,

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Ejercicios del tema 3. Curvas regulares en el plano. Estudio local y resultados globales

26 de julio de 2020

1. Determínese la curvatura de una circunferencia.

   Solución. Las ecuaciones de una circunferencia de radio r que está parametrizada por el arco son

   $$\mathbf{x}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\,\operatorname{sen}\frac{s}{r}\right).$$

   Su vector tangente es

   $$\mathbf{x}'(s) = \left(-\operatorname{sen}\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right).$$

   Y el vector curvatura es

   $$\mathbf{x}''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\frac{s}{r}\right).$$

   Su módulo es constante, es decir, la curvatura es constante:

   $$k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{r}\right)^2\cos^2\frac{s}{r} + \left(-\frac{1}{r}\right)^2\operatorname{sen}^2\frac{s}{r}} = \frac{1}{r}.$$

   Intuitivamente, vemos la circunferencia como una curva que está siempre igual de “curvada”. Esta definición nos lo confirma, al tener curvatura constante.

2. Determine la curvatura de la cicloide, dada por las ecuaciones

   $$\mathbf{x}(t) = (rt - r\,\operatorname{sen}t, r - r\cos t),$$

   con $t \in (0, 2\pi)$. ¿Tiene puntos de inflexión?

   Solución. No está parametrizada por el arco. Por tanto, debemos aplicar

   $$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

   Tenemos

   $$\mathbf{x}'(t) = (r - r\cos t, r\,\operatorname{sen}t),$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} r - r\cos t & r\ \operatorname{sen} t \\ r\ \operatorname{sen} t & r\cos t \end{vmatrix}\frac{1}{\left(r\sqrt{2-2\cos t}\right)^3} \\
&= \frac{r^2\cos t - r^2\cos^2 t - r^2\ \operatorname{sen}^2 t}{r^3\left(2-2\cos t\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\cos t - 1}{r\left(2-2\cos t\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Los puntos de inflexión son aquellos donde $k(t) = 0$. En esta curva ocurre si

$$\cos t - 1 = 0 \iff t = 2k\pi, \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Pero no ocurre, porque $t \in (0, 2\pi)$.

3. Determine, con `Maxima`, la curvatura de la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos t^2, e^{-t}\right).$$

Solución. Para determinar la curvatura con Maxima, primero definimos las componentes de la curva y luego creamos un vector con estas componentes.

```
>>  x1(t):=(cos(t^2));
    x2(t)=exp(-t);
    x(t):=[x1(t),x2(t)];
```

Ahora podemos calcular los vectores derivada primera, segunda y el módulo de la derivada primera::

```
>>  define(tangente(t),diff(x(t),t,1));
    define(dsegunda(t),diff(x(t),t,2));
    norma:(tangente(t).tangente(t))^(3/2);
```

Ya tenemos todo lo que necesitqamos. Ahora calculamos el determinante, tras crear la matriz:

>> wxplot2d(['parametric, x1(t),x2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]], [x,-5,5])$

Realice los ejercicios 112 y 114 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

4. Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, 4t\right).$$

a) Determine el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0)$.

b) Determine el vector curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0,0)$.

Solución:

a) Un vector tangente a la curva en un punto $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = (2t, 4).$$

Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(2t)^2 + 4^2} = 2\sqrt{t^2+4}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (2,0). \end{aligned}$$

Con estos datos, calculamos la curvatura.

$$\begin{aligned} k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} 2t & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\left(2\sqrt{t^2+4}\right)^3} \\ &= -\frac{1}{\left(t^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Entonces el radio de curvatura en $\mathbf{x}(t)$ es

b) El vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+4}}(2t, 4).$$

Entonces, el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+4}}(-4, 2t)$$

y el vector curvatura es

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) &= -\frac{1}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2\sqrt{t^2+4}}(-4, 2t) \\ &= \left(\frac{2}{(t^2+4)^2}, \frac{t}{(t^2+4)^2}\right).\end{aligned}$$

El vector curvatura pedido, en $\mathbf{x}(0)$, es:

$$\mathbf{k}(0) = \left(\frac{2}{(0^2+4)^2}, \frac{0}{(0^2+4)^2}\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right).$$

5. Determínese la evoluta de la astroide de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = \left(a\cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t\right).$$

Solución: Es otra astroide. Vamos a comprobarlo.

Un vector tangente a la astroide en un punto es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(-3a\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\right).$$

Su módulo es

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(-3a\cos^2 t \operatorname{sen} t)^2 + (3a \operatorname{sen}^2 t \cos t)^2} \\ &= 3a\,|\cos t \operatorname{sen} t|\,\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \\ &= 3a\,|\cos t \operatorname{sen} t|\end{aligned}$$

tangente a la astroide en estos puntos. Pero si $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$ podemos calcular los vectores tangente y normal, que son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}\,(t) &= \frac{\mathbf{x}'\,(t)}{\|\mathbf{x}'\,(t)\|} = \frac{1}{3a\,|\cos t \,\operatorname{sen} t|}\left(-3a\cos^2 t \,\operatorname{sen} t, 3a \,\operatorname{sen}^2 t\cos t\right) \\
&= \frac{\cos t \,\operatorname{sen} t}{|\cos t \,\operatorname{sen} t|}\left(-\cos t,\ \operatorname{sen} t\right), \\
\mathbf{n}\,(t) &= \frac{\cos t \,\operatorname{sen} t}{|\cos t \,\operatorname{sen} t|}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right).
\end{aligned}$$

Para determinar $k\,(t)$ necesitamos conocer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}''\,(t) &= \left(6a \,\operatorname{sen}^2 t\cos t - 3a\cos^3 t, 6a\cos^2 t \,\operatorname{sen} t - 3a \,\operatorname{sen}^3 t\right) \\
&= \left(6a\cos t - 9a\cos^3 t, 9a\cos^2 t \,\operatorname{sen} t - 3a \,\operatorname{sen} t\right).
\end{aligned}$$

A partir de los resultados anteriores, calculamos la curvatura y el radio de curvatura:

$$\begin{aligned}
k\,(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} -3a\cos^2 t \,\operatorname{sen} t & 6a\cos t - 9a\cos^3 t \\ 3a \,\operatorname{sen}^2 t\cos t & 9a\cos^2 t \,\operatorname{sen} t - 3a \,\operatorname{sen} t \end{vmatrix}\frac{1}{\left(3a\,|\cos t \,\operatorname{sen} t|\right)^3} \\
&= -\frac{1}{3a}\frac{\cos^2 t \,\operatorname{sen}^2 t}{|\cos t \,\operatorname{sen} t|^3} = -\frac{1}{3a\,|\cos t \,\operatorname{sen} t|}, \\
r\,(t) &= 3a\,|\cos t \,\operatorname{sen} t|\,.
\end{aligned}$$

El cálculo de este cociente no presenta problemas porque el denominador se anule, ya que hemos eliminado los puntos donde esto ocurría. Entonces el vector curvatura es

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}\,(t) = k\,(t)\,\mathbf{n}\,(t) &= -\frac{1}{3a\,|\cos t \,\operatorname{sen} t|}\frac{\cos t \,\operatorname{sen} t}{|\cos t \,\operatorname{sen} t|}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right) \\
&= -\frac{1}{3a\cos t \,\operatorname{sen} t}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right)
\end{aligned}$$

Y el centro de curvatura es el punto

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= \mathbf{x}(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t) \\
&= \left(a\cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t\right) - 3a\left|\cos t \operatorname{sen} t\right| \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{\left|\cos t \operatorname{sen} t\right|}\left(-\operatorname{sen} t, -\cos t\right) \\
&= \left(a\cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t\right) + 3a\left(\operatorname{sen}^2 t\cos t, \cos^2 t \operatorname{sen} t\right) \\
&= \left(a\cos^3 t + 3a \operatorname{sen}^2 t\cos t, a \operatorname{sen}^3 t + 3a\cos^2 t \operatorname{sen} t\right) \\
&= \left(-2a\cos^3 t + 3a\cos t, 3a \operatorname{sen} t - 2a \operatorname{sen}^3 t\right).
\end{aligned}$$

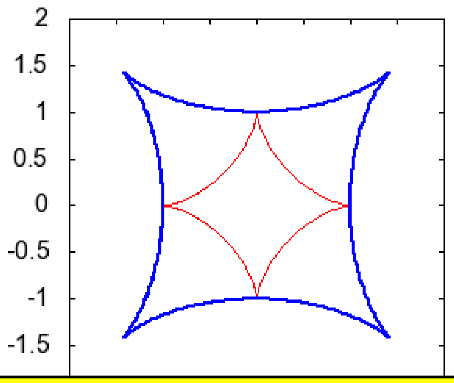
Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}^3 t = \frac{3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{4}, \quad \cos^3 t = \frac{3\cos t + \cos 3t}{4},$$

tenemos una nueva expresión de la evoluta de la astroide:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= \left(-a\frac{3\cos t + \cos 3t}{2} + 3a\cos t, 3a \operatorname{sen} t - a\frac{3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}a\cos t - \frac{1}{2}a\cos 3t, \frac{3}{2}a \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}a \operatorname{sen} 3t\right).
\end{aligned}$$

esta curva es una nueva astroide. Si tomamos $a = 1$ y representamos la astroide en rojo, su evoluta es la curva que está en azul en la siguiente figura:



6. Determínese la envolvente de la familia de circunferencias de centro $\left(\sqrt{2}\lambda, 0\right)$ y radio λ, para $\lambda \in (0, \infty)$.

Solución: La ecuación paramétrica de la familia es:

$$\mathbf{x}\,(t) = \left(\sqrt{2}\lambda + \lambda \cos t, \lambda \operatorname{sen} t\right),$$

para $t \in [0, 2\pi)$ ya que la ecuación de una circunferencia de centro $\mathbf{c}$ y radio r es $\mathbf{x}\,(t) = \mathbf{c} + r\,(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$. Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = \left(\sqrt{2} + \cos t,\ \operatorname{sen} t\right),$$
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = (-\lambda \operatorname{sen} t, \lambda \cos t)\,.$$

Entonces debe ser

$$0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} + \cos t & -\lambda \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \lambda \cos t \end{vmatrix}$$
$$= \sqrt{2}\lambda \cos t + \lambda.$$

Esto se cumple cuando

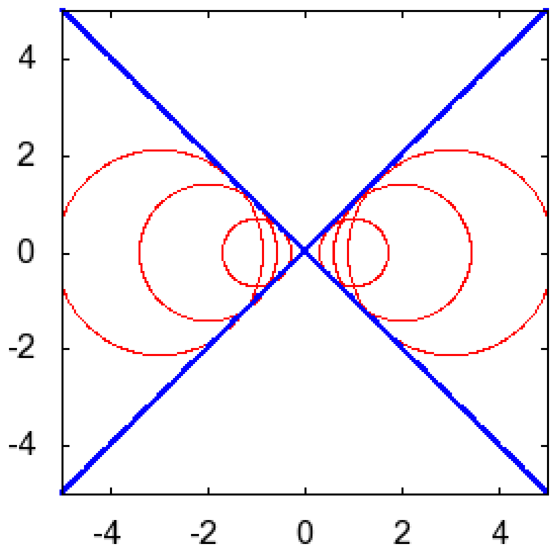
$$\cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff t = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\iff t = \frac{3\pi}{4},\ t = \frac{5\pi}{4}.$$

Por eso, la envolvente son dos rectas, de ecuaciones:

$$\mathbf{e}_1(\lambda) = \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\lambda + \lambda \cos \frac{3\pi}{4}, \lambda \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda, \frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda\right),$$
$$\mathbf{e}_2(\lambda) = \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{5\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\lambda + \lambda \cos \frac{5\pi}{4}, \lambda \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda\right).$$

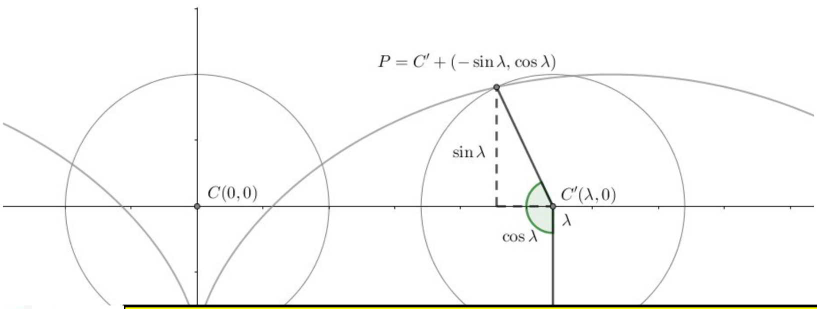
Estas rectas también se pueden escribir como

$$\mathbf{e}_1(\lambda) = (\lambda, \lambda)\,,\quad \mathbf{e}_2(\lambda) = (\lambda, -\lambda)\,.$$



Nota: La ecuación de una cicloide dada por una circunferencia de radio a rodando sin deslizar sobre la recta $y = 0$ es del tipo $\mathbf{x}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$. La ecuación de una cicloide dada por una circunferencia de radio a rodando sin deslizar sobre la recta $y = -a$ es del tipo $\mathbf{x}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(-\cos t))$.

Solución: La ecuación del diámetro en $t = 0$ es $y = 0$. Al rodar un ángulo λ en el sentido de las agujas del reloj, hacia las x positivas, las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ que une $\mathbf{c} = (\lambda, 0)$ y $\mathbf{p}$ son $(-\operatorname{sen}\lambda, \cos\lambda)$.



Entonces la ecuación de la familia de rectas es:

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = \mathbf{c} + t\mathbf{v} = (\lambda - t \operatorname{sen} \lambda, t \cos \lambda).$$

Las derivadas parciales verifican:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) &= (1 - t\cos\lambda, -t \operatorname{sen}\lambda),\\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) &= (-\operatorname{sen}\lambda, \cos\lambda).\end{aligned}$$

El determinante de la matriz que forman debe ser 0:

$$\begin{aligned}0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) &= \begin{vmatrix} 1 - t\cos\lambda & -\operatorname{sen}\lambda \\ -t\operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{vmatrix}\\ &= \cos\lambda - t.\end{aligned}$$

Por eso, la envolvente es una curva de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda, \cos\lambda) &= (\lambda - \cos\lambda \operatorname{sen}\lambda, \cos\lambda\cos\lambda)\\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\lambda, \frac{\cos 2\lambda + 1}{2}\right).\end{aligned}$$

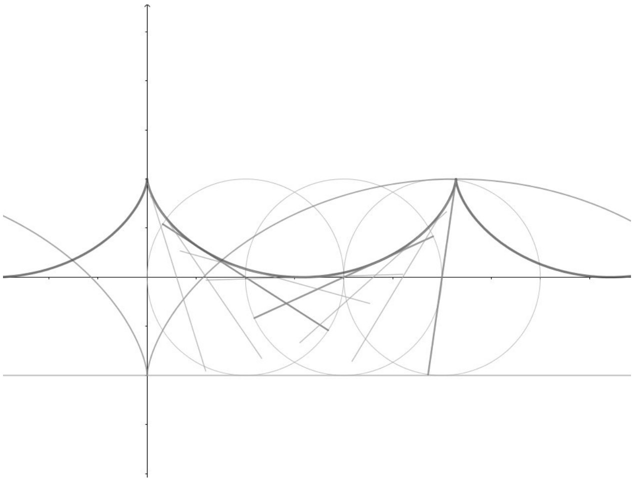
Esta curva es una cicloide, ya que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\lambda) &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\lambda, \frac{\cos 2\lambda + 1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}(2\lambda - \operatorname{sen} 2\lambda), -\frac{1}{2}(-1 - \cos 2\lambda)\right).\end{aligned}$$

Observe que está cambiado el signo de la segunda componente (es $-$), lo que significa que el centro de la circunferencia que rueda sobre la recta $y = 0$ tiene componente y negativa.

La situación se muestra en la imagen.

Realice los ejercicios 128, 129, 130, 131, 132, 133 y 134 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.



Solución: El teorema dice: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo conexo y sea $f : I \to S^1$ una función diferenciable. Entonces existe una función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(s) = (\cos\theta(s),\ \operatorname{sen}\theta(s))$. Además, cualquier otra función $\overline{\theta} : I \to \mathbb{R}$ con la misma propiedad difiere de θ en un múltiplo entero de 2π. Recordamos que S^1 es la circunferencia de radio 1.

Tenemos que buscar $\theta(s)$ tal que

$$f(s) = \left(\frac{2s}{1+s^2}, \frac{1-s^2}{1+s^2}\right) = (\cos\theta(s),\ \operatorname{sen}\theta(s)).$$

Por la demostración, sabemos que si $f(s) = (u(s), v(s))$, entonces

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \left(v'(\xi)\, u(\xi) - u'(\xi)\, v(\xi)\right) d\xi + \theta_0,$$

y θ_0 está dado por la condición $f(s_0) = (\cos\theta_0,\ \operatorname{sen}\theta_0)$. Tomamos, por ejemplo, $s_0 = 0$, y tenemos

$$f(0) = (0,1) = (\cos\theta_0,\ \operatorname{sen}\theta_0) \implies \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Como

hacemos

$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \int_0^s \left(v'(\xi)\,u(\xi) - u'(\xi)\,v(\xi)\right) d\xi + \frac{\pi}{2} \\
&= \int_0^s \left(\frac{-4s}{(s^2+1)^2}\frac{2s}{1+s^2} - \frac{2-2s^2}{(s^2+1)^2}\frac{1-s^2}{1+s^2} \right) ds + \frac{\pi}{2} \\
&= \int_0^s -2\frac{2s^2+s^4+1}{(s^2+1)^3} ds + \frac{\pi}{2} \\
&= -2\int_0^s \frac{1}{s^2+1} ds + \frac{\pi}{2} \\
&= -2\left(\operatorname{arctg} s\right)\Big|_0^s + \frac{\pi}{2} \\
&= -2\operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

9. (**Ejercicio 164 de "Notas de Geometría diferencial con aplicaciones"**) Encúentrese la curvatura de la curva $\mathbf{x}(t) = e^t(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$ calculando $\theta'(s)$.

   Solución: Primero tenemos que ver si la curva está parametrizada por la longitud de arco y, en caso de que no lo esté, parametrizarla. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= e^t(\cos t,\ \operatorname{sen} t) + e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t) \\
&= e^t(\cos t - \operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t + \cos t), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{e^{2t}\left((\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2\right)} \\
&= e^t\sqrt{2\cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2}e^t, \\
s(t) &= \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^t \sqrt{2}e^t dt \\
&= \sqrt{2}\, e^t\Big|_{t_0}^t.
\end{aligned}$$

   Si tomamos $t_0 = 0$ y $t \geq 0$, tenemos

$$s(t) = \sqrt{2}\left(e^t - 1\right).$$

La curva, parametrizada por el arco, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(s) &= e^{\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\left(\cos\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\,\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\,\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2},\ \operatorname{sen}\,\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sabemos que si $f(s) = (u(s), v(s)) = \mathbf{t}(s)$, entonces $\theta'(s) = k(s)$. Como

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s}\left(v'(\xi)\,u(\xi) - u'(\xi)\,v(\xi)\right)d\xi + \theta_0,$$

deducimos por el primer teorema fundamental del cálculo, que:

$$\theta'(s) = v'(s)\,u(s) - u'(s)\,v(s).$$

Por eso, tenemos que determinar

$$\begin{aligned}
f(s) &= (u(s), v(s)) = \mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right),\right.\\
&\left.\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
u'(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\left(-\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right),\\
v'(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo, tenemos

$$
\begin{aligned}
k\left(s\right) &= \theta'\left(s\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)\\
&\cdot\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)\\
&- \frac{\sqrt{2}}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)\\
&\cdot\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\left(s+\sqrt{2}\right)}\left(\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)^2\right.\\
&\left.+\left(\cos\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2(s+\sqrt{2})}2 = \frac{1}{s+\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Y esta es la función que buscábamos.

Realice los ejercicios 165 y 167 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.

Realice el ejercicio 168 del documento Notas de Geometría diferencial con aplicaciones.