Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 3. Curvas regulares en el plano. Estudio local y resultados globales.

26 de julio de 2020

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

3. Curvas planas

3.1. Curvatura

En este tema nos vamos a centrar en curvas en el plano. Aunque tienen características comunes con las curvas en el espacio, vamos a estudiarlas en primer lugar para iniciarnos en el estudio de curvas. tienen la ventaja de que se representan gráficamente de forma sencilla y por tanto, su estudio es bastante intuitivo.

Partimos de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas, pero vamos a suponer primero que está parametrizada por el arco. Esto significa que está dada por una expresión del tipo

$$\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s)),$$

donde s es el parámetro longitud de arco. Del vector tangente, que llamaremos $\mathbf{t}(s)$, sabemos que

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Como está parametrizada por la longitud de arco es un vector unitario y $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$.

Vamos a ver que la velocidad con la que varía este vector nos indica cuánto se está curvando la curva. Como $\mathbf{x}'(s)$ es un vector unitario, podemos escribirlo como:

$$\mathbf{x}'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)),$$

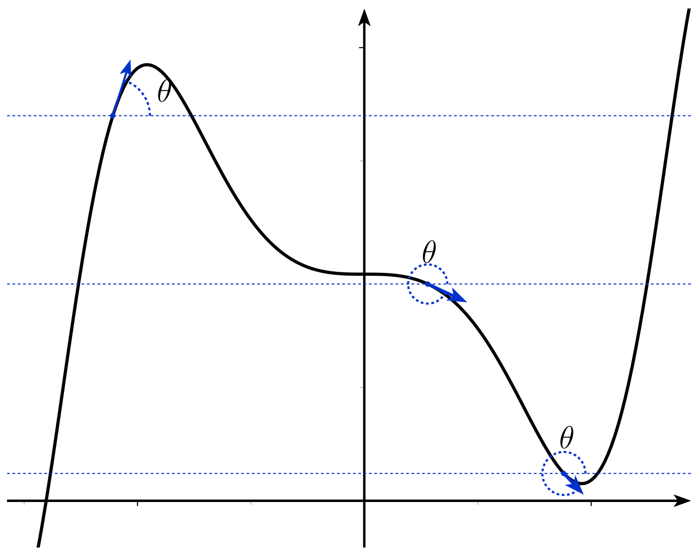
donde $\theta(s)$ es el ángulo que forma la tangente a la curva con el semieje x positivo y que depende de s. Entonces su derivada es:

$$\mathbf{x}''(s) = (-\theta'(s)\operatorname{sen}\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s)) = \theta'(s)(-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s)).$$

El módulo de este vector es:

$$\|\mathbf{x}''(s)\| = |\theta'(s)| \cdot \|(-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s))\| = |\theta'(s)|.$$

Esto significa que su módulo es la variación del ángulo θ, es decir, indica lo que varía la "curvatura" de la curva. Esto se representa en la siguiente figura:



A partir de esta explicación están justificadas las siguientes definiciones.

Sea C una curva parametrizada por la longitud de arco, dada por $\mathbf{x} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Definimos el **vector curvatura** como

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s).$$

Llamamos, en un principio, función curvatura o **curvatura** a su módulo, es decir, es

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|.$$

Más adelante mostraremos que vamos a tomar esta definición para curvas en el espacio, aunque unos párrafos más abajo vamos a modificar la definición de curvatura para el caso específico de curvas planas.

Ejemplo 1. La curvatura de una recta es 0.

En efecto, sabemos que una recta parametrizada por el arco está dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v},$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto por el que pasa la recta y $\mathbf{v}$ es un vector unitario que es el vector director de la recta. Además, sabemos que

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{v}, \quad \|\mathbf{x}'(s)\| = \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Por eso,

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = 0, \quad k(s) = 0.$$

Intuitivamente confirmamos este resultado, porque una recta no ser curva.

☻

Ejemplo 2. Sabemos que la hélice dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$$

no está parametrizada por el arco, pero sí lo está si las ecuaciones son

$$\mathbf{x}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Su vector normal es

$$\mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Entonces, su vector curvatura es

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

Obsérvese que su componente z es nula. La curvatura es

$$\begin{aligned} k(s) &= \sqrt{\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2\operatorname{sen}^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

De nuevo, obtenemos una curva de curvatura constante. ☻

Un **punto de inflexión** (o punto singular de orden 1) es un punto donde la curvatura es 0. Esta definición es independiente de la parametrización de la curva, es también válida para curvas no parametrizadas por la longitud de arco.

Sabemos que en una recta todos los puntos son de inflexión. Pero además, la recta es la única curva donde todos sus puntos son puntos de inflexión.

Ejemplo 3. Sea C la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 - 3t^2 + t - 1, t^4 - 2t^3 + 2t\right).$$

Vamos a ver si tiene puntos de inflexión.

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(3t^2 - 6t + 1, 4t^3 - 6t^2 + 2\right), \\ \mathbf{x}''(t) &= \left(6t - 6, 12t^2 - 12t\right) \end{aligned}$$

entonces tiene puntos de inflexión si existe t_0 para el que

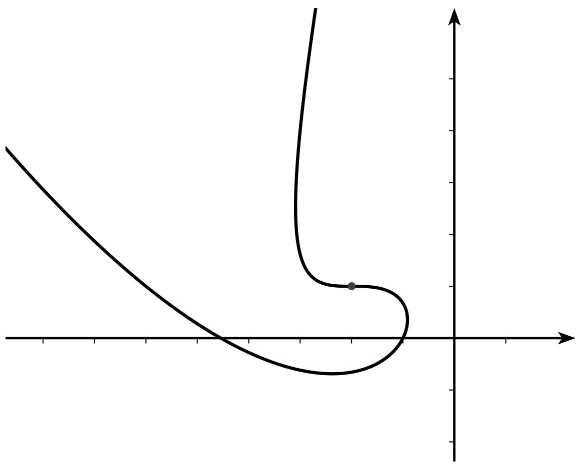
$$\mathbf{x}''(t_0) = \left(6t_0 - 6, 12t_0^2 - 12t_0\right) = (0,0).$$

Esto es lo mismo que decir:

$$\left\{\begin{array}{r} 6t_0 - 6 = 0 \\ 12t_0^2 - 12t_0 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} t_0 - 1 = 0 \\ t_0^2 - t_0 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} t_0 - 1 = 0 \\ (t_0 - 1)\, t_0 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow t_0 = 1.$$

Entonces el punto $\mathbf{x}(1) = (-2, 1)$ es un punto de inflexión.

Una parte de esta curva, con el punto de inflexión, se representa en la siguiente figura:



☻

Curvatura de curvas planas parametrizadas por la longitud de arco

Cuando tenemos una curva parametrizada por el arco, se cumple que $\|\mathbf{x}'(s)\|^2 = 1$. Lo podemos escribir como

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 1.$$

Si derivamos de nuevo esta expresión, teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar, resulta

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 2\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 0.$$

Esto significa que el vector derivada segunda es ortogonal al vector tangente, o que la aceleración de una curva parametrizada por el arco es perpendicular a la velocidad.

Por otro lado, si la curva es plana, existe un único vector unitario $\mathbf{n}(s)$ de tal forma que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$. Llamamos **vector normal** a $\mathbf{n}(s)$. Como conocemos que $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ y sabemos que es unitario, el vector normal va a ser

$$\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Observamos que derivado considerando el parámetro longitud de arco (basado en una idea geométrica clara) podemos determinar los vectores tangentes y normal a la curva en cada punto y estos van a ser perpendiculares (una referencia, una base ortogonal). Es decir, hemos asociado a cada punto de la curva una referencia geométrica.

Tenemos que $\mathbf{k}(s)$ también es un vector perpendicular al vector tangente. Esto implica que los vectores $\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son paralelos.

Sabemos que el producto escalar

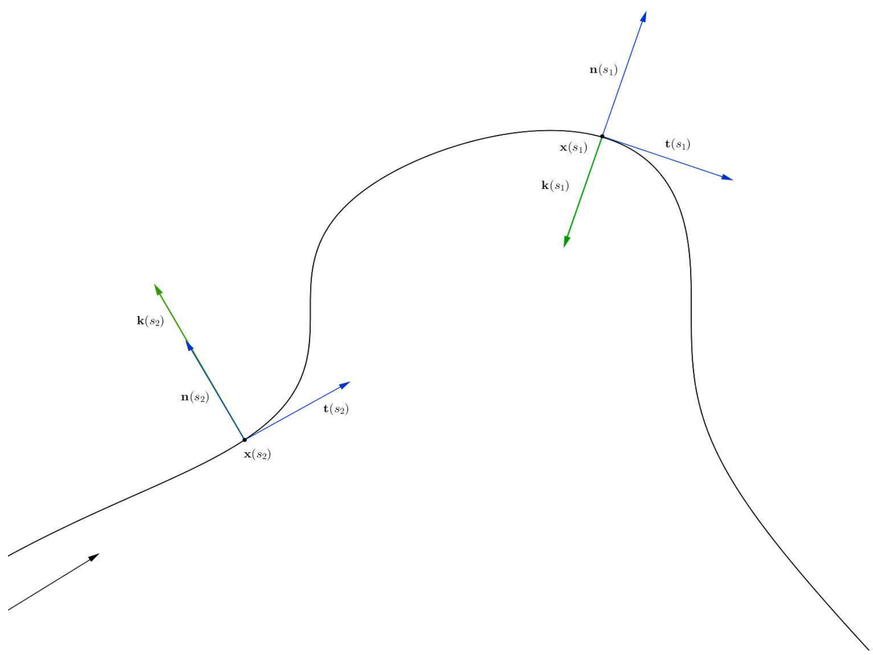
$$\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s)$$

es la proyección del vector curvatura sobre el vector normal. Como $\mathbf{n}(s)$ es unitario, vamos a llamar **curvatura** para curvas planas a esta proyección:

$$\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s) = k(s). \tag{1}$$

Esta definición de curvatura está reservada únicamente para curvas planas, es diferente de la dada anteriormente, ya que en esta última la curvatura puede ser negativa, mientras que en el concepto de curvatura en general se toma el valor absoluto.

En el caso de curvas planas es interesante tener en cuenta el signo. En efecto, observemos que el producto escalar $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s)$ es positivo si los dos vectores tienen el mismo sentido (recordamos que son paralelos, pero no tienen necesariamente el mismo sentido). Volviendo a la idea geométrica, el vector tangente es la velocidad con la que se recorre una curva y el vector normal es perpendicular a él, pero formando una base positiva. Es decir, se encuentra a su izquierda. Entonces, el producto escalar $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}''(s)$ es positivo si la curva se "curva hacia la izquierda" respecto al vector velocidad, o respecto a la dirección en la que recorremos la curva, y es negativo si se "curva hacia la derecha". La idea de que una curva se "curva" a izquierda o derecha es clara en el plano (por ello es interesante considerar la curvatura con signo), pero ya no tiene sentido en el espacio. Es por eso que para curvas en el espacio simplemente se considera la curvatura en valor absoluto. Esta situación se muestra en la siguiente figura:



En este sentido, para curvas planas el vector curvatura nos da información sobre para dónde gira la curva. Esto no ocurre en las curvas en el espacio.

Volviendo a la ecuación (1) y a los vectores curvatura y normal, podemos escribir el vector curvatura como

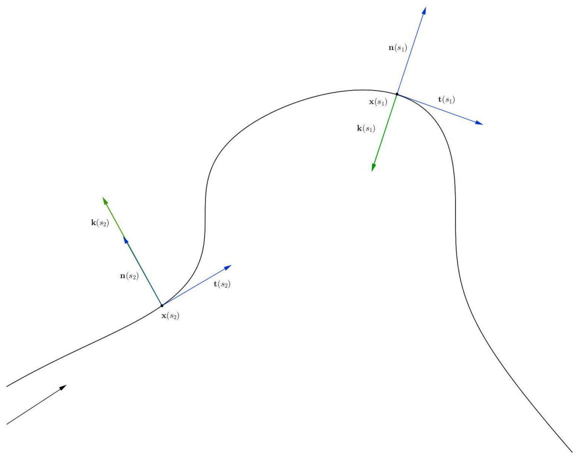
$$\mathbf{k}(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s).$$

Esta es la primera de las fórmulas de Frenet, que veremos con más detalle en apartados sucesivos.

A efectos prácticos, cuando la curva es plana podemos calcular la curvatura mediante:

$$\begin{aligned} k(s) &= \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{x}''(s) = (-y'(s), x'(s))\cdot(x''(s), y''(s)) \\ &= -y'(s)\,x''(s) + x'(s)\,y''(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix} \\ &= \det(\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)). \end{aligned} \tag{2}$$

Pero además, sabemos que el producto escalar $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{x}''(s)$ es positivo si los dos vectores tienen la misma dirección. Volviendo a la idea geométrica, el vector tangente es la velocidad con la que se recorre una curva y el vector normal es perpendicular a él, pero formando una base positiva. Es decir, se encuentra a su izquierda. Entonces, si el producto escalar es $\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{x}''(s)$ es positivo si la curva se curva hacia la izquierda respecto al vector velocidad, o respecto la dirección en la que recorremos la curva. Esta situación se muestra en la siguiente figura:



En este sentido, para curvas planas la curvatura nos dice para dónde gira la curva. Esto no ocurre en las curvas en el espacio.

Observe que la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una curva. Si f es dos veces derivable con continuidad, si su derivada segunda es positiva decimos que la función es convexa y si es negativa decimos que es cóncava. La concavidad y la convexidad nos dan una idea intuitiva de hacia dónde se curva la gráfica de la función, y para funciones suficientemente regulares, está relacionada con el signo de la derivada segunda. Esto nos recuerda a la curvatura de una cueva plana: para valores del parámetro t creciendo, la derivada primera f' crece, la derivada segunda es positiva, la función es convexa e interpretanto la gráfica de f como una curva, su curvatura es positiva.

Ejemplo 4. Sea C la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r dada, para $s \in \mathbb{R}$, por la parametrización

$$\mathbf{x}(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \operatorname{sen} \frac{s}{r} \right).$$

Vamos a determinar su vector normal y su curvatura.

Tenemos que

$$\mathbf{x}'(s) = \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \frac{s}{r} \right).$$

Además

$$\| \mathbf{x}'(s) \| = \sqrt{\left(-\operatorname{sen} \frac{s}{r} \right)^2 + \cos^2 \frac{s}{r}} = 1$$

por lo que C está parametrizada por la longitud de arco. Entonces:

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{s}{r}\right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(-\cos\frac{s}{r}, -\operatorname{sen}\frac{s}{r}\right).$$

La curvatura es

$$k(s) = \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{k}(s) = \det\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\frac{s}{r} & -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r} \\ \cos\frac{s}{r} & -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{s}{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{r},$$

es decir, el inverso del radio.

☻

Podemos relacionar la idea de función curvatura con funciones cóncavas y convexas. La gráfica de una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una curva. Si f es dos veces derivable con continuidad, y si su derivada segunda es positiva, decimos que la función es convexa y si es negativa decimos que es cóncava, como ya sabemos de Cálculo. La concavidad y la convexidad nos dan una idea intuitiva de hacia dónde se curva la gráfica de la función, y para funciones suficientemente regulares, está relacionada con el signo de la derivada segunda. Esto nos recuerda a la curvatura de una curva plana: para valores del parámetro t creciendo, la derivada primera f' crece, la derivada segunda es positiva, la función es convexa e interpretando la gráfica de f como una curva, su curvatura es positiva.

Aún teniendo la curva parametrizada por la longitud de arco, no siempre es sencillo calcular la curvatura, como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. La cicloide está dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (rt - r\operatorname{sen}t, r - r\cos t),$$

con $t\in(0,2\pi)$. Si queremos determinar, con lo que sabemos hasta ahora, su curvatura, debemos parametrizarla por la longitud de arco. Para $r=1$ estas ecuaciones son:

$$\mathbf{x}(s) = \left(2\arccos\left(1-\frac{1}{4}s\right) - \operatorname{sen}\left(2\arccos\left(1-\frac{1}{4}s\right)\right)\right.$$
$$\left., 1-\cos\left(2\arccos\left(1-\frac{1}{4}s\right)\right)\right).$$

Determinar la curvatura a partir de ellas es complicado, por las expresiones que van a tomar las derivadas sucesivas de sus componentes.

☻

Curvatura de curvas planas no parametrizadas por la longitud de arco

Ahora vamos a ver cómo podemos calcular la curvatura de una curva plana, sin que esté parametrizada por la longitud de arco. Vamos a llamar $k(t)$ a la curvatura, abusando de la notación, ya que en realidad estamos determinando $k(s(t))$. Su expresión se puede determinar sin necesidad de conocer las ecuaciones del cambio de parámetro, utilizando la regla de la cadena y el teorema de la función implícita.

Sabemos que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\|,$$

porque los vectores $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ y $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ tienen la misma dirección y sentido, y $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ es unitario, por la definición del parámetro longitud de arco. Entonces, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|}.$$

Si derivamos implícitamente esta ecuación respecto a s, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(s(t)) &= \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) \\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Queremos tener una espresión del vector $\mathbf{k}(s(t))$ sin tener que utilizar las ecuaciones parametrizadas por la longitud de arco. De la igualdad anterior conocemos, si tenemos unas ecuaciones paramétricas de la curva,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt},\ \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2},\ \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|}.$$

No conocemos $\frac{d^2t}{ds^2}$. Pero para determinar $k(t) = k(s(t))$ no lo necesitamos, porque según la ecuación (2):

$$\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right) \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right) \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right) + \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right) \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{dt}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \\
&= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.
\end{aligned}$$

De esta expresión ya conocemos todos los factores que aparecen y podemos determinar la curvatura de la curva que no está parametrizada por la longitud de arco.

Recordamos que un punto de inflexión es aquel punto de la curva donde la función curvatura es 0, independientemente de la parametrización de la curva.

El vector curvatura es normal al vector tangente. Como el vector tangente cumple:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(x'(t), y'(t)\right),$$

entonces sabemos que el vector curvatura va a ser paralelo al vector

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Pero además sabemos que el vector curvatura va a ser

$$\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) = k(t)\frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Obsérvese que $\mathbf{n}(t)$ está definido de tal forma que $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ es una base orientada positivamente. Entonces al definir $\mathbf{k}(t)$ se tiene en cuenta que si la curvatura $k(t)$ es positiva, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{k}(t)$ tienen la misma dirección y sentido y que el sentido cambia si $k(t)$ es negativa.

Resumimos los resultados anteriores en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Sea C una curva dada por $\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{x}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, que es al menos dos veces diferenciable y que no está parametrizada necesariamente por la longitud de arco. Entonces su curvatura es:*

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

El vector normal a la curva en un punto es:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Su vector curvatura tiene la expresión:

$$\mathbf{k}(t) = k(t)\frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\left(-y'(t), x'(t)\right).$$

Ejemplo 6. La lemniscata de Bernoulli es la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t).$$

Vamos a dibujarla y también a dibujar su función de curvatura. Vamos a interpretar geométricamente el signo de la curvatura, sus máximos, mínimos y ceros.

Dibujamos la función con `Maxima`. Primero la definimos y calculamos la función curvatura, utilizando

```
(%1)  x1(t):=(cos(t));
      x2(t):=sin(2*t);
      x(t):=[x1(t),x2(t)];
      define(tangente(t),diff(x(t),t,1));
      define(dsegunda(t),diff(x(t),t,2));
      A:matrix(tangente(t),dsegunda(t));
      det:expand(determinant(A));
      norma3:(tangente(t).tangente(t))^(3/2);
      curvat:det/norma3;
      define(curvatura(t),curvat);
```

Con Maxima, obtenemos que

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{4\operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + 2\cos t\cos 2t}{\left(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t\right)^{3/2}} \\ &= \frac{-4\cos^3 t + 6\cos t}{\left(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t\right)^{3/2}}, \end{aligned}$$