiente figura muestra dicha componente conexa en línea continua y la otra componente, en la que las dos inversas locales difieren, en línea a trazos.



Este fenómeno es un caso particular del resultado que enunciamos a continuación.

Proposición 97. Sea f regular y V un abierto **conexo por caminos** en el que están definidas dos inversas locales g_1, g_2 de f . Si $g_1(y^0) = g_2(y^0)$ para algún $y^0 \in V$, entonces $g_1 \equiv g_2$ en V .

Demostración. El conjunto $Y = \{y \in V : g_1(y) = g_2(y)\}$ es no vacío, pues al menos $y^0 \in Y$. Es, además, muy fácil ver que es un *cerrado relativo* de V .

Dado $y \in Y$, el punto $a = g_1(y) = g_2(y)$ es tal que $f(a) = y$. Existen entornos U^a de a y U^y de y tales que f es biyectiva de U^a a U^y . Entonces $U^y \cap V$ es un entorno de y en el que están definidas g_1 y g_2 . Como g_1, g_2 son ambas continuas (inversas locales de una función regular) y llevan $y \mapsto a$, existe una bola $B(y, r) \subseteq U^y \cap V$ tal que

$$g_1(B(y, r)) \subseteq U^a \quad \text{y} \quad g_2(B(y, r)) \subseteq U^a,$$

de donde para todo $z \in B(y, r)$ tenemos:

$$g_1(z) = (\text{el único } x \in U^a \text{ tal que } f(x) = z) = g_2(z),$$

es decir que $g_1(z) = g_2(z)$ para todo $z \in B(y, r)$. Esto significa que $B(y, r) \subseteq Y$, luego el punto y es interior a Y . Como y era cualquier punto de Y , resulta que Y es abierto.

El conjunto Y es, pues, cerrado relativo y abierto relativo de V , además de no vacío. Como por hipótesis V es conexo por caminos, tenemos $Y = V$ que equivale a $g_1 \equiv g_2$ en V . \square

Para dar una inversa local lo más seguro es especificar un dominio U , en el que f sea inyectiva, y pedir que la inversa local tome sus valores en U , o sea definirla como $f|_U^{-1}$. Por ejemplo, la función elemental $\arcsen y$ es, para $-1 < y < 1$, la inversa local de $\sen x$ que llega a $(-\pi/2, \pi/2)$. La proposición 97 nos da un método alternativo de especificar una inversa local: dada f regular, dados un abierto *conexo por caminos* V y un punto $y^0 = f(x_0) \in V$, la inversa local g de f con $g(y^0) = x^0$ **o bien es única o bien no existe**. Así, para especificar una inversa local en un dominio conexo por caminos basta con especificar su valor en un punto concreto (y asegurarse de que existe).

El resto de este apartado se dedica a ejemplos de inversas locales maximales en dimensión=1.

Ejemplo 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Tiene dos inversas locales diferenciables maximales, una definida en $(0, +\infty)$ y la otra definida en $(-\infty, 0)$. Las demás inversas locales diferenciables son restricciones de una de esas dos. También hay una inversa global $f^{-1}(y)$, continua pero **no** diferenciable en $y = 0$.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x$. Tiene un único mínimo en $x = -1$, siendo $f(-1) = -1/e$,

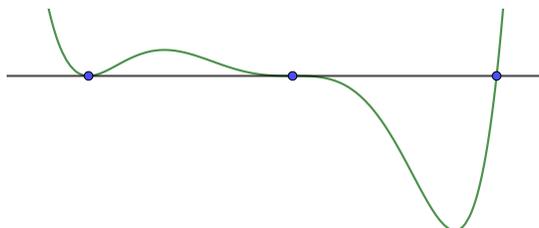
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Elegido un valor $y^0 \in (-1/e, 0)$, por ejemplo $y^0 = -1/4$, tiene dos preimágenes $x_1 < -1 < x_2$. La inversa local más amplia que lleva $y^0 \mapsto x_1$ está definida en $(-\frac{1}{e}, 0) = f(\{x < -1\})$; cualquier otra inversa local con $y^0 \mapsto x_1$ es restricción de ésta. La inversa local más amplia que lleva $y^0 \mapsto x_2$ está definida en $(-\frac{1}{e}, +\infty) = f(\{x > -1\})$, siendo restricción suya cualquier otra inversa local que lleve $y^0 \mapsto x_2$. No hay ninguna inversa local $f^{-1}(y)$ definida en un entorno de $y = -1/e$.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = 7 + x^2(x - 1)^3(x - 2)$, un polinomio de grado 6. Las soluciones de $f(x) = 7$ son 0, 1, 2. La siguiente figura muestra el grafo $y = f(x)$, la recta horizontal $y = 7$ y los puntos $(1, 7)$, $(2, 7)$, $(3, 7)$.



Como $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$, la función tiene un mínimo local estricto en $x = 0$. En entornos pequeños de $x = 0$ la función no es ni inyectiva ni suprayectiva a ningún entorno de $y = 7$; de hecho, la imagen por f de un entorno pequeño de $x = 0$ es $[7, 7 + \delta)$ con $\delta > 0$ pequeño. Por lo tanto **no existe** ninguna inversa local definida en un entorno de $y = 7$ y que lleve $7 \mapsto 0$.

Como $f'(1) = 0 = f''(1)$ y $f'''(1) < 0$, la función es estrictamente decreciente en un entorno U de $x = 1$, luego biyectiva de U a un entorno V de $y = 7$. Existe una inversa local $f^{-1}(y)$ definida para $y \in V$, caracterizada por llevar $7 \mapsto 1$, pero que **no es diferenciable en $y = 7$** .

Como $f'(2) > 0$ la función es regular en $x = 2$. Es biyectiva de un entorno de $x = 2$ a un entorno de $y = 7$ y la correspondiente inversa local (caracterizada por llevar $7 \mapsto 2$) es C^∞ .

Ejemplo 4. La función $f(x) = \sin x$ no es regular en todo \mathbb{R} pero lo es en el abierto E que resulta de quitarle a \mathbb{R} los ceros de la derivada $f'(x) = \cos x$, es decir:

$$E = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \right) = \dots \cup \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right) \cup \dots$$

En cada uno de estos intervalos la función $\sin x$ es, además de regular, biyectiva al intervalo $(-1, 1)$. Por lo tanto hay definidas en $(-1, 1)$ infinitas inversas locales diferenciables máximas:

$$f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \left(\frac{(2s-1)\pi}{2}, \frac{(2s+1)\pi}{2} \right), \quad s \in \mathbb{Z}. \quad (39)$$

Estas inversas locales de $\sin x$ son funciones distintas dos a dos, porque sus intervalos de llegada son disjuntos dos a dos (además, unas son crecientes y otras decrecientes).

La función elemental $\arcsen y$ es, para $-1 < y < 1$, la única inversa local de $\sin x$ que lleva 0 a 0. Del mismo modo $\pi - \arcsen y$ puede definirse de dos maneras: como la inversa local de $\sin x$ que toma valores en $(\pi/2, 3\pi/2)$ o como la inversa local que lleva $0 \mapsto \pi$. Igual para las otras inversas locales de $\sin x$.

Ejemplo 6. Para la función $f(x) = e^x \cdot \sin(x - (\pi/4))$ calculamos:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Al contrario que el ejemplo 5, las imágenes de esos intervalos son distintas entre sí:

$$f\left((s\pi, (s+1)\pi)\right) = \begin{cases} \left(-e^{s\pi}, e^{(s+1)\pi}\right) & \text{si } s \text{ es impar,} \\ \left(-e^{(s+1)\pi}, e^{s\pi}\right) & \text{si } s \text{ es par,} \end{cases}$$

de hecho son intervalos minúsculos cuando s es negativo y gigantes cuando s es positivo. El único punto común a todos esos intervalos imagen es $y = 0$. Cada valor $y \neq 0$ pertenece a una infinidad de esos intervalos, pero no a todos. La inversa local maximal $f^{-1}(y)$ que lleva $0 \mapsto \pi/4$ es la que toma sus valores en $(0, \pi)$ y está definida para $y \in (-e^\pi, 1)$. La inversa local maximal $f^{-1}(y)$ que lleva $0 \mapsto 5\pi/4$ es la que toma sus valores en $(\pi, 2\pi)$ y está definida para $y \in (-e^\pi, e^{2\pi})$. Al tomar valores en intervalos disjuntos $(0, \pi) \cap (\pi, 2\pi) = \emptyset$, esas dos inversas **no valen lo mismo** en ningún punto del dominio común $y \in (-e^\pi, 1) = (-e^\pi, 1) \cap (-e^\pi, e^{2\pi})$.

3.9 Funciones implícitas

Sean x, y variables escalares o vectoriales. Una función φ está dada *implícitamente* si se define su valor $y = \varphi(x)$ como solución de una ecuación o sistema de ecuaciones en las variables x, y . Si se cumplen unas condiciones de “bondad” de dicho sistema, esperamos **despejar tantas variables como ecuaciones tenga el sistema**.

Empezamos con tres ejemplos.

Primer ejemplo. La ecuación $e^x - y^3 = 0$ define implícitamente la función $y = e^{x/3}$. El conjunto de las soluciones $\{(x, y) : e^x - y^3 = 0\}$ es el grafo $\{(x, e^{x/3}) : x \in \mathbb{R}\}$ de la función implícita.

Segundo ejemplo. Esperamos que el sistema

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } x_1 + \frac{1}{3} x_4^2 - e^{x_3} x_5 &= -1 \\ 6x_1 x_2 x_3^2 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

al tener dos ecuaciones, nos permita despejar dos variables. En efecto, podemos resolver (40) despejando las dos últimas variables:

$$\begin{aligned} x_4 &= -6x_1 x_2 x_3^2 && \equiv x_4(x_1, x_2, x_3), \\ x_5 &= e^{-x_3} (1 + \text{sen } x_1 + 12x_1^2 x_2^2 x_3^4) && \equiv x_5(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

que quedan expresadas como funciones de las tres primeras, las cuales a su vez quedan libres (en este ejemplo) de recorrer todo \mathbb{R}^3 . Definiendo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{bmatrix} \text{sen } x_1 + \frac{1}{3} x_4^2 - e^{x_3} x_5 \\ 6x_1 x_2 x_3^2 + x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

el sistema (40) equivale a la ecuación vectorial $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = b$ y la solución que le hemos dado es:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = b \iff (x_4, x_5) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (41)$$

donde φ es la siguiente función vectorial:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Tercer ejemplo. La ecuación $xe^x + y \operatorname{sen} y - z^2 = 2$ se puede resolver despejando, por ejemplo, la tercera variable. Salen dos opciones para el valor de z :

$$z_+(x, y) = \sqrt{xe^x + y \operatorname{sen} y - 2} \quad , \quad z_-(x, y) = -\sqrt{xe^x + y \operatorname{sen} y - 2} \quad ,$$

y ahora (x, y) no es libre de recorrer todo \mathbb{R}^2 , sino sólo el subconjunto:

$$C = \{(x, y) : xe^x + y \operatorname{sen} y \geq 2\} \quad .$$

Definiendo $f(x, y, z) = xe^x + y \operatorname{sen} y + z^2$, tenemos una preimagen que es *unión de dos grafos*:

$$f^{-1}(\{2\}) = \{(x, y, z_+(x, y)) : (x, y) \in C\} \cup \{(x, y, z_-(x, y)) : (x, y) \in C\} \quad .$$

El planteamiento general es el siguiente. Escribimos:

$$\mathbb{R}^{k+m} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m\} \quad .$$

Partimos de un abierto $E_0 \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ y una función $f(x, y) : E_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ al menos de clase \mathcal{C}^1 . Dado un punto $a \in E_0$, tomamos $b = f(a)$ y queremos describir la parte de la preimagen $f^{-1}(\{b\})$ que se encuentra cerca de a , es decir el conjunto

$$E \cap f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E : f(x) = b\} \quad ,$$

para cierto entorno E de a en \mathbb{R}^{k+m} . El teorema de las funciones implícitas da una condición suficiente (no necesaria) para que, eligiendo E adecuadamente, la parte $E \cap f^{-1}(\{b\})$ sea el grafo de una función diferenciable $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^h$ definida en un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$:

$$\{(x, y) \in E : f(x, y) = b\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in W\} \quad .$$

Dos comentarios:

(1) Insistimos en que no se intenta describir la preimagen entera $f^{-1}(\{b\})$, sino solamente la parte de la misma que está cerca de a .

(2) El sistema $f(x, y) = b$, junto con la condición $(x, y) \in E$, equivale a $y = \varphi(x)$, $x \in W$. Es decir que *m ecuaciones escalares nos van a permitir despejar m variables (y_1, \dots, y_m) en función de las otras k variables (x_1, \dots, x_k) que quedan libres de recorrer un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$.*

Volviendo con el tercer ejemplo, el punto $a = (1, 0, \sqrt{e-2})$ está en $f^{-1}(\{2\})$ y tiene $z > 0$. Para el entorno $E = \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$ de a , la parte $E \cap f^{-1}(\{2\})$ involucra un solo grafo:

$$E \cap f^{-1}(\{2\}) = \{(x, y, z) : xe^x + y \operatorname{sen} y > 2, y = z_+(x, y)\} \quad ,$$

y además $z_+(x, y)$ es suave en esa parte, por ser la raíz cuadrada de una función suave y positiva.

Teorema 98. (Existencia de la función implícita). Sean un abierto $E_0 \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ y una función $f(x, y) : E_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ al menos de clase \mathcal{C}^1 . Si en un punto $a = (x^0, y^0) \in E_0$ los vectores $f_{y_1}(a), \dots, f_{y_m}(a)$ son linealmente independientes (y por lo tanto una base de \mathbb{R}^m) entonces hay entornos $x^0 \in W \subseteq \mathbb{R}^k$ e $y^0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, con $W \times U \subseteq E_0$, y una función $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

que nos planteamos encontrar una familia de inversas locales F_x^{-1} . La matriz jacobiana DF_x es la matriz $m \times m$ cuyas columnas son las derivadas parciales f_{y_1}, \dots, f_{y_m} .

La hipótesis del teorema es que $DF_{x^0}(y^0)$ es una matriz invertible. Por el teorema 96, existe una matriz ortogonal $P \in O(h)$ tal que $DF_{x^0}(y^0)P$ es coerciva con constante de coercividad $\lambda_0 > 0$.

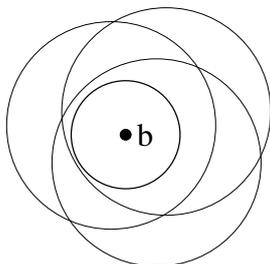
Ejercicio: tomando una constante un poco menor, por ejemplo $\lambda = \lambda_0/2$, se tiene que para A suficientemente cercana a $DF_{x^0}(y^0)$ la matriz AP es coerciva con constante de coercividad λ .

Por lo tanto existen radios $r_0, r_2 > 0$ tales que $B(x^0, r_0) \times \overline{B}(y^0, r_2) \subset E$ y si $x \in B(x^0, r_0)$ e $y \in \overline{B}(y^0, r_2)$ entonces $DF_x(y)P$ es coerciva con constante de coercividad λ .

Conseguido eso, el teorema 94 del apartado 3.7 nos dice que para todo $x \in B(x^0, r_0)$ la función $F_x(y)$ es inyectiva en $y \in \overline{B}(y^0, r_2)$ y además :

$$F_x(B(y^0, r_2)) \supseteq B(F_x(y^0), \lambda r_2).$$

Las bolas $B(F_x(y^0), \lambda r_2)$ tienen el radio λr_2 fijo pero el centro $F_x(y^0)$ móvil. Si este centro se mueve poco entonces todas esas bolas contendrán una centrada en el punto $b = F_{x^0}(y^0) = f(a)$.



Elijamos un ε con $0 < \varepsilon < \lambda r_2$ y tomemos un radio $0 < r_1 < r_0$ tal que:

$$x \in B(x^0, r_1) \implies \varepsilon > \|F_x(y^0) - F_{x^0}(y^0)\|_2 = \|f(x, y^0) - b\|_2,$$

entonces un manejo fácil con la desigualdad triangular prueba que:

$$\overline{B}(b, \lambda r_2 - \varepsilon) \subseteq B(F_x(y^0), \lambda r_2) \quad \text{para todo } x \in B(x^0, r_1).$$

Finalmente, para $x \in B(x^0, r_1)$ la función F_x es inyectiva en $B(y^0, r_2)$ y la imagen $F_x(B(y^0, r_2))$ contiene a la bola $\overline{B}(b, \lambda r_2 - \varepsilon)$.

Definiendo $W = B(x^0, r_1)$, $U = B(y^0, r_2)$ y $V = B(b, \lambda r_2 - \varepsilon)$, tenemos definida la familia de inversas locales:

$$(F_x|_U)^{-1} : V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^h, \quad x \in W. \quad (42)$$

Haciendo actuar estas inversas locales sobre el punto $b \in V$, vemos que:

$$(x, y) \in (W \times U) \cap f^{-1}(\{b\}) \iff x \in W, \quad y = (F_x|_U)^{-1}(b). \quad (43)$$

Definimos, pues, la función:

$$\varphi : W \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^h, \quad \varphi(x) = (F_x|_U)^{-1}(b), \quad (44)$$

y es obvio que $(W \times U) \cap f^{-1}(\{b\}) = \{(x, \varphi(x)) : x \in W\}$. □

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Si sólo se quiere construir φ podemos tomar $\varepsilon = \lambda r_2$, pues esto basta para que las imágenes inyectivas $F_x(B(y^0, r_2))$ contengan $\{b\}$. Para que (43) y (44) tengan validez basta, pues, con elegir $r_1, r_2, \lambda > 0$ y $P \in O(h)$ tales que:

$$\left. \begin{array}{l} x \in B(x^0, r_1) \\ y \in \overline{B}(y^0, r_2) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (DF_x)P \text{ es coerciva con constante de coercividad } \lambda \\ \|f(x, y^0) - b\|_2 < \lambda r_2 \end{array} \right.$$

Teorema 99. (Versión paramétrica del teorema de la función inversa). *En la situación del teorema anterior, si $f(x, y)$ es C^s , con $s \geq 1$, entonces las inversas locales (42) **dependen C^s del parámetro x** , es decir que la función conjunta $(x, z) \mapsto F_x^{-1}(z)$ está en $C^s(W \times V)$.*

Demostración. La función $(x, z) \mapsto F_x^{-1}(z)$ es de clase C^s si y sólo si lo es $(x, z) \mapsto (x, F_x^{-1}(z))$, que no es sino la inversa de la función $F(x, y) = (x, F_x(y))$. Establecemos la notación:

$$D_x f = [f_{x_1} | f_{x_2} | \cdots | f_{x_k}]_{m \times k}, \quad D_y f = [f_{y_1} | f_{y_2} | \cdots | f_{y_m}]_{m \times m},$$

y la jacobiana de F :

$$DF = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0_{k \times m} \\ \hline D_x f & D_y f \end{array} \right],$$

es triangular por cajas, luego invertible donde f_{y_1}, \dots, f_{y_m} sean linealmente independientes. Esto ocurre, en particular, cuando $(x, y) \in W \times U$. Entonces el teorema de la función inversa dice que

$$W \times V \ni (x, z) \mapsto (F|_{W \times U})^{-1}(x, z) = (x, (F_x|_U)^{-1}(z)),$$

es tan suave como F , que es C^s por serlo f . □

Corolario 100. *Si $f(x, y)$ es C^s , con $s \geq 1$, entonces la función $\varphi(x)$ definida en (44) es también C^s .*

La función vectorial implícita $\varphi(x)$ satisface la siguiente identidad (como funciones $W \rightarrow \mathbb{R}^m$):

$$f(x, \varphi(x)) \equiv b.$$

Tomando en ambos miembros de esta identidad derivadas parciales con respecto a x_1, \dots, x_k , se obtiene:

$$D_x f + (D_y f) D_x \varphi \equiv 0_{m \times k},$$

de donde es inmediato despejar $D_x \varphi$, porque $D_y f$ es invertible. Este procedimiento se conoce con el nombre de **derivación implícita**.

3.10 Dos ejemplos de estimación del dominio

En el primer ejemplo vamos a determinar una inversa local y a la vez estimar el dominio donde está definida. En el segundo ejemplo vamos a determinar una función (vectorial) implícita y a la vez estimar el dominio donde está definida.

Primer ejemplo: construcción de una inversa local.

Consideramos el abierto $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y la función $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$J : B(0, r_2) \rightarrow B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^2,$$

de clase C^∞ y llevando $b \mapsto a$. El propósito es hallar valores explícitos para r_1 y r_2 . Calculamos:

$$Df = \begin{bmatrix} y^2 & e^y + 2xy \\ 3x^2 - \log y & -x/y \end{bmatrix}.$$

Buscamos una matriz $P \in O(2)$ y números $r, \lambda > 0$ tales que:

$$\text{para todo } (x, y) \in B(a, r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^2 \text{ es } v^t (Df_{(x,y)} P) v \geq \lambda \|v\|_2^2. \quad (45)$$

Conseguido eso, tendremos que f es regular e inyectiva en $B(a, r)$ y que $f(B(a, r)) \supseteq B(b, \lambda r)$.

En vista de que $Df_a = \begin{bmatrix} 1 & e+4 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$ tiene bastante más grandes (y positivas) las entradas fuera de la diagonal, elegimos $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, con lo cual $(Df)P = \begin{bmatrix} e^y + 2xy & y^2 \\ -x/y & 3x^2 - \log y \end{bmatrix}$ es el resultado de intercambiar las columnas de Df , y calculamos:

$$\begin{aligned} v^t (Df) P v &= (e^y + 2xy) v_1^2 + (3x^2 - \log y) v_2^2 + \left(y^2 - \frac{x}{y}\right) v_1 v_2 \geq \\ &\geq (e^y + 2xy) v_1^2 + (3x^2 - \log y) v_2^2 - \left| \left(y^2 - \frac{x}{y}\right) v_1 v_2 \right| \geq \\ &\geq \left(e^y + 2xy - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_1^2 + \left(3x^2 - \log y - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_2^2. \end{aligned}$$

Probemos a ver si para $r = 1/2$ existe un $\lambda > 0$ cumpliendo (45). Si $(x, y) \in B(a, 1/2)$, entonces:

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ y } \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}.$$

Para $t \neq 0$ se tiene $e^t \geq t + 1$ y $\log t \leq t - 1$. Usando eso deducimos que si $(x, y) \in B(a, 1/2)$ entonces:

$$\begin{aligned} e^y + 2xy &> e^{1/2} + (2) \left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3, \\ 3x^2 - \log y &> 3 \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \log \frac{3}{2} > \frac{27}{4} - \frac{1}{2} = \frac{25}{4} > 6, \\ \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| &< \frac{1}{2} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5/2}{1/2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{4} - 5 \right| = \frac{19}{8}, \end{aligned}$$

y para $(x, y) \in B(a, 1/2)$ se tiene $v^t (Df) P v \geq \left(3 - \frac{19}{8}\right) \|v\|_2^2 = \frac{5}{8} \|v\|_2^2$, es decir que se cumple (45) con $r = 1/2$ y $\lambda = 5/8$. Ahora sabemos que f es regular e inyectiva en $B((2, 1), 1/2)$ y que $f(B((2, 1), 1/2)) \supseteq B((e + 2, 8), r_2)$ con $r_2 = \lambda r = 5/16 > 0'3$.

Conclusión. Hay una inversa local f^{-1} de clase C^∞ , definida en $V = B((e + 2, 8), 0'3)$ y determinada de manera única por la condición de que toma todos sus valores dentro de $B((2, 1), 0'5)$. Como la bola V es *conexa por caminos*, es también la única inversa local que lleva $(e + 2, 8) \mapsto (2, 1)$ y está definida en todo V .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$f_p(x, y)$ cuando queremos exhibir la variable p como parámetro que,

al ir cambiando de valor, provoca una deformación de la función F_p . Esta es una **deformación suave**, en el sentido de que la función conjunta $h(p, x, y)$ está en $C^\infty(\mathbb{R} \times U_0)$.

En particular F_1 es la función f del primer ejemplo. De nuevo consideramos los puntos $a = (2, 1)$ y $b = F_1(a) = \begin{bmatrix} e + 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ y establecemos el sistema $h(p, x, y) = b$, es decir

$$\left. \begin{aligned} p e^y + x y^2 &= e + 2 \\ p - 1 + x^3 - x \log y &= 8 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

cuyo conjunto de soluciones es la preimagen $h^{-1}(\{b\}) \subset \mathbb{R}_{pxy}^3$. Es un sistema de dos ecuaciones (escalares) con tres incógnitas p, x, y . Dada la solución particular $(p, x, y) = (1, a) = (1, 2, 1)$, queremos describir las soluciones cercanas a esta solución particular despejando x, y como funciones del parámetro p . Dicho con más precisión, buscamos una bola $U' = B((1, 2), r')$ y un intervalo $W = (1 - \delta, 1 + \delta)$ tales que las soluciones (p, x, y) de (46) con $p \in W$ y $(x, y) \in U'$ sean $(p, x, y) = (p, x(p), y(p))$, donde

$$\varphi(p) = (x(p), y(p)) : W \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^2,$$

será una función vectorial (implícita) que va a estar en $C^\infty(W)$. Dicho de otra manera, las soluciones (p, x, y) de (46) con $(p, x, y) \in W \times U'$ van a formar el grafo de φ :

$$(W \times U') \cap h^{-1}(\{b\}) = \{(p, x(p), y(p)) : p \in W\} = \{(p, \varphi(p)) : p \in W\}.$$

El hecho de que $\varphi(p)$ tome sus valores en U' la va a determinar de manera única. En particular, estará obligada a cumplir $\varphi(1) = a$, es decir que el grafo de $\varphi(p)$ pasa por $(1, a)$.

Para cualesquiera $W \subseteq \mathbb{R}$ y $U' \subseteq U_0$ se cumple la siguiente igualdad conjuntista:

$$(W \times U') \cap h^{-1}(\{b\}) = \bigcup_{p \in W} \{p\} \times (F_p|_{U'})^{-1}(\{b\}).$$

Se trata, por lo tanto, de elegir W, U' de modo que para $p \in W$ la función F_p sea regular e inyectiva en U' y la imagen $F_p(U')$ contenga a b . Para cada $p \in W$, la ecuación $F_p(x, y) = b$ tendrá en U' una única solución que será el punto $\varphi(p)$.

Calculamos, para cada p :

$$DF_p = \begin{bmatrix} y^2 & p e^y + 2xy \\ 3x^2 - \log y & -x/y \end{bmatrix} = D_{x,y} h.$$

Elegimos, igual que en el primer ejemplo, la matriz ortogonal $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y obtenemos:

$$v^t (DF_p) P v \geq \left(p e^y + 2xy - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_1^2 + \left(3x^2 - \log y - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_2^2.$$

Para $U' = B(a, 1/2)$, es decir $r' = 1/2$, buscamos un $W = (1 - \delta, 1 + \delta)$ adecuado a U' y, en todo caso, cumpliendo $\delta \leq 1/3$; en particular $p \geq 1 - 1/3 = 2/3$. Con esas limitaciones para p y (x, y) , tenemos:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(2 8) (8) 8

Cartagena99

Concluimos que para $p \geq 2/3$ todas las funciones F_p son coercivas en $B(a, 1/2)$, con constante de coercividad $\lambda = 1/8$, y cada imagen $F_p(B(a, 1/2))$ contiene la bola $B(F_p(a), r'_2)$ siendo $r'_2 = \lambda r' = 1/16 > 0'06$.

Las bolas $B(F_p(a), 0'06)$ tienen todas el mismo radio pero centro variable. Lo que necesitamos es que todas ellas contengan al punto b , lo cual equivale a lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0'06 > \|F_p(a) - b\|_2 &= \left\| \begin{bmatrix} p e^1 + 2 \cdot 1^2 & - (e^1 + 2 \cdot 1^2) \\ p - 1 + 2^3 - 2 \cdot \log 1 & - (0 + 2^3 - 2 \cdot \log 1) \end{bmatrix} \right\|_2 = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} (p-1)e \\ p-1 \end{bmatrix} \right\|_2 = |p-1| \sqrt{e^2 + 1}. \end{aligned}$$

Como definimos $W = (1 - \delta, 1 + \delta)$, es decir $W = B(1, \delta)$, debemos tomar $\delta \leq 0'06/\sqrt{e^2 + 1}$. Por ejemplo $\delta = 0'02$ y $W = (0'98, 1'02)$.

Conclusión. Para $0'98 < p < 1'02$ el sistema (46) tiene dentro de $B(a, 0'5)$ una única solución $(x, y) = \varphi(p)$. Esto define una función vectorial implícita

$$(x(p), y(p)) = \varphi(p) : (0'98, 1'02) \longrightarrow B(a, 0'5) \subset \mathbb{R}^2,$$

que es de clase C^∞ porque la jacobiana $DF_p = D_{x,y}h$ permanece coerciva (luego invertible) para $p \geq 2/3$ y $(x, y) \in B(a, 1/2)$.

Apéndice al capítulo 3

Como se ha podido ver, el teorema de la función implícita es, en realidad, la versión paramétrica del teorema de las funciones inversas.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4 Variedades y extremos condicionados

En todo este capítulo, cada vez que hablemos de funciones \mathcal{C}^s se presupone $s \geq 1$. Vamos a definir las **variedades en \mathbb{R}^n** , las cuales, por encima de todo, tienen dos cosas: **parámetros** y **espacios tangentes**.

4.1 Difeomorfismos

Definición 101. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ dos abiertos. Una aplicación $\sigma : U_1 \rightarrow U_2$ es un **difeomorfismo \mathcal{C}^s** si cumple las dos condiciones siguientes:

1. σ es biyectiva de U_1 a U_2 .
2. σ es \mathcal{C}^s y su inversa $\sigma^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ también es de clase \mathcal{C}^s .

Dos comentarios acerca de esta definición:

- (1) Si $\sigma : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *inyectiva*, de clase \mathcal{C}^s y con matrices jacobianas todas invertibles, entonces $U_2 = \sigma(U_1)$ es un abierto de \mathbb{R}^n y σ un difeomorfismo \mathcal{C}^s de U_1 a U_2 .
- (2) No toda biyección suave es un difeomorfismo. Por ejemplo $x \mapsto x^3$ es biyectiva de \mathbb{R} a \mathbb{R} y además es \mathcal{C}^∞ , pero su inversa $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ no es diferenciable en $y = 0$ debido a la anulación de la derivada de x^3 en $x = 0$ (punto donde la jacobiana no es invertible).

Un difeomorfismo $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : U_1 \rightarrow U_2$ puede entenderse como un **sistema de coordenadas curvilíneas** según explicamos a continuación. Las funciones $\sigma_1, \dots, \sigma_n : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ son unas **coordenadas** en U_1 en el sentido de que cada punto $p \in U_1$ está determinado por los números $\sigma_1(p), \dots, \sigma_n(p)$ y de hecho la función σ^{-1} , que reconstruye el punto p a partir de esos números, es de clase \mathcal{C}^s .

La definición 101 tiene perfecto sentido si suponemos, de manera más general, que U_1 es un abierto de \mathbb{R}^n y U_2 un abierto de $\mathbb{R}^{n'}$. Pero entonces, elegido un punto $a \in U_1$, la jacobiana $A = D\sigma_a$ es una matriz invertible y por lo tanto *cuadrada*. Como A es $n' \times n$ se tiene $n = n'$. Conclusión: sólo puede haber difeomorfismos entre abiertos *de igual dimensión*.

Nos interesa un tipo particular de difeomorfismos que llamaremos **deslizamientos**. Sean $k < n$, un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función $\varphi = (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ con $\varphi \in \mathcal{C}^s(W)$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ escribimos $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ y $\tilde{x} = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, con lo cual $x = (\bar{x}, \tilde{x})$, y análogamente para un punto que se designe con una letra distinta de la x . Consideramos el abierto $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in W\} = W \times \mathbb{R}^{n-k}$ y la aplicación $\sigma : U \rightarrow U$ definida como sigue:

$$\sigma(\bar{x}, \tilde{x}) = (\bar{x}, \tilde{x} + \varphi(\bar{x})),$$

que es \mathcal{C}^s y biyectiva, con inversa también de clase \mathcal{C}^s :

$$\sigma^{-1}(\bar{y}, \tilde{y}) = (\bar{y}, \tilde{y} - \varphi(\bar{y})),$$

y por lo tanto σ es un difeomorfismo \mathcal{C}^s del abierto U consigo mismo. Lo que hace este difeomorfismo es deslizar cada subespacio afín $\{\bar{x}_0\} \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ dentro de sí mismo, trasladándolo por el vector $(\mathbf{0}_k, \varphi(\bar{x}_0))$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

4.2 Variedades en \mathbb{R}^n

El concepto de variedad en \mathbb{R}^n generaliza las ideas de curva y superficie, que todos entendemos de manera visual e intuitiva. De manera poco rigurosa, una curva es un objeto posiblemente curvilíneo de dimensión 1 y una superficie es un objeto posiblemente curvilíneo de dimensión 2. La generalización que utilizaremos aquí permite otras dimensiones (no sólo 1 o 2) y exige una cierta “buena calidad” a los objetos definidos.

Definición 102. Sean k un entero no negativo y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío. Decimos que X es una **variedad en \mathbb{R}^n de dimensión geométrica k** si para cada punto $x^0 \in X$ existen abiertos $E, E' \subseteq \mathbb{R}^n$, con $x^0 \in E$, y un difeomorfismo $\sigma : E \rightarrow E'$ tales que:

$$\sigma(X \cap E) = E' \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}) = \{y \in E' : y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0\}. \quad (47)$$

Veamos algunos valores especiales de la dimensión geométrica k . Cuando $k = 1$ decimos que X es una **curva en \mathbb{R}^n** . Cuando $k = 2$ decimos que X es una **superficie en \mathbb{R}^n** . Las variedades en \mathbb{R}^n de dimensión $n - 1$ se llaman **hipersuperficies**. Las variedades de dimensión 0 son los conjuntos **discretos**: los que sólo tienen puntos aislados. Las variedades de dimensión n en \mathbb{R}^n son los abiertos no vacíos.

Esta definición encierra mucho más de lo que parece, por lo cual tenemos que hacerle varios comentarios.

1. La palabra “en” forma parte del nombre de estos objetos, incluso cuando ella y la palabra “variedad” no vayan juntas, como por ejemplo al decir “**variedad de dimensión 2 en \mathbb{R}^3** ”. Hemos definido, pues, el concepto de “variedades en”. En un curso más avanzado se definirá un concepto más general de variedades que no necesariamente están en ningún \mathbb{R}^n , y esas ya no serán “variedades en”, se las llamará simplemente “variedades”.

2. Podemos considerar a $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}$ como la manera estándar de meter \mathbb{R}^k dentro de \mathbb{R}^n como un subespacio afín. Además es $E' \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}) = V \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}$, donde V es un abierto de \mathbb{R}^k , luego podemos considerar a $E' \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\})$ como una manera estándar de meter (sin curvarlo) un cierto abierto V de \mathbb{R}^k dentro del espacio ambiente \mathbb{R}^n .

3. Es importante que en (47) tengamos igualdad de conjuntos: si la reemplazamos por la inclusión \subseteq entonces se permite que la imagen $\sigma(X \cap E)$ pueda ser $C \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}$ donde $C \subset \mathbb{R}^k$ no sea un abierto de \mathbb{R}^k sino un subconjunto muy extraño. Tal situación la hemos prohibido con la igualdad conjuntista en (47):

Estamos exigiendo que partes pequeñas de X sean como una bola abierta de \mathbb{R}^k

4. Mientras que $\sigma : E \rightarrow E'$ es un *difeomorfismo planchador*, porque toma el trocito $X \cap E$ y lo plancha (lo convierte en un abierto del subespacio $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}$), el inverso $\sigma^{-1} : E' \rightarrow E$ es un *difeomorfismo curvador*: toma el trozo abierto $E' \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\})$ de un subespacio afín y lo curva de modo a construir el “trozo curvado” $X \cap E$. El conjunto total X está formado por estos trocitos curvados que, al ser abiertos relativos de X , no van a poder ser disjuntos dos a dos en cuanto X sea conexo por caminos. Ahora bien, cuando dos abiertos de un espacio métrico comparten un punto a automáticamente comparten toda una bola $B(a, \varepsilon)$, es decir que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena" in a stylized, blue, serif font with a slight shadow effect. To its right, the number "99" is written in a larger, bold, black, sans-serif font. The entire logo is set against a light blue and white background with a subtle gradient.

Definición 103. Decimos que X es de clase C^s , como variedad en \mathbb{R}^n , si para ella podemos elegir, cerca de cada punto, difeomorfismos planchadores de clase C^s .

Ejemplos de variedades en \mathbb{R}^n :

(1) Subespacios afines, o abiertos relativos suyos. Se los plancha con **movimientos** de \mathbb{R}^n . Dado un subespacio afín k -dimensional $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ y dado un abierto relativo $V \subseteq \mathbb{A}$, tenemos una igualdad $V = \mathbb{A} \cap U$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Existe un movimiento $M(x) = b + Ax$, con $b \in \mathbb{R}^n$ vector constante y A matriz ortogonal constante, tal que $M(\mathbb{A}) = \mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}$. Entonces $\sigma = M|_U$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n que mueve V y lo transforma en $V' \times \{\mathbf{0}_{n-k}\}$ para algún abierto $V' \subseteq \mathbb{R}^k$.

(2) Grafos de funciones diferenciables. Se los plancha con deslizamientos. Hay **varios tipos de grafo**: se eligen $n - k$ variables y se las pone como funciones C^s de las otras k variables, dejando que éstas últimas recorran un abierto de \mathbb{R}^k . Por ejemplo, dado un abierto $W \subseteq \mathbb{R}_{x_1 x_3}^2$ y un grafo en \mathbb{R}^4 del siguiente tipo:

$$X = \{ (x_1, \varphi_2(x_1, x_3), x_3, \varphi_4(x_1, x_3)) : (x_1, x_3) \in W \},$$

en el cual x_2, x_4 están puestas como funciones diferenciables de (x_1, x_3) , definimos el abierto $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_3) \in W\}$ y X se plancha con el deslizamiento $\sigma : U \rightarrow U$ dado por:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow{\sigma} (x_1, x_2 - \varphi(x_1, x_3), x_3, x_4 - \varphi_4(x_1, x_3)).$$

Veamos ahora ejemplos de subconjuntos que no son variedades en \mathbb{R}^n .

El conjunto $T = \{(x, y) : xy = 0, y \geq 0\}$, formado por tres semirrectas que salen del origen, no es una variedad en el plano.

Los grafos de $|x|$ y de $2x + |x|$ no son variedades en el plano. Los conos $\{y = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ y $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no son variedades en \mathbb{R}^3 . Véanse los comentarios después de la proposición 105, en el apartado 4.3.

4.3 Funciones regulares: preimágenes e imágenes

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función al menos de clase C^1 . En la definición 87 del apartado 3.6 hemos dicho que f es **regular** si para todo $a \in U$ la diferencial $(df)_a$ tiene el máximo rango que puede tener una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Lo separamos en tres posibilidades:

1. Si $n < m$ entonces el máximo rango posible para L es n y lo tienen las L inyectivas. En este caso, pues, la función f es regular si todas sus diferenciales son inyectivas. Esto también se expresa diciendo que f es una **inmersión** de U dentro de \mathbb{R}^m . En este caso Df es una **matriz alta**: tiene menos columnas que filas. La condición para que f sea una inmersión es que las columnas f_{x_1}, \dots, f_{x_n} de Df sean linealmente independientes en todo punto. En particular, un **camino** $\alpha(t)$ es una inmersión si el vector velocidad $\alpha'(t)$ (la única columna de Df) no se anula para ningún t .
2. Si $n = m$ volvemos al caso estudiado en el capítulo 3. Ahora f es regular si sus diferenciales son biyectivas; las matrices Df son cuadradas e invertibles. Cada punto $a \in U$ tiene un entorno U^a tal que $f : U^a \rightarrow f(U^a)$ es un difeomorfismo. No obstante f puede no ser inyectiva en todo U . A una tal f también se la llama **difeomorfismo local**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

amente independientes en todo punto.

Cartagena99

Teorema 104. (Preimágenes). Sean $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $n \geq m$ y $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^s .

Dado $b \in \mathbb{R}^m$, si $(df)_a$ es suprayectiva para todo $a \in f^{-1}(\{b\})$, entonces $f^{-1}(\{b\})$ es o el conjunto vacío o una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión $n - m$ y clase C^s .

Veamos otra manera de expresar este teorema. Dado un sistema

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{array} \right\} (x_1, \dots, x_n) \in U_0,$$

si los gradientes de las ecuaciones $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ son linealmente independientes en cada punto solución del sistema, entonces el conjunto X de las soluciones es o vacío o una variedad en \mathbb{R}^n y además $\dim X = n - 1$ si hay una ecuación, $\dim X = n - 2$ si hay dos ecuaciones, etc.

Una sola ecuación escalar $f_1(x_1, \dots, x_n) = b_1$, con al menos una solución y con gradiente no nulo en todo punto solución, define una hipersuperficie en \mathbb{R}^n . Por ejemplo el conjunto

$$S^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

es una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión $n - 1$ y clase C^∞ ; se la llama **esfera $(n - 1)$ -dimensional**. El gradiente $\nabla(x_1^2 + \dots + x_n^2) = (2x_1, \dots, 2x_n)$ se anula en el origen $\mathbf{0}$, pero éste es un punto en el que la ecuación no se satisface y por lo tanto no causa ningún problema. En particular, la esfera S^2 es una superficie en \mathbb{R}^3 y la circunferencia S^1 es una curva en \mathbb{R}^2 .

Demostración del teorema 104. Sea $X = f^{-1}(\{b\}) = \{x \in U_0 : f(x) = b\}$. Supongamos X no vacío y fijemos un punto $a \in X$.

Primer caso: $n = m$. La matriz Df_a es invertible y existen entornos U de a y V de b tales que f es biyectiva de U a V . Se sigue que

$$U \cap X = \{x \in U : f(x) = b\} = \{a\}.$$

luego a es un punto aislado de X . Como esto es así para todo punto suyo, el conjunto X es discreto, o sea una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión $0 = n - n$.

Segundo caso: $n > m$. Las m filas de la jacobiana Df_a son linealmente independientes y sabemos, por Álgebra Lineal, que hay una submatriz invertible $A_{m \times m}$ de Df_a . Consideramos la correspondiente partición

$$\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_{n-m}\} \sqcup \{j_1, \dots, j_m\},$$

en la que j_1, \dots, j_m son los índices de las columnas de A e i_1, \dots, i_{n-m} los índices restantes. Escribimos $k = n - m$ y pasamos a considerar las variables x_{i_1}, \dots, x_{i_k} como parámetros, definiendo una familia paramétrica de funciones de m variables:

$$F_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Por ejemplo, si $n = 5$ y si la matriz A está formada por las columnas primera y tercera de Df entonces reinterpretemos la función original de cinco variables como una familia a tres

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Commutación en las entradas de (x_1, \dots, x_n) .

Cartagena99

La matriz $(DF_{\bar{a}})_{\bar{a}} = (D_{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}} f)_a$ es la submatriz A que hemos supuesto invertible, por lo tanto a la familia $F_{\bar{x}}$ se le aplica el teorema 98 de las funciones implícitas: existen entornos W de \bar{a} en \mathbb{R}^k y U de \tilde{a} en \mathbb{R}^m , tales que si definimos un abierto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ como sigue:

$$x \in E \iff (\bar{x} \in W \text{ y } \tilde{x} \in U) \iff (\bar{x}, \tilde{x}) \in W \times U,$$

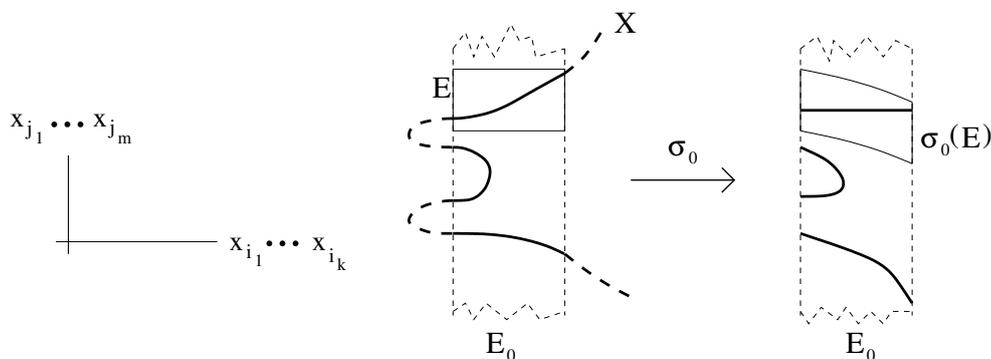
entonces $E \subseteq U_0$ y la parte del conjunto X contenida en E tiene la siguiente descripción:

$$x \in X \cap E \iff (\bar{x} \in W \text{ y } \tilde{x} = \varphi(\bar{x})),$$

para cierta función $\varphi : W \rightarrow U$ que es de la misma clase \mathcal{C}^s que la función f . Esto significa que $X \cap E$ es un **grafo** en el que las variables $(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ son puestas como funciones \mathcal{C}^s de los parámetros $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Podemos definir la aplicación $\sigma : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^s dada por:

$$\bar{\sigma}(x) = \bar{x} \text{ , } \tilde{\sigma}(x) = \tilde{x} - \varphi(\bar{x}).$$

Atención. En realidad σ es la restricción a E de un deslizamiento σ_0 que está definido en el abierto más grande $E_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ definido por $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in W\} \supseteq E$. Es importante restringir σ_0 al abierto más pequeño E , porque el conjunto total X puede cortar a E_0 en otras partes distintas de $X \cap E$, y esas tal vez no las planche σ_0 .



El conjunto $\sigma(E)$, imagen directa de E por σ_0 , es un abierto de \mathbb{R}^n y tenemos un difeomorfismo $\sigma : E \rightarrow \sigma(E)$ de clase \mathcal{C}^s y tal que:

$$\sigma(X \cap E) = \{y \in \mathbb{R}^n : \bar{y} \in W, \tilde{y} = \mathbf{0}_m\} = \{y \in \sigma(E) : \tilde{y} = \mathbf{0}_m\},$$

es decir que σ es un difeomorfismo que plancha la parte $X \cap E$ de X : la convierte en un abierto del subespacio afín $\{y : \tilde{y} = \mathbf{0}_m\}$, que tiene dimensión $k = n - m$. Al ser esto posible para todo $a \in X$, concluimos que X es una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión geométrica $n - m$ y clase \mathcal{C}^s . \square

En la demostración del teorema 104 hemos considerado varios tipos de grafo: tantos como subconjuntos $\{i_1, \dots, i_k\}$ hay en $\{1, \dots, n\}$. Veamos un ejemplo en \mathbb{R}^4 en el que aparecen grafos de distinto tipo. Consideramos la función $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_2 \cos x_1 + x_3^2 + 7x_2x_4 \\ e^{x_1}x_3 + 5e^{x_2} - \sin x_3 - x_1x_4^2 \end{bmatrix},$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Empezamos por el punto a . La preimagen $f^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ al sistema $f(x) = b$, es decir:

$$\left. \begin{aligned} x_2 \cos x_1 + x_3^2 + 7x_2x_4 &= 1 \\ e^{x_1}x_3 + 5e^{x_2} - \sin x_3 - x_1x_4^2 &= 5e \end{aligned} \right\}, \quad (48)$$

y de entre ellas queremos describir *solamente* las x cercanas al punto a . Calculamos:

$$Df = \begin{bmatrix} -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 + 7x_4 & 2x_3 & 7x_2 \\ e^{x_1}x_3 - x_4^2 & 5e^{x_2} & e^{x_1} - \cos x_3 & -2x_1x_4 \end{bmatrix}.$$

En particular:

$$Df_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5e & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}.$$

Esta matriz tiene $\binom{4}{2} = 6$ submatrices 2×2 , de las cuales solamente es invertible la formada por las columnas segunda y cuarta. Tenemos garantizado, por el teorema de las funciones implícitas, que las soluciones de (48) cercanas al punto a vienen dadas por

$$(x_2, x_4) = (\varphi_2(x_1, x_3), \varphi_4(x_1, x_3)),$$

donde $\varphi = (\varphi_2, \varphi_4)$ es una función vectorial C^∞ y (x_1, x_3) recorre un entorno de $(a_1, a_3) = (0, 0)$ en el plano $\mathbb{R}_{x_1x_3}^2$. El teorema de las funciones implícitas *no dice* si cerca del punto a se puede o no se puede despejar en (48) una pareja de variables distinta de la (x_2, x_4) como función de las otras dos variables; decidirlo requiere un estudio de las ecuaciones (48) que va más allá de las derivadas primeras de f en a y que no vamos a hacer.

Para el punto $a' = (0, 0, 0, 1)$ calculamos:

$$Df_{a'} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La única submatriz invertible 2×2 es la formada por las dos primeras columnas. El teorema de las funciones implícitas dice que cerca de a' se pueden despejar en el sistema $f(x) = b'$ las variables (x_1, x_2) como funciones de clase C^∞ de (x_3, x_4) que a su vez recorren un entorno de $(a'_3, a'_4) = (0, 1)$ en el plano $\mathbb{R}_{x_3x_4}^2$.

El teorema de las funciones implícitas no garantiza (tampoco prohíbe) que cerca del punto a' podamos despejar en $f(x) = b'$ una pareja de variables distinta de la x_1, x_2 como función C^∞ de las otras dos variables.

Para el punto $a'' = (0, 1, 1, 0)$ calculamos:

$$Df_{a''} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 5e & 1 - \cos 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ahora las seis submatrices 2×2 son invertibles. El teorema de las funciones implícitas garantiza que cerca de a'' podemos despejar en $f(x) = b''$ cualquier pareja de variables (x_i, x_j) como función C^∞ de las otras dos (x_k, x_l) que a su vez recorren un entorno de (a''_k, a''_l) en el plano $\mathbb{R}_{x_kx_l}^2$.

Una sola variedad, incluso conexa por caminos, puede obligarnos a cambiar el tipo de grafo de un punto a otro. Para la circunferencia $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ y entornos U del punto $a = (0, 1)$, la parte $X \cap U$ sólo puede describirse poniendo y como función de x y no x como

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Proposición 105. Sea X una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión k y clase C^s . Cada punto $a \in X$ tiene un entorno E tal que la parte $X \cap E$ es un grafo donde $n - k$ de las variables x_1, \dots, x_n son puestas como funciones de clase C^s de las otras k variables y éstas últimas recorren un abierto de \mathbb{R}^k .

Demostración. Sea $a \in X$. Tenemos un entorno E_1 de a y un difeomorfismo $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ tales que $\sigma(X \cap E_1) = \{y \in E_2 : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$. Por lo tanto:

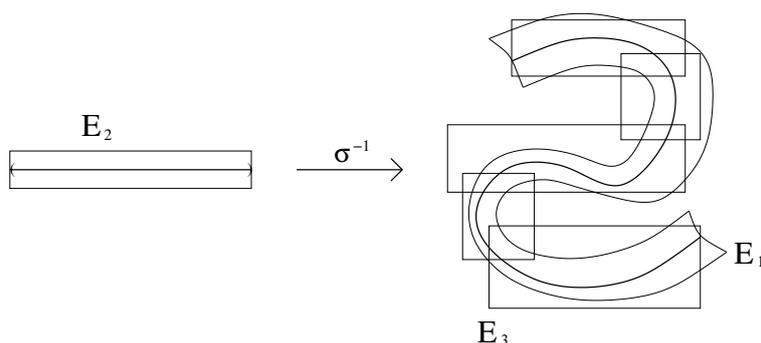
$$X \cap E_1 = \{x \in E_1 : \sigma_{k+1}(x) = \dots = \sigma_n(x) = 0\}.$$

Como σ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n , sus jacobianas son invertibles y tienen todas las filas linealmente independientes. Al ser $D\sigma_{k+1}, \dots, D\sigma_n$ algunas de las filas de $D\sigma$, resulta que son linealmente independientes en todo punto de E_1 . El sistema

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{k+1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \sigma_n(x) = 0 \end{array} \right\} x \in E_1,$$

que define la parte $X \cap E_1$, está en las hipótesis del teorema 104 y, por la demostración que hemos hecho del mismo, para cada punto $a \in X \cap E_1$ existe un entorno E_3 tal que la parte $X \cap E_1 \cap E_3$ es un grafo del algún tipo con k variables independientes. \square

Dada una variedad X en \mathbb{R}^n , y una parte $X \cap E_1$ que se planche por un difeomorfismo $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$, pueden necesitarse grafos de distinto tipo para recubrir $X \cap E_1$, siendo inevitable, para recubrirla así, descomponerla en muchos trocitos $X \cap E_1 \cap E_3$.



Veamos que el grafo de $X = \{y = |x|\}$ no es una variedad en el plano. Su dimensión no puede ser 0 porque no es un conjunto discreto, tampoco puede ser 2 porque no es un abierto. La proposición 105 afirma que, si fuera una variedad unidimensional en el plano, entonces la parte cercana al punto $(0, 0) \in X$ sería un grafo en el que o bien y sería función diferenciable de x o bien x sería función diferenciable de y . Es evidente que en $X \cap B((0, 0), \varepsilon)$ sólo puede ponerse y como función de x y que sale una función no diferenciable, luego X no es una variedad en el plano.

En particular, no existe ningún difeomorfismo entre abiertos del plano que lleve X al eje de abscisas. Intuitivamente, esto corresponde al hecho de que X “tiene una esquina” en el punto $(0, 0)$. La definición que hemos dado del concepto de variedad en \mathbb{R}^n es adecuada porque **detecta la**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

de x y x función de y) pero resultar dos funciones no diferenciables.

Cartagena99

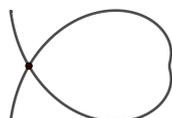
Teorema 106. (Imágenes). Sea $k < n$. Sean $V \subseteq \mathbb{R}^k$ un abierto y $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una **inmersión** de clase C^s , es decir una aplicación de clase C^s con las diferenciales todas inyectivas. La imagen $f(V)$ es una **unión de variedades** de clase C^s y dimensión k en \mathbb{R}^n .

Demostración. Fijamos $x^0 \in V$. La matriz Df_{x^0} tiene rango k y por lo tanto k filas linealmente independientes. Sean i_1, \dots, i_k los índices de dichas filas y j_1, \dots, j_m los demás índices, siendo $m = n - k$. Entonces $\sigma = (f_{i_1}, \dots, f_{i_k})$ tiene jacobiana invertible en x^0 y es un difeomorfismo de un entorno $V^{x^0} \subseteq V$ a un entorno W de $\bar{y}_0 = \sigma(x^0)$ en \mathbb{R}^k . La imagen $f(V^{x^0})$ es el siguiente grafo:

$$\{ y : \bar{y} = (y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) \in W, (y_{j_1}, \dots, y_{j_m}) = (f_{j_1} \circ \sigma^{-1}(\bar{y}), \dots, f_{j_m} \circ \sigma^{-1}(\bar{y})) \}.$$

Esto define un recubrimiento de la imagen total $f(V)$ por imágenes $f(V^{x^0})$, que son grafos de funciones de clase C^s definidas en abiertos de \mathbb{R}^k . Tales grafos son variedades de clase C^s y dimensión geométrica k . \square

Aviso. Es bastante delicado decidir si la imagen de una inmersión es una sola variedad en \mathbb{R}^n o unión de varias de ellas; veamos unos ejemplos. El camino $\alpha(t) = ((1+t^2) \cos t, (1+t^2) \sin t)$ no es inyectivo en $t \in (-3'5, 3'5)$ y la imagen $\alpha((-3'5, 3'5))$ tiene un “cruce consigo misma” en el punto $p = \alpha(-\pi) = \alpha(\pi)$.



Esta imagen es unión de dos variedades en el plano, no una sola. A pesar de que α es inyectivo en $t \in (-\pi, 3'5)$, la imagen más pequeña $\alpha((-\pi, 3'5))$ también es unión de por lo menos dos variedades en el plano, porque en el punto p presenta el mismo problema que el ejemplo T del final del apartado 4.2.



El camino $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\infty < t < \infty$, es una inmersión no inyectiva y, sin embargo, su imagen $\beta(\mathbb{R})$ sí es una variedad en el plano.

4.4 Dimensión y grado de suavidad

La dimensión geométrica de una variedad X en \mathbb{R}^n es única. Si X tiene dos dimensiones k, k' cerca de un punto $a \in X$, entonces se construye un difeomorfismo $U \rightarrow U'$ entre abiertos de \mathbb{R}^n que lleva $U \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{n-k}\})$ a $U' \cap (\mathbb{R}^{k'} \times \{\mathbf{0}_{n-k'}\})$. Así se induce un difeomorfismo de un abierto de \mathbb{R}^k a un abierto de $\mathbb{R}^{k'}$, lo cual fuerza $k = k'$. Esto prueba que la dimensión es única en un punto dado, pero no quita para que pueda ser distinta en otro punto como ocurre, por ejemplo, en el conjunto $\mathcal{X} = \{y = z = 0\} \cup \{z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ que es la unión disjunta de una recta y un plano en \mathbb{R}^3 . Pues bien: \mathcal{X} no es una variedad en \mathbb{R}^3 por definición. Si miramos despacio la definición 102, dice que hay fiado de antemano un entero k que afecta a todos los

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

on y concluir que la función sea C^s (no lo es) porque ni siquiera es C^1 .

Cartagena99

Demostración parcial. Lo probamos sólo en el caso $k = m = 1$, en el cual el grafo es una variedad unidimensional en \mathbb{R}^2 . Por la demostración de la proposición 105, dado un punto $a = (x^0, y^0)$ de dicho grafo hay un entorno $E_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ de a y una función escalar $f \in C^s(E_1)$ tal que $\nabla f_a \neq (0, 0)$ y la parte del grafo contenida en E_1 puede darse como $\{(x, y) \in E_1 : f(x, y) = 0\}$. Entonces tenemos la identidad $f(x, \varphi(x)) = 0$ en un abierto de \mathbb{R}_x que contiene a x^0 . Como estamos suponiendo $\varphi \in C^1$, se puede derivar esa identidad en $x = x^0$ y obtener la siguiente igualdad:

$$f_x(x^0, y^0) + \varphi'(x^0) f_y(x^0, y^0) = 0,$$

es decir $f_x(a) + \varphi'(x^0) f_y(a) = 0$. Se deduce que si fuera $f_y(a) = 0$ entonces también sería $f_x(a) = 0$ y tendríamos $\nabla f_a = (0, 0)$, lo cual es falso. Luego $f_y(a) \neq 0$ y, por el teorema de las funciones implícitas y la identidad $f(x, \varphi(x)) = 0$, la función $\varphi(x)$ es de clase C^s cerca de x^0 . Al ser esto así para todo punto (x^0, y^0) del grafo, la función $\varphi(x)$ es de clase C^s en todo su dominio. \square

La proposición 107 dice, entre otras cosas, que la definición 103 no está vacía de contenido: para cada $s \geq 1$ finito hay variedades en \mathbb{R}^n que son de clase C^s y no de clase C^{s+1} ; basta tomar el grafo de cualquier función que sea C^s y no sea C^{s+1} .

Por ejemplo, el grafo $\{y = |x|^{3/2}\}$ lo podemos planchar con un difeomorfismo del plano (un deslizamiento) que es de clase C^1 , pero es imposible hacerlo con difeomorfismos entre abiertos del plano que sean de clase C^2 o mejor.

4.5 Parámetros

A continuación definimos unos objetos que utilizamos para casi todo cuando manejamos una variedad.

Definición 108. Sea X una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión k . Una **parametrización** para X viene dada por un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumpliendo las siguientes condiciones:

1. Φ es de clase C^s .
2. Φ toma valores sólo en X , es decir $\Phi(W) \subseteq X$.
3. La imagen $\Phi(W)$ tiene interior no vacío en X : contiene un abierto relativo $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

Si (u_1, \dots, u_k) , denota el punto general de W , entonces las variables u_1, \dots, u_k son los **parámetros**. Llamamos **parte parametrizada por Φ** a la imagen $\Phi(W)$.

Dos comentarios:

(1) No le exigimos a una parametrización que recorra todo el conjunto X , pero la idea detrás de la condición 3. es que $\Phi(W)$ no sea una “parte insignificante” de X . Por ejemplo, si X es una superficie en \mathbb{R}^3 entonces pedimos que $\Phi(W)$ contenga una parte de X que también sea una superficie.

(2) Algunas parametrizaciones tienen mayor calidad que otras, siendo las mejores las que son a la vez inyectivas y regulares. En este caso “regular” quiere decir que la parametrización es una

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Carta: Llegamos a cualquier punto de la esfera porque $\Phi(\mathbb{R}^2) = S^2$.

Cartagena99

La parametrización Φ dista mucho de ser inyectiva: cada punto $p \in S^2$ tiene infinitas preimágenes por Φ . Tampoco es regular, ya que su jacobiana:

$$D\Phi_{(\theta,\varphi)} = [\Phi_\theta | \Phi_\varphi] = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta & -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ 0 & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

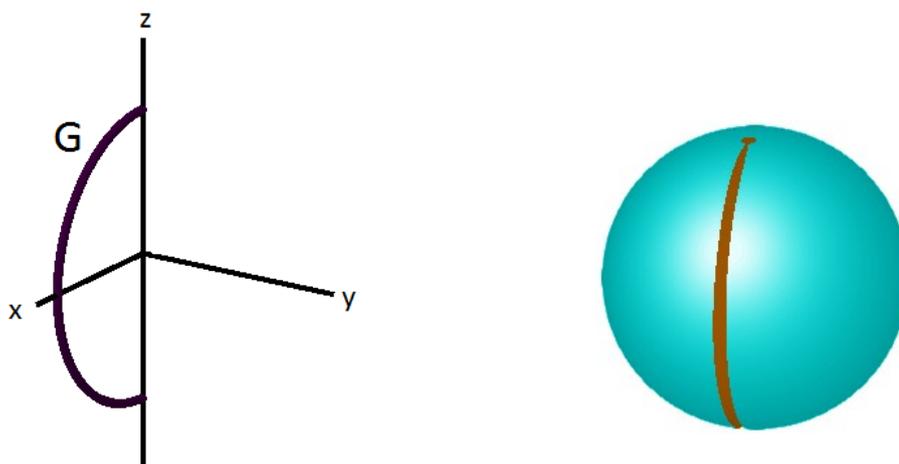
tiene rango = 1 cuando $\cos \varphi = 0$. Esto sugiere tomar la restricción $\Phi|_{W_1}$, siendo:

$$W_1 = \left\{ (\theta, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\} = \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

un abierto de $\mathbb{R}_{\theta\varphi}^2$ en el cual $\cos \varphi$ nunca se anula. La nueva parametrización $\Phi|_{W_1}$ así definida es una inmersión, al precio de ya no ser suprayectiva porque su imagen $\Phi(W_1) = S^2 \setminus \{N, S\}$ es la esfera menos los polos norte $N = (0, 0, 1)$ y sur $S = (0, 0, -1)$. Además tampoco es inyectiva, pues cada punto $p \in S^2 \setminus \{N, S\}$ tiene infinitas preimágenes en W_1 . Esto nos sugiere tomar la restricción más pequeña $\Phi|_{W_2}$, donde W_2 es el siguiente abierto de $\mathbb{R}_{\theta\varphi}^2$:

$$W_2 = \left\{ (\theta, \varphi) : 0 < \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\} = (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ahora $\Phi|_{W_2}$ es una parametrización de máxima calidad: regular e inyectiva. La parte de la esfera parametrizada por $\Phi|_{W_2}$ es el “cascabel” $\Phi(W_2) = S^2 \setminus G$ que resulta de quitarle a la esfera el “meridiano de Greenwich” $G = \{\Phi(0, \varphi) : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}$.



Al ser imagen continua del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, el conjunto G es compacto y es cerrado relativo en cualquier conjunto que lo contenga, luego $S^2 \setminus G$ es un abierto relativo de la esfera. Como Φ es biyectiva de W_2 a $S^2 \setminus G$, para cada punto $p \in S^2 \setminus G$ tenemos bien definido el valor paramétrico:

$$(\Phi|_{W_2})^{-1}(p) = (\theta(p), \varphi(p)).$$

Esto define un par de funciones escalares $\theta, \varphi : S^2 \setminus G \rightarrow \mathbb{R}$ que son **funciones coordenadas curvilíneas** en el abierto relativo $S^2 \setminus G$, en el sentido de que cada punto $p \in S^2 \setminus G$ está

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

se necesitan varias parametrizaciones para cubrir toda S^2 .

Cartagena99

Las parametrizaciones también proporcionan **representaciones numéricas de funciones**.

Primer caso: función que sale de la variedad. Dadas una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ y una parametrización $\Phi : W \rightarrow X$, la compuesta

$$g : W \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g(u_1, \dots, u_k) = f \circ \Phi(u_1, \dots, u_k),$$

representa *una parte* de la función f : es una representación numérica de $f|_{\Phi(W)}$. Conociendo la “fórmula en coordenadas” $g(u_1, \dots, u_k)$ conocemos el valor $f(p)$ para todo $p \in \Phi(W)$, pero ¡ajo! lo desconocemos para los $p \in X$ que no estén en $\Phi(W)$, si los hay.

Segundo caso: función que llega a la variedad. En este caso tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(U) \subseteq X$, lo que nos permite considerar a f , de manera alternativa, como una aplicación de U a X .

Supongamos que, de hecho, es $f(U) \subseteq \Phi(W)$ y que Φ es inyectiva. Por razones puramente conjuntistas, existe una única función $g : U \rightarrow W$ tal que $f = \Phi \circ g$. Con más detalle:

$$g(x) \equiv (u_1(x), \dots, u_k(x)) \quad \text{tal que} \quad f(x) \equiv \Phi(u_1(x), \dots, u_k(x)).$$

Dado cualquier valor $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$, lo que hace la “fórmula” $g(x)$ es darnos las coordenadas $(u_1(x), \dots, u_k(x))$ del punto $f(x)$ a partir de los números x_1, \dots, x_m . No es difícil demostrar que si además Φ es regular y C^s y si f es también C^s , entonces $g \in C^s$.

A veces son muy útiles las **parametrizaciones grafo**, que describimos a continuación. Dados un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de clase C^s , la parametrización grafo básica es la siguiente:

$$W \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad W \ni u \mapsto (u, \varphi(u)),$$

pero se obtienen otras, igual de válidas, aplicando una **matriz de permutación**:

$$P = [\mathbf{e}_{i_1} | \dots | \mathbf{e}_{i_k} | \mathbf{e}_{j_1} | \dots | \mathbf{e}_{j_{n-k}}]_{n \times n},$$

matriz ortogonal cuyas columnas son una permutación de la base estándar, dando lugar a:

$$\Phi(u) = P(u, \varphi(u)) = u_1 \mathbf{e}_{i_1} + \dots + u_k \mathbf{e}_{i_k} + \varphi_1(u) \mathbf{e}_{j_1} + \dots + \varphi_{n-k}(u) \mathbf{e}_{j_{n-k}},$$

que es regular e inyectiva. La imagen $\Phi(W)$ es un grafo en el que las variables $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})$ son funciones C^s de las variables $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ con dominio W . Por ejemplo:

$$\mathbb{R}_{u_1 u_2}^2 \supseteq W \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^5, \quad \Phi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2), u_1, \varphi_2(u_1, u_2), \varphi_3(u_1, u_2), u_2).$$

Las parametrizaciones grafo son regulares e inyectivas. Tienen, además, la buena propiedad de que su inversa $\Phi(u) \mapsto u$ viene dada por $\Phi(W) \ni x \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, o sea $\Phi^{-1} = \pi_{i_1 \dots i_k}|_{\Phi(W)}$ es la restricción a $\Phi(W)$ de una **proyección**

$$\pi_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad x \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

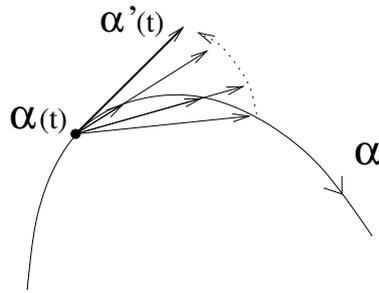
4.6 Espacios tangentes

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$n \rightarrow h$

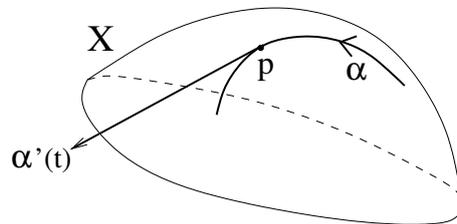
Cartagena99



Por esta razón se dice que $\alpha'(t)$ es un vector tangente a la curva $\alpha(I)$ en el punto $\alpha(t)$. Sean ahora una variedad X en \mathbb{R}^n , un punto $p \in X$ y un camino $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple las dos condiciones siguientes:

1. Contenido en la variedad: $\alpha(I) \subseteq X$,
2. Pasa por el punto: $\alpha(t) = p$ para algún $t \in I$,

entonces al vector $\alpha'(t)$, tangente a un camino contenido en X , lo consideramos tangente a X ; más aún, lo consideramos **tangente a X en el punto p** .



Definición 109. Dada una variedad X en \mathbb{R}^n y fijado un punto $p \in X$, el **espacio tangente a X en p** es el siguiente conjunto de vectores:

$$T_p X \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha'(0) : \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ camino diferenciable}, 0 \in I, \alpha(I) \subseteq X, \alpha(0) = p \}.$$

Los elementos de este conjunto se llaman **vectores tangentes a X en p** .

Dos comentarios:

(1) Si $\alpha'(0) = \mathbf{0}$ puede que la curva α no tenga una recta tangente bien determinada en $t = 0$ pero, por definición, incluimos el vector nulo en el conjunto $T_p X$. Es decir que aceptamos como elementos de $T_p X$ todas las derivadas $\alpha'(0)$, nulas y no nulas.

(2) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable contenido en X , entonces para cada $t \in I$ el vector $\alpha'(t)$ es tangente a X en $\alpha(t)$:

$$\alpha(I) \subseteq X \implies \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} X \text{ para todo } t \in I.$$

En efecto, fijado $t \in I$ definimos el nuevo intervalo $J = \{s - t : s \in I\}$ que cumple $0 \in J$, y el nuevo camino $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\beta(s) \equiv \alpha(s + t)$. Entonces β es diferenciable y está contenido en X luego el vector $\beta'(0) = \alpha'(t)$ pertenece a $T_{\alpha(t)} X$. Pero $\beta(0) = \alpha(t)$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Demostración. Sea $k = \dim X$. Fijado un punto $p \in X$, la proposición 105 proporciona un abierto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, con $p \in E$, tal que la parte $X \cap E$ es un grafo en el que unas variables $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})$ son puestas como funciones \mathcal{C}^s de las otras variables $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ que a su vez recorren un abierto W de \mathbb{R}^k . Esto equivale a que $X \cap E$ es la imagen $\Phi(W)$ de una parametrización grafo $\Phi(u) = P(u, \varphi(u))$ de las descritas al final del apartado 4.5. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo con $0 \in I$ y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ cualquier camino diferenciable contenido en X y tal que $\alpha(0) = p$. Como α es continua y E abierto, existe un intervalo $0 \in J \subseteq I$ tal que $\alpha(J) \subseteq E$. Entonces $\alpha : J \rightarrow X \cap E$ es, en realidad, de la siguiente forma:

$$J \ni t \mapsto \alpha(t) = P(u(t), \varphi(u(t))), \quad (50)$$

donde la función $u(t) : J \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^k$ es simplemente la proyección $\pi_{i_1 \dots i_k} \circ \alpha(t)$ y por lo tanto es diferenciable. Pero la identidad (50) es lo mismo que $\alpha(t) = \Phi \circ u(t)$, de donde:

$$\alpha'(0) = (d\Phi)_{u(0)}(u'(0)).$$

Para todos esos caminos, y las correspondientes funciones $u(t)$, el valor $u^0 = u(0)$ es siempre el mismo: el único $u^0 \in W$ tal que $p = \Phi(u^0)$. Tenemos, pues, un valor paramétrico fijado u^0 tal que todos los caminos α en X con $\alpha(0) = p$ verifican lo siguiente:

$$\alpha'(0) = (d\Phi)_{u^0}(u'(0)),$$

lo que nos lleva a la inclusión $T_p X \subseteq (d\Phi)_{u^0}(\mathbb{R}^k)$.

Si demostramos la inclusión recíproca $T_p X \supseteq (d\Phi)_{u^0}(\mathbb{R}^k)$, quedará probado que $T_p X$ es un espacio vectorial y que su dimensión es igual al rango de $(d\Phi)_{u^0}$, que es k . Pero esto es un caso particular de la segunda afirmación del teorema, que es lo que vamos a probar ahora.

Tenemos, pues, un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(U) \subseteq X$ y un punto $a \in U$ tal que $f(a) = p$. Queremos probar que $T_p X \supseteq (df)_a(\mathbb{R}^m)$.

Dado cualquier vector $v \in \mathbb{R}^m$ el camino $\beta(t) = a + tv$ está contenido en U para valores pequeños de t . El camino imagen $\alpha(t) = f(a + tv)$ está contenido en X y pasa por p en $t = 0$, luego

$$T_p X \ni \alpha'(0) = (df)_a(v).$$

Como v era cualquier vector de \mathbb{R}^m , queda visto que $T_p X \supseteq (df)_a(\mathbb{R}^m)$. □

Corolario 111. Si $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ es cualquier parametrización regular para X , entonces para todo $u^0 \in W$ el conjunto $\{\Psi_{u_1}(u^0), \dots, \Psi_{u_k}(u^0)\}$ es una base de $T_{\Psi(u^0)} X$.

Considerando una parametrización grafo $\Phi(u) = (u, \varphi(u))$ y haciendo $L = (d\Phi)_{u^0}$ se tiene:

$$\Phi_{u_1} = (\mathbf{e}_1, \varphi_{u_1}) = (\mathbf{e}_1, L(\mathbf{e}_1)), \dots, \Phi_{u_k} = (\mathbf{e}_k, \varphi_{u_k}) = (\mathbf{e}_k, L(\mathbf{e}_k)),$$

y se deduce que el espacio tangente a $\Phi(W)$ en el punto $p = \Phi(u^0) = (u^0, \varphi(u^0))$ es el conjunto $\{(v, L(v)) : v \in \mathbb{R}^k\}$, o sea el grafo de L .

4.7 Diferencial intrínseca

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

uuuu p0r q + r J(q) J(p) L(q, p) es un 0(||q - p||). (51)



Como todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes, para todas ellas es la misma la clase de funciones que son un $o(\|q - p\|)$.

Veamos, con un ejemplo, que la función lineal L no es única. Sean $X = \{y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x e^y$. Nos fijamos en el punto $p = (0, 0) \in X$ y para cada constante c consideramos la función lineal $L_c(x, y) = x + cy$. Describiendo el punto general de X como (x, x^2) , calculamos:

$$\begin{aligned} f(x, x^2) - f(0, 0) - L_c((x, x^2) - (0, 0)) &= f(x, x^2) - 0 - L_c(x, x^2) = \\ &= x e^{x^2} - (x + c x^2) = x(e^{x^2} - 1) - c x^2 = x O(x^2) + O(x^2) = O(|x|^3) + O(x^2) = \\ &= O(x^2) = o(|x|) = o(\|(x, x^2)\|) = o(\|(x, x^2) - (0, 0)\|). \end{aligned}$$

Vemos que, según la definición 112, la función f es diferenciable en p como función $X \rightarrow \mathbb{R}$, valiendo para ello cualquiera de las funciones lineales L_c . Se comprueba fácilmente que no vale ninguna otra: si el coeficiente de x en L no es 1 entonces $f(x, x^2) - L(x, x^2) \neq o(\|(x, x^2)\|)$. La función lineal L está, pues, *parcialmente determinada*: uno de sus coeficientes está fijo y el otro es libre. Otra manera de decirlo es que el valor $L(v)$ es único para los vectores particulares $v = (a, 0)$; pero éstos son, precisamente, los vectores tangentes a X en el punto p .

Teorema-definición 113. Si f es diferenciable en un punto $p \in X$ como función $X \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces todas las funciones lineales L que cumplen (51) tienen la misma restricción $L|_{T_p X}$ al espacio tangente.

Llamamos **diferencial intrínseca de f en p** a la función lineal $(df)_p : T_p X \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por una cualquiera de esas restricciones.

Demostración. Elegimos una tal L y un vector cualquiera $v \in T_p X$. Por definición del espacio tangente, existe un camino diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(I) \subseteq X$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Aplicamos (51) y obtenemos:

$$\begin{aligned} f(\alpha(t)) - f(\alpha(0)) &= \\ &= f(\alpha(t)) - f(p) = L(\alpha(t) - p) + o(\|\alpha(t) - p\|) = \\ &= L(\alpha(t) - \alpha(0)) + o(\|\alpha(t) - \alpha(0)\|), \end{aligned}$$

pero también tenemos $\alpha(t) - \alpha(0) = t \alpha'(0) + o(|t|) = t v + o(|t|) = O(|t|)$, luego:

$$\begin{aligned} f(\alpha(t)) - f(\alpha(0)) &= L(t v + o(|t|)) + o(O(|t|)) = \\ &= t L(v) + L(o(|t|)) + o(|t|) = t L(v) + o(|t|), \end{aligned}$$

de donde:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t L(v) + o(|t|)}{t} = L(v),$$

y llegamos a la igualdad $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) = L(v)$, en cuyo miembro de la izquierda no aparece L .

Esto demuestra que, cuando $v \in T_p X$, el valor $L(v)$ sólo depende de los datos X, p, f, v y no de la L que hayamos elegido cumpliendo (51). \square

Esta demostración nos da una fórmula para la diferencial intrínseca:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

hace una regla de la cadena para caminos en la variedad.

Cartagena99

Ahora nos planteamos cómo calcular la diferencial intrínseca. Vamos a tratar dos casos.

Primer caso: tenemos parámetros explícitos. Más en concreto, hay un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$, una parametrización $\Phi : W \rightarrow X$ y un valor $a \in W$ tal que $\Phi(a) = p$ y $(d\Phi)_a$ tiene rango $k = \dim X$. El corolario 111 nos dice que $\{\Phi_{u_1}(a), \dots, \Phi_{u_k}(a)\}$ es una base de $T_p X$ y la igualdad:

$$(df)_p(c_1 \Phi_{u_1}(a) + \dots + c_k \Phi_{u_k}(a)) = c_1 (df)_p(\Phi_{u_1}(a)) + \dots + c_k (df)_p(\Phi_{u_k}(a)),$$

nos dice que basta calcular los valores $(df)_p(\Phi_{u_1}(a)), \dots, (df)_p(\Phi_{u_k}(a))$ para conocer $(df)_p(v)$ para el vector general $v \in T_p X$. Dado $1 \leq i \leq k$, el camino $\beta(t) = a + t e_i$ está en W para t pequeño y $\alpha(t) = \Phi \circ \beta(t)$ es un camino en X con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \Phi_{u_i}(a)$. Aplicando (52):

$$(df)_p(\Phi_{u_i}) = (df)_p(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi) \circ \beta(t) = (f \circ \Phi)_{u_i}(a).$$

La diferencial intrínseca es la única función lineal $(df)_p : T_p X \rightarrow \mathbb{R}^m$ con el siguiente efecto sobre la base del corolario 111: $\Phi_{u_1}(a) \mapsto (f \circ \Phi)_{u_1}(a), \dots, \Phi_{u_k}(a) \mapsto (f \circ \Phi)_{u_k}(a)$.

Segundo caso: f es restricción a X de una función de n variables. Más en concreto, tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a X , una función diferenciable $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y definimos f como la restricción $f = F|_X$. Dados $p \in X$ y $v \in T_p X$, sabemos que existen caminos α , contenidos en X , con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Con uno de estos caminos calculamos:

$$(df)_p(v) = (df)_p(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ \alpha(t) = (dF)_p(v),$$

y resulta que $(df)_p$ es, simplemente, la restricción a $T_p X$ de la diferencial de F .

$$(df)_p = (dF)_p|_{T_p X}.$$

Esto es conveniente para ejemplos como el siguiente:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + e^x + 2y + \cos y = 2\},$$

que es un grafo $y = y(x)$ y también un grafo $x = x(y)$, pero ninguna de esas dos funciones es elemental y no tenemos una parametrización explícita para X . El punto $p = (0, 0)$ está en X y, derivando implícitamente: $1 + e^x + (2 - \sin y(x)) y'(x) = 0$, sacamos $y'(0) = -1$. La recta tangente $T_p X$ está generada por el vector $(1, -1)$. Para cualquier función diferenciable $F(x, y)$, definida en un abierto del plano que contenga a X , y la correspondiente función $f = F|_X$, tenemos entonces: $(df)_p((a, -a)) = (dF)_p((a, -a)) = a F_x(0, 0) - a F_y(0, 0) = DF_{(0,0)} \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$.

4.8 Espacio normal

Definición 114. Sea X una variedad de dimensión k en \mathbb{R}^n y sea $p \in X$. El **espacio normal a X en p** es el complemento ortogonal de $T_p X$, es decir

$$\{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v = 0 \text{ para todo } v \in T_p X\}.$$

Un vector de \mathbb{R}^n es **normal a X en p** si pertenece al espacio normal. La **codimensión de X** es la dimensión $n - k$ de sus espacios normales.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

hace más degado.

Cartagena99

Lema 115. Sean X una variedad en \mathbb{R}^n y F una función diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^n que contiene a X . Si F es constante en X entonces para cada punto $p \in X$ el gradiente ∇F_p es normal a X en p .

Demostración. Sea $v \in T_p X$. Existe un camino α contenido en X , con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Calculamos:

$$v \cdot \nabla_p F = (DF_p)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ \alpha(t) = \left. \frac{d \text{cte}}{dt} \right|_0 = 0.$$

□

Proposición 116. Sean $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f = (f_1, \dots, f_m) : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^s que es regular en todos los puntos del conjunto $X = \{x \in U_0 : f(x) = b\}$, que por lo tanto es una variedad en \mathbb{R}^n . Para cada punto $p \in X$, los gradientes $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)$ forman una base del espacio normal a X en p .

Demostración. Sea $p \in X$. Cada función f_i es constante en X , luego cada gradiente $\nabla f_i(p)$ es normal a X en p . La hipótesis de regularidad dice que $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)$ son linealmente independientes, luego son base de un subespacio \mathbb{V} de dimensión m del espacio normal a X en p . Pero $m = n - \dim X = n - \dim T_p X$ es la dimensión del espacio normal, luego \mathbb{V} es todo el espacio normal. □

Corolario 117. En las condiciones de la proposición 116, para cada punto $p \in X$ se tiene:

$$T_p X = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot \nabla f_1(p) = \dots = v \cdot \nabla f_m(p) = 0\}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $X \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto dado por $e^{x_1}(x_2 + x_3 + x_4) + x_2^3 x_3 e^{x_4} = e^2$. El gradiente de la ecuación:

$$(e^{x_1}(x_2 + x_3 + x_4), e^{x_1} + 3x_2^2 x_3 e^{x_4}, e^{x_1} + x_2^3 e^{x_4}, e^{x_1} + x_2^3 x_3 e^{x_4}),$$

no se anula en ningún punto de X . En efecto, en un punto $x \in X$, donde se anule la primera componente del gradiente, tiene que cumplirse $x_2^3 x_3 e^{x_4} = e^2$, con lo cual la cuarta componente del gradiente $e^{x_1} + e^2$ es positiva. Luego X es una variedad de dimensión $4 - 1 = 3$ y clase C^∞ en \mathbb{R}^4 . Dado $p = (2, -1, -1, 2) \in X$, nos planteamos hallar una base de $T_p X$.

Primer método: derivación implícita y corolario 111. El gradiente de la ecuación en p es $(0, -2e^2, 0, 2e^2)$ y, por ejemplo, hay un abierto $E \subset \mathbb{R}^4$, con $p \in E$, tal que $X \cap E$ es el grafo $\{x_2 = \varphi(x_1, x_3, x_4)\}$ de una función φ de clase C^∞ definida en un abierto $W \subset \mathbb{R}_{x_1 x_3 x_4}^3$ que contiene el punto $u^0 = (p_1, p_3, p_4) = (2, -1, 2)$. Además tenemos el dato $\varphi(u^0) = p_2 = -1$, que nos va a permitir calcular implícitamente las derivadas de φ en u^0 . En W se cumple la identidad:

$$e^{x_1} (\varphi(x_1, x_3, x_4) + x_3 + x_4) + \varphi(x_1, x_3, x_4)^3 x_3 e^{x_4} \equiv e^2,$$

que al derivarla respecto de x_1, x_3 y x_4 produce la siguiente identidad vectorial:

$$(e^{x_1} + 3\varphi^2 x_3 e^{x_4}) (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_3}, \varphi_{x_4}) + ((\varphi + x_3 + x_4) e^{x_1}, e^{x_1} + \varphi^3 e^{x_4}, e^{x_1} + \varphi^3 x_3 e^{x_4}) \equiv (0, 0, 0).$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

y, utilizando el corolario 111 y los datos (53), una base de $T_p X$ es:

$$\{ \Phi_{u_1}(u^0), \Phi_{u_3}(u^0), \Phi_{u_4}(u^0) \} = \{ (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \}.$$

Segundo método: corolario 117. Un vector $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ es tangente a X en p si y sólo si es ortogonal al gradiente en p de la ecuación: $0 = v \cdot (0, -2e^2, 0, 2e^2) = 2e^2(v_4 - v_3)$, de donde $T_p X = \{v_3 = v_4\}$. Esto vuelve a darnos la base anterior, pero con muchos menos cálculos.

Veamos otro ejemplo, pero ahora sólo usaremos el corolario 117, que hemos visto es más limpio. Sea ahora X el conjunto definido por el sistema (48) del apartado 4.3. En el punto $a' = (0, 0, 0, 1) \in X$ vimos que la jacobiana del sistema tiene las dos filas linealmente independientes, por lo tanto hay un abierto $E \subset \mathbb{R}^4$, con $a' \in E$, tal que $X \cap E$ es una variedad de dimensión $4 - 2 = 2$ y clase C^∞ , en \mathbb{R}^4 . Un vector $v \in \mathbb{R}^4$ es tangente a $X \cap E$ en a' si y sólo si es ortogonal a los gradientes en a' de las dos ecuaciones de (48), es decir ortogonal a las dos filas de la jacobiana en a' :

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las soluciones de este sistema vienen dadas por $v_1 = v_2 = 0$, luego $T_{a'}(X \cap E) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$.

Observación. El segundo ejemplo deja claro que si X viene dada por un sistema de ecuaciones $f(x) = b$, con los gradientes de las ecuaciones ∇f_i linealmente independientes en cada punto de X , entonces para todo punto $p \in X$ el espacio tangente $T_p X$ puede calcularse como un núcleo: $T_p X = \ker(df)_p$

4.9 Máximos y mínimos condicionados

Supongamos que queremos encontrar el punto más cercano al origen en la elipse

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 1\}.$$

Esto supone hallar el mínimo en X de la función $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es habitual llamar a ese valor el **mínimo de F sujeto a la condición $x^2 - xy + y^2 = 1$** , y por lo tanto es un ejemplo de **mínimo condicionado**. También podemos buscar el punto más lejano del origen en dicha elipse, es decir el **máximo de F sujeto a la condición $x^2 - xy + y^2 = 1$** , que es un ejemplo de **máximo condicionado**; dicho punto será también el más lejano del origen en la región R limitada por la elipse, es decir $R = \{(x, y) : x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$.

Es de señalar que F tiene un mínimo en todo su dominio: $F(0, 0) = 0$, pero que en X va a tener un mínimo diferente, estrictamente positivo. Por otra parte F no tiene máximo en todo su dominio, pero en X y en R sí va a alcanzar un máximo finito.

En general, un problema de mínimo condicionado pide hallar el mínimo de una función F en un conjunto X definido por unas cuantas *condiciones*, cada una de las cuales será una ecuación o una desigualdad. Análogamente un máximo condicionado. El máximo y el mínimo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Se atribuye la información proporcionada. $(df)_p = 0$.

Demostración. Vamos a demostrar que si p no es crítico para f entonces no puede ser ni máximo local ni mínimo local para f .

Suponemos, pues $(df)_p \neq 0$. Habrá algún vector $v \in T_p X$ con $(df)_p(v) \neq 0$ y tomando un camino α , contenido en X , con $\alpha(0) = p$ y $v = \alpha'(0)$, tendremos:

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) = (df)_p(\alpha'(0)) \neq 0.$$

Si $c > 0$ entonces será $f(\alpha(t)) > f(p)$ para t positivo y pequeño y será $f(\alpha(t)) < f(p)$ para t negativo y pequeño. Si $c < 0$ se invierten esas desigualdades. En ambos casos habrá puntos $q = \alpha(t)$, situados en X y arbitrariamente cerca de p , algunos con $f(q) > f(p)$ y otros con $f(q) < f(p)$, con lo cual p no será ni máximo local ni mínimo local para f . \square

Por otra parte, en el apartado 4.7 hemos visto que la diferencial intrínseca de $f = F|_X$ es la restricción de $(dF)_p$ al espacio tangente $T_p X$. Se deduce que las condiciones siguientes son equivalentes:

- p es un punto crítico de f .
- Para todo $v \in T_p X$ se tiene $0 = (df)_p(v) = (dF)_p(v) = \nabla F(p) \cdot v$.
- El vector $\nabla F(p)$ es normal a X en p .

Esto, junto con la proposición 116, nos lleva al siguiente resultado.

Teorema-definición 119. Sean un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una función diferenciable $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, un conjunto X definido por un sistema de ecuaciones

$$X = \{x \in U : f(x) = (f_1, \dots, f_m)(x) = b\},$$

cuyos gradientes son linealmente independientes en todo punto de X , con lo cual X es una variedad en \mathbb{R}^n . Entonces un punto $p \in X$ es un punto crítico de $f = F|_X$ si y sólo si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que:

$$\nabla F(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(p). \quad (54)$$

Además esos escalares son únicos y se los llama **multiplicadores de Lagrange**.

Combinando la proposición 118 y el teorema 119, llegamos a lo siguiente:

Para que un punto p realice el máximo o el mínimo de F en X es necesario (no suficiente) que cumpla las siguientes ecuaciones:

$$f(p) = b \quad , \quad \nabla F(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(p) ,$$

para ciertos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Vamos a aplicar esto a la búsqueda del punto de la elipse $X = \{x^2 - xy + y^2 = 1\}$ más cercano al origen y el más alejado del origen. Esos puntos existen porque la distancia al origen $\sqrt{x^2 + y^2}$ es continua y la elipse es compacta. Minimizar (o maximizar) la distancia equivale a hacerlo con

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$2y = -\lambda x + 2\lambda y$$



Enseguida se ve que no hay soluciones con $x = 0$, pues la primera ecuación daría $y = \pm 1$ y entonces la segunda y la tercera se convierten en $(0, 2y) = \lambda(-y, 2y)$, que es incompatible. Del mismo modo se ve que no hay soluciones con $y = 0$. Esto permite dividir la segunda ecuación por x y la tercera por y , lo cual da: $2 = \lambda \left(2 - \frac{y}{x}\right) = \lambda \left(2 - \frac{x}{y}\right)$, de donde $\lambda \neq 0$ y $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, luego $y = \pm x$.

En la primera ecuación, el caso $y = x$ da los puntos $p^\pm = \pm(1, 1)$ y el caso $y = -x$ da los puntos $q^\pm = \pm(1, -1)/\sqrt{3}$. En cada uno de esos puntos hallamos el multiplicador de Lagrange y la distancia al origen:

$$\text{en los puntos } p^\pm \text{ es } \lambda = 2 \text{ y } F(p^\pm) = \sqrt{2},$$

$$\text{en los puntos } q^\pm \text{ es } \lambda = 2/3 \text{ y } F(q^\pm) = \sqrt{2/3},$$

Concluimos que los puntos de la elipse más cercanos al origen son los q^\pm , con distancia $\sqrt{2/3}$, y los más lejanos del origen son los p^\pm con distancia $\sqrt{2}$.

Ahora vamos a hallar un máximo y un mínimo en una región definida por una *desigualdad*. Buscamos el máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = (x - 1)^2 + 4y^2$, así como los puntos donde se alcanzan, en la región $R = \{x^2 + y^2 \leq 3\}$. Esos puntos existen porque R es compacta. Separamos la región R en su interior, que es la bola abierta $U = \{x^2 + y^2 < 3\}$, y su frontera que es la circunferencia $X = \{x^2 + y^2 = 3\}$.

Para resolver el problema buscamos puntos de máximo y mínimo en U (si es que los hay), puntos de máximo y mínimo en X (que seguro que los hay, porque X es compacta) y comparamos valores de f en los puntos resultantes.

Un máximo o un mínimo de F en el interior, si existe, debe ser crítico para F , es decir que en él debe anularse el gradiente $\nabla F = (2x - 2, 8y)$. El único punto cumpliendo eso es el $p_0 = (1, 0)$, que guardamos para luego.

Un punto de máximo o mínimo de $F|_X$ tiene que satisfacer:

$$x^2 + y^2 = 3 \quad , \quad (2x - 2, 8y) = \lambda(2x, 2y) .$$

Puesto como sistema de ecuaciones escalares:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ x - 1 = \lambda x \\ 4y = \lambda y \end{array} \right\}$$

Las soluciones con $y = 0$ son los puntos $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Las soluciones con $y \neq 0$ tienen forzosamente $\lambda = 4$ y $x = -1/3$, luego son los puntos $(-1/3, \pm\sqrt{26}/3)$. Evaluamos:

$$F(p_0) = 0,$$

$$\text{en } p_1 = (\sqrt{3}, 0) \text{ es } \lambda = 1 - (1/\sqrt{3}) \text{ y } F(p_1) = (\sqrt{3} - 1)^2 \approx 0'53,$$

$$\text{en } p_2 = (-\sqrt{3}, 0) \text{ es } \lambda = 1 + (1/\sqrt{3}) \text{ y } F(p_2) = (\sqrt{3} + 1)^2 \approx 7'46,$$

$$\text{en } p^\pm = (-1/3, \pm\sqrt{26}/3) \text{ es } \lambda = 4 \text{ y } F(p^\pm) = 40/3 \approx 13'33.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

4.10 Hessiana intrínseca

En este apartado las funciones y las variedades se suponen al menos de clase \mathcal{C}^2 .

Sean un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. La forma Hessiana de f en un punto $p \in U$, tal como la hemos definido en el apartado 2.8, se obtiene al derivar f dos veces a lo largo de pequeños segmentos de recta afín:

$$\text{Hess}(f)_p(v) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(p + tv).$$

No podemos hacer exactamente lo mismo con una función definida en una variedad X en \mathbb{R}^n , porque puede no haber, o haber muy pocos, segmentos de recta contenidos en X .

Por ejemplo, se comprueba que la esfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ corta a cada recta afín de \mathbb{R}^3 a lo más en dos puntos. Como todo segmento de recta tiene (aunque sea muy corto) infinitos puntos, la esfera no contiene ningún segmento de recta.

En su lugar, vamos a derivar dos veces a lo largo de caminos contenidos en X . La función vendrá dada como una restricción $f = F|_X$ donde F está definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a X . Para cualquier camino $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ contenido en X , y por lo tanto en U , un cálculo fácil nos da lo siguiente:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\alpha(t)) = \frac{d^2}{dt^2} F(\alpha(t)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x'_i(t) x'_j(t) F_{x_i x_j}(\alpha(t)) + \sum_{i=1}^n x''_i(t) F_{x_i}(\alpha(t)),$$

es decir:

$$(F \circ \alpha)''(t) = \text{Hess}(F)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) + \alpha''(t) \cdot \nabla F(\alpha(t)). \quad (55)$$

El término $\alpha''(t) \cdot \nabla F(\alpha(t))$ no apareció en el apartado 2.8 porque los caminos de la forma $\alpha(t) = p + tv$ tienen $\alpha''(t) \equiv \mathbf{0}$. Pero un camino contenido en la variedad X estará obligado, casi siempre, a tener α'' no nula.

Dado un punto $p \in X$, lo que vamos a hacer ahora es ajustar la función que extiende f al abierto U , es decir cambiar F por otra función $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ que también cumpla $f = G|_X$ y además tenga $\nabla G(p) = \mathbf{0}$. Como $(df)_p = (dG)_p|_{T_p X}$, para que una tal G pueda existir es necesario que sea $(df)_p = 0$, es decir que p tiene que ser un punto crítico de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

La Hessiana intrínseca de una función definida en una variedad sólo se define en los puntos críticos de dicha función.

Es el precio que pagamos por no tener segmentos de recta en X .

Suponemos X definida por un sistema de m ecuaciones escalares:

$$X = \{x \in U : h_1(x) = b_1, \dots, h_m(x) = b_m\},$$

con $h = (h_1, \dots, h_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ al menos de clase \mathcal{C}^2 y los gradientes $\nabla h_1, \dots, \nabla h_m$ linealmente independientes en cada punto de X . Entonces sabemos que p es un punto crítico de $f = F|_X$ si y sólo si $\nabla F(p) = \lambda_1 \nabla h_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla h_m(p)$ para unos multiplicadores de

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Teorema-definición 120. Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y el punto $p \in X$ crítico para f , para cualquier camino $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, contenido en X y con $\alpha(0) = p$, el número $(f \circ \alpha)''(0)$ depende solamente del vector $v = \alpha'(0) \in T_p X$ definiendo así una función escalar $Q(v) = (f \circ \alpha)''(0)$. Esta función $Q : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$ resulta ser una forma cuadrática en el espacio $T_p X$ y la llamamos **forma Hessiana intrínseca de f en el punto crítico p .**

Demostración.

Hacemos uso de la función G_0 que acabamos de describir, que cumple $f = G_0|_X$ y $\nabla G_0(p) = \mathbf{0}$. Aplicamos a G_0 la fórmula (55) y obtenemos:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)''(0) &= (G_0 \circ \alpha)''(0) = \text{Hess}(G_0)_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) + \alpha''(0) \cdot \nabla G_0(\alpha(0)) = \\ &= \text{Hess}(G_0)_p(v) + \alpha''(0) \cdot \nabla G_0(p) = \text{Hess}(G_0)_p(v) + \alpha''(0) \cdot \mathbf{0}, \end{aligned}$$

y el resultado no depende de $\alpha''(0)$ porque este vector está multiplicado por $\mathbf{0}$. Llegamos a:

$$(\alpha \subset X \text{ y } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = v) \implies (f \circ \alpha)''(0) = \text{Hess}(G_0)_p(v),$$

y, efectivamente, fijados f y el punto crítico p el resultado sólo depende de $v \in T_p X$ y es una forma cuadrática actuando sobre v . \square

Tenemos, además, una fórmula para la Hessiana intrínseca: $Q = \text{Hess}(G_0)_p|_{T_p X}$, pero vamos a hacerle una simplificación. Definimos la función:

$$G = F - \lambda_1 h_1 - \dots - \lambda_m h_m,$$

que es tal que $G_0 = G + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = G + \text{cte.}$ Entonces:

$$\text{Hess}(G_0)_p = \text{Hess}(G)_p = \text{Hess}(F)_p - \lambda_1 \text{Hess}(h_1)_p - \dots - \lambda_m \text{Hess}(h_m)_p.$$

Finalmente, pues, la fórmula para la Hessiana intrínseca de f en el punto crítico p es:

$$Q = \left(\text{Hess}(F)_p - \lambda_1 \text{Hess}(h_1)_p - \dots - \lambda_m \text{Hess}(h_m)_p \right) \Big|_{T_p X}$$

y es una forma cuadrática $Q : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f \circ \alpha)''(0) = Q(\alpha'(0))$ para todo camino α contenido en X y tal que $\alpha(0) = p$.

Lema 121. Si la Hessiana intrínseca toma un valor negativo entonces el punto crítico p no es un mínimo local de f . Si la Hessiana intrínseca toma un valor positivo entonces p no es un máximo local de f .

Corolario 122. Para que el punto crítico p sea mínimo local de f es necesario (no suficiente) que la hessiana intrínseca sea semidefinida positiva. Para que p sea máximo local de f es necesario (no suficiente) que la Hessiana intrínseca sea semidefinida negativa.

Si la Hessiana intrínseca es indefinida (degenerada o no) entonces p no es ni máximo local ni mínimo local de f .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Demostración. Tomamos un abierto E de \mathbb{R}^n contenido en el dominio U de F , con $p \in E$ y tal que la parte $X \cap E$ sea un grafo donde $n-k$ variables sean puestas como funciones C^s de las otras k variables, que a su vez recorren un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$. La correspondiente parametrización grafo $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ es biyectiva de W a $X \cap E$. La función $f \circ \Phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^s porque se la puede escribir como $F \circ \Phi$, compuesta de dos funciones C^s con el abierto E como dominio intermedio.

Dado el punto $a \in W$ tal que $p = \Phi(a)$, la diferencial $(d\Phi)_a$ es un isomorfismo de \mathbb{R}^k a $T_p X$. El punto a es crítico para $f \circ \Phi$ porque $(d(f \circ \Phi))_a = (df)_p \circ (d\Phi)_a = 0 \circ (d\Phi)_a = 0$. En cuanto a la Hessiana, es fácil ver que:

$$\text{Hess}(f \circ \Phi)_a \equiv Q \circ (d\Phi)_a : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde Q es la Hessiana intrínseca de f en el punto crítico p . Como $(d\Phi)_a$ es un isomorfismo, si Q es definida (positiva o negativa) entonces $\text{Hess}(f \circ \Phi)_a$ es definida del mismo signo que Q . Aplicando a $f \circ \Phi$ y a el teorema 74 del apartado 2.9, deducimos que a es un mínimo local estricto para $f \circ \Phi$ si Q es definida positiva o un máximo local estricto si Q es definida negativa. Finalmente, como Φ es biyectiva del entorno W de a al entorno relativo $X \cap E$ de p , deducimos que p es un mínimo (resp. máximo) local estricto de f si a lo es de $f \circ \Phi$. \square

Ejemplo. Sean $X = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $f = F|_X$, donde $F(x, y, z) = x^2 + y$. Calculamos:

$$\nabla F = (2x, 1, 0) \quad , \quad \text{Hess}(F) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = (x, y, z).$$

En cualquier punto $p \in X$, es $T_p X = \left\{ \nabla \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) (p) \right\}^\perp = \{p\}^\perp$.

Las soluciones al problema de multiplicadores de Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ 2x &= \lambda x \\ 1 &= \lambda y \\ 0 &= \lambda z \end{aligned} \right\}$$

son las siguientes:

$$p^\pm = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad , \quad \lambda = 2,$$

$$q^+ = (0, 1, 0) \quad , \quad \lambda = 1,$$

$$q^- = (0, -1, 0) \quad , \quad \lambda = -1.$$

En los puntos p^\pm , una base de $T_{p^\pm} X$ es $\{v_1, v_2\} = \{(0, 0, 1), (-1, \pm\sqrt{3}, 0)\}$. Como en estos puntos es $\lambda = 2$, para ellos consideramos la matriz:

$$A = \text{Hess}(F) - 2 \cdot \text{Hess} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{bmatrix},$$

y entonces la matriz respecto de la base $\{v_1, v_2\}$ de la Hessiana intrínseca en p^\pm es:

$$[v_1^t A v_1 \quad v_1^t A v_2]$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

y entonces la matriz respecto de la base $\{w_1, w_2\}$ de la Hessiana intrínseca en q^+ es:

$$\begin{bmatrix} w_1^t B^+ w_1 & w_1^t B^+ w_2 \\ w_2^t B^+ w_1 & w_2^t B^+ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix},$$

indefinida, luego q^+ no es ni máximo ni mínimo local de $F|_X$ (es una silla no degenerada, véase el apartado 4.11).

Como en q^- es $\lambda = -1$, para este punto consideramos la matriz:

$$B^- = \text{Hess}(F) - (-1) \cdot \text{Hess} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

y entonces la matriz respecto de la base $\{w_1, w_2\}$ de la Hessiana intrínseca en q^- es:

$$\begin{bmatrix} w_1^t B^- w_1 & w_1^t B^- w_2 \\ w_2^t B^- w_1 & w_2^t B^- w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

definida positiva, luego q^- es un mínimo local estricto de $F|_X$.

Los valores observados:

$$F(p^\pm) = 5/4, \quad F(q^+) = 1, \quad F(p^-) = -1,$$

permiten decir que p^\pm son puntos de máximo, que q^- es punto de mínimo y que p^+ es un punto crítico de valor intermedio. Pero sin la Hessiana intrínseca no es posible decir si q^+ es máximo local (no global) o mínimo local (no global) o ninguna de las dos cosas.

4.11 Lema de Morse

Aquí enunciamos un resultado del matemático estadounidense Marston Morse².

Teorema 124. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^k$ un abierto y $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ . Sea $a \in U$ un **punto crítico no degenerado**, es decir que $(dg)_a = 0$ y la Hessiana de g en a es una forma cuadrática Q no degenerada (puede ser indefinida). Entonces en un entorno U^a existe un difeomorfismo $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ con $\sigma(a) = \mathbf{0}$ y tal que $g|_{U^a} \equiv Q(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$.

El resultado se pasa de \mathbb{R}^k a funciones en variedades $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, sin más que aplicarlo a la compuesta $g = f \circ \Phi$, como hemos hecho en la demostración del teorema 123.

Ejemplo. Supongamos que $a = (a_1, a_2)$ es un punto crítico de $g(x, y)$ y que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ es $\text{Hess}(g)_a(v) = v_1^2 - 5v_2^2$, indefinida pero no degenerada. Entonces hay unas coordenadas curvilíneas σ_1, σ_2 cerca de a tales que $\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = 0$ y $g \equiv \sigma_1^2 - 5\sigma_2^2$ en dicho entorno. El grafo de g cerca de a es la preimagen de la silla cuadrática $S = \{z = x^2 - 5y^2\}$ por el siguiente difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^3 : $(x, y, z) \mapsto (\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y), z)$, es decir que el grafo de g es una ligera deformación de la silla S . Las curvas de nivel de g se ven como hipérbolas en las coordenadas σ_1, σ_2 . Por estas razones decimos que g tiene una **silla no degenerada**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

la de morse-Bard.

Cartagena99

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized 'C' or a wave. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

5 Integrales sobre caminos

5.1 Integrandos para caminos

Definición 125. Un integrando (de primer orden) para caminos en \mathbb{R}^n es una función escalar $L(x, v)$ donde x, v son elementos de \mathbb{R}^n y el par (x, v) recorre un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

La integral de L sobre un camino $\alpha(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el número $\int_{\alpha} L$ que se calcula de la manera siguiente. Se hace actuar L sobre las parejas punto-velocidad $(\alpha(t), \alpha'(t))$ del camino, dando lugar a la función $[t_0, t_1] \ni t \mapsto L(\alpha(t), \alpha'(t))$, y se hace:

$$\int_{\alpha} L \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t=t_0}^{t=t_1} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt .$$

Veamos una notación que permite dar y manipular ágilmente esos integrandos. Sólo necesitamos introducir un sencillo concepto.

Definición 126. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ al menos C^1 . El campo diferencial df significa dos cosas a la vez:

1. La función que a cada par (x, v) le asocia el número $(df)_x(v) = D_v f(x)$, Aquí es $x \in U$ pero v puede ser cualquier vector de \mathbb{R}^n .
2. El **campo** que a cada punto $x \in U$ le asocia la función lineal $(df)_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir que df es el campo de formas lineales que reúne todas las diferenciales $(df)_x$ en un solo objeto.

Apliquemos esto a las funciones coordenadas $x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$. La función x_j es la definida por $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$. Su campo diferencial dx_j es la función

$$(dx_j)(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} v_j ,$$

que lo único que hace es darnos la j -ésima entrada del vector v .

Las $2n$ funciones $x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n$ son las coordenadas estándar $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$ en el espacio \mathbb{R}^{2n} de los pares (x, v) . Dado un camino $\alpha(t) \equiv (x_1(t), \dots, x_n(t))$, es más fácil recordar $(dx_j)(\alpha(t), \alpha'(t)) = x'_j(t)$ que recordar $v_j(\alpha(t), \alpha'(t)) = x'_j(t)$. Entonces preferimos escribir dx_j mejor que v_j , ya que nuestro propósito ahora es integrar sobre caminos.

Cualquier fórmula en las funciones $x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n$ define un integrando para caminos $L(x, v)$. Ejemplos en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv x_1 x_2 dx_1 + x_2^3 e^{dx_2} & \text{actúa como} & & L_1(x, v) &= x_1 x_2 v_1 + x_2^3 e^{v_2} , \\ L_2 &\equiv 7 + x_1 (\cos x_2) \frac{dx_2}{dx_1} & \text{actúa como} & & L_2(x, v) &= 7 + x_1 (\cos x_2) \frac{v_2}{v_1} , \\ L_3 &\equiv (\log x_1) dx_1 dx_2 & \text{actúa como} & & L_3(x, v) &= (\log x_1) v_1 v_2 . \end{aligned}$$

El dominio de cada ejemplo es un abierto de \mathbb{R}^4 : L_1 está definido en todo \mathbb{R}^4 , L_2 está definido en los (x, v) con $v_1 \neq 0$ y L_3 en los (x, v) con $x_1 > 0$.

Definición 127. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ al menos C^1 . El campo diferencial df significa dos cosas a la vez:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

\int_{α}

\int_{α}

$dx_1)$

\int_{t_0}

$x_1(t))$

Podemos integrar L_3 sobre los caminos que cumplan $x_1(t) > 0$, es decir caminos contenidos en el semiplano $\{x_1 > 0\}$, siendo:

$$\int_{\alpha} L_3 = \int_{\alpha} (\log x_1) dx_1 dx_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\log x_1(t)) x'_1(t) x'_2(t) dt .$$

5.2 Cambio de parámetro

Definición 127. *Dados intervalos $I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$ y un difeomorfismo $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$, para cada camino $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la correspondiente **reparametrización** de α es el camino $\alpha \circ \sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, es decir el resultado de efectuar en $\alpha(t)$ el cambio de parámetro $t = \sigma(\tilde{t})$.*

El camino α y el reparametrizado $\alpha \circ \sigma$ tienen el mismo conjunto imagen $\alpha(I) = (\alpha \circ \sigma)(\tilde{I})$ y los dos pasan *el mismo número de veces* por cada punto de dicha imagen. Por ejemplo, tanto el camino

$$\alpha(t) \equiv (\cos t, \sin t) : [0, 5\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (56)$$

como sus reparametrizaciones tienen por imagen la circunferencia unidad, pasando dos veces por cada punto de ella en el primer cuadrante y una sola vez por los demás puntos. La restricción al intervalo abierto $\alpha|_{(0,5\pi/2)}$ pasa dos veces por los puntos de la circunferencia *interiores* al primer cuadrante y pasa una sola vez por los otros puntos; igual hacen sus reparametrizaciones.

Efecto sobre el sentido. Si el cambio de parámetro $t = \sigma(\tilde{t})$ es (estrictamente) creciente, entonces el reparametrizado $\alpha \circ \sigma$ avanza en el mismo sentido que α . Si, por el contrario, σ es decreciente, entonces $\alpha \circ \sigma$ avanza en sentido opuesto al de α y se intercambian punto inicial y punto final. Por ejemplo el camino (56) recorre la circunferencia en el sentido antihorario, empezando en $(1, 0)$ y terminando en $(0, 1)$; mientras que la siguiente reparametrización:

$$\beta(\tilde{t}) \equiv \alpha(-\tilde{t}/4) \equiv \left(\cos \frac{-\tilde{t}}{4}, \sin \frac{-\tilde{t}}{4} \right) : [-10\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

recorre la circunferencia en sentido horario, empezando en $(0, 1)$ y terminando en $(1, 0)$.

Definición 128. *Un integrando para caminos $L(x, v)$ es **paramétrico** si al reparametrizar el camino conservando el sentido de avance la integral no cambia. Es decir que para todo $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sobre el que L pueda integrarse, y todo difeomorfismo creciente $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$, se tiene:*

$$\int_{\alpha} L = \int_{\alpha \circ \sigma} L .$$

Intuitivamente, lo que se pretende con esta definición es que, al menos para caminos α no muy complicados, el número $\int_{\alpha} L$ esté determinado por el número de veces que se pasa por cada punto de la imagen $\alpha(I)$ junto con el sentido de avance de α . En particular, si $\alpha(t)$ es inyectivo (salvo por un número finito de valores de t) entonces $\int_{\alpha} L$ quedaría determinado por la imagen $\alpha(I)$ junto con el sentido de avance.

Teorema 129. *$L(x, v)$ es un integrando paramétrico para caminos si y sólo si es positivamente homogéneo de grado 1 en la variable vectorial v , es decir:*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

y entonces, como $\sigma' > 0$:

$$\int_{\alpha \circ \sigma} L = \int_{\tilde{t} \in \tilde{I}} L(\alpha \circ \sigma(\tilde{t}), \sigma'(\tilde{t}) \cdot \alpha'(\sigma(\tilde{t}))) d\tilde{t} = \int_{\tilde{t} \in \tilde{I}} \sigma'(\tilde{t}) \cdot L(\alpha \circ \sigma(\tilde{t}), \alpha'(\sigma(\tilde{t}))) d\tilde{t},$$

y, como $\sigma' = |\sigma'|$, la fórmula de cambio de variable en integrales simples nos dice que:

$$\int_{\alpha \circ \sigma} L = \int_{t \in \sigma(\tilde{I})} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_{t \in I} L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_{\alpha} L \quad \square$$

Para que $L(x, v)$ sea un integrando paramétrico no basta con que sea homogéneo en v , es absolutamente necesario que su grado sea 1. Probemos, por ejemplo, con $L \equiv (dx_1)^2$, que es homogéneo pero de grado 2, y con el camino $\alpha(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$. Es obvio que $\int_{\alpha} L = 1$. Ahora reparametrizamos α mediante $\sigma(\tilde{t}) : \tilde{I} \rightarrow I$ dado por $\tilde{I} = [0, 2]$ y $\sigma(\tilde{t}) \equiv \tilde{t}/2$, que es creciente. Se calcula $\int_{\alpha \circ \sigma} L = \int_0^2 (1/2)^2 d\tilde{t} = 2 \cdot (1/4) = 1/2$. Queda claro que la integral es sensible a cambios crecientes de parámetro, luego $(dx_1)^2$ no es un integrando paramétrico.

5.3 Invariancias adicionales

En el apartado anterior hemos considerado transformaciones en el dominio del camino α : difeomorfismos crecientes $\tilde{I} \rightarrow I$, y nos hemos preguntado por los integrandos L para los que estos cambios no alteran la integral $\int_{\alpha} L$. Ahora exigimos que, además, ciertas transformaciones del codominio \mathbb{R}^n tampoco alteren la integral. Concretamente, queremos que la integral no cambie al rotar o trasladar el camino.

Teorema 130. *Sea $L(x, v)$ un integrando paramétrico para caminos. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. Si F es cualquier movimiento de \mathbb{R}^n , entonces $\int_{F \circ \alpha} L = \int_{\alpha} L$.
2. Se tiene $L \equiv c \cdot \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}$, es decir $L(x, v) \equiv c \cdot \|v\|_2$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Demostración parcial. Sólo demostraremos que 2. implica 1. Cada movimiento F viene dado por un vector constante b y una matriz constante $A \in O(n)$, de modo que $F(x) \equiv b + Ax$ y $F \circ \alpha(t) \equiv b + A\alpha(t)$. Calculamos:

$$\int_{F \circ \alpha} L = \int_{t \in I} c \|A\alpha'(t)\|_2 dt = \int_{t \in I} c \|\alpha'(t)\|_2 dt = \int_{\alpha} L. \quad \square$$

Para especificar el valor de la constante c basta establecer el valor de la integral sobre un camino concreto. Exigiendo que para el camino $\alpha(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $\alpha(t) \equiv t \mathbf{e}_1$, la integral sea igual a 1, queda determinado el integrando $L(x, v) \equiv \|v\|_2$.

Definición 131. *Llamamos **longitud** del camino $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la integral $\int_{t \in I} \|\alpha'(t)\|_2 dt$, asociada al integrando $L \equiv \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}$.*

La longitud es, pues, la más invariante de las integrales paramétricas sobre caminos.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cursos de Cálculo y Series de Potencia $\int_{\alpha} f(x) dx$.

Cartagena99

5.4 Los integrandos más sencillos

Si lo que queremos es que $L(x, v)$ sea (positivamente) homogéneo de grado 1 en la variable v , lo más sencillo es fijarnos en los que son lineales en v .

Definición 132. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Una **1-forma** o **forma de Pfaff** en U es un integrando $\omega(x, v)$, $(x, v) \in U \times \mathbb{R}^n$, que es lineal en la variable v . Esto quiere decir que para cada punto $x \in U$ la correspondiente función $\omega_x(\cdot) = \omega(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $v \mapsto \omega(x, v)$, es lineal.

La fórmula que describe estos integrandos es especialmente sencilla, pues todos ellos se expresan como:

$$\omega \equiv a_1(x) dx_1 + \dots + a_n(x) dx_n ,$$

para ciertas funciones escalares $a_1(x), \dots, a_n(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$. Una manera útil de entenderlos es como **campos de formas lineales** en U , pues asocian a cada punto $x \in U$ una función lineal ω_x cuya matriz, la fila $[a_1(x) \ a_2(x) \ \dots \ a_n(x)]$, puede variar a medida que el punto x se mueve dentro del abierto U .

Ejemplo especial. Un caso particular de las integrales que estamos considerando en este apartado es el **trabajo** hecho por un *campo de fuerzas* $\mathbf{F}(x) \equiv (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ a lo largo de un camino $\alpha(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, que es la siguiente integral:

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\alpha} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) .$$

Las formas de Pfaff satisfacen la identidad $\omega_x(-v) \equiv -\omega_x(v)$, de donde dado un difeomorfismo $\sigma : \tilde{I} \rightarrow I$ se tiene:

$$\int_{\alpha \circ \sigma} \omega = \begin{cases} \int_{\alpha} \omega & \text{si } \sigma \text{ es creciente} \\ - \int_{\alpha} \omega & \text{si } \sigma \text{ es decreciente} \end{cases} \quad (57)$$

Así, pues, la integral de una forma de Pfaff es sensible al sentido de avance del camino, de modo que se multiplica por -1 al invertir dicho sentido de avance.

Existen unas formas de Pfaff particulares cuyas integrales muestran una invariancia extremadamente fuerte:

Definición 133. Una forma de Pfaff es **exacta** en U si coincide con el campo diferencial df de una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Su fórmula en coordenadas es: $df \equiv f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_n} dx_n$. Dada una forma de Pfaff exacta ω , llamamos **potenciales** de ω a las funciones diferenciables f tales que $df \equiv \omega$.

Teorema 134. Sea ω una forma de Pfaff en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1) ω es exacta en U .
- 2) Para todo camino $\alpha \subset U$, la integral $\int_{\alpha} \omega$ sólo depende de los puntos inicial y final

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$dt \int_{\alpha(t)} \omega_x(\alpha(t))$

de donde:

$$\int_{\alpha} df = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) dt = f(\alpha(t_1)) - f(\alpha(t_0)),$$

sólo depende de los puntos $\alpha(t_0), \alpha(t_1)$:

Mientras mantengamos los extremos intactos, el inicial como inicial y el final como final, el valor de una integral exacta no cambia por mucho que cambiemos el camino.

Que α sea un camino cerrado significa que $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$, de donde $f(\alpha(t_1)) - f(\alpha(t_0)) = 0$ y así $\int_{\alpha} df = 0$.

Veamos ahora que 3) \Rightarrow 2). Sean α, β dos caminos en U que empiezan en un punto p y terminan en un punto q . El camino γ , que consiste en recorrer primero α y luego una reparametrización de β con el sentido de avance invertido, es un camino cerrado. Luego:

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega, \quad (58)$$

y queda visto que $\int_{\alpha} \omega$ y $\int_{\beta} \omega$ son iguales si los extremos de α y β son iguales; esto es lo que afirma 2).

Veamos por último que que 2) \Rightarrow 1). Para construir una función f tal que $\omega \equiv df$, o sea un potencial para ω , fijamos un punto $p_0 \in U$ y, para todo $p \in U$, elegimos un camino suave α_p en U que comience en p_0 y termine en p . Entonces hacemos:

$$f(p) = \int_{\alpha_p} \omega,$$

y la propiedad 2) nos dice que el valor $f(p)$ sólo depende de p y no de la elección que hayamos hecho para α_p , luego esta f está bien definida. Afirmamos que en cada $p \in U$ se cumple $f_{x_j}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, n$. Se prueba que $f_{x_1}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_1)$ eligiendo un primer camino α_p^1 que termina en un pequeño segmento paralelo a \mathbf{e}_1 y con extremo final p . Se prueba que $f_{x_2}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_2)$ eligiendo un segundo camino α_p^2 que termina en un pequeño segmento paralelo a \mathbf{e}_2 y con extremo final p . Así sucesivamente, hasta llegar a $f_{x_n}(p) = \omega_p(\mathbf{e}_n)$ que se prueba eligiendo un n -ésimo camino α_p^n que termina en un pequeño segmento paralelo a \mathbf{e}_n y con extremo final p .

Al tener f derivadas parciales f_{x_1}, \dots, f_{x_n} en todo punto de U , respectivamente iguales a las funciones $\omega(\mathbf{e}_1), \dots, \omega(\mathbf{e}_n)$, que son continuas, resulta que f es una función diferenciable en U y tal que $(df)_p = \omega_p$ para todo $p \in U$. \square

Comentarios. (1) En realidad el camino γ de la demostración anterior es \mathcal{C}^1 a trozos: puede tener una "esquina" en el punto final de α . Todo integrando para caminos se integra a lo largo de los caminos \mathcal{C}^1 a trozos, y es evidente cómo hacerlo: se integra en cada tramo \mathcal{C}^1 y se suman los resultados. Suponemos, pues, enunciada la condición 3) del teorema 134 para esta clase un poco más general de caminos.

(2) En la fórmula (58) de la demostración precedente, ha sido crucial que $\int_{\beta} \omega$ cambie de signo al invertir el sentido de avance del camino. El teorema 134 es cierto gracias a la sensibilidad al cambio de sentido expresada por las fórmulas (57).

Ninguna de las condiciones del teorema anterior es fácil de comprobar en la práctica. Para eso

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

o, entonces cada forma de $\int_{\alpha} df$ que cambia esto es exacta en U .

Demostración. Estamos suponiendo que ω es, al menos, de clase \mathcal{C}^1 . Si en un abierto $V \subseteq U$ tenemos $\omega \equiv df$, entonces f es al menos de clase \mathcal{C}^2 y, por el teorema de Schwarz, debe cumplir $f_{x_j x_i} \equiv f_{x_i x_j}$ para cualesquiera i, j , luego $a_{j, x_i} \equiv a_{i, x_j}$, en V . Como se recubre todo U por abiertos pequeños V , en los que hay potenciales para ω , se tiene $a_{j, x_i} \equiv a_{i, x_j}$ en todo U .

Sea ahora ω cumpliendo las condiciones de derivadas cruzadas. Entonces sabemos calcular, por un método aprendido en el curso de Cálculo (lo recordamos un poco más abajo) funciones f tales que $df \equiv \omega$. Dicho método de cálculo funciona en abiertos *convexos*, en los cuales ω es, pues, exacta. Como para todo punto $p \in U$ existe una bola $B(p, r)$ contenida en U , y las bolas son convexas, resulta que ω es exacta en esas bolas, es decir localmente exacta en U . \square

Ejemplo estándar de una 1-forma cerrada que no es exacta:

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad , \quad \omega = (x dy - y dx)/(x^2 + y^2) .$$

El camino $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, contenido en U , es cerrado pero $\int_{\alpha} \omega = 2\pi$ no es cero, luego ω no es exacta. Es trivial comprobar que esta ω satisface la condición de derivadas cruzadas. El abierto U , en el que ω está definida, es conexo pero está lejos de ser convexo.

Recuerdo de método. Se calcula un potencial en cualquier abierto convexo en el que ω satisfaga las condiciones de derivadas cruzadas. El método consiste en ir reduciendo el número de variables que aparecen en la forma. Hagámoslo para $\omega \equiv e^z dx + z dy + (xe^z + y + \cos z) dz$. La función $f_1 \equiv \int_0^x e^z dx \equiv xe^z$ es tal que ω y df_1 tienen el mismo coeficiente de dx , luego va a ser $\omega - df_1 \equiv b_2 dy + b_3 dz$ para ciertas funciones b_2, b_3 . Además df_1 , siendo exacta, cumple las condiciones de derivadas cruzadas y $\omega - df_1$ también las cumple, lo que fuerza $b_{1x} \equiv b_{2x} \equiv 0$, es decir que la variable x no va a aparecer en $\omega - df_1$ por ninguna parte. Efectivamente:

$$\omega - df_1 = z dy + (y + \cos z) dz .$$

La función $f_2 \equiv \int_0^y z dy \equiv zy$, además de no depender de x , es tal que $\omega - df_1 - df_2$ sólo tiene no nulo el coeficiente de dz , el cual no depende ni de x ni de y : $\omega - df_1 - df_2 \equiv \cos z dz$. Finalmente $f_3 \equiv \int_0^z \cos z dz \equiv \sin z$ sólo depende de z y es tal que $\omega - df_1 - df_2 - df_3 \equiv 0$, es decir $\omega \equiv d(f_1 + f_2 + f_3) \equiv d(xe^z + zy + \sin z)$.

El método hace uso de integraciones *en una variable cada vez*, que pueden verse como integraciones a lo largo de segmentos paralelos a los ejes coordenados. Esto se puede hacer de una manera consistente, de modo a obtener funciones definidas en todo el abierto U , si la intersección de U con cada recta afín paralela a un eje es o vacía o “ininterrumpida”, es decir consistente en un segmento y nada más, una semirrecta y nada más, o la recta entera. Esta “ausencia de interrupciones” está garantizada si U es convexo.

Proposición 136. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo y ω es una 1-forma exacta en U , entonces dos potenciales cualesquiera de ω difieren en una constante.

Demostración. Si $\omega \equiv df \equiv dg$ entonces $h = f - g$ es tal que $dh \equiv 0$. Fijemos un punto $p_0 \in U$. Dado cualquier otro punto $p \in U$, existe un camino $\alpha(t) : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$, además podemos tomar α diferenciable. Por la regla de la cadena:

$$d h(\alpha(t)) = (dh)_{\alpha(t)} (\alpha'(t)) = 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



5.5 Pullback de formas de Pfaff

Denotamos por \mathbb{R}_u^k el espacio \mathbb{R}^k con coordenadas (u_1, \dots, u_k) ; análogamente \mathbb{R}_x^n . Tenemos abiertos $U_1 \subseteq \mathbb{R}_u^k$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}_x^n$ y una aplicación diferenciable $U_1 \rightarrow U_2$ escrita como $x = f(u)$. Entonces a partir de cada 1-forma ω en U_2 se obtiene una 1-forma $f^*\omega$ en U_1 dada por:

$$\text{para } p \in U_1 \text{ y } v \in \mathbb{R}^k \text{ es } (f^*\omega)_p(v) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{f(p)}((df)_p v).$$

La 1-forma $f^*\omega$ recibe el nombre de **pullback de ω por f** (en castellano sería “traída de ω por f ”, pero se usa el nombre inglés).

El pullback $f^*\omega$ es muy fácil de calcular a partir de una expresión de ω en coordenadas:

$$\omega \equiv a_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) dx_n, \quad (59)$$

y de las funciones que definen f :

$$f(u) \equiv (x_1(u) \dots x_n(u));$$

simplemente se sustituye en (59) cada x_j por la función $x_j(u)$, se hacen las operaciones y se reagrupa.

Aclaremos eso con un ejemplo. Consideramos la siguiente 1-forma en \mathbb{R}_x^3 :

$$\omega \equiv x_1 dx_1 - dx_2 + (x_1 + x_3) dx_3,$$

y la aplicación $f : \mathbb{R}_u^2 \rightarrow \mathbb{R}_x^3$ dada por:

$$(x_1, x_2, x_3) = f(u_1, u_2) = \left(1 + u_1 + u_2, u_1 u_2 + \frac{u_2^2}{2}, -u_1 \right),$$

entonces:

$$f^*\omega = (1 + u_1 + u_2) d(1 + u_1 + u_2) - d\left(u_1 u_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) + (1 + u_1 + u_2 - u_1) d(-u_1),$$

que se desarrolla y reagrupa así:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (1 + u_1 + u_2)(du_1 + du_2) - u_1 du_2 - u_2 du_1 - u_2 du_2 - (1 + u_2) du_1 = \\ &= (1 + u_1 + u_2 - u_2 - 1 - u_2) du_1 + (1 + u_1 + u_2 - u_1 - u_2) du_2 = \\ &= (u_1 - u_2) du_1 + du_2. \end{aligned}$$

Nos interesa especialmente el caso $k = 1$. Entonces $U_1 \subseteq \mathbb{R}_t$ y lo que tenemos es un camino $\alpha(t) : U_1 \rightarrow U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Dada cualquier 1-forma ω en U_2 , se tiene una sencillísima expresión:

$$\alpha^*\omega \equiv a(t) dt,$$

donde $a(t) \equiv \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ y para cualquier intervalo $I \subseteq U_1$ es:

$$\int \omega = \int_{\omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt = \int a(t) dt = \int \alpha^*\omega,$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The text is set against a light blue, irregular shape that resembles a map of the city. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

6 Formas diferenciales exteriores

En este capítulo k y n serán enteros positivos con $k \leq n$.

6.1 Integrandos para funciones paramétricas

En este apartado queremos hacer lo mismo que en el capítulo anterior, pero reemplazando los caminos (funciones de t) por funciones de varias variables.

Definición 137. Una **función paramétrica** de k parámetros en \mathbb{R}^n está dada por una región acotada $D \subset \mathbb{R}_u^k$ y la restricción $\Phi|_D : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ a la región D de una función $\Phi(u) : W \rightarrow \mathbb{R}_x^n$, donde $W \subseteq \mathbb{R}_u^k$ es un abierto conteniendo a D y Φ es al menos de clase C^1 en W . En este contexto las variables u_1, \dots, u_k se llamarán **parámetros**.

Si $k = 1$ la región D será un intervalo y Φ es un **camino**. Si $k = 2$ entonces $\Phi(u_1, u_2)$ también puede llamarse **superficie paramétrica** en \mathbb{R}^n .

Si una función paramétrica $\Phi(u) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dada por n funciones $\Phi(u) \equiv (x_1(u), \dots, x_n(u))$ de los k parámetros u_1, \dots, u_k , entonces una integral (de primer orden) sobre Φ será el número:

$$\int_{u \in D} (\dots) du_1 \cdots du_k,$$

donde (\dots) es una función de (u_1, \dots, u_k) que se construye combinando (solamente) las funciones $x_i(u)$ y sus derivadas primeras $\partial x_i / \partial u_j$, o sea combinando el vector $\Phi(u)$ y la matriz $D\Phi_u$.

Definición 138. Un **integrando para funciones de k parámetros en \mathbb{R}^n** es una función escalar $L(x, A)$, donde x representa puntos de \mathbb{R}^n , A representa matrices $n \times k$ con entradas reales y el par (x, A) recorre un abierto del espacio $\mathbb{R}^n \times M_{n \times k}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+nk}$.

Dada $\Phi(u) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, función paramétrica de k parámetros, la **integral de L sobre Φ** es el número que resulta de evaluar L en los pares “punto-matriz jacobiana” $(\Phi(u), D\Phi_u)$ de Φ e integrar sobre D la función resultante $D \ni u \mapsto L(\Phi(u), D\Phi_u)$:

$$\int_{\Phi} L \stackrel{\text{def}}{=} \int_{u \in D} L(\Phi(u), D\Phi_u) du_1 \cdots du_k.$$

En principio L puede ser cualquier función de $n + nk$ variables definida en un abierto de \mathbb{R}^{n+nk} .

6.2 Orientación de variedades

Aquí queremos definir el análogo, para funciones de varios parámetros, del *sentido de avance* que fue importante en la definición 128 del apartado 5.2. Empecemos definiendo el concepto de orientación para un espacio vectorial.

En Física y en Química se utiliza la palabra **quiral**, procedente del griego $\chi\epsilon\iota\rho$ (jeir), que significa *mano*, para referirse a aquellos objetos que no pueden superponerse a su imagen especular. El ejemplo más obvio son los guantes: al reflejar un guante de la mano derecha en un espejo resulta un guante de la mano izquierda, y moviendo el guante derecho en el aire nunca podremos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

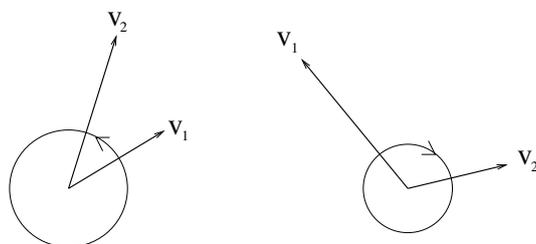
Es importante que las bases sean ordenadas, es decir que se sabe cuál es el primer vector, cuál el segundo vector, etc, porque al permutar una base se permutan columnas (o filas) de la matriz de paso y eso puede cambiar el signo de su determinante.

Elegidos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{V}$, linealmente independientes, cualquier base ordenada de \mathbb{V} es equivalente o bien a $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ o bien a $\{-\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$, no a ambas. Luego \mathbb{V} tiene exactamente dos orientaciones.

Si \mathbb{V} tiene dimensión 1 es una recta real. Una clase de equivalencia de bases consta de un vector no nulo \mathbf{u}_1 y todos sus múltiplos positivos, es decir que una orientación es en este caso un sentido de avance a lo largo de la recta.

En el espacio numérico \mathbb{R}^k tenemos la base estándar $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$. Dada cualquier base ordenada $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$, la matriz de paso de la estándar a \mathcal{B} es la matriz $P = [\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k]$ cuyas columnas son los vectores de \mathcal{B} . Una orientación de \mathbb{R}^k es la clase de las bases ordenadas con $\det[\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k]$ positivo y la otra orientación es la clase de las bases ordenadas con ese determinante negativo. En los casos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 reconocemos *visualmente* el signo de ese determinante asociando la base ordenada con un objeto quiral que nos resulte familiar.

A dos vectores ordenados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, linealmente independientes, el objeto quiral que se les suele asociar es un *círculo giratorio* que señale el camino angular más corto de \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 . Hecho esto, se tiene $\det[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] > 0$ si el círculo gira en sentido antihorario y se tiene $\det[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] < 0$ si el círculo gira en sentido horario,



por ejemplo $\det[\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2] > 0$ y $\det[\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1] < 0$.

En un plano cualquiera (espacio vectorial de dimensión 2) dos bases ordenadas son equivalentes si y sólo si definen el mismo sentido de giro por el camino angular más corto del primer vector al segundo. Esto está bien definido porque, de los dos caminos angulares del primer vector al segundo, el corto es menor que un semiplano y el largo mayor que un semiplano; luego no necesitamos que haya un producto escalar establecido en dicho plano para poder reconocer el camino angular corto y asociar un sentido de giro al par ordenado de vectores.

Orientar un plano es decidir qué sentido de giro consideramos antihorario en él.

A tres vectores ordenados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, linealmente independientes, algunas personas les asocian una **mano derecha** y otras personas les asocian un **tornillo derecho**³. El plano generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ separa \mathbb{R}^3 en dos **semiespacios**; colocamos nuestra mano derecha de modo que al cerrarla los dedos señalen el sentido de giro de \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 por el camino angular más corto; entonces $\det[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3]$ es positivo si y sólo si el pulgar apunta hacia el mismo semiespacio al que apunta \mathbf{v}_3 .

Orientar un espacio vectorial de dimensión 3 es decidir qué manos consideramos derechas en él.

Sea $or(\mathbb{V})$ el conjunto (tiene dos elementos) de las orientaciones de \mathbb{V} . Un isomorfismo lineal

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

vida diaria son así.

Cartagena99

transporta la orientación estándar de \mathbb{R}^k (la de la base estándar) a una orientación de $T_p X$ (la de la base ordenada $\{\Phi_{u_1}(u), \dots, \Phi_{u_k}(u)\}$).

Definiciones 140. Sea X una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión k . Una **orientación** para X es un objeto \mathcal{O} que elige una orientación \mathcal{O}_p en cada espacio tangente $T_p X$ y lo hace de manera continua, es decir que siempre que $p, q \in X$ estén “muy juntos” las orientaciones elegidas en $T_p X$ y en $T_q X$ puedan definirse por bases muy parecidas.

Decimos que X es **orientable** si admite una orientación. Una **variedad orientada** es un par (X, \mathcal{O}) formado por una variedad orientable X y una orientación \mathcal{O} de X .

Dada una variedad orientada (X, \mathcal{O}) de dimensión k y dado un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$, decimos que una parametrización regular $\Phi : W \rightarrow X$ es **compatible con \mathcal{O}** si para cada $u \in W$ la diferencial $(d\Phi)_u$ lleva la orientación estándar de \mathbb{R}^k a $\mathcal{O}_{\Phi(u)}$.

Se introduce el adjetivo “orientable” porque no toda variedad admite orientaciones. Más abajo damos un ejemplo de esto.

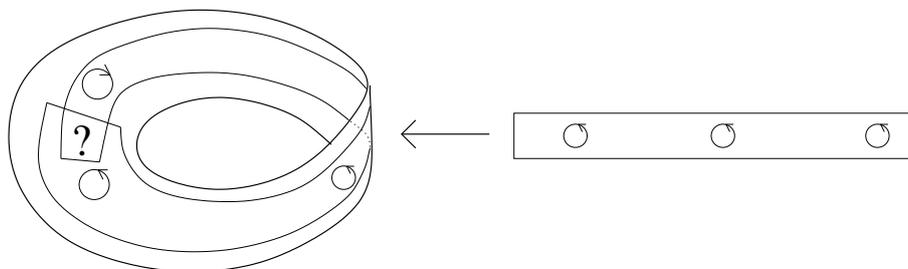
La siguiente proposición muestra interacciones entre orientación y conexión por caminos.

Proposición 141. Sea X una variedad orientable y conexa por caminos. Si dos orientaciones de X coinciden en un espacio tangente $T_{p_0} X$, entonces son la misma.

Sean una variedad orientada (X, \mathcal{O}) de dimensión k , un abierto conexo por caminos $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una parametrización regular $\Phi : W \rightarrow X$ (no necesariamente inyectiva). Si para un valor particular $u_0 \in W$ se cumple que $(d\Phi)_{u_0}$ lleva la orientación estándar de \mathbb{R}^k a $\mathcal{O}_{\Phi(u_0)}$, entonces Φ es compatible con \mathcal{O} .

Véase el apartado 6.11 para la demostración. De la proposición 141 se deduce fácilmente que una variedad orientable y conexa por caminos tiene exactamente dos orientaciones. Una variedad X , con s componentes conexas por caminos X_1, \dots, X_s , es orientable si y sólo si cada una de las X_j es orientable, y entonces tiene $2 \times \dots \times 2$ (s factores) orientaciones, dando lugar a 2^s variedades orientadas distintas.

La siguiente figura muestra una parametrización regular Φ , no inyectiva, de un abierto rectangular de \mathbb{R}^2 a la banda de Möbius.



Supongamos que la banda de Möbius fuese orientable. Como es conexa por caminos, tendría exactamente dos orientaciones $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Como el rectángulo es conexo por caminos, la parametrización Φ tendría que ser compatible con \mathcal{O}_1 o con \mathcal{O}_2 . En cualquier de los dos casos Φ tendría que llevar la orientación estándar de \mathbb{R}^2 (indicada en la figura por círculos giratorios) a una sola orientación de la parte indicada por “?” en la figura; pero se ve fácilmente que Φ induce

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

iza a variedades la proposición 69 del apartado 6.6.

Cartagena99

Lema 142. Dada una variedad X de dimensión k en \mathbb{R}^n y clase C^s , las parametrizaciones regulares $\mathbb{R}^k \supseteq W \xrightarrow{\Phi} X$ son **localmente inyectivas** y **abiertas a X** , es decir que para todo abierto $W' \subseteq W$ el conjunto $\Phi(W')$ es un abierto relativo de X .

Véase el apartado 6.11 para la demostración. El lema nos dice que la imagen $Y = \Phi(W)$ es un abierto relativo de X , luego es también una variedad de dimensión k y clase C^s . Con la ayuda del lema demostramos la siguiente proposición, que ya nos proporciona una infinidad de variedades orientadas.

Proposición 143. Sea $\Phi : W \rightarrow X$ parametrización regular, con W abierto de \mathbb{R}^k y $k = \dim X$. Si Φ es inyectiva entonces es compatible con una única orientación de $Y = \Phi(W)$, que de este modo resulta ser una variedad orientable.

Demostración. Cada punto $p \in Y$ tiene una única preimagen $u \in W$ y se determina una única orientación en $T_p Y = T_p X$ resultado de transportar por $(d\Phi)_u$ la orientación estándar de \mathbb{R}^k . Al ser $\Phi : W \rightarrow Y$ abierta, la inversa $\Phi^{-1} : Y \rightarrow W$ es continua. Entonces la base ordenada $\{\Phi_{u_1}(u), \dots, \Phi_{u_k}(u)\}$ es función continua del punto p , porque $u = \Phi^{-1}(p)$ también lo es, y hemos construido una orientación para Y que es la única con la que Φ es compatible. \square

Existen muchas variedades que no se pueden obtener como imagen de una parametrización regular e inyectiva. Por ejemplo, si existiera una parametrización $\Phi : W \rightarrow S^2$ regular y biyectiva de un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^2$ a la esfera S^2 entonces Φ sería abierta a S^2 por el lema 142 y la inversa $\Phi^{-1} : S^2 \rightarrow W$ sería continua y biyectiva, obligando al abierto $W \subseteq \mathbb{R}^2$ a ser compacto, imposible.

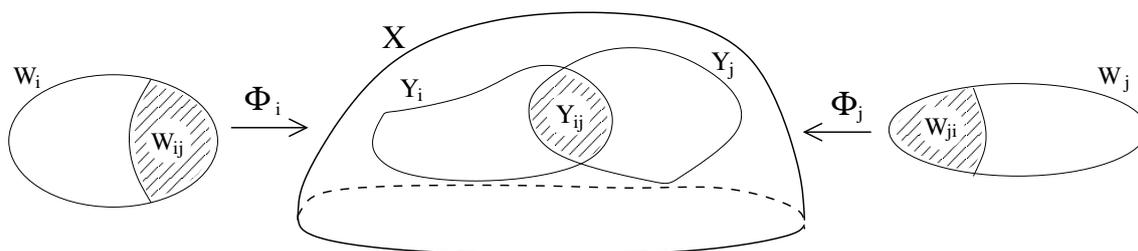
La idea para construir una orientación (si existe) en una variedad de esas es la siguiente:

Se toman varias parametrizaciones $\Phi_i : W_i \rightarrow X$ regulares e inyectivas, de modo que las imágenes $\Phi_i(W_i)$ recubran toda la variedad X , y se procura que en las intersecciones no vacías $Y_{ij} = \Phi_i(W_i) \cap \Phi_j(W_j)$ coincidan la orientación inducida por Φ_i con la inducida por Φ_j .

Como Y_{ij} es un abierto relativo de X , tenemos dos abiertos de \mathbb{R}^k definidos como sigue:

$$W_{ij} = \Phi_i^{-1}(Y_{ij}) \quad , \quad W_{ji} = \Phi_j^{-1}(Y_{ij}) \quad ,$$

y las restricciones $W_{ij} \xrightarrow{\Phi_i} Y_{ij} \xleftarrow{\Phi_j} W_{ji}$ son ambas biyectivas.



Proposición 144. Si la variedad X y las Φ_i son de clase C^s , entonces las biyecciones

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

es siempre negativo.

Cartagena99

El difeomorfismo $\sigma = \Phi_i^{-1} \circ \Phi_j : W_{ji} \rightarrow W_{ij}$ es tal que $\Phi_j|_{W_{ji}} = (\Phi_i|_{W_{ij}}) \circ \sigma$. Entonces $\Phi_i|_{W_{ij}}$ y $\Phi_j|_{W_{ji}}$ inducen la misma orientación en Y_{ij} si y sólo si $\det D\sigma$ es positivo, es decir si y sólo si σ conserva la orientación.

Teorema 146. *Sea X una variedad que se recubre con imágenes $\Phi_i(W_i)$ de parametrizaciones regulares e inyectivas tales que siempre que sea $\Phi_i(W_i) \cap \Phi_j(W_j) \neq \emptyset$ el difeomorfismo $\Phi_i^{-1} \circ \Phi_j$ conserva la orientación allí donde está definido. Entonces hay una única orientación en X con la que son compatibles todas las Φ_i .*

Recíprocamente, dada X orientable y cualquier orientación suya \mathcal{O} , hay un recubrimiento de X por imágenes $\Phi(W_i)$ de parametrizaciones regulares, inyectivas y compatibles con \mathcal{O} .

Demostración.

La condición $\det D(\Phi_i^{-1} \circ \Phi_j) > 0$ hace que Φ_i y Φ_j definan la misma orientación en el abierto relativo $\Phi_i(W_i) \cap \Phi_j(W_j)$ de X . Entonces se define una orientación en toda X de la manera siguiente: dado $p \in X$, eligiendo cualquier pareja (Φ_i, u) con $u \in W_i$ y $p = \Phi_i(u)$ ponemos en $T_p X$ la orientación inducida por $(d\Phi_i)_u$. El resultado no depende de la elección de la pareja, además es una elección continua de orientación de los espacios tangentes porque es una elección continua en cada abierto relativo $\Phi_i(W_i)$.

Sea ahora X con una orientación \mathcal{O} . En primer lugar, siempre se puede recubrir X por imágenes $\Phi_i(W_i)$ de parametrizaciones regulares e inyectivas; esto es cierto aunque X no sea orientable y puede hacerse, por ejemplo, con parametrizaciones grafo. En segundo lugar, podemos suponer que los abiertos W_i son conexos por caminos porque, en caso contrario, restringimos Φ_i a cada componente conexa por caminos de W_i y obtenemos (varias) parametrizaciones regulares e inyectivas que recubren el mismo conjunto que la Φ_i original. Una vez que cada W_i es conexo por caminos, la imagen $\Phi(W_i)$ está contenida en una componente conexa por caminos de X , la cual sólo admite dos orientaciones: la \mathcal{O} y otra, y la proposición 141 dice que Φ_i tiene que ser compatible con una de ellas. Si Φ es compatible con \mathcal{O} , la dejamos como está. Si Φ_i es compatible con la otra orientación, tomamos cualquier difeomorfismo $\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ que invierta la orientación, reemplazamos W_i con $W'_i = \sigma^{-1}(W_i)$ y reemplazamos Φ con $\Phi \circ \sigma : W'_i \rightarrow X$, que es compatible con \mathcal{O} y cubre la misma parte de X que cubría Φ_i . \square

Como difeomorfismo que invierta la orientación en \mathbb{R}^k podemos tomar uno de éstos:

$$(u_1, u_2, \dots, u_k) \mapsto (-u_1, u_2, \dots, u_k) \quad , \quad (u_1, u_2, u_3, \dots, u_k) \mapsto (u_2, u_1, u_3, \dots, u_k) \quad ,$$

o cualquier otro que nos guste.

6.3 Hipersuperficies: orientación y normal unitaria

En el caso particular de una **hipersuperficie**, es decir una variedad X de dimensión $n - 1$ en \mathbb{R}^n , tenemos una sencilla caracterización tanto de la orientabilidad como de las orientaciones. Empezamos estudiando las orientaciones de un **hiperplano**, es decir de un subespacio vectorial $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $n - 1$. Dadas dos bases $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ de \mathbb{V} y un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ normal a \mathbb{V} , tenemos las bases $\{\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ y $\{\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ de \mathbb{R}^n cuya matriz de paso es

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \quad ,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Dada una hipersuperficie X en \mathbb{R}^n , aplicamos esas observaciones a cada espacio tangente $T_p X$ y deducimos que es equivalente elegir una orientación de $T_p X$ a elegir una normal no nula $\mathbf{a}(p) \in \{T_p X\}^\perp$. La correspondencia entre una y otra elección es la siguiente:

La normal no nula $\mathbf{a}(p)$ corresponde a la orientación definida en $T_p X$ por una base ordenada $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ si y sólo si

$$\det [\mathbf{a}(p) | \mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_{n-1}] > 0. \quad (62)$$

Esta correspondencia funciona en las dos direcciones: un campo normal $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ determina mediante (62) una única orientación en cada espacio $T_p X$; asimismo una orientación de X determina mediante (62) un campo normal $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ que es único salvo multiplicar por una función escalar positiva, habiendo entre todos ellos un único campo unitario.

Teorema 147. Sea X una hipersuperficie en \mathbb{R}^n .

Si un campo normal $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ es continuo entonces le corresponden por (62) orientaciones de los espacios $T_p X$ que varían de manera continua con p , es decir que forman una orientación de X .

Dada una orientación de X , entre los campos normales que le corresponden por (62) los hay continuos, por ejemplo el unitario.

Véase el apartado 6.11 para la demostración.

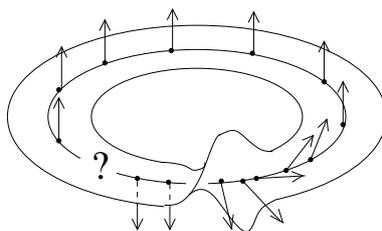
Corolario 148. Una hipersuperficie X en \mathbb{R}^n es orientable si y sólo si admite un campo normal continuo. Además (62) establece una biyección entre las orientaciones de X y los campos normales $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuos y unitarios.

Si X viene dada por una ecuación $f_1(x) = b_1$, con gradiente ∇f_1 nunca nulo en X , entonces podemos elegir $(\nabla f_1)|_X$ como normal continua y queda elegida una orientación en X .

En lugar del campo ∇f_1 , nos sirve cualquier otro de la forma $g \cdot (\nabla f_1)|_X$ con $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y positiva. En particular el campo $(1/\|\nabla f_1\|_2) \cdot \nabla f_1$ es la **normal unitaria** a la hipersuperficie que apunta en el sentido de aumento de f_1 .

Para la esfera S^{n-1} podemos tomar la normal unitaria $(1/2) \cdot \nabla(x_1^2 + \dots + x_n^2) = (x_1, \dots, x_n)$. Esto y (62) definen una orientación para la esfera, que por lo tanto es orientable.

Recíprocamente, si una hipersuperficie X no es orientable entonces no admite una normal continua y no nula. Es lo que le ocurre a la **banda de Möbius**.



Observación. Nos preguntamos si la banda de Möbius, llamémosla S , es de las superficies que se obtienen en \mathbb{R}^3 por el teorema 104 del apartado 4.3. Es, decir, nos preguntamos si existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, una función $f_1 \in C^1(U)$ y un $b_1 \in \mathbb{R}$ tales que $S = \{x \in U : f_1(x) = b_1\}$ y el

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

6.4 Orientación e integración, caso de dos parámetros

Definiciones 149. (1) Tenemos abiertos $W, \tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^k$, regiones acotadas $D \subseteq W$, $\tilde{D} \subseteq \tilde{W}$ y un difeomorfismo $\sigma : \tilde{W} \rightarrow W$. Supongamos que σ es biyectivo de \tilde{D} a D . Para toda función paramétrica $\Phi(u) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, la **reparametrizada por σ** es la función compuesta:

$$\Phi \circ \sigma(\tilde{u}) : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

es decir el resultado de hacer el cambio de parámetros $u = \sigma(\tilde{u})$ en $\Phi(u)$.

(2) Un integrando L para funciones de k parámetros en \mathbb{R}^n es **paramétrico** si cumple:

$$\sigma \text{ conserva la orientación} \implies \int_{\Phi \circ \sigma} L = \int_{\Phi} L.$$

Insistimos en que el concepto de reparametrización se define para funciones paramétricas en general, sean regulares o no, inyectivas o no, esté su imagen contenida en una variedad o no.

En el resto de este apartado nos restringimos al caso $k = 2$.

Tenemos un abierto $W \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$ del plano de parámetros (u, v) y una región acotada $D \subseteq W$. Tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y consideramos funciones $\Phi(u, v) : D \rightarrow U$ que sean restricción a D de funciones $W \rightarrow U$ al menos de clase C^1 ; esto hace que las funciones $\Phi_u, \Phi_v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ estén definidas (restricciones a D de las derivadas en W) y sean al menos continuas.

Escribiremos la jacobiana $D\Phi$ de dos maneras, que consideraremos equivalentes: como una matriz "alta" $[\Phi_u \mid \Phi_v] \in M_{n \times 2}(\mathbb{R})$ y como un par de columnas $(\Phi_u, \Phi_v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En concordancia con esto, los integrandos para estas Φ los veremos indistintamente como funciones $L(x, A)$ del par punto-matriz $(x, A) = (x, [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2]) \in U \times M_{n \times 2}(\mathbb{R})$ y también como funciones $L(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de la terna punto-vector-vector $(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

La integral de uno de esos integrandos L sobre una función de dos parámetros $\Phi : D \rightarrow U$ es, pues, el siguiente número:

$$\int_{\Phi} L = \int_D L(\Phi(u, v), D\Phi(u, v)) \, dudv = \int_D L(\Phi(u, v); \Phi_u, \Phi_v) \, dudv.$$

Para cada dos índices $1 \leq i < j \leq n$ consideramos la proyección

$$\pi_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_i, x_j),$$

y la función escalar Δ_{ij} , actuando indistintamente sobre matrices altas $A = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2]_{n \times 2}$ o sobre pares de columnas $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, que consiste en el determinante 2×2 formado por la fila i y la fila j de A . En total hay $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ funciones Δ_{ij} y, si las aplicamos a la jacobiana $D\Phi$, el resultado son los determinantes jacobianos de las proyecciones de Φ :

$$\Delta_{ij}(\Phi_u, \Phi_v) = \Delta_{ij}(D\Phi) = \det D(\pi_{ij} \circ \Phi).$$

Al reparametrizar por un difeomorfismo $\sigma(\tilde{u}, \tilde{v}) : \tilde{W} \rightarrow W$ cada proyección $\pi_{ij} \circ \Phi$ se reparametriza por este mismo σ y, aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\Delta_{ij}(D(\Phi \circ \sigma))(\tilde{u}, \tilde{v}) = \det(D(\pi_{ij} \circ \Phi \circ \sigma))_{(\tilde{u}, \tilde{v})} = \det(D\sigma)_{(\tilde{u}, \tilde{v})} \cdot \det(D(\pi_{ij} \circ \Phi))_{\sigma(\tilde{u}, \tilde{v})},$$

es decir:

$$\Delta_{ij}(D(\Phi \circ \sigma)) = \det(D\sigma) \cdot [(\Delta_{ij}(D\Phi)) \circ \sigma] \text{ para cualesquiera índices } 1 \leq i < j \leq n. \quad (63)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\Delta_{ij}(D(\Phi \circ \sigma)) = \det(D\sigma) \cdot [(\Delta_{ij}(D\Phi)) \circ \sigma]. \quad (63)$$

Cartagena99

Teorema 150. Para que un integrando $L(x, A)$ para funciones de dos parámetros en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sea paramétrico es necesario y suficiente que exista una función $L_0(x, \mathbf{t}) : U \times \mathbb{R}^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo dos condiciones, la primera:

$$L(x, A) \equiv L_0(x, \Delta(A)) , \quad (65)$$

y la segunda:

$$c > 0 \implies L_0(x, c\mathbf{t}) = cL_0(x, \mathbf{t}) . \quad (66)$$

es decir que $L_0(p, \mathbf{t})$ sea positivamente homogénea de grado 1 en el vector \mathbf{t} .

Demostración parcial. Sólo vamos a probar la parte de suficiencia.

Sean $\Phi(u, v) : D \rightarrow U$ una función de dos parámetros y $\Phi \circ \sigma : \tilde{D} \rightarrow U$ una reparametrización por un difeomorfismo σ que conserva la orientación, es decir que tiene $\det(D\sigma) > 0$. Si existe L_0 cumpliendo (65) y (66), aplicamos la identidad (64) y la homogeneidad de L_0 para deducir:

$$L(\Phi \circ \sigma, D(\Phi \circ \sigma)) = \det(D\sigma) \cdot [L(\Phi, D\Phi) \circ \sigma] ,$$

y, utilizando la fórmula de cambio de variables en integrales dobles:

$$\int_{\Phi \circ \sigma} L = \int_{\tilde{D}} |\det(D\sigma)| \cdot [L(\Phi, D\Phi) \circ \sigma] d\tilde{u}d\tilde{v} = \int_D L(\Phi, D\Phi) dudv = \int_{\Phi} L .$$

□

La función $A \mapsto \Delta(A)$ pierde información, es decir que no se puede recuperar A a partir de su vector de menores. Esto se hace evidente con una transformación elemental:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto (\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) , \quad (67)$$

como las usadas en el método de Gauss pero haciendo combinaciones de columnas en vez de filas, que cambia la matriz y al mismo tiempo deja intacto el vector de menores. La jacobiana $D\Phi$ sufre la transformación (67) al reparametrizar Φ por el difeomorfismo $\sigma(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v} + \lambda \tilde{u})$, que además tiene $\det(D\sigma) \equiv 1$. Escribiendo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} ,$$

se deduce que no existe una función L_0 que cumpla (65) para integrandos como los siguientes:

$$L(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_1 + 5x_3) + v_{11}v_{22} \quad , \quad L(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = e^{x_2 - x_4} (v_{31})^2 .$$

Un integrando como $L = e^{x_3} (\Delta_{12})^2$ tampoco es paramétrico porque, si bien existe $L_0(x, \mathbf{t})$ que cumple (65) y es homogénea en \mathbf{t} , lo es con un grado inadecuado.

La identidad (64) es cierta tanto si σ conserva la orientación como si la invierte. Esto nos permite considerar los dos casos especiales siguientes:

(par) Si L_0 existe cumpliendo (65) y (66), y es **par**: $L_0(x, -\mathbf{t}) = L_0(x, \mathbf{t})$, entonces $\int_{\Phi} L$ permanece igual al reparametrizar, tanto si σ conserva la orientación como si la invierte.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

~ ~ ~ (X, O) L.

Supongamos que X admite una parametrización regular y biyectiva Φ_0 , y sea Φ otra parametrización biyectiva de X , no necesariamente regular. Si repasamos la prueba de la proposición 144 vemos que con estas hipótesis basta para que $\sigma = \Phi_0^{-1} \circ \Phi$ sea de clase \mathcal{C}^s , además de biyectiva. Para los cambios de parámetro $\sigma : \widetilde{W} \rightarrow W$, biyectivos aunque tal vez no difeomorfismos, se cumplen dos cosas que no vamos a demostrar aquí:

- Si \widetilde{W} es conexo por caminos, entonces $\det(D\sigma)$ puede anularse pero no cambia de signo.
- Todavía es válida la fórmula de cambio de variables en integrales dobles.

En el caso (par) tenemos:

$$\int_{\Phi} L = \int_{\Phi_0 \circ \sigma} L = \int_{\Phi_0} L, \quad (68)$$

y en el caso (impar) tenemos:

$$\int_{\Phi} L = \int_{\Phi_0 \circ \sigma} L = \begin{cases} \int_{\Phi_0} L & \text{si } \det(D\sigma) \geq 0 \\ - \int_{\Phi_0} L & \text{si } \det(D\sigma) \leq 0 \end{cases} \quad (69)$$

De todos los integrandos en el caso (par), nos interesamos por los siguientes (hay muchos más):

$$L = f(x) \|\Delta\|_2 = f(x) \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\Delta_{ij})^2}.$$

La integral $\int_X \|\Delta\|_2$ se llama **área** y las integrales $\int_X f(x) \|\Delta\|_2$ se denotan $\int_X f d\text{área}$. Si además $n = 3$ entonces $\int_X f d\text{área} = \int_D f(\Phi(u)) \|\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}\|_2 du_1 du_2$.

Imitando lo hecho en el capítulo 5, de todos los integrandos en el caso (impar) vamos a estudiar los más obvios:

Definición 151. Dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una **2-forma** o **forma diferencial de grado 2** en U es un integrando ω para funciones de dos parámetros $\Phi : D \rightarrow U$ que depende linealmente del vector de menores. Esto quiere decir que existen funciones escalares $a_{ij}(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$, para $1 \leq i < j \leq n$, tales que:

$$\omega(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \equiv \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) \Delta_{ij}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Ahora sabemos que todas las 2-formas cumplen las igualdades (69).

Para L en el caso (par) o en el caso (impar), se plantea la cuestión de calcular $\int_X L$ cuando X es una superficie que no se pueda recubrir por una sola parametrización regular y biyectiva (por ejemplo, la esfera S^2). Lo que hacemos es romper X en “parcelas” que sí se parametricen biyectivamente, integramos en cada parcela y sumamos los resultados. Por supuesto, en el caso (impar) damos a cada parcela una parametrización que, además de biyectiva, sea compatible con la orientación de la superficie. Aunque cada parcela esté parametrizada biyectivamente, no prohibimos que haya puntos comunes a dos o más parcelas. Para garantizar que la suma de

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

6.5 Número arbitrario de parámetros

Ahora tenemos un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$, con k arbitrario pero no mayor que n , y funciones paramétricas $\Phi(u) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ que luego restringiremos a regiones acotadas $D \subseteq W$.

Veremos la jacobiana $D\Phi$ indistintamente como matriz “alta” $[\Phi_{u_1} | \cdots | \Phi_{u_k}]_{n \times k}$ o como una k -upla de columnas $(\Phi_{u_1}, \dots, \Phi_{u_k}) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (k factores). Tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y escribiremos los integrandos para las $\Phi : W \rightarrow U$ indistintamente como funciones del par punto-matriz $L(x, A) = L(x, [\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_k])$, y también como funciones escalares $L(x; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ de la $(k+1)$ -upla formada por un punto cualquiera $x \in U$ y k vectores columna cualesquiera $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Para cada sucesión creciente de números enteros:

$$i_1, \dots, i_k \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n,$$

hay una función $\Delta_{i_1 \dots i_k}([\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_k]) = \Delta_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ que consiste en el determinante $k \times k$ formado por las filas i_1, \dots, i_k . En total son $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ funciones. Al aplicarlas a la jacobiana $D\Phi$ estas funciones dan los determinantes jacobianos de las proyecciones de Φ :

$$\Delta_{i_1 \dots i_k}(D\Phi) = \det(D(\pi_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi)).$$

Definimos $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ como el espacio cuyos vectores se escriben $\mathbf{t} = (t_{i_1 \dots i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$, siendo los índices de las entradas de \mathbf{t} sucesiones crecientes de k enteros. Por ejemplo, el vector general $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\binom{4}{3}}$ se escribe $\mathbf{t} = (t_{123}, t_{124}, t_{134}, t_{234})$, siendo los índices de sus entradas ternas crecientes de enteros entre 1 y 4. Asociamos a cada matriz $A_{n \times k}$ su **vector de menores** $\Delta(A) \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ cuyas entradas son $t_{i_1 \dots i_k} = \Delta_{i_1 \dots i_k}(A)$.

Al reparametrizar $\Phi(u) : W \rightarrow U$ por $\sigma : \widetilde{W} \rightarrow W$, se reparametriza cada proyección $\pi_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi$ por el mismo cambio de parámetros $u = \sigma(\tilde{u})$ y se deduce, igual que en el apartado 6.4, que el vector de menores cambia por la fórmula (64). Es inmediato obtener la (parte de suficiencia de la) siguiente generalización del teorema 150:

Teorema 152. *Para que un integrando $L(x, A)$, para funciones de k parámetros en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sea paramétrico es necesario y suficiente que exista una función de $n + \binom{n}{k}$ variables $L_0(x, \mathbf{t})$, con (x, \mathbf{t}) recorriendo $U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$, que cumpla las dos condiciones siguientes:*

- (a) $L(x, A) = L_0(x, \Delta(A))$.
- (b) L_0 positivamente homogénea de grado 1 en \mathbf{t} : $c > 0 \implies L_0(x, c\mathbf{t}) = c L_0(x, \mathbf{t})$.

Se demuestra, igual que en el apartado 6.4, que no es posible recuperar la matriz a partir de su vector de menores. Los integrandos para los que existe L_0 cumpliendo (a) son, pues, especiales. Todavía son más especiales los que además cumplen (b).

Dentro de los integrandos paramétricos tenemos, igual que en el apartado 6.4, los casos especiales (par) e (impar) que cumplen, respectivamente, las fórmulas (68) y (69). Entre los de tipo (par) nos interesan los de la forma:

$$L = f(x) \|\Delta\|_2 = f(x) \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\Delta_{i_1 \dots i_k})^2}.$$

El integral $\int f \|\Delta\|_2$ es llamado *índice* (k -dimensional). Los integrales $\int f(x) \|\Delta\|_2$ se demuestran

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Usamos la fórmula usual de cambio de variables en integrales múltiples.

Cartagena99

Entre los integrandos paramétricos de tipo (impar), vamos a estudiar los más obvios:

Definición 153. Dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una **k-forma** o **forma diferencial de grado k** en U es un integrando ω para funciones de k parámetros $\Phi : D \rightarrow U$ que depende linealmente del vector de menores. Esto quiere decir que existen funciones escalares $a_{i_1 \dots i_k}(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$, para $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, tales que:

$$\omega(x; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x) \Delta_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (71)$$

Una **0-forma** en U es, sencillamente, una función escalar $a(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$.

La integral de una k -forma sobre una función paramétrica $\Phi : D \rightarrow U$ está dada por la fórmula:

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{u \in D} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(\Phi(u)) \cdot \Delta_{i_1 \dots i_k}(D\Phi_u) du_1 \dots du_k. \quad (72)$$

Todas las k -formas cumplen las igualdades (69), que ahora escribimos así:

$$\int_{\Phi \circ \sigma} \omega = \begin{cases} \int_{\Phi} \omega & \text{si } \sigma \text{ conserva la orientación} \\ - \int_{\Phi} \omega & \text{si } \sigma \text{ invierte la orientación} \end{cases} \quad (73)$$

compáralas con las fórmulas (57) del apartado 5.4.

En cuanto a cómo se calcula $\int_X L$ en el caso (par), y como se calcula $\int_{(X, \mathcal{O})} L$ en el caso (impar), aquí valen los mismos comentarios hechos al final del apartado 6.4 con sólo una ligera modificación: ahora los puntos que pertenecen a más de una parcela forman una unión finita de variedades de dimensiones menores que k y contenidas en X . La idea es que las parcelas tengan “forma poliédrica” y que a lo sumo compartan “caras de dimensiones menores”, empezando con caras de dimensión $k - 1$ y llegando hasta aristas y vértices.

6.6 Funciones alternadas y k-formas

Sea E espacio vectorial y E^k el espacio $E \times \dots \times E$ de las k -uplas (v_1, \dots, v_k) de vectores de E .

Teorema-definición 154. Dada $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ multilineal, son equivalentes:

(a) Se anula siempre que hay un vector repetido:

$$\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, \mathbf{v}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, \mathbf{v}, v_{j+1}, \dots, v_k) = 0.$$

(b) Si intercambiamos dos vectores, el valor de φ se multiplica por -1 :

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, \mathbf{w}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, \mathbf{v}, v_{j+1}, \dots, v_k) &= \\ &= -\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, \mathbf{v}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, \mathbf{w}, v_{j+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com

Dadas dos formas lineales $\ell_1, \ell_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$, contruimos a partir de ellas la siguiente función:

$$\Delta(\ell_1, \ell_2) : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \Delta(\ell_1, \ell_2)(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1(v_1)\ell_2(v_2) - \ell_1(v_2)\ell_2(v_1) = \begin{vmatrix} \ell_1(v_1) & \ell_2(v_1) \\ \ell_1(v_2) & \ell_2(v_2) \end{vmatrix} ,$$

y se ve de inmediato que es bilineal alternada, es decir $\Delta(\ell_1, \ell_2) \in \mathcal{A}^2(E)$.

En general, dadas $\ell_1, \dots, \ell_k : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineales se define la función $\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathcal{A}^k(E)$ mediante:

$$\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) : E^k \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \Delta(\ell_1, \dots, \ell_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\ell_i(v_j))_{k \times k} .$$

Teorema 155. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de E y sean $\ell_1, \dots, \ell_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ las correspondientes **funciones coordenadas**, es decir que $\ell_i(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) \equiv a_i$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces el conjunto:

$$\mathcal{B}_k = \{ \Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$$

es una base de $\mathcal{A}^k(E)$. En particular $\dim \mathcal{A}^k(E) = \binom{n}{k}$.

Además, dada $\varphi \in \mathcal{A}^k(E)$ su **único** desarrollo como combinación lineal de esa base es:

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) . \quad (74)$$

Para la demostración véase el apartado 6.11.

Hagamos con cada k -forma ω en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ como en la definición 126 del apartado 5.1: veamos ω indistintamente como una función de $k+1$ variables $\omega(x; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) : U \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ y como un **campo** que a cada punto $x \in U$ asocia una función $\omega_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$, que por la fórmula (71) y el teorema 155 es, en realidad, una forma alternada de grado k .

Una k -forma ω en U es un **campo de funciones alternadas de grado k** en U : a cada punto $x \in U$ le asocia una función alternada ω_x de grado k .

y la fórmula (72) para la integral de una k -forma ω podemos escribirla así:

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{u \in D} \omega_{\Phi(u)}(\Phi_{u_1}, \dots, \Phi_{u_k}) du_1 \cdots du_k \quad (75)$$

Sabemos ahora, además, que para cada punto $x \in U$ los números $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ que hacen verdadero el desarrollo (71) son únicos y vienen dados por

$$a_{i_1 \dots i_k}(x) = \omega_x(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) . \quad (76)$$

Las operaciones algebraicas se extienden de la manera obvia a campos, simplemente se hacen punto a punto:

- Si $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ es función escalar y \mathbf{C} un campo (de cualquier tipo) en U , entonces $a\mathbf{C}$ es el campo $U \ni x \mapsto a(x)\mathbf{C}_x$.
- Si $\omega_1, \dots, \omega_k$ son formas de Pfaff en U , entonces $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_k)$ es la k -forma en U que a cada $x \in U$ le asocia $\Delta(\omega_{1x}, \dots, \omega_{kx})$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

... $\Delta(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.



6.7 Producto exterior

Teorema-definición 156. Dado un espacio vectorial E , existe una operación binaria \wedge entre funciones alternadas que tiene las siguientes propiedades :

(1) Si $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : E^h \rightarrow \mathbb{R}$ son alternadas de grados respectivos k y h entonces $\varphi \wedge \psi : E^{k+h} \rightarrow \mathbb{R}$ es alternada de grado $k + h$.

(2) Bilineal:

distributiva por la izquierda: $(\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi + \varphi_2 \wedge \psi$,

distributiva por la derecha: $\varphi \wedge (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \wedge \psi_1 + \varphi \wedge \psi_2$,

y tal que $\left. \begin{array}{l} (c\varphi) \wedge \psi \\ \varphi \wedge (c\psi) \end{array} \right\} = c(\varphi \wedge \psi)$.

(2) Si $\ell_1, \dots, \ell_{k+h} : E \rightarrow \mathbb{R}$ son formas lineales entonces

$$\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) \wedge \Delta(\ell_{k+1}, \dots, \ell_{k+h}) = \Delta(\ell_1, \dots, \ell_{k+h}). \quad (78)$$

La operación \wedge se llama **multiplicación exterior** o **producto exterior**.

Para la demostración véase el apartado 6.11.

La multiplicación exterior es única. Para demostrarlo fijemos una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E y sean ℓ_1, \dots, ℓ_n las correspondientes funciones coordenadas. Dadas dos formas alternadas

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} \Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \quad , \quad \psi = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq n} b_{j_1 \dots j_h} \Delta(\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_h}) \quad ,$$

por la unicidad de los coeficientes, garantizada por el teorema 155, y la bilinealidad de \wedge , efectuar el producto $\varphi \wedge \psi$ se reduce a hacer los productos $\Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \wedge \Delta(\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_h})$, que están fijados por (78).

La multiplicación exterior es asociativa. Para empezar, los productos de elementos básicos

$$\left(\Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \wedge \Delta(\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_h}) \right) \wedge \Delta(\ell_{l_1}, \dots, \ell_{l_s}) \quad ,$$

$$\Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \wedge \left(\Delta(\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_h}) \wedge \Delta(\ell_{l_1}, \dots, \ell_{l_s}) \right) \quad ,$$

son ambos iguales a $\Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}, \ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_h}, \ell_{l_1}, \dots, \ell_{l_s})$. Esta asociatividad se traspassa, por la bilienalidad, a un producto de tres combiaciones de elementos básicos; o sea a *cualquier* producto de tres formas alternadas.

De la asociatividad y (78) de deducimos que para formas lineales cualesquiera ℓ_1, \dots, ℓ_k se tiene:

$$\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k = \Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) \quad .$$

Las formas alternadas del tipo $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k$ se llaman **monomios**. No volveremos a utilizar la notación $\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k)$ para escribirlos.

Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, las diferenciales $(dx_i)_x$ son las coordenadas lineales $(c_1, \dots, c_n) \mapsto c_i$ y las formas alternadas

$$(dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_x \quad , \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad ,$$

forman la base de $\mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ que el teorema 155 asocia con la base estándar de \mathbb{R}^n . No volveremos a escribirlas como Δ_{i_1, \dots, i_k} .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

Cartagena99

El producto $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k$ sí que puede variar al reordenar sus factores. Lo primero que observamos es que dos formas lineales *anticonmutan*:

$$\ell_2 \wedge \ell_1 = -\ell_1 \wedge \ell_2 .$$

Algunas consecuencias prácticas que esto tiene son:

- a) Si en el producto $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k$ hay un factor repetido, entonces el producto es nulo.
- b) Las formas de grado par conmutan con *todas* las formas diferenciales.
- c) Si ω_1 y ω_2 tienen grados impares (iguales o distintos) entonces $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$.

Efectuar un producto exterior es fácil en general, porque a) hace que muchos de los monomios sean nulos. En el siguiente ejemplo, de los cuatro monomios que forman el producto sólo queda uno porque los otros tres son obviamente nulos:

$$(dx_1 \wedge dx_2 + a dx_3 \wedge dx_4) \wedge (b dx_2 \wedge dx_4 + c dx_1 \wedge dx_7) = ac dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_7 .$$

Podemos reordenar el resultado como $ac dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_7$, sin cambio de signo porque dx_1 ha saltado por encima de $dx_3 \wedge dx_4$, que es de grado par y por lo tanto conmuta con todo.

Si ω es de grado impar entonces $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$, por lo tanto $\omega \wedge \omega = 0$.

También se tiene $\omega \wedge \omega = 0$ si ω es un monomio, de cualquier grado.

No es nada obvio que una función alternada sea un monomio, o que no lo sea. Por ejemplo el “trinomio” $5 dx_1 \wedge dx_2 - 2 dx_1 \wedge dx_3 + 3 dx_2 \wedge dx_3$ resulta ser $(2 dx_1 - 3 dx_2) \wedge (dx_1 + dx_2 - dx_3)$ y sí es un monomio. En cambio el “binomio” $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ tiene cuadrado exterior distinto de cero en todo punto:

$$\omega \wedge \omega = 0 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 0 = 2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 ,$$

y por lo tanto ω_x no es un monomio para ningún punto x .

6.8 Derivación exterior

Definición 157. *Dados un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una k -forma ω en U , la derivada exterior de ω es una $(k+1)$ -forma $d\omega$ en U que se calcula según la siguiente regla:*

$$d \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} . \quad (80)$$

Para una 0-forma, es decir una función escalar $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, su derivada exterior es el campo diferencial df de la definición 126 del capítulo 5.

Para una forma de Pfaff $\omega \equiv a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ la derivada exterior es una 2-forma:

$$d\omega \equiv da_1 \wedge dx_1 + \dots + da_n \wedge dx_n \equiv \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j .$$

Podemos decir que el término b_{ij} de la 2-forma $d\omega$ es el determinante de la matriz (a_i, a_j) .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Podemos decir que el término b_{ij} de la 2-forma $d\omega$ es el determinante de la matriz (a_i, a_j) .

Ahora vamos a eliminar unas rigideces que tiene la regla de cálculo (80). Una de ellas es que exige que los índices i_1, \dots, i_k estén en orden creciente.

Lema 158. Para cualquier secuencia i_1, \dots, i_k , incluso con repeticiones, se tiene:

$$d(a(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (82)$$

Demostración. Si en i_1, \dots, i_k hay alguna repetición entonces los dos miembros de (82) son idénticamente nulos y la igualdad es trivialmente cierta.

Supongamos que no hay ninguna repetición en i_1, \dots, i_k y sea j_1, \dots, j_k el resultado de poner la secuencia en orden creciente. Existe un $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tal que

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \equiv \varepsilon \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

luego $a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \equiv (\varepsilon a) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$, pero la regla (80) se puede aplicar al segundo miembro de esta última identidad, deduciéndose:

$$\begin{aligned} d(a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= \varepsilon da \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = \\ &= da \wedge (\varepsilon \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \end{aligned}$$

y queda demostrada (82). □

Otra rigidez de la regla (80) es que sólo permite monomios formados por diferenciales de las coordenadas estándar x_1, \dots, x_n . Para quitarla necesitamos un par de fórmulas y un lema.

$$\boxed{a(x) \text{ función escalar} \implies d(a\eta) = da \wedge \eta + a d\eta} \quad (83)$$

La demostración de (83) se deja como ejercicio. Atención al signo en la siguiente fórmula:

$$\boxed{\omega \text{ forma de Pfaff} \implies d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta - \omega \wedge d\eta} \quad (84)$$

Demostración. Supongamos primero que ω y η son así: $\omega \equiv a(x) dx_i$, $\eta \equiv b(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h}$. Usando la fórmula (82), calculamos:

$$d(\omega \wedge \eta) = d((ab) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h}) = (b da + a db) \wedge dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h},$$

de donde:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= b da \wedge dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h} + a db \wedge dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h} = \\ &= (da) \wedge dx_i \wedge (b dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h}) - a dx_i \wedge (db \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_h}) = (d\omega) \wedge \eta - \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

En el caso general es $\omega \equiv \sum \omega_i$ y $\eta \equiv \sum \eta_\alpha$, sumas de monomios como los del cálculo anterior. Para cada par (i, α) se tiene $d(\omega_i \wedge \eta_\alpha) = (d\omega_i) \wedge \eta_\alpha - \omega_i \wedge d\eta_\alpha$; la suma de los miembros de la izquierda de estas igualdades da por resultado $d(\omega \wedge \eta)$ y la suma de los miembros de la derecha da por resultado $(d\omega) \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$. Como hay igualdad sumando a sumando, los dos resultados son iguales. □

Lema 159. Para funciones cualesquiera $a(x) \in \mathcal{C}^1$ y $a_1(x), \dots, a_k(x) \in \mathcal{C}^2$, tenemos la siguiente generalización de (80):

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

las derivadas exteriores con comodidad.

Cartagena99

6.9 Lema de Poincaré

Definición 160. Sea ω una k -forma en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que ω es **cerrada** si $d\omega \equiv 0$. Decimos que ω es **exacta** en U si existe una $(k-1)$ -forma η en U tal que $\omega \equiv d\eta$.

Teorema 161. (Lema de Poincaré). Una forma diferencial, de cualquier grado positivo, es cerrada si y sólo si es localmente exacta. En un abierto **convexo** toda forma diferencial cerrada es exacta.

En particular $d(d\eta) = 0$ para toda forma diferencial η de clase \mathcal{C}^2 , lo que suele resumirse así:

$$\boxed{d \circ d = 0} \quad (86)$$

Demostración. La igualdad $d(d\eta) = 0$ basta demostrarla para $\eta \equiv a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$:

$$dd(a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = d(da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = d(da) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

que es cero porque $d(da) = 0$.

Sea ahora $U \subset \mathbb{R}^n$ y ω una k -forma cerrada en U . Suponiendo U convexo, vamos a describir un método explícito para calcular una $(k-1)$ -forma η en U tal que $d\eta = \omega$.

Primer paso. De todo el desarrollo $\omega \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ separamos los términos que contienen dx_1 y, si hace falta, los reordenamos para que el factor dx_1 quede en primer lugar: los $a_{1i_2 \dots i_k} dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, y calculamos funciones $\tilde{a}_{1i_2 \dots i_k}$ tales que:

$$\frac{\partial \tilde{a}_{1i_2 \dots i_k}}{\partial x_1} = a_{1i_2 \dots i_k},$$

lo cual es posible porque U es convexo. Con estas funciones formamos la $(k-1)$ -forma:

$$\eta_1 = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_k \leq n} \tilde{a}_{1i_2 \dots i_k} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

y consideramos la diferencia $\omega_1 = \omega - d\eta_1$ que, siendo diferencia de una cerrada menos una exacta, es cerrada. Además, por la manera en que la hemos construido, no contiene dx_1 :

$$\omega_1 = \sum_{2 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} b_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Dados $2 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, el término (función) $\cdot dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ del desarrollo de $d\omega_1$ es nulo y a él sólo contribuyen las derivadas de los términos $b_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ con $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, i_1, \dots, i_k\}$, que son los $0 \cdot dx_1 \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{h-1}} \wedge dx_{i_{h+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$, idénticamente nulos, y el $b_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Por lo tanto sólo contribuye la derivada del término $b_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, luego:

$$0 = (\text{función}) \cdot dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \frac{\partial b_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Esto prueba que $\frac{\partial b_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_1} \equiv 0$ para todas las funciones coeficiente $b_{i_1 \dots i_k}$ del desarrollo de ω_1 .

Como U es convexo, esto implica que son funciones independientes de x_1 : $b_{i_1 \dots i_k}(x_2, \dots, x_n)$ y

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

funciones no dependientes de x_1 , y formamos con esas nuevas funciones una

Cartagena99

$(k-1)$ -forma η_2 en U . Esta forma diferencial η_2 no contiene x_1 en ningún sitio y, por lo tanto, tampoco lo hace $d\eta_2$. Además la diferencia

$$\omega_2 = \omega_1 - d\eta_2 = \omega - d\eta_1 - d\eta_2,$$

no contiene x_1 ni x_2 en ningún sitio y es cerrada.

Paso general. Partiendo de ω_r , cerrada y que no contiene x_1, \dots, x_r en ningún sitio, hallamos una $(k-1)$ -forma η_{r+1} tal que $\omega_{r+1} = \omega_r - d\eta_{r+1}$ no contiene x_1, \dots, x_r, x_{r+1} en ningún sitio y, siendo diferencia de una cerrada menos una exacta, es cerrada.

Paso final. Cuando hayamos hecho $n-k$ pasos tenemos ω_{n-k} que solamente contiene las k últimas coordenadas x_{n-k+1}, \dots, x_n y se desarrolla con un solo monomio:

$$\omega_{n-k} = \omega - d\eta_1 - d\eta_2 - \dots - d\eta_{n-k} = c(x_{n-k+1}, \dots, x_n) dx_{n-k+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Tomamos una integral indefinida de c : $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial x_{n-k+1}} = c$, cuidando que no dependa de x_1, \dots, x_{n-k} , hacemos $\eta_{n-k+1} = \tilde{c} dx_{n-k+2} \wedge \dots \wedge dx_n$ y conseguimos $\omega_{n-k} = d\eta_{n-k+1}$. Finalmente:

$$\omega = d(\eta_1 + \dots + \eta_{n-k} + \eta_{n-k+1}).$$

□

6.10 Pullback de formas diferenciales

Definición 162. Sean $U_1 \subseteq \mathbb{R}_u^m$ y $U_2 \subseteq \mathbb{R}_x^n$ abiertos, $f: U_1 \rightarrow U_2$ una aplicación diferenciable escrita como $x = f(u)$ y ω una k -forma en U_2 . El **pullback de ω por f** es la k -forma $f^*\omega$ en U_1 definida de la siguiente manera:

$$\text{para } u \in U_1 \text{ y } v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m \text{ es } (f^*\omega)_u(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(u)}((df)_u v_1, \dots, (df)_u v_k).$$

Si $k=0$ entonces $\omega \equiv a(x): U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar y definimos $f^*a \equiv a \circ f$.

Se dice “pullback”, que significa “resultado de tirar hacia atrás”, por razones visuales:

Si mirando la flecha $U_1 \rightarrow U_2$ nos imaginamos que f “empuja” los puntos de U_1 hacia U_2 . Entonces nos tenemos que imaginar que esa misma f “tira” de ω , que está en U_2 , y la trae a una forma diferencial en U_1 . Así $f^*\omega$ es “la traída de ω por f ”.

El pullback $f^*\omega$ es fácil de calcular a partir de la expresión de ω en coordenadas:

$$\omega \equiv \sum a_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (87)$$

y de las funciones que definen la aplicación: $f(u) \equiv (x_1(u), \dots, x_n(u))$. Se repite lo dicho en el apartado 5.5: se sustituye en (87) cada x_j por la función $x_j(u)$, se hacen las operaciones y se reagrupa.

Veamos un ejemplo. Consideramos la siguiente 2-forma en \mathbb{R}^3 : $\omega \equiv e^z dx \wedge dy$ y la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z) = f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u^2 + v^2)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

∩∩∩

respecto de una base, entonces el espacio $\mathcal{A}^k(E)$ tiene una base de un solo elemento: $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k$, y toda forma alternada $\varphi : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ admite una expresión:

$$\varphi = \text{cte} \cdot \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_k .$$

Correspondiendo a eso, las k -formas en un abierto de \mathbb{R}_u^k son muy sencillas, pues se expresan con un solo monomio y una sola función coeficiente:

$$\omega_0 \equiv a(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k \quad , \quad a(u) \equiv \omega_0(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) .$$

Definición 163. Sea $\omega_0 \equiv a(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k$ una k -forma en un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}_u^k$. Para toda región acotada $D \subseteq U_0$, definimos la **integral de ω_0 sobre D** de la siguiente manera:

$$\int_D \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \omega_{0u}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) du_1 \dots du_k ,$$

que es lo mismo que escribir:

$$\int_D a(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_D a(u) du_1 \dots du_k .$$

Importante: El orden de los vectores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ en la primera fórmula es fundamental, por lo cual el orden de los factores du_j en $a(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k$ también lo es.

Si ω es una k -forma en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}_x^n$ y $\Phi(u) : U_0 \rightarrow U$ es una función de k parámetros, entonces:

$$(\Phi^*\omega)_u(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \omega_{\Phi(u)}((d\Phi)_u\mathbf{e}_1, \dots, (d\Phi)_u\mathbf{e}_k) = \omega_{\Phi(u)}(\Phi_{u_1}, \dots, \Phi_{u_k}) ,$$

luego $\Phi^*\omega \equiv \omega_{\Phi(u)}(\Phi_{u_1}, \dots, \Phi_{u_k}) du_1 \wedge \dots \wedge du_k$ y la fórmula (75) del apartado 6.6 se escribe:

$$\int_{\Phi} \omega = \int_D \Phi^*\omega$$

Para integrar una k -forma ω sobre una función $\mathbb{R}^k \supseteq D \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^n$ se hace el pullback $\Phi^*\omega$ y se integra éste sobre la región D .

(88)

Las siguientes identidades muestran cómo interactúa el pullback con las operaciones algebraicas:

$$\boxed{f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2 \quad , \quad f^*(a\omega) = (a \circ f)f^*\omega \quad , \quad f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2} \quad (89)$$

Si tenemos abiertos $U_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, 3$, aplicaciones diferenciables $U_1 \xrightarrow{f} U_2 \xrightarrow{g} U_3$ y una forma diferencial ω en U_3 , podemos *traerla* a la forma $g^*\omega$ definida en U_2 y después *traer* $g^*\omega$ a la forma $f^*(g^*\omega)$, que está definida en U_1 .

$$\begin{array}{ccccc} f^*(g^*\omega) & \longleftarrow & g^*\omega & \longleftarrow & \omega \\ U_1 & & U_2 & & U_3 \end{array}$$

También podemos usar $g \circ f : U_1 \rightarrow U_3$ para directamente *traer* ω a la forma diferencial $(g \circ f)^*\omega$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\omega(f^*\omega) = f^*(\omega\omega) \quad (91)$$



Demostración. Empezamos con el caso en que $\omega \equiv b(x) : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma. Para cada punto $u \in U_1$ y cualquier $v \in \mathbb{R}^k$ tenemos:

$$d(f^*b)_u(v) = d(b \circ f)_u(v) = (db)_{f(u)}((df)_u v) = (f^*(db))_u(v),$$

queda probado que $d(f^*b) \equiv f^*(db)$.

En el caso $k \geq 1$, tomamos $\omega \equiv \sum a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ y la descripción de la aplicación: $x = f(u) \equiv (f_1(u), \dots, f_n(u))$ donde, por hipótesis, cada f_j es de clase \mathcal{C}^2 . Por el caso $k = 0$, para cada i vemos que $f^*(dx_i) = d(x_i \circ f) = df_i$ y, por (89), para cada secuencia i_1, \dots, i_k es:

$$f^*(a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = (a_{i_1 \dots i_k} \circ f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k},$$

de donde, utilizando (85) y (89), sacamos:

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= \sum d((a_{i_1 \dots i_k} \circ f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}) = \sum d(a_{i_1 \dots i_k} \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} = \\ &= f^* \sum (d a_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = f^* d\omega. \end{aligned}$$

□

6.11 Demostraciones

Demostración de la proposición 141.

Primera parte. Sean $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ dos orientaciones de X tales que el conjunto

$$Y = \{p \in X : \mathcal{O}_{1p} = \mathcal{O}_{2p}\},$$

contiene un punto p_0 , o sea no es vacío.

Veamos que Y es un abierto relativo de X . Dado $p \in Y$ podemos elegir una base \mathcal{B}_p de $T_p X$ que define la orientación $\mathcal{O}_{1p} = \mathcal{O}_{2p}$. Para $q \in X$ cercano a p , hay dos bases $\mathcal{B}_{1q}, \mathcal{B}_{2q}$ ambas muy cercanas a \mathcal{B}_p y definiendo \mathcal{O}_{1p} y \mathcal{O}_{2p} , respectivamente. Pero entonces \mathcal{B}_{1p} es cercana a \mathcal{B}_{2p} y la matriz de paso entre ellas, cercana a la identidad I_k , tiene determinante positivo. Esto prueba que \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 coinciden en puntos cercanos a p , es decir que Y contiene todo un entorno de p en X . Como p era un punto arbitrario de Y , queda probado que Y es un abierto relativo de X .

Veamos que $X \setminus Y$ también es un abierto relativo de X . Dado $p' \in X \setminus Y$, las orientaciones $\mathcal{O}_{1p'}$ y $\mathcal{O}_{2p'}$ de $T_{p'} X$ se definen por bases respectivas $\mathcal{B}_{1p'}, \mathcal{B}_{2p'}$ con matriz de paso P tal que $\det P < 0$. Para $q \in X$ cercano a p' tenemos bases $\mathcal{B}_{1q}, \mathcal{B}_{2q}$ que definen \mathcal{O}_{1q} y \mathcal{O}_{2q} , respectivamente, con \mathcal{B}_{1q} muy cercana a $\mathcal{B}_{1p'}$ y \mathcal{B}_{2q} muy cercana a $\mathcal{B}_{2p'}$. La matriz de paso de \mathcal{B}_{1q} a \mathcal{B}_{2q} es cercana a P y tiene determinante negativo, luego $\mathcal{O}_{1q} \neq \mathcal{O}_{2q}$ y $q \in X \setminus Y$. Esto prueba que $X \setminus Y$ contiene un entorno de p' en X , luego es un abierto relativo porque p' era un punto arbitrario suyo.

Como X es conexa por caminos, el conjunto Y tiene que ser o vacío o toda X . Pero Y no es vacío por hipótesis, luego $Y = X$ y $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Segunda parte. Sean ahora $W \subseteq \mathbb{R}^k$ abierto conexo por caminos y $\Phi : W \rightarrow X$ una parametrización regular, donde X es una variedad orientable en la que hemos elegido una orientación \mathcal{O} . Definimos el conjunto $W \subseteq W$ formado por los $u \in W$ tales que la base

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})$ son puestas como funciones \mathcal{C}^s de las otras variables $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ que a su vez recorren un abierto $W_0 \subseteq \mathbb{R}^k$. La correspondiente parametrización grafo $\Psi : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular y biyectiva de W_0 a $X \cap U^p$. Además la inversa Ψ^{-1} es la restricción a $X \cap U^p$ de la proyección $\pi_{i_1 \dots i_k}$. Tomamos un entorno $u \in W^u \subseteq W$ tal que $\Phi(W^u) \subseteq U^p$. Entonces en realidad $\Phi(W^u)$ está contenido en el grafo y la proyección

$$\sigma = \pi_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi : W^u \longrightarrow W_0,$$

además de ser al menos \mathcal{C}^1 , cumple la identidad

$$\Phi|_{W^u} \equiv \Psi \circ \sigma. \quad (92)$$

Aplicando la regla de la cadena a (92), vemos que la inyectividad de las diferenciales de Φ fuerza que las de σ sean también inyectivas, luego biyectivas, y σ es aplicación regular entre dos abiertos de \mathbb{R}^k . Entonces σ es localmente inyectiva, por el teorema de la función inversa, y es abierta por la proposición 89 del apartado 3.6. La inyectividad local de σ la hereda $\Psi \circ \sigma$, es decir $\Phi|_{W^p}$, por ser Ψ biyectiva. Esto demuestra la inyectividad local de Φ .

Volviendo con el abierto W' , ahora sabemos que $\sigma(W' \cap W^u)$ es un abierto de \mathbb{R}^k y la fórmula:

$$\Phi(W' \cap W^u) = (X \cap U^p) \cap \pi_{i_1 \dots i_k}^{-1}(\sigma(W' \cap W^u)),$$

produce un abierto relativo de X . Suponiendo hecha esta construcción para todo $u \in W'$, la igualdad:

$$\Phi(W') = \bigcup_{u \in W'} \Phi(W' \cap W^u),$$

exhibe la imagen $\Phi(W')$ como un abierto relativo de X . □

Demostración de la proposición 144. Por razones puramente conjuntistas, las biyecciones (60) están bien definidas y son inversas mutuas. Si demostramos que son de clase \mathcal{C}^s , quedará probado que son difeomorfismos. Por la simetría del problema, basta con ver que $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i$ es de clase \mathcal{C}^s .

Dado $u \in W_{ij}$ veamos que $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i$ es de clase \mathcal{C}^s en un entorno de u . Como u es arbitrario, esto probará que $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i$ es de clase \mathcal{C}^s en todo su dominio.

Sea $v = \Phi_j^{-1}(u)$, es decir que tenemos $\Phi_j(v) = \Phi_i(u) = p \in X$. Hay un abierto $U^p \subseteq \mathbb{R}^n$, conteniendo a p , tal que $X \cap U^p$ es un grafo. Sea $\Psi : W_0 \rightarrow X \cap U^p$ la correspondiente parametrización grafo y $\pi_{i_1 \dots i_k}$ la proyección que la invierte. Tomamos un entorno $W^v \subseteq W_{ji}$ de v tal que $Y_j = \Phi_j(W^v)$ es un abierto relativo de X contenido en U^p y conteniendo a p .

Hemos visto en la demostración del lema 142 que la proyección $\sigma = \pi_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi_j : W^v \rightarrow W_0$ cumple la identidad $\Phi_j|_{W^v} \equiv \Psi \circ \sigma$. También hemos visto que σ es regular. Además es inyectiva, porque Φ_j lo es, luego σ es un difeomorfismo de W^v a un abierto $W'_0 \subseteq W_0$.

Como Φ_j es biyectiva de W^v a Y_j , resulta que Ψ es biyectiva de W'_0 a Y_j , luego

$$W'_0 = \Psi^{-1}(Y_j) = \pi_{i_1 \dots i_k}(Y_j).$$

El inverso $\Phi_j^{-1} : Y_j \rightarrow W^v$ es la composición $\sigma^{-1} \circ (\Psi^{-1}|_{Y_j}) = \sigma^{-1} \circ (\pi_{i_1 \dots i_k}|_{Y_j})$. Tomamos ahora el abierto $W_1 = \Phi_i^{-1}(Y_j)$, que contiene a u , y tenemos la fórmula:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

son grafos $\{x_j = \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\}$ con φ función de

Cartagena99

clase al menos \mathcal{C}^1 en un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Basta, pues, con demostrar el teorema cuando X es un grafo de éstos. Además podemos suponer que W es conexo por caminos, porque si no lo es estudiamos por separado los grafos de las restricciones de φ a cada componente conexa por caminos de W .

Haremos la demostración cuando $j = 1$. Al final será obvio qué hacer para otros valores de j . Tenemos, pues, un abierto conexo por caminos $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, una función $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ y el grafo

$$X = \{ (\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) : (x_2, \dots, x_n) \in W \}.$$

Consideramos también la parametrización grafo:

$$\Phi : W \longrightarrow X \quad , \quad \Phi(x_2, \dots, x_n) = (\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Al ser W conexo por caminos, su imagen continua $X = \Phi(W)$ también lo es. Entonces de las proposiciones 141 y 143 deducimos que X tiene exactamente dos orientaciones: la inducida por Φ y la inducida por $\Psi : W' \rightarrow X$, donde $W' = \{(x_2, x_3, \dots, x_n) : (-x_2, x_3, \dots, x_n) \in W\}$ y $\Psi(x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv \Phi(-x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Encontramos el campo normal $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, continuo y unitario, dado por la siguiente fórmula en la que hemos escrito \bar{x} para denotar (x_2, \dots, x_n) :

$$p = \Phi(\bar{x}) \implies \mathbf{a}(p) = \frac{(1, -\varphi_{x_2}(\bar{x}), \dots, -\varphi_{x_n}(\bar{x}))}{\sqrt{1 + \varphi_{x_2}(\bar{x})^2 + \dots + \varphi_{x_n}(\bar{x})^2}}.$$

Si $\mathbf{b} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es cualquier campo normal, continuo y unitario, se prueba fácilmente que el conjunto $Y = \{p \in X : \mathbf{a}(p) = \mathbf{b}(p)\}$ es abierto y cerrado relativo de X . Como X es conexa por caminos, se deduce que o bien $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$ o bien $\mathbf{b} \equiv -\mathbf{a}$, luego X tiene exactamente dos campos normales continuos y unitarios: \mathbf{a} y $-\mathbf{a}$.

En el siguiente cálculo hemos sumado a la primera columna cada una de las otras columnas multiplicada por su primera entrada:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} & \cdots & \varphi_{x_n} \\ -\varphi_{x_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_{x_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{x_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 + \|\nabla\varphi\|_2^2 & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} & \cdots & \varphi_{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

y llegamos a:

$$\det [\mathbf{a} | \Phi_{x_2} | \cdots | \Phi_{x_n}] = \frac{(1 + \|\nabla\varphi\|_2^2) \cdot 1 \cdots 1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi\|_2^2}} = \sqrt{1 + \|\nabla\varphi\|_2^2} > 0. \quad (93)$$

Dado un campo normal y continuo $\mathbf{b}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, el campo $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 / \|\mathbf{b}_0\|_2$ es normal, continuo y unitario. Si $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$, entonces (93) nos dice que la orientación en cada espacio $T_p X$ correspondiente a $\mathbf{b}_0(p)$ por (62) es la inducida por Φ , luego varía continuamente con p y es una orientación de X . Si $\mathbf{b} \equiv -\mathbf{a}$, entonces deducimos de (93) que la orientación en cada espacio $T_n X$ correspondiente a $\mathbf{b}_0(p)$ por (62) es la inducida por Ψ , luego también varía

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Demostración del teorema 155. Primero demostramos que esas funciones generan $\mathcal{A}^k(E)$. Lo haremos para $k = 2$ dejando como ejercicio el caso de k general.

Tenemos, pues, una forma bilineal alternada $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Escribimos el par general (v, w) de vectores de E como $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ y $w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$. Desarrollamos:

$$\begin{aligned} \varphi(v, w) &= \varphi \left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i v_i, \sum_{1 \leq j \leq n} b_j v_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j \varphi(v_i, v_j) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_i b_j \varphi(v_i, v_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i b_j \varphi(v_i, v_j) + a_j b_i \varphi(v_j, v_i) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(v_i, v_j) (a_i b_j - b_i a_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(v_i, v_j) \left(\ell_i(v) \ell_j(w) - \ell_i(w) \ell_j(v) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(v_i, v_j) \Delta(\ell_i, \ell_j)(v, w). \end{aligned}$$

Al ser esta igualdad cierta para cualesquiera $v, w \in E$, tenemos $\varphi \equiv \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \Delta(\ell_i, \ell_j)$ con los coeficientes dados por $c_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$. Análogamente se hace para otros k .

Con esto sabemos que \mathcal{B}_k genera $\mathcal{A}^k(E)$. Para ver que \mathcal{B}_k es una base probaremos ahora que, dada φ alternada de grado k , los coeficientes en el desarrollo

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} c_{i_1 \dots i_k} \Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}), \quad (94)$$

sólo pueden ser $c_{i_1 \dots i_k} = \varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$.

Para $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ y $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, vemos que:

$$\Delta(\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_k})(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (j_1, \dots, j_k) \neq (i_1, \dots, i_k) \\ 1 & \text{si } (j_1, \dots, j_k) = (i_1, \dots, i_k) \end{cases}$$

lo cual nos permite deducir que si se cumple (94) entonces:

$$\varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = c_{i_1 \dots i_k} \cdot 1 + \sum_{(j_1, \dots, j_k) \neq (i_1, \dots, i_k)} c_{j_1 \dots j_k} \cdot 0 = c_{i_1 \dots i_k}.$$

□

Demostración del teorema 156. Consideramos el grupo simétrico S_{k+h} y los subgrupos H_1, H_2 , donde H_1 consta de las permutaciones que fijan $k+1, \dots, k+h$ y H_2 consta de las permutaciones que fijan $1, \dots, k$. Los elementos de H_1 conmutan con los de H_2 y $H_1 H_2$ es un subgrupo y es un producto directo.

Fijamos cualquier conjunto $R \subset S_{k+h}$ de representantes para el conjunto cociente $S_{k+h}/H_1 H_2$. Hecho eso, toda permutación $\sigma \in S_{k+h}$ se factoriza de manera única como $\sigma = \rho \tau_1 \tau_2$ con $\rho \in R$, $\tau_1 \in H_1$ y $\tau_2 \in H_2$.

Dadas formas lineales $\ell_1, \dots, \ell_k, m_1, \dots, m_h : E \rightarrow \mathbb{R}$ y vectores $v_1, \dots, v_{k+h} \in E$, Tenemos:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Esto sugiere definir, para cualesquiera $\varphi \in \mathcal{A}^k(E)$ y $\psi \in \mathcal{A}^h(E)$, la función:

$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{k+h}) = \sum_{\rho \in R} \text{sig}(\rho) \cdot \varphi(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) \cdot \psi(v_{\rho(k+1)}, \dots, v_{\rho(k+h)}) .$$

Esto es una buena definición de una función $E^{k+h} \rightarrow \mathbb{R}$. Además depende bilinealmente de la pareja (φ, ψ) . Sabemos, además, que la operación \wedge que resulta satisface la condición (78). Sólo falta comprobar que $\varphi \wedge \psi$ es alternada, pero esto es cierto cuando los factores son del tipo $\Delta(\dots)$ y, como \wedge es bilineal y en general φ y ψ son sumas finitas de elementos de ese tipo, la función $\varphi \wedge \psi$ es una suma finita de formas alternadas y por lo tanto una forma alternada. \square

6.12 Ejemplos de cálculo de una primitiva exterior

Dada una k -forma ω , llamamos **primitiva exterior** o **antiderivada exterior** de ω a una $(k-1)$ -forma η tal que:

$$d\eta = \omega .$$

Llamamos **exactas en el abierto** U a las formas diferenciales que admiten una antiderivada exterior en U . Para que ω sea exacta en U es necesario que sea **cerrada en** U , es decir que cumpla la identidad:

$$d\omega \equiv 0 \quad \text{en todo } U .$$

En el apartado 6.9 hemos descrito un método para calcular, en dominios convexos, una primitiva exterior de una forma diferencial cerrada. Aquí damos varios ejemplos de ese método de cálculo. En cada uno de ellos, comprueba tú que la forma ω que se da cumple $d\omega \equiv 0$.

Ejemplo1. Una 2-forma en \mathbb{R}^3 :

$$\omega \equiv (e^{yz} - x) dx \wedge dy + e^z dx \wedge dz + (2yz - xy e^{yz} + 1) dy \wedge dz .$$

Comprueba que $d\omega \equiv 0$.

Primer paso. Separamos los términos que contienen dx :

$$(e^{yz} - x) dx \wedge dy \quad \text{y} \quad e^z dx \wedge dz ,$$

en cada uno quitamos el factor dx (asegurándonos primero de que esté a la izquierda) y reemplazamos la función coeficiente por una integral indefinida suya respecto de x :

$$\eta_1 = \left(x e^{yz} - \frac{x^2}{2} \right) dy + x e^z dz .$$

Calculamos la derivada exterior de η_1 :

$$d\eta_1 = (e^{yz} - x) dx \wedge dy + e^z dx \wedge dz - xy e^{yz} dy \wedge dz ,$$

y la diferencia $\omega_1 = \omega - d\eta_1$ ya no contiene x en ningún sitio:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

y finalmente:

$$\omega = d\eta \quad \text{con} \quad \eta = \eta_1 + (y^2z + y) dz = \left(x e^{yz} - \frac{x^2}{2} \right) dy + (x e^z + y^2z + y) dz .$$

Ejemplo 2. Una 3-forma en \mathbb{R}^4 :

$$\omega \equiv (x_2 + 5x_3x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (1 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (3x_1x_3 - e^{x_3}) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 .$$

Comprueba que $d\omega \equiv 0$.

Primer paso. Separamos los términos que contienen dx_1 y nos aseguramos de que el factor dx_1 esté a la izquierda:

$$(x_2 + 5x_3x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad \text{y} \quad (1 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 .$$

En cada término quitamos el factor dx_1 e integramos la función coeficiente respecto de x_1 :

$$\eta_1 = (x_1x_2 + 5x_1x_3x_4) dx_2 \wedge dx_3 + (x_1 + x_1x_3^2) dx_2 \wedge dx_4 .$$

Hallamos $d\eta_1$ y la diferencia:

$$\begin{aligned} d\eta_1 &= (x_2 + 5x_3x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (1 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \\ &\quad + 5x_1x_3 dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 2x_1x_3 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 = \\ &= (x_2 + 5x_3x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (1 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 3x_1x_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 , \\ \omega - d\eta_1 &= -e^{x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 . \end{aligned}$$

Segundo paso. Como $\omega - d\eta_1$ es un monomio conteniendo solamente las variables x_2, x_3, x_4 , es fácil ponerlo como una derivada exterior:

$$-e^{x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = d(e^{x_3} dx_2 \wedge dx_4) ,$$

luego $\omega = d(\eta_1 + e^{x_3} dx_2 \wedge dx_4)$, es decir:

$$\omega = d\eta \quad \text{con} \quad \eta = (x_1x_2 + 5x_1x_3x_4) dx_2 \wedge dx_3 + (x_1 + x_1x_3^2 + e^{x_3}) dx_2 \wedge dx_4 .$$

Ejemplo 3. Una 2-forma en \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} \omega &= (e^{2x_1} \sin x_2 - 2x_1x_2 e^{2x_1} \cos x_2) dx_1 \wedge dx_2 - 4x_2x_3 e^{2x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_2 dx_1 \wedge dx_4 - \\ &\quad - (e^{x_4} + 2x_3 e^{2x_1}) dx_2 \wedge dx_3 + (x_1 \cos x_2 - x_3 e^{x_4}) dx_2 \wedge dx_4 + 2x_3 dx_3 \wedge dx_4 . \end{aligned}$$

Como era de esperar, es una suma de $\binom{4}{2} = 6$ monomios. Puedes comprobar que es cerrada.

Primer paso. Separamos los (tres) términos de ω con el factor dx_1 . En cada término nos aseguramos de que dx_1 esté a la izquierda, quitamos este factor e integramos la función coeficiente respecto de x_1 :

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

y hallamos la diferencia:

$$\omega_1 = \omega - d\eta_1 = -e^{x_4} dx_2 \wedge dx_3 - x_3 e^{x_4} dx_2 \wedge dx_4 + 2x_3 dx_3 \wedge dx_4 ,$$

que, tal como predice la teoría, ya no contiene la variable x_1 en ningún sitio debido a que ω es cerrada. Además ω_1 es cerrada, por ser diferencia de una cerrada menos una exacta.

Segundo paso. Separamos los (dos) términos de ω_1 que contienen el factor dx_2 . En cada término nos aseguramos de que dx_2 esté a la izquierda, quitamos este factor e integramos la función coeficiente respecto de x_2 eligiendo funciones primitivas que no dependan de x_1 :

$$\eta_2 = -x_2 e^{x_4} dx_3 - x_2 x_3 e^{x_4} dx_4 .$$

Hallamos la derivada exterior y la diferencia:

$$d\eta_2 = -e^{x_4} dx_2 \wedge dx_3 - x_3 e^{x_4} dx_2 \wedge dx_4 + \underbrace{(x_2 e^{x_4} - x_2 e^{x_4})}_{\equiv 0} dx_3 \wedge dx_4 ,$$

$$\omega_2 = \omega_1 - d\eta_2 = 2x_3 dx_3 \wedge dx_4 ,$$

Tal como predice la teoría, ω_2 ya no contiene x_1 ni x_2 en ningún sitio. Para que esto haya sido posible, ha sido crucial que ω_1 sea cerrada y que hayamos construido η_2 con funciones primitivas que no dependen de x_1 .

Tercer paso. Como ω_2 es un monomio sin las variables x_1, x_2 , es fácil ponerla como una derivada exterior:

$$2x_3 dx_3 \wedge dx_4 = d(x_3^2 dx_4) .$$

Finalmente $\omega = d(\eta_1 + \eta_2 + x_3^2 dx_4)$, es decir $\omega = d\eta$ con:

$$\eta = \left(\frac{e^{2x_1}}{2} \sin x_2 - (x_1 e^{2x_1} - (1/2) e^{2x_1}) x_2 \cos x_2 \right) dx_2 - (2x_2 x_3 e^{2x_1} + x_2 e^{x_4}) dx_3 + (x_1 \sin x_2 - x_2 x_3 e^{x_4} + x_3^2) dx_4 .$$

6.13 Ejemplos de orientación, pullback e integración

Ejemplo 1. Sea $X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad en \mathbb{R}^3 . Elige una normal unitaria continua ν para X . Considera la orientación \mathcal{O} de X correspondiente a la ν elegida y calcula $\int_{(X, \mathcal{O})} \omega$, siendo ω la siguiente 2-forma:

$$\omega = x dx \wedge dy + y dx \wedge dz .$$

El campo $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$ es normal a la esfera, en la cual tiene longitud constante 2. Elijamos, por ejemplo, $\nu = (1/2) \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (x, y, z)$.

La siguiente parametrización:

$$\Phi(u, v) = \left(\cos u \cos v , \cos u \sin v , \sin u \right) , \quad (u, v) \in D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi) ,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\Phi(u, v) = (-\cos u \sin v , \cos u \cos v , 0) = (-1, 0, 0) ,$$

Cartagena99

Y ahora aplicamos el criterio de la fórmula (62). El determinante:

$$\det [\nu | \Phi_u | \Phi_v]_{(u,v)=(0,\pi/2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

es negativo, luego Φ no es compatible con la orientación que hemos elegido. La aplicación $\sigma(u, v) = (-u, v)$ es un difeomorfismo, aplica biyectivamente D sobre sí mismo e invierte la orientación; por lo tanto la siguiente parametrización:

$$\Psi : D \rightarrow X, \quad \Psi(u, v) = \Phi(-u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u),$$

es compatible con la orientación \mathcal{O} correspondiente a ν .

Como además el complemento $X \setminus \Psi(D) = X \setminus \Phi(D)$ es un arco de curva, tenemos:

$$\int_{(X, \mathcal{O})} \omega = \int_{(\Psi(D), \mathcal{O})} \omega = \int_{\Psi} \omega = \int_D \Psi^* \omega.$$

Comenzamos el cálculo del pullback:

$$\begin{aligned} \Psi^* \omega &= \cos u \cos v d(\cos u \cos v) \wedge d(\cos u \sin v) + \\ &+ \cos u \sin v d(\cos u \cos v) \wedge d(-\sin u) + \\ &= \cos u \cos v [-\sin u \cos v du - \cos u \sin v dv] \wedge [-\sin u \sin v du + \cos u \cos v dv] + \\ &+ \cos u \sin v [-\sin u \cos v du - \cos u \sin v dv] \wedge (-\cos u du) = \\ &= \cos u \cos v [(-\sin u) \cos u \cos^2 v du \wedge dv + (-\cos u)(-\sin u) \sin^2 v dv \wedge du] + \\ &+ \cos u (-\cos u)(-\cos u) \sin^2 v dv \wedge du. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $dv \wedge du = -du \wedge dv$, llegamos a:

$$\Psi^* \omega = \left(-\cos^2 u \sin u \cos^3 v - \cos^2 u \sin u \cos v \sin^2 v - \cos^3 u \sin^2 v \right) du \wedge dv.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \int_{(X, \mathcal{O})} \omega &= \int_D \left(-\cos^2 u \sin u \cos^3 v - \cos^2 u \sin u \cos v \sin^2 v - \cos^3 u \sin^2 v \right) dudv = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos^2 u \sin u du \cdot \int_0^{2\pi} \cos^3 v dv - \\ &- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du \cdot \int_0^{2\pi} \cos v \sin^2 v dv - \\ &- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 u du \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 v dv = \\ &= 0 - 0 - \left[\sin u - \frac{\sin^3 u}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \pi = -\frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Las normales unitarias del grafo X son $\pm(1/\ell) \cdot \mathbf{a}$, siendo:

$$\mathbf{a} = (-\varphi_{x_1}, -\varphi_{x_2}, -\varphi_{x_3}, 1) \quad \text{y} \quad \ell = \sqrt{\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2 + 1}.$$

Elegimos como normal ν la que tiene cuarta coordenada positiva, es decir $\nu = (1/\ell) \cdot \mathbf{a}$, y consideramos la correspondiente orientación \mathcal{O} en X .

El determinante:

$$\det [\mathbf{a} | \Phi_{x_1} | \Phi_{x_2} | \Phi_{x_3}] = \begin{vmatrix} -\varphi_{x_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\varphi_{x_2} & 0 & 1 & 0 \\ -\varphi_{x_3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \varphi_{x_1} & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ell^2 & \varphi_{x_1} & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} \end{vmatrix} = -\ell^2,$$

es negativo, luego Φ no es compatible con \mathcal{O} . El difeomorfismo $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$ invierte la orientación y es biyectivo de $\tilde{D} = [-1, 0] \times [0, 1]^2$ a D . Tomamos el compuesto $\Psi = \Phi \circ \sigma$, es decir:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3, \psi(x_1, x_2, x_3)) \quad , \quad (x_1, x_2, x_3) \in [-1, 0] \times [0, 1]^2,$$

siendo $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(-x_1, x_2, x_3)$. Ahora Ψ es compatible con la orientación \mathcal{O} y la imagen $\Psi(\tilde{D})$ es la misma parcela de antes. Calculamos el pullback de ω :

$$\Psi^*\omega = (-dx_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

y sabemos que:

$$\int_{(\Psi(\tilde{D}), \mathcal{O})} \omega = \int_{\tilde{D}} -dx_1 dx_2 dx_3 = (-1) \cdot \text{Vol}(\tilde{D}) = -1.$$

Calculamos el pullback de η :

$$\Psi^*\eta = (-dx_1) \wedge dx_2 \wedge d\psi = -\psi_{x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

y entonces:

$$\begin{aligned} \int_{(\Psi(\tilde{D}), \mathcal{O})} \eta &= \int_{[-1,0] \times [0,1]^2} -\psi_{x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{[-1,0] \times [0,1]} \left(\int_{[0,1]} -\psi_{x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{[-1,0] \times [0,1]} (\psi(x_1, x_2, 0) - \psi(x_1, x_2, 1)) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{[-1,0] \times [0,1]} \varphi(-x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 - \int_{[-1,0] \times [0,1]} \varphi(-x_1, x_2, 1) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{[0,1]^2} \varphi(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 - \int_{[0,1]^2} \varphi(x_1, x_2, 1) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The text is set against a light blue, irregular shape that resembles a map of the city of Cartagena. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

7 Teoremas de la divergencia y de Stokes

Si X es una hipersuperficie en \mathbb{R}^n que admite una normal unitaria continua $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, escribiremos (X, ν) para indicar la **variedad orientada** formada por X y la orientación correspondiente a ν mediante la fórmula (62) del apartado 6.3.

7.1 Notación musical

Sea E un espacio vectorial de dimensión n . Hay dos números $\binom{n}{s}$ iguales a n : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Por lo tanto los espacios E , $\mathcal{A}^1(E)$ y $\mathcal{A}^{n-1}(E)$ son linealmente isomorfos. Sucede que hay dos isomorfismos lineales de gran utilidad cuando se los efectúa, punto a punto, sobre campos. Utilizaremos símbolos musicales para denotarlos.

Definición 165. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. A cada **campo de vectores** $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ le asociamos la $(n-1)$ -forma \mathbf{F}^\sharp (“efe becuadro”) que en cada punto $x \in U$ es como sigue:

$$\mathbf{F}_x^\sharp(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \det [\mathbf{F}(x) \mid \mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_{n-1}],$$

y también le asociamos la 1-forma \mathbf{F}^\flat (“efe bemol”) que en cada $x \in U$ está dada por:

$$\mathbf{F}_x^\flat(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{v}.$$

Damos ahora fórmulas concretas para esos isomorfismos. Si $\mathbf{F} = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, entonces:

$$\mathbf{F}^\sharp = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (95)$$

donde el circunflejo $\widehat{}$ puesto encima de un factor indica que dicho factor ha sido suprimido. Para $n = 2$:

$$\mathbf{F}^\sharp = f_1 dy - f_2 dx, \quad (96)$$

y para $n = 3$:

$$\mathbf{F}^\sharp = f_1 dy \wedge dz - f_2 dx \wedge dz + f_3 dx \wedge dy, \quad (97)$$

que algunas personas prefieren escribir $\mathbf{F}^\sharp = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$ para exhibir una simetría cíclica, pero no hay simetría cíclica ni en la fórmula (96) ni en la general (95).

Se ve claramente en (95) que $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}^\sharp$ es biyectiva: para cada $(n-1)$ -forma ω en U hay un único campo de vectores \mathbf{F} en U tal que $\omega = \mathbf{F}^\sharp$.

Por otra parte, en la fórmula:

$$\mathbf{F}^\flat = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n, \quad (98)$$

claramente vemos que $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}^\flat$ es biyectiva de campos de vectores a formas de Pfaff en U .

Es fácil comprobar que las siguientes identidades se cumplen para todo n :

$$\boxed{(\nabla f)^\flat = df} \quad (99)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Operadores del Cálculo vectorial: gradiente, divergencia y rotacional.

Cartagena99

Esto es parcialmente cierto: en justicia, hay que reconocer que el rotacional tiene aspectos importantes que quedan ocultos en la derivada exterior. Uno de estos aspectos es que **rot** es un **endomorfismo** del espacio $\ker(\operatorname{div}) = \{\mathbf{F} : \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0\}$ y, como tal, tiene (muchas) **autofunciones**, por ejemplo el campo de vectores $\mathbf{F} = (\cos(\lambda z), -\cos(\lambda x) - \operatorname{sen}(\lambda z), \operatorname{sen}(\lambda x))$ es tal que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}$. En cambio la derivada exterior, de 1-formas a 2-formas en \mathbb{R}^3 , no es un endomorfismo y, para que pueda tener autofunciones, es preciso modificarla.

7.2 Flujo a través de un trozo de hipersuperficie

Definición 166. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie orientable, $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ la normal unitaria correspondiente a una de las orientaciones de X y $P \subseteq X$ una parcela. El **flujo a través de P en el sentido de ν** de un campo de vectores $\mathbf{F} : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el siguiente número que puede ser positivo, cero o negativo, según como sea \mathbf{F} :

$$\int_P (\mathbf{F} \cdot \nu) \, d\text{área}, \quad (102)$$

El flujo a través de P y el isomorfismo musical $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}^\flat$ están relacionados por el siguiente resultado.

Proposición 167. En las condiciones de la definición 166 se cumple la siguiente igualdad:

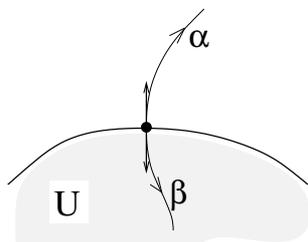
$$\int_{(P, \nu)} \mathbf{F}^\flat = \int_P (\mathbf{F} \cdot \nu) \, d\text{área}. \quad (103)$$

Véase el apartado 7.7 para la demostración.

A pesar de que las integrales $\int_P f \, d\text{área}$ son del tipo (par), descrito en los apartados 6.4 y 6.5, los dos miembros de la igualdad (103) cambian de signo al cambiar la orientación de P porque la función $\mathbf{F} \cdot \nu$, que estamos integrando en el miembro de la derecha, es sensible a ese cambio. Esto hace posible la proposición 167.

7.3 Dominios elementales

Consideramos una hipersuperficie X en \mathbb{R}^n tal que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $\operatorname{Fr} U = X$. Esto requiere que X sea un subconjunto cerrado. Suponemos, además, que U **está a un solo lado de X** . Esto quiere decir que, dado cualquier punto $p \in X$ y las dos normales unitarias que X tiene en p , hay un camino $\alpha(t) : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ empezando en $\alpha(0) = p$, con velocidad una de esas normales y disjunto con U , y hay otro camino $\beta(t) : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que empieza en p con velocidad la otra normal y que está contenido en U para $0 < t < \delta$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

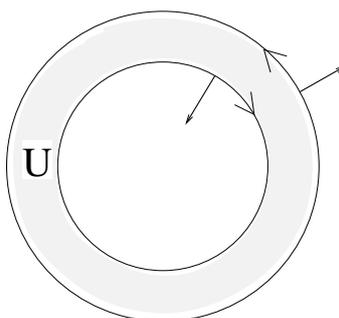
... un punto $p \in X$ llamamos normal exterior a U a la que es velocidad

Cartagena99

de caminos empezando en p y disjuntos con U . La otra normal unitaria se llama **normal interior a U** , pero no la vamos a utilizar.

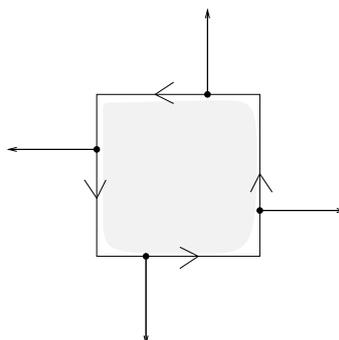
Por ejemplo, la normal unitaria de S^{n-1} exterior a la bola Euclídea $B(\mathbf{0}, 1)$ es $\nu(x) = x$. Se demuestra que la normal exterior es continua. Por lo tanto define, a través de la fórmula (62) del apartado 6.3, una *orientación preferida* de la hipersuperficie X , que resulta ser orientable.

Ejemplo. El abierto $U = \{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$ es la corona circular abierta con radio menor 2 y radio mayor 3. Su frontera $X = \text{Fr}U$ tiene dos componentes conexas por caminos: la circunferencia de radio 2 y la circunferencia de radio 3. De las *cuatro* orientaciones que admite X , la normal unitaria exterior a la corona elige una preferida. La siguiente figura muestra la normal unitaria exterior a la corona; también muestra las correspondientes orientaciones de las circunferencias, vistas como sentidos de recorrido.



En realidad, para decidir cuál es la normal exterior a U en un punto frontera p no necesitamos conocer todo U ni tampoco toda su frontera: nos basta con lo que ocurre en un pequeño entorno de p . Aplicamos esta observación a un abierto U cuya frontera sea una unión $P_1 \cup \dots \cup P_s$ de parcelas $P_i \subset X_i$ de unas hipersuperficies $X_i, i = 1, \dots, s$. Fijado i definimos $Y_i \subseteq P_i$ como el interior de P_i relativo a X_i . Entonces Y_i es una hipersuperficie y en cada punto $p \in Y_i$ está bien determinada la normal unitaria exterior a U .

La siguiente figura muestra el cuadrado $U = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, cuya frontera es unión de cuatro segmentos compactos. Los correspondientes segmentos abiertos son variedades de dimensión 1 en las que la normal unitaria exterior al cuadrado está bien definida y los convierte en curvas orientadas. La figura muestra las normales exteriores al cuadrado y las orientaciones de los segmentos vistas como sentidos de recorrido.



El resto de la frontera del cuadrado (lo que no está en los segmentos abiertos) son las “bisagras”:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

CC-BY-NC-SA. El abierto U está de un solo lado de U.

Cartagena99

Por lo explicado, cada una de las “partes suaves” Y_i de $\text{Fr}U$ tiene una orientación preferida, inducida, según la fórmula (62) del apartado 6.3, por la normal unitaria ν exterior a U . En la parte bisagra puede no estar definida la normal. Pero el área de esta parte es nula y no influye en el valor de las integrales. De hecho, para todo integrando paramétrico L se tiene:

$$\int_{\text{Fr}U} L = \int_{\partial U} L.$$

7.4 Teorema de la divergencia

El siguiente enunciado se conoce como **teorema de la divergencia**. En el caso particular $n = 3$ también se lo llama **teorema de Gauss**.

Teorema 169. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio elemental cuyo cierre \bar{U} (que es compacto) está contenido en un abierto un poco mayor: $\bar{U} \subset U_1$. Para todo campo de vectores $\mathbf{F} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 , se tiene:*

$$\int_U \text{div} \mathbf{F} \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial U} (\mathbf{F} \cdot \nu) \, d\text{área} \quad (104)$$

siendo ν la normal unitaria exterior a U .

Hacemos algún comentario sobre la demostración en el apartado 7.7.

Corolario 170. *Sea $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ la normal exterior a U . Para toda función f de clase \mathcal{C}^1 en U_1 y todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:*

$$\int_U f_{x_i} \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial U} f \nu_i \, d\text{área} \quad (105)$$

Resulta de aplicar el teorema de la divergencia al campo $\mathbf{F} = f \mathbf{e}_i$.

Corolario 171. (Integración por partes). *Dadas f, g de clase \mathcal{C}^1 en U_1 y dado un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene:*

$$\int_U f_{x_i} g \, dx_1 \cdots dx_n = - \int_U f g_{x_i} \, dx_1 \cdots dx_n + \int_{\partial U} (f g \nu_i) \, d\text{área}.$$

A continuación enunciamos el corolario que más nos interesa aquí. Se llama **teorema de Stokes para funciones paramétricas**.

Teorema 172. *Sea un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^N$ en el que hay definida una $(k-1)$ -forma ω . Sea un dominio elemental $U \subset \mathbb{R}^k$, cuyo cierre \bar{U} está contenido en un abierto un poco más grande U_1 , y sea ∂U la parte suave de $\text{Fr}U$ orientada por la normal ν exterior a U . Dada una función $\Phi : U \rightarrow V$, restricción de una $\Psi : U_1 \rightarrow V$ de clase al menos \mathcal{C}^2 , se tiene:*

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{(\partial U, \nu)} \Phi^* \omega \quad (106)$$

A veces se define el **borde orientado** $\partial\Phi$ de Φ como el par $(\Phi|_{\partial U}, \mathcal{O})$ formado por la restricción de Φ a ∂U y la orientación \mathcal{O} de ∂U inducida por la normal ν exterior a U . Entonces $\int_{(\partial U, \nu)} \Phi^* \omega = \int_{(\partial U, \mathcal{O})} \Phi^* \omega$ también se denota $\int_{\partial\Phi} \omega$ y (106) queda $\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega$.

Demostración del teorema 172.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

307 aplicando el teorema de la divergencia en \mathbb{R}^3 . □

Cartagena99

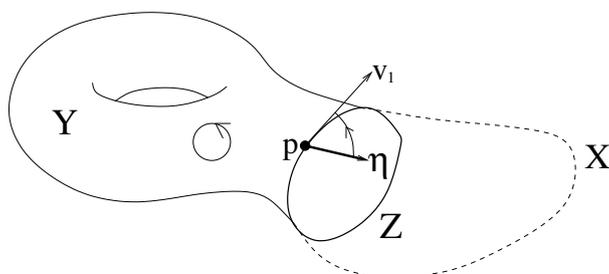
7.5 Teorema de Stokes para variedades

Definición 173. Sea X una variedad en \mathbb{R}^n de dimensión k . Una **variedad con borde** es un subconjunto $Y \subset X$ que está separado del complemento $X \setminus Y$ por otra variedad $Z \subset X$ con $\dim Z = k - 1$. La dimensión de Y es k . La variedad Z se denota ∂Y y se llama **borde** de Y .

Ejemplos. La bola cerrada $\overline{B}(p, r)$ es una variedad con borde de dimensión n en \mathbb{R}^n . Su borde es la variedad de dimensión $n - 1$ que la separa del resto de \mathbb{R}^n , es decir la esfera de centro p y radio r .

El segmento $Y = \{2\} \times [0, 1] \times \{4\}$ es una variedad con borde de dimensión 1 en \mathbb{R}^3 , contenida en la recta $X = \{x = 2, z = 4\}$. El borde ∂Y es el conjunto de dos puntos $\{(2, 0, 4), (2, 1, 4)\}$, pues separa el segmento del resto de la recta X .

En cada punto $p \in \partial Y$ tenemos dos **conormales unitarias**, que son los vectores unitarios tangentes a X y normales a ∂Y . Entre ellas se distingue la **conormal exterior a Y** de manera enteramente análoga a lo explicado para dominios en el apartado 7.3. Si además Y está orientada entonces se induce una orientación en ∂Y de la siguiente manera. Dado $p \in \partial Y$, una base ordenada $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ de $T_p \partial Y$ pertenece a la orientación inducida si al añadir en el primer puesto la conormal η_p exterior a Y resulta una base ordenada $\{\eta_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ perteneciente a la orientación de Y .



Enunciamos ya el teorema de Stokes para variedades.

Teorema 174. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto en el que hay definida una $(k - 1)$ -forma ω . Sea Y una variedad **compacta** con borde de dimensión k contenida en U . Si Y está orientada y damos a ∂Y la orientación inducida, entonces:

$$\int_Y d\omega = \int_{\partial Y} \omega \quad (107)$$

Idea de la demostración. Para una parcela $P \subset Y$ y su borde ∂P el teorema es un corolario del 172. En general Y no se puede cubrir por una única parametrización biyectiva $\Phi : U \rightarrow Y$, por lo que es preciso hacerle una parcelación. Entonces $\int_Y d\omega$ es la suma de las integrales de $d\omega$ sobre las parcelas. Dicha suma es igual a la suma Σ de las integrales de ω sobre los bordes orientados de las parcelas. Una parte del borde común a dos parcelas recibe orientaciones opuestas de ellas, por lo que contribuye cero a la suma total de integrales de ω . Las partes pertenecientes al borde de una sola parcela forman una parcelación de ∂Y y tienen la misma orientación que ∂Y . luego la suma Σ es igual a $\int_{\partial Y} \omega$. \square

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

... que es el teorema de Stokes clásico.

La demostración a base de parcelas que hemos hecho del teorema 174 sirve también para el caso en que Y es una **variedad cerrada**, es decir compacta con borde vacío, obteniéndose:

$$\partial Y = \emptyset \implies \int_Y d\omega = 0. \quad (108)$$

En efecto, hacemos una parcelación de Y y ahora resulta que todo trozo de borde es común a dos parcelas; luego contribuye cero a la suma de integrales de ω sobre los bordes orientados de las parcelas. Entonces dicha suma es nula, que es lo que se afirma en (108).

Proposición 175. *Fijamos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Para que una k -forma μ sea exacta en U es necesario que sea cerrada y además que su integral sobre cualquier variedad cerrada $Y \subset U$ de dimensión k sea nula.*

Ejemplo. Sea $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. En este abierto consideramos la siguiente 2-forma:

$$\mu = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy),$$

y se comprueba que $d\mu \equiv 0$, o sea que μ es cerrada. Además $\mu = \mathbf{F}^\flat$, donde $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$ es el **campo gravitatorio** (o el electrostático). La esfera unidad S^2 está contenida en U y el flujo de \mathbf{F} a su través, según la normal exterior a la bola $\nu = \mathbf{r}$, es:

$$\int_{S^2} (\mathbf{F} \cdot \nu) d\text{área} = \int_{S^2} r^{-3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) d\text{área} = \int_{S^2} 1 \cdot d\text{área} = \text{área}(S^2) = 4\pi,$$

distinto de cero. Luego μ es cerrada pero no exacta en U . En vista de la fórmula (101), este resultado nos dice que el campo gravitatorio \mathbf{F} no tiene ningún **potencial vector** en U , es decir no existe ningún campo \mathbf{G} de clase al menos C^1 en todo U y tal que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$. Por supuesto, sí que tiene potenciales vector en cada abierto *convexo* $V \subset U$; lo que ocurre es que es imposible “pegar” esos potenciales vector de modo a obtener uno definido en todo U . Los libros de Física no muestran un potencial vector para el campo gravitatorio en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$... por una buena razón.

7.6 Casos especiales

Cuando $k = n = 2$ el teorema de Stokes es el **teorema de Green**, que afirma que si $\omega \equiv P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ es una forma de Pfaff, definida en un abierto del plano que contenga la adherencia \bar{U} de un dominio elemental U , y damos al borde ∂U la orientación inducida por la normal exterior a U , entonces:

$$\int_{\partial U} (P dx + Q dy) = \iint_U (Q_x - P_y) dx dy.$$

Pero ahora tenemos una ayuda para recordar, sin equivocarnos, cuál es el integrando de la integral doble, porque:

$$\begin{aligned} d(P dx + Q dy) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &= (P_x dx + P_y dy) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy = \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Definiciones 176. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad compacta de dimensión 0, es decir un conjunto finito de puntos. Una **orientación** de M es un objeto \mathcal{O} que coloca en cada punto $p \in M$ una de las dos etiquetas “salida” o “llegada”.

Si (M, \mathcal{O}) es una variedad orientada de dimensión 0 y f es una función escalar (una 0-forma) definida en los puntos de M , la **integral de f sobre (M, \mathcal{O})** es el número:

$$\int_{(M, \mathcal{O})} f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \text{ punto de llegada} \in M} f(p) - \sum_{p \text{ punto de salida} \in M} f(p).$$

Para $M = \emptyset$ definimos $\int_M f = 0$.

Un conjunto M de N puntos tiene 2^N orientaciones. El caso que aquí nos interesa es el de un camino $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow U$ y $M = \{\alpha(a), \alpha(b)\}$ el conjunto de sus extremos. Cuando el camino no es *cerrado*, este conjunto tiene dos elementos y admite 4 orientaciones. De entre estas cuatro elegimos la “especial”, para la cual el punto inicial $\alpha(a)$ es de salida y el punto final $\alpha(b)$ es de llegada.

Definición 177. Sea $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow U$ un camino. El **borde de α** es el objeto $\partial\alpha$ que se define de la manera siguiente. Si α es un camino cerrado entonces $\partial\alpha = \emptyset$. Si α no es cerrado entonces $\partial\alpha$ es la variedad de dimensión cero $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$ con la orientación para la cual $\alpha(a)$ es de salida y $\alpha(b)$ es de llegada.

Con esas definiciones, tenemos:

$$\int_{\partial\alpha} f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)),$$

tanto si α es cerrado como si no lo es. Pero sabemos desde el capítulo 5 que:

$$f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = \int_{\alpha} df.$$

Juntando las dos igualdades, deducimos:

$$\int_{\alpha} df = \int_{\partial\alpha} f.$$

7.7 Demostraciones

Demostración de la proposición 167. En el apartado 1.1 hemos definido el concepto de **matriz de Gram** de una sucesión de vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, que es semidefinida positiva y por lo tanto

con determinante no negativo. Por ejemplo, para $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ dicha matriz es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 57 \end{bmatrix}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\nu(\mathbf{v}(a)), \nu_{u_1}(a), \dots, \nu_{u_{n-1}}(a),$

forman una base de \mathbb{R}^n con determinante positivo. La utilizamos para describir cualquier campo $\mathbf{F} : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ como combinación lineal:

$$\mathbf{F}(\Phi(u)) = g_1(u)\nu(\Phi(u)) + g_2(u)\Phi_{u_1}(u) + \cdots + g_n(u)\Phi_{u_{n-1}}(u).$$

Nótese que $g_1 = \mathbf{F} \cdot \nu$. El miembro izquierdo de (103) es igual a lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_D \det [\mathbf{F}(\Phi(u)) | \Phi_{u_1} | \cdots | \Phi_{u_{n-1}}] du_1 \cdots du_{n-1} = \\ & = \int_D \det [g_1(u)\nu(\Phi(u)) | \Phi_{u_1} | \cdots | \Phi_{u_{n-1}}] du_1 \cdots du_{n-1} = \\ & = \int_D (\mathbf{F} \cdot \nu)_{\Phi(u)} \det [\nu(\Phi(u)) | D\Phi] du_1 \cdots du_{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} & \det \left([\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \right)^2 = \det \left([\nu(\Phi(u)) | D\Phi]^t [\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \right) = \\ & = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{\nu(\Phi(u))^t}{(D\Phi)^t} & \\ & [\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \end{bmatrix} \right) = \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (D\Phi)^t D\Phi \end{array} \right]. \end{aligned}$$

En la última matriz son nulas las cajas fuera de la diagonal porque los vectores $\Phi_i(u)$ son tangentes a la parcela P en el punto $\Phi(u)$, luego ortogonales a $\nu(\Phi(u))$. Así llegamos a la identidad $\det \left([\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \right)^2 = \det \left((D\Phi)^t D\Phi \right)$ y, utilizando (109), obtenemos:

$$\det \left([\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \right)^2 = \|\Delta(D\Phi)\|_2^2, \quad (110)$$

Como por hipótesis Φ es compatible con ν , es $\det \left([\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \right) > 0$ y de (110) deducimos que $\det \left([\nu(\Phi(u)) | D\Phi] \right) = \|\Delta(D\Phi)\|_2$, luego:

$$\int_{(P,\nu)} \mathbf{F}^\flat = \int_D (\mathbf{F} \cdot \nu)_{\Phi(u)} \|\Delta(D\Phi)\|_2 du_1 \cdots du_{n-1} = \int_P (\mathbf{F} \cdot \nu) d\text{área}.$$

□

Demostración del teorema 169. Existen básicamente tres demostraciones: por particiones de la unidad, por cálculo de variaciones y por flujos. Aquí sólo explicamos algunas ideas de la demostración por flujos.

El **flujo**⁴ de un campo de vectores \mathbf{F} es una familia de difeomorfismos φ_t entre abiertos de \mathbb{R}^n que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = \mathbf{F}(\varphi_t(x))$ y además $\varphi_0 = \text{id}$. Para dominios muy pequeños $E \subset U$ y un punto $p \in E$, se tiene

$$(\text{div } \mathbf{F})_p \cdot \text{Vol}(E) \approx \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(\varphi_t(E)),$$

con un error que, a medida que reducimos E , se va haciendo despreciable frente a $\text{Vol}(E)$. Si vamos partiendo U en dominios cada vez más pequeños, en el límite obtenemos:

$$\int_U (\text{div } \mathbf{F}) dx_1 \cdots dx_n = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(\varphi_t(U)). \quad (111)$$

Por otra parte la diferencia de volúmenes $\text{Vol}(\varphi_t(U)) - \text{Vol}(U)$ viene dada por lo que $\varphi_t(U)$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

... a través , que es un número definido en el apartado 1.2.

Cartagena99