

# Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Ejercicios del tema 2. Inicio al estudio de curvas.

26 de julio de 2020



Este material ha sido elaborado por Esther Gil Cid y Lidia Huerga Pastor y se difunde bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 3.0. Puede leer las condiciones de la licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, starburst-like background that tapers to the right. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Índice general

1.	Ejemplos de curvas. . . . .	4
2.	Curvas de Bézier . . . . .	7
3.	Curva regular . . . . .	7



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 1. Ejemplos de curvas.

1. **Ejercicio 18 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Escribese una curva parametrizada que recorra una recta pero a velocidad no constante. Dibújese, usando Maxima.

**Solución.** Puede ser, por ejemplo

$$\begin{aligned}x &= 1 + \cos t, \\y &= -1 + 3 \cos t\end{aligned}$$

Se representa con `wxplot2d([[ 'parametric, 1+cos(t), -1+3*cos(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]], [x,-5,5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])]$`

2. **Ejercicio 19 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese que los puntos de una curva están contenidos en una recta, es decir, satisfacen una ecuación lineal del tipo  $ax + by + c = 0$ , si y sólo si su velocidad  $\mathbf{v}(t)$  es de la forma  $\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{v}_0$  para alguna función diferenciable  $f(t)$  y un vector constante  $\mathbf{v}_0$ .
3. **Ejercicio 36 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese que las afinidades preservan la razón simple, es decir, si  $f$  es una afinidad y  $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}$  son puntos alineados, entonces

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y})).$$

**Nota:** Si  $\mathbf{x}, \mathbf{p}$  y  $\mathbf{y}$  son puntos alineados y  $\mathbf{p}$  está en el segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , entonces existen  $\lambda, \mu$ , con  $\lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$ , de tal forma que

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}.$$

Se puede escribir

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



suponiendo que  $\mathbf{p}$  sea distinto de  $\mathbf{y}$ , o que  $\lambda \neq 0$ . Este número  $\frac{\mu}{\lambda}$  se llama razón simple de los puntos  $\mathbf{y}$  y se denota como  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$ .

**Solución.**

Vamos a demostrar que la afinidad conserva la razón simple, es decir que si  $r$  es la razón simple  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$ , entonces también es  $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y}))$ . Como podemos escribir

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \text{ para } \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0,$$

entonces  $r = \frac{\mu}{\lambda}$ . Además,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}, f(\mathbf{p}) = \mathbf{Ap} + \mathbf{b}, f(\mathbf{y}) = \mathbf{Ay} + \mathbf{b}.$$

Entonces:

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{Ap} + \mathbf{b} = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) + (\lambda + \mu) \mathbf{b} = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}),$$

y por eso, la razón simple

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y})) = \frac{\mu}{\lambda}.$$

4. **Ejercicio 38 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese con un ejemplo que las afinidades no preservan ni distancias, ni ángulos, ni áreas.

**Solución.** Tomamos la afinidad

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y los puntos  $\mathbf{x} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{y} = (1, 0)$  y  $\mathbf{z} = (0, 2)$ . En ese caso, llamamos  $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = (0, -1)$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{z}} = (-1, 1)$ . Los tres puntos forman un triángulo de área  $\frac{1}{2}$ .

Entonces:

$$f(1, 1) = (1, -1), f(1, 0) = (0, 1), f(0, 2) = (1, -3).$$

Se cumple

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

El área del triángulo, si  $\mathbf{n} = (-2, 0)$  es un vector perpendicular a  $\overrightarrow{f(\mathbf{x})f(\mathbf{z})}$  y de su mismo módulo

$$S(f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})f(\mathbf{z})) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{n} \right| = 1 \neq \frac{1}{2} = S(\mathbf{xyz}).$$

Explicamos este cálculo: si tenemos un triángulo cuyos lados son los vectores  $\varrho$ , con inicio en el origen. Entonces su área es  $\frac{1}{2}|\varrho| \cdot |\cdot| \cdot |\sin(\alpha)|$ , si  $\alpha$  es el ángulo que forman  $\varrho$ , . Pero este seno en valor absoluto es igual al coseno en valor absoluto del ángulo  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Entonces, si tenemos un vector perpendicular a  $\varrho$ , con su mismo módulo, que llamamos  $\varrho'$ , resulta:

$$\frac{1}{2}|\varrho| \cdot |\cdot| \cdot |\sin(\alpha)| = \frac{1}{2}|\varrho| \cdot |\cdot| \cdot |\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)| = \frac{1}{2}|\varrho| \cdot |\varrho'| \cdot |\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)| = \varrho \cdot$$

que es el producto escalar que aparece en los apuntes.

5. **Adaptado del Ejercicio 41 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Prográmese en Maxima una animación que dibuje el segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  y, dada una razón simple  $r$  dibuje el punto correspondiente  $\mathbf{p}$  y los segmentos  $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$  y  $[\mathbf{p}, \mathbf{y}]$ . Prográmese una animación que dibuje el punto  $\mathbf{p}$  según va variando la razón simple.

**Solución.** En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

6. **Ejercicio 42.** Prográmese en Maxima una función que dibuje el segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  y, dado un escalar  $\lambda$  dibuje el punto correspondiente  $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ ,  $\lambda + \mu = 1$ .

**Solución.** En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

7. **Adaptado del Ejercicio 46 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Impleméntese, usando Maxima, el algoritmo de Jarvis.

**Solución.** En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

En general, se cumple que

$$f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=0}^n f(\mathbf{v}_i) t^i \iff \sum_{i=0}^n \mathbf{A} \mathbf{v}_i t^i + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^n \mathbf{A} \mathbf{v}_i t^i + \sum_{i=0}^n \mathbf{b} t^i$$

$$\iff \mathbf{b} = \sum_{i=0}^n \mathbf{b} t^i,$$

para todo  $t$ . Esto sólo es cierto cuando  $n = 0$ , es decir, cuando la curva es un punto.

Realice los ejercicios 11 a 17 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Realice los ejercicios 19 a 23 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

## 2. Curvas de Bézier

Realice el ejercicio 43 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Realice los ejercicios 47 a 66 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

## 3. Curva regular

1. Estudie si la curva  $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, \cos t)$  tiene todos sus puntos regulares.

**Solución.** Sí, porque  $\mathbf{x}'(t) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $t$  :

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 3t^2, -\sin t) \neq (0, 0, 0).$$

2. Sea la curva  $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, t^2)$ . Estudie si la siguientes opciones son correctas.
  - a. Todos sus puntos son regulares.
  - b. El vector tangente a la curva en un punto  $\mathbf{x}(t_0)$  puede ser perpen-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

vale  $(0, 0, k)$  y esto no ocurre para ningún valor de  $t$ .

3. Determine los puntos múltiples de la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t \cos t, \quad y(t) = t \sin t$$

**Solución:** Estudiamos cuándo es  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  sobreyectiva para encontrar los puntos múltiples. Lo dividimos en 2 casos:

- a) Si  $x(t) = t \cos t = 0$ , pero  $t \neq 0$ . Esto ocurre cuando  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Observamos que

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \\ y\left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right) &= \left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right) \\ &= (-1)^{-k+1} (-1) \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= (-1)^{-k} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \end{aligned}$$

Por eso, estos puntos son múltiples.

- b) Vamos a intentar determinar otros puntos múltiples suponiendo que los hay, encontrando así los valores de  $t$  (si es que existen). Si  $x(t) = t \cos t \neq 0$  pero  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t')$  entonces debe ser:

$$\begin{aligned} t \cos t &= t' \cos t', \\ t \sin t &= t' \sin t'. \end{aligned}$$

Como  $t \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{t'}{t} \sin t', \quad \cos t = \frac{t'}{t} \cos t' \\ \implies 1 &= \sin^2 t + \cos^2 t = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \sin^2 t' + \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \cos^2 t' = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \\ \implies \left(\frac{t'}{t}\right)^2 &= 1 \implies t' = \pm t. \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

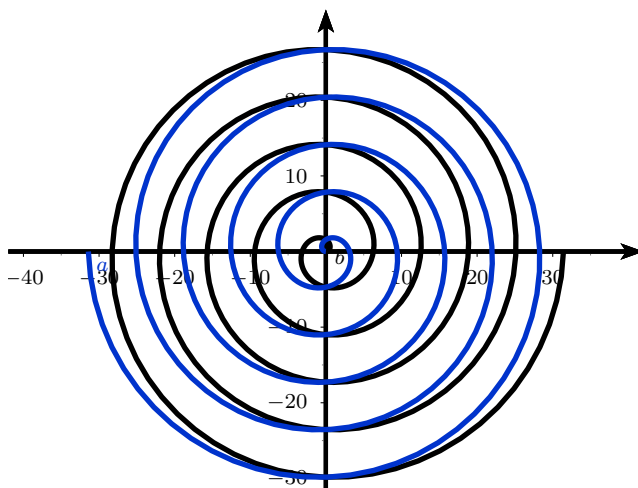
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





En la siguiente figura se ha representado esta curva, en azul para  $t \in [-10, 0]$  y en negro para  $t \in [0, 10]$ .



4. Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva  $\mathbf{x}(t) = (2t, 3t^3, 3t^2)$  con el vector  $(1, 1, 0)$ .

**Solución.** El vector tangente a la curva tiene la misma dirección y sentido que

$$\mathbf{x}'(t) = (2, 9t^2, 6t).$$

Podemos calcular el ángulo que forman dos vectores a partir del producto escalar

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2, 9t^2, 6t) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{2}\sqrt{2^2 + 9^2t^4 + 6^2t^2} \sqrt{2}\sqrt{4 + 81t^2 + 36t^4}} = \frac{2 + 9t^2}{\sqrt{2}\sqrt{(2 + 9t^2)^2}} \\ &= \frac{2 + 9t^2}{\sqrt{2}(2 + 9t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

5. Sea  $C$  la la curva dada por

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



para dos valores distintos de  $\lambda$ . Buscamos si existen estos valores en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\begin{aligned}x &= \lambda^3 - \lambda = 0 &\iff & \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 &\iff & \lambda = \pm 1, \lambda = 0, \\y &= \lambda^4 - 1 = 0 &\iff & \lambda^2 = 1 &\iff & \lambda = \pm 1, \\z &= \text{sen}^2 \pi \lambda = 0 &\iff & \text{sen}^2 \pi \lambda = 0 &\iff & \lambda = \pm 1.\end{aligned}$$

Como  $\lambda = -1$  y  $\lambda = 1$ , que están en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  y los dos hacen que  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , entonces este punto es múltiple de multiplicidad 2.

6. Sea  $C$  la curva dada por la representación paramétrica  $(I, \mathbf{x})$ , para  $I = (-10, 10)$  y

$$\mathbf{x}(t) = (4 \cos t, 4 \text{sen } t, -t).$$

Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

**Solución.** Una representación paramétrica  $\mathbf{x}(t)$  es natural si su parámetro es la longitud de arco, es decir, si  $1 = \|\mathbf{x}'(s)\|$  o si la longitud de arco entre 0 y  $s$  es:

$$s = \int_0^s \|\mathbf{x}'(s)\| ds.$$

En esta curva tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (-4 \text{sen } t, 4 \cos t, -1), \\ \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(-4 \text{sen } t)^2 + (4 \cos t)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 1} = \sqrt{17}.\end{aligned}$$

Por eso, la longitud de arco es:

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{17} dt = \sqrt{17}t.$$

Si hacemos el cambio de parámetro  $t = \frac{s}{\sqrt{17}}$ , la curva queda con la representación natural:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t) = \left( 4 \cos \frac{s}{\sqrt{17}}, 4 \text{sen} \frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{s}{\sqrt{17}} \right).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

para  $t \in (0, 2\pi)$ . ¿Cuál es la longitud del cardioide?

**Solución:** Como  $\mathbf{x}'(t) = (-2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t, 2 \operatorname{cos} t - 2 \operatorname{cos} 2t)$ , tenemos que la longitud entre 0 y  $t_0$  será:

$$\begin{aligned} I(t_0) &= \int_0^{t_0} \sqrt{(-2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t)^2 + (2 \operatorname{cos} t - 2 \operatorname{cos} 2t)^2} dt \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + 4 \operatorname{sen}^2 2t + 4 \operatorname{cos}^2 t - 8 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 2t + 4 \operatorname{cos}^2 2t} dt \\ &= \int_0^{t_0} 2\sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 2t} dt = 2 \int_0^{t_0} \sqrt{2 - 2 \operatorname{cos} t} dt \\ &= 2 \int_0^{t_0} 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = 8 - 8 \operatorname{cos} \frac{1}{2} t_0. \end{aligned}$$

La longitud del cardioide es:

$$I(2\pi) = 8 - 8 \operatorname{cos} \pi = 16.$$

Realice los ejercicios 76, 78, 79, 80, 81, 85, 86, 91, 92, 99, 100 y 101 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70