

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 2. Inicio al estudio de curvas

Versión 3.0
26 de julio de 2020



Este material ha sido elaborado por Esther Gil Cid y Lidia Huerga Pastor y se difunde bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 3.0. Puede leer las condiciones de la licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right. Below the text is a horizontal orange bar with a white shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, irregular shape that resembles a map of the region. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Índice general

1.	Ejemplos de curvas. Visualización en el ordenador.	4
2.	Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador.	12
2.1.	Polinomios de Bernstein	13
2.2.	Curvas de Bézier	16
3.	Curva regular. Primeras definiciones y resultados.	22
3.1.	Longitud de arco	27



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. Ejemplos de curvas. Visualización en el ordenador.

Intuitivamente, una curva es la trayectoria de una partícula o de un móvil en un plano o en el espacio. Podemos suponer que depende del tiempo, sin perder generalidad. En ese caso, decimos que la posición está dada por la función $\mathbf{x}(t)$. Si estamos en el plano, es $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, mientras que si estamos en el espacio, tenemos $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. En general, podemos escribir $\mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Vamos a centrarnos en curvas en el plano, pero sabiendo que el estudio que vamos a hacer puede extrapolarse a curvas en un espacio de dimensión mayor, para subconjuntos de \mathbb{R}^n para $n \geq 2$ que son, en cierto sentido, unidimensionales o que dependen de un único parámetro.

La velocidad de la partícula está dada por la función (en caso de que exista)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}.$$

Como vamos a trabajar con curvas donde este vector exista (vamos a utilizar herramientas del cálculo diferencial), vamos a pedir que la función $\mathbf{x}(t)$ sea diferenciable hasta donde necesitemos.

Por otro lado, si conocemos la posición inicial (en el instante t_0) de la partícula, que es \mathbf{x}_0 , y su velocidad $\mathbf{v}(t)$, podemos reconstruir su trayectoria, sin más que hacer:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s) ds.$$

La aceleración de una curva es la derivada de la velocidad, es decir es $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}.$$

Vamos a comenzar con el estudio de algunas curvas.

Ejemplo 1. Un punto es una curva. Si sus coordenadas son (a, b) , su ecuación es

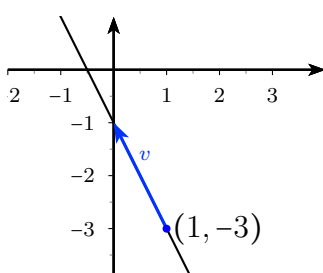
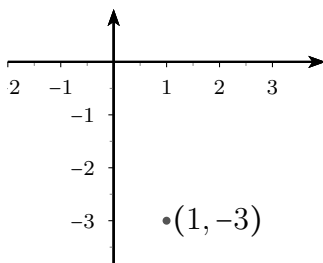
$$\mathbf{x}(t) = (a, b)$$

y su velocidad es nula, $\mathbf{v}(t) = (0, 0)$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Entonces, si en un instante $t = t_0$ pasa por el punto (a, b) , determinamos la ecuación a partir de la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s) ds = (a, b) + \left(\int_{t_0}^t v_1(s) ds, \int_{t_0}^t v_2(s) ds \right) \\ &= (a, b) + \left(\int_{t_0}^t v_1 ds, \int_{t_0}^t v_2 ds \right) \\ &= (a + v_1 t - v_1 t_0, b + v_2 t - v_2 t_0). \end{aligned}$$

Sus coordenadas son:

$$\begin{aligned} x &= a + v_1(t - t_0), \\ y &= b + v_2(t - t_0). \end{aligned}$$

Obviamente, es la ecuación de una recta que pasa por (a, b) y con vector director (v_1, v_2) . En la figura se representa para $(a, b) = (1, -3)$ en $t = 0$ y $v = (-1, 2)$, cuya ecuación es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Ejemplo 3. Una curva parametrizada que recorra una recta pero a velocidad no constante es, por ejemplo:

$$\begin{aligned}x &= 1 - t^3, \\y &= -3 + 2t^3.\end{aligned}$$

Un vector director es $(-1, 2)$. El vector velocidad es:

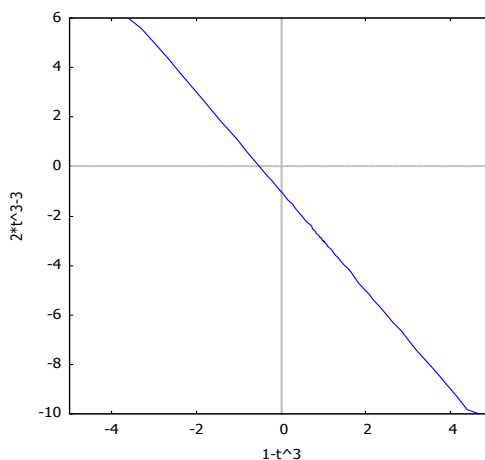
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-3t^2, 6t^2).$$

Como su módulo es $t^2\sqrt{45}$, no es constante. Su vector aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (x''(t), y''(t)) = (-6t, 12t).$$

Su módulo es $2\sqrt{45}t$, que tampoco es constante.

Con Maxima se representa con `wxplot2d([['parametric, 1-t^3, -3+2*t^3, [t, -6, 6], [nticks, 300]]], [x,-5,5], [y,-10,6] [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])`. El resultado es:



Observad que esta recta es la misma que la del ejemplo ??, pero recorrida a velocidad no constante. Es decir, la dirección del vector velocidad es la misma, pero cambia su módulo (que pasa a ser no constante).

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

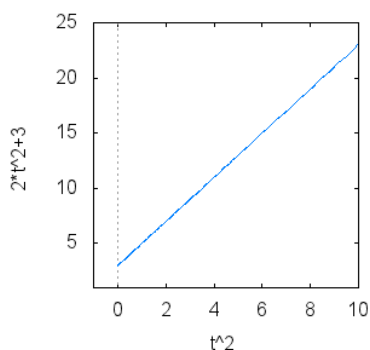
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

En este caso, la aceleración es constante.

Se representa con `wxplot2d([['parametric, t^2, 3+2*t^2, [t, -6, 3], [nticks, 300]]], [x,-5,5],[y,0,25],[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])]$.`

El resultado es:



Ejemplo 5. Una circunferencia es una curva donde todos los puntos están a la misma distancia de uno dado, que es el centro. La distancia se llama radio. Sus puntos cumplen la ecuación, para radio r y centro $\mathbf{p}_0 = (c_1, c_2)$

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

Puede parametrizarse con

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}_0 + (r \cos t, r \sin t).$$

Se recorre con una velocidad

$$\mathbf{v}(t) = (-r \sin t, r \cos t),$$

y la aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = (-r \cos t, -r \sin t).$$

Dejamos que el estudiante la represente con Maxima, tanto en coordenadas paramétricas como implícitas



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



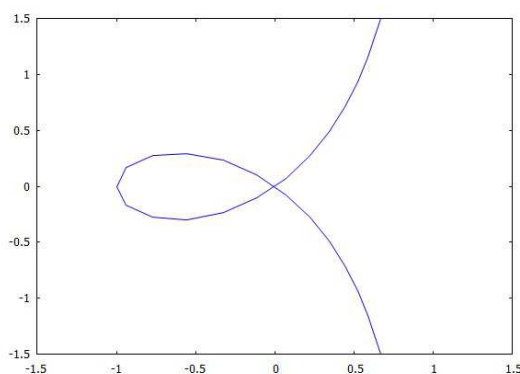
las componentes están dadas por funciones racionales. Su velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \left(4 \frac{t}{(1+t^2)^2}, -\frac{t^4 - 1 + 4t^2}{(1+t^2)^2} \right)$$

y su aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = \left(-4 \frac{-1 + 3t^2}{(1+t^2)^3}, 4t \frac{t^2 - 3}{(1+t^2)^3} \right).$$

Se representa a continuación:



Ejemplo 7. Las dos componentes de la curva de \mathbb{R}^2 dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3, t^2)$$

son polinomios. Su velocidad es

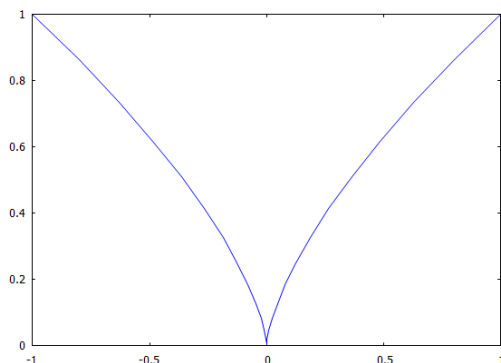
$$\mathbf{v}(t) = (3t^2, 2t)$$

y su aceleración es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





En este último ejemplo hemos visto que las componentes son polinomios. Es un caso de las curvas polinómicas. Sus componentes son polinomios de grado $n \geq 1$, y podemos escribirlas como

$$\mathbf{x}(t) = (a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n),$$

donde algunos coeficientes pueden ser 0. Por ejemplo, si $a_{n-1} = a_n = 0$, entonces el grado de la primera componente es $n - 2$.

Ejemplo 8. Curvas polinómicas son, por ejemplo, las siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (1 + t - 3t^3, t^3 + t^5), \\ \mathbf{y}(t) &= (-4 - 3t - t^2 - t^3, -1 + t - 2t^2 - t^3), \\ \mathbf{w}(t) &= (3t, 1 + 4t^4). \end{aligned}$$



Observamos que las curvas polinómicas están controladas por $n + 1$ coeficientes, como mucho, por cada componente. Podemos escribir estos coeficientes como puntos de \mathbb{R}^2 , que llamamos \mathbf{v}_i , para escribir la curva como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i t^i.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



En la curva $\mathbf{x}(t)$ los puntos \mathbf{v}_i son

$$\mathbf{v}_0 = (1, 0), \mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_3 = (-3, 1),$$

$$\mathbf{v}_5 = (0, 1), \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_4 = (0, 0).$$

Para $\mathbf{y}(t)$ tenemos

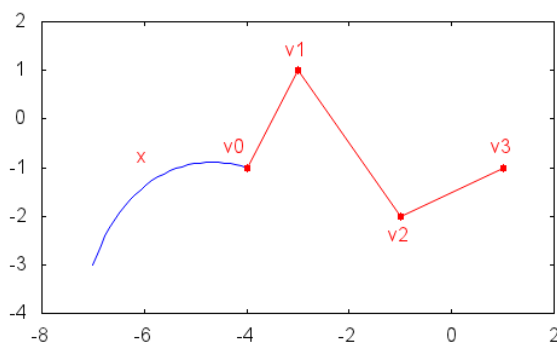
$$\mathbf{v}_0 = (-4, -1), \mathbf{v}_1 = (-3, 1), \mathbf{v}_2 = (-1, -2), \mathbf{v}_3 = (-1, -1).$$

Y, de forma obvia, los puntos en $\mathbf{w}(t)$ son:

$$\mathbf{v}_0 = (0, 1), \mathbf{v}_1 = (3, 0),$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = (0, 0) (3, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 4).$$

Representamos los puntos y la función $\mathbf{y}(t)$, en la siguiente gráfica, que se ha hecho con **Maxima**:



En esta gráfica, vemos que la curva dada por los puntos no describe el polígono que une estos puntos. ☹

Una de las explicaciones a la afirmación anterior es que si transformamos los \mathbf{v}_i por una afinidad $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, entonces la curva que describen los transformados no coincide con la transformada de la curva, es decir, en general se tiene que:

$$f(\mathbf{x}(t)) \neq \sum_{i=0}^n f(\mathbf{v}_i) t^i.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



donde

$$\mathbf{v}_0 = (1, -1), \quad \mathbf{v}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -2).$$

Elegimos la afinidad $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t - 2t^2 - 1 \\ 2t^2 + 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 f(\mathbf{v}_i) t^i &= \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \sum_{i=0}^2 \mathbf{b} t^i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} t^2 \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \\ &= \begin{pmatrix} t - 2t^2 - 1 \\ t + 3t^2 + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ambas curvas son distintas porque si las representamos gráficamente vemos que no coinciden. Lo podemos hacer en Maxima con

```
wxplot2d(['parametric, t-2*t^2-1,2*t^2+2, [t,0,1], [nticks,300]],
['parametric, t-2*t^2-1,t+3*t^2+2, [t, 0, 1], [nticks, 300]]],
[legend,false]);
```



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

2. Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador.

El diseño de curvas ha sido importante para la ingeniería desde tiempos antiguos. El primer registro de uso industrial de curvas se remonta a los romanos, y su finalidad era la construcción de barcos. Utilizaban una especie de moldes reutilizables para construir las cuadernas que conforman el casco del barcos. Más adelante, en tiempo de la República de Venecia, se perfeccionaron estas técnicas, haciendo que las cuadernas estuvieran dadas por unos puntos por los que debían pasar, dando lugar a los splines.

Más adelante, con el desarrollo de la industria aeronáutica y automovilística, se perfeccionaron esos métodos. En la década de 1950 de añadió el diseño numérico, utilizando ordenadores y desarrollando lenguajes y programas con este fin. Pero permanecía un problema: el diseño se basaba en un modelo maestro, ya fuera físico, sobre un papel o con datos en un ordenador, y el resultado final no siempre coincidía con el diseño original. En la segunda mitad del siglo XX, hacia 1960, el esfuerzo de muchos ingenieros, matemáticos y físicos trabajando en el diseño de la carrocería de aviones y automóviles se concentró en resolver estas dificultades.

En este contexto, el matemático Paul De Casteljaou diseñó, mientras trabajaba en Citroën, un algoritmo para el diseño de curvas que fueran escalables y que resolvieran el problema de las diferencias entre el diseño y su materialización. La idea era definir la curva a partir de unos puntos, pero que no estuvieran necesariamente en ella. Estos puntos definían, de alguna forma, direcciones tangentes a la curva, pero la curva no debía pasar por ellos. Por eso, cambios en los puntos inducen cambios en la la forma de la curva, pero de forma más suave. Por las ventajas económicas que suponía para Citroën, este sistema fue mantenido en secreto al menos hasta 1964.

Casi simultáneamente, Pierre Étienne Bézier, ingeniero francés, desarrolló de forma independiente el mismo sistema sistema de diseño asistido por ordenador mientras trabajaba en Renault y lo aplicó para el diseño de carrocerías de los coches. El resultado es conocido como curvas y superficies de Bézier, de gran importancia en el diseño actual.

Los gráficos vectoriales se basan, mayoritariamente, en las curvas y superficies de Bézier. Para obtener un gráfico vectorial se almacenan unos puntos

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

sólo del polígono de control, que son “suaves” (diferenciables en terminología matemática), totalmente escalables o son muy versátiles pudiendo adoptar formas similares a la recta o el plano o mucho más complejas (dependiendo del número de puntos del polígono de control y de su posición).

Finalmente, señalamos que las curvas y superficies de Bézier son actualmente empleadas en programas como Adobe Illustrator, CorelDRAW o Inkscape. Además, son las curvas estándar utilizadas en PostScript o en las fuentes escalables TrueType and PostScript Type 1.

Ya hemos repasado qué es una afinidad y las coordenadas baricéntricas. Podemos comenzar el estudio de esta parte con el apartado 2.2.3 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, dedicado al algoritmo de Jarvis. Una implementación del mismo en Maxima está en el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

Debemos continuar con la lectura de este apartado. Los apartados 2.2.4. Polinomio de Bernstein y 2.2.5. Curvas de Bézier complementan lo aquí explicado. Se debe finalizar con el apartado 2.2.6. El algoritmo de De Casteljaou, del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

2.1. Polinomios de Bernstein

Una curva plana polinómica es una curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)),$$

donde $x(t), y(t)$ son polinomios de grado n .

De forma similar, una curva polinómica en el espacio es una curva definida por una expresión de la forma

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x(t), y(t), z(t)$ son polinomios de grado n .

En los dos casos, las funciones $x(t), y(t)$ (y $z(t)$, en su caso) se pueden escribir a partir de polinomios de una base del espacio vectorial formado por los polinomios de grado n . Este espacio vectorial tiene dimensión $n + 1$ y una base suya es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



para $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 , dependiendo de si la curva es plana o espacial. Los elementos \mathbf{b}_i son las coordenadas de la curva en la base dada.

Ejemplo: La curva

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 - 1, 2t^2 + t + 2, t^3 + t)$$

es una curva polinómica, que podemos escribir como

$$\mathbf{x}(t) = (1, 0, 1)t^3 + (0, 2, 0)t^2 + (0, 1, 1)t + (-1, 2, 0).$$

Por tanto, las coordenadas de la curva en la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ son

$$(-1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 1).$$

Si expresamos una curva polinómica en la base $\{1, t, \dots, t^n\}$, las coordenadas \mathbf{b}_i en esta base cambian si aplicamos transformaciones afines, en general. Este es un problema en el diseño de curvas, porque entonces la expresión de la curva representada en un modelo, es distinta de la expresión obtenida para la curva a otro tamaño, por ejemplo.

Por eso, vamos a intentar sustituir esta base por otra, que llamamos

$$\{B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)\}$$

de tal forma que sea invariante a las transformaciones afines. En esta base, podemos escribir una curva cualquiera como Para ello, vamos a pedir que se cumpla

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$$

Entonces, si la curva está expresada como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^n B_i^n(t),$$

para cada t , tendríamos una combinación baricéntrica de puntos. Va a ser invariante respecto a transformaciones afines.

Una forma sencilla de encontrar estos polinomios $B_i^n(t)$, que llamamos **polinomios de Bernstein**, es desarrollando la igualdad

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Llamamos

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Son $n + 1$ polinomios, que además son linealmente independientes.

Proposición 1. *Los polinomios de Bernstein son una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menos o igual que n .*

Demostración. Sabemos que

$$B_0^n(t) = (1-t)^n = 1 - \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \dots + (-1)^n t^n,$$

$$\begin{aligned} B_1^n(t) &= nt(1-t)^{n-1} = nt(B_0^{n-1}(t)) \\ &= nt\left(1 - \binom{n-1}{1}t + \binom{n-1}{2}t^2 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^n(t) &= \frac{n(n-1)}{2}t^2(1-t)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}t^2(B_0^{n-2}(t)) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}t^2\left(1 - \binom{n-2}{1}t + \binom{n-2}{2}t^2 + \dots + (-1)^{n-2}t^{n-2}\right), \end{aligned}$$

...

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i B_0^{n-i}(t).$$

Por eso, escribiendo la matriz de los coeficientes respecto a la base canónica $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -\binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & (-1)^n \\ 0 & \binom{n}{1} & -\binom{n}{1}\binom{n-1}{1} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{n}{2} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



2.2. Curvas de Bézier

Observamos que si tenemos una curva polinómica, expresada a partir de los polinomios de Bernstein, nos basta con dar sus coordenadas $\{\mathbf{b}_i^n\}$, por lo que la curva está definida de forma única por estos puntos, que llamamos **polígono de control**.

Muchas veces, técnicamente, las curvas de Bézier suele hacer referencia al sistema desarrollado por el algoritmo de De Casteljaou para el diseño industrial de curvas. Nosotros vamos a llamar **curvas de Bézier** a las curvas dadas por la expresión

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^n B_i^n(t), t \in [0, 1]$$

si $B_i^n(t)$ son los polinomios de Bernstein y $\{\mathbf{b}_i^n\}$ es el polígono de control.

Ejemplo 11. La curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (1, 1) B_0^3(t) + (0, 2) B_1^3(t) + (2, -1) B_2^3(t) + (0, -3) B_3^3(t)$$

es una curva de Bézier, con polígono de control $\{(1, 1), (0, 2), (2, -1), (0, -3)\}$.

Si desarrollamos los polinomios de Bernstein, podemos escribirla como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (1, 1) \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + (0, 2) \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 \\ &\quad + (2, -1) \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 + (0, -3) \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 \\ &= (1, 1) (1-t)^3 + (0, 2) 3t(1-t)^2 + (2, -1) 3t^2(1-t) + (0, -3) t^3 \\ &= \begin{pmatrix} (-t+1)^3 + 6t^2(-t+1), \\ -3t^3 + (-t+1)^3 + 6t(-t+1)^2 - 3t^2(-t+1) \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

☺

Ejemplo 12. Vamos a escribir la curva $\mathbf{x}(t) = (t^2 + t - 2, t^3 - 8)$ con $t \in [0, 1]$ como una curva de Bézier.

El grado máximo de los polinomios que forman las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^2 \\
 &+ \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^0 \\
 &= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
 \end{aligned}$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0) (1-t)^3 + (x_1, y_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3) t^3 \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0t + 3x_0t^2 - x_0t^3 + 3tx_1 - 6t^2x_1 + 3t^3x_1 + 3t^2x_2 - 3t^3x_2 + t^3x_3, \\ y_0 - 3y_0t + 3y_0t^2 - y_0t^3 + 3ty_1 - 6t^2y_1 + 3t^3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^3y_2 + t^3y_3 \end{pmatrix}^t \\
 &= \begin{pmatrix} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 \end{pmatrix}^t \\
 &= (t^2 + t - 2, t^3 - 8).
 \end{aligned}$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = t^3 - 8,$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
 y_0 &= -8, \\
 -3y_0 + 3y_1 &= 0 \implies y_1 = y_0 = -8, \\
 3y_0 - 6y_1 + 3y_2 &= 0 \implies y_2 = -y_0 + 2y_1 = 8 + 2(-8) = -8, \\
 -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 &= 1 \implies y_3 = 1 + y_0 - 3y_1 + 3y_2 = -7.
 \end{aligned}$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 = t^2 + t - 2.$$

Se deduce:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -2, \\
 -3x_0 + 3x_1 &= 1 \implies 3x_1 = 1 - 6 = -5 \implies x_1 = -\frac{5}{3}, \\
 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 &= 1 \implies 3x_2 = 1 - 3x_0 + 6x_1 = 1 - 3(-2) + 6(-\frac{5}{3}) = 1 + 6 - 10 = -3.
 \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

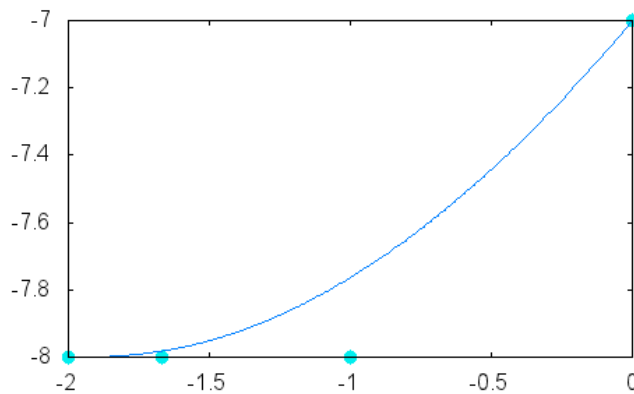
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (t^2 + t - 2, t^3 - 8) = \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\ &= (-2, -8) B_0^3(t) + \left(-\frac{5}{3}, -8\right) B_1^3(t) + (-1, -8) B_2^3(t) + (0, -7) B_3^3(t). \end{aligned}$$

La gráfica es:



Observación 2. Una curva de Bézier verifica $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n$.
La expresión de una curva de Bézier es

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Sabemos que

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Además:

$$B_0^n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n = (1-t)^n, \quad B_0^n(0) = 1, \quad B_0^n(1) = 0,$$

$$B_n^n(t) = \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 = t^n, \quad B_n^n(0) = 0, \quad B_n^n(1) = 1.$$

Por eso:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(0) = \mathbf{b}_0,$$

$$\mathbf{x}(1) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(1) = \mathbf{b}_n.$$

Observación 3. Las curvas de Bézier son invariantes bajo transformaciones afines, es decir, si f es una transformación afín entonces:

$$f\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n f(\mathbf{b}_i) B_i^n(t).$$

Si f es una transformación afín, entonces $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Así:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)\right) &= \mathbf{A} \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}\mathbf{b}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{b} B_i^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^n (\mathbf{A}\mathbf{b}_i + \mathbf{b}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n f(\mathbf{b}_i) B_i^n(t). \end{aligned}$$

Observación 4. Una curva de Bézier $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ permanece dentro de la envoltura convexa del polígono de control, si $t \in [0, 1]$.

El polígono de control es $\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. La envoltura convexa son los puntos de la forma

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{b}_i, \quad \text{con } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Por otro lado, para $t \in [0, 1]$ fijo es

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Observación 5. *Simetría de las curvas de Bézier: La imagen de una curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n\}$ coincide con la de la curva que tiene el polígono de control invertido, es decir, $\{\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0\}$.*

Tenemos que ver que cualquier punto de C_1 , curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n\}$ está en C_2 , que es la curva que tiene el polígono de control $\{\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0\}$. Llamamos, para esta segunda curva, $\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_{n-j}$ y así, el polígono de control es $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Supongamos que $(t_0, \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t_0))$ es un punto de C_1 , con $t_0 \in [0, 1]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t_0) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} t_0^i (1-t_0)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} (1-t_1)^i (1-(1-t_1))^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} (1-t_1)^i t_1^{n-i} = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{n-i} (1-t_1)^i t_1^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_{n-i}^n(1-t_1) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(t_1) = \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_j B_j^n(t_1), \end{aligned}$$

si $t_1 = 1 - t_0 \in [0, 1]$. Pero este punto está en C_2 para $t = t_1$. Por eso, es un punto de C_2 .

El recíproco se demuestra igual.

Observación 6. *Una curva de Bézier es tangente al polígono de control en los extremos del mismo.*

La curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n\}$ es

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Hay que demostrar que $\mathbf{b}'(0)$ es paralelo a $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ y que $\mathbf{b}'(1)$ es paralelo a $\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}$.

Para el primer caso, tenemos

$$\mathbf{b}'(0) = \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(0) = n \Delta \mathbf{b}_0 B_0^{n-1}(0) = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0),$$

utilizando el resultado del ejercicio 60 y que $B_0^n(0) = 1, B_i^n(0) = 0$ para $i \neq 0$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo 13. Vamos a escribir la curva $\mathbf{x}(t) = (t^2 + t - 2, t^3 - 8)$ con $t \in [0, 1]$ como una curva de Bézier utilizando estas propiedades, como hicimos en el ejemplo 12. Podemos calcular los puntos de control como:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{x}(0) = (-2, -8), \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{x}(1) = (0, -7), \\ \mathbf{x}'(0) &= 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \implies \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{x}'(0) + \mathbf{b}_0 = \left(\frac{1}{3} - 2, -8\right) \\ &\implies \mathbf{b}_1 = \left(-\frac{5}{3}, -8\right), \\ \mathbf{x}'(1) &= 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) \implies \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{x}'(1) = (-1, -8). \end{aligned}$$

El resultado es el mismo que en el ejemplo citado. ☺

Ejemplo 14. Vamos a calcular la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(-1, 2), (0, 1), (1, 1), (1, -1), (2, 5)$.

El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 2), \mathbf{b}_1 = (0, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1), \mathbf{b}_3 = (1, -1), \mathbf{b}_4 = (2, 5).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

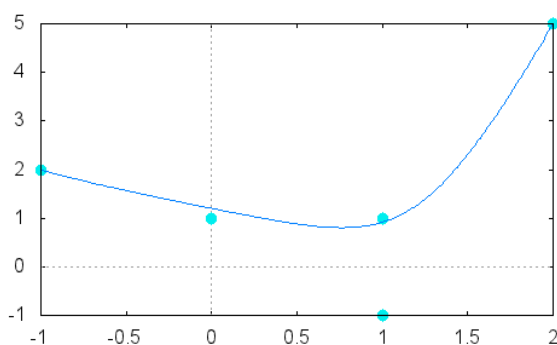
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (-1, 2)B_0^4(t) + (0, 1)B_1^4(t) + (1, 1)B_2^4(t) + (1, -1)B_3^4(t) + (2, 5)B_4^4(t) \\ &= (-1, 2) \binom{4}{0} t^0 (1-t)^4 + (0, 1) \binom{4}{1} t^1 (1-t)^3 + (1, 1) \binom{4}{2} t^2 (1-t)^2 \\ &\quad + (1, -1) \binom{4}{3} t^3 (1-t) + (2, 5) \binom{4}{4} t^4 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



3. Curva regular. Primeras definiciones y resultados.

Vamos a considerar curvas dadas por $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde la función x es al menos diferenciable una vez (aunque a veces vamos a pedir que sea diferenciable más de una vez). En general, vamos a considerar curvas en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3 .

Definición 7. Los *puntos singulares* de la curva son aquellos donde $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$ y los *puntos regulares* son los puntos que no son singulares. La curva sin puntos singulares se llama *curva regular*.

Ejemplo 15. Vamos a ver que las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

definen una curva regular.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Al resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t = 0, \\ y'(t) &= \cos t = 0, \end{aligned} \right\}$$

de la segunda ecuación se deduce que

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la primera, tenemos

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ = 0 - (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Por eso, es una curva regular. ☹

Ejemplo 16. Vamos a estudiar si la curva $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, \cos t)$ tiene todos sus puntos regulares.

Como $\mathbf{x}'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo t :

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 3t^2, -\operatorname{sen} t) \neq (0, 0, 0),$$

todos los puntos de la curva son regulares. ☹

Un vector tangente a una curva en un punto regular $\mathbf{x}(t_0)$ es el vector $\mathbf{x}'(t_0)$. Esto da lugar a las siguientes definiciones.

Definición 8. Para una curva regular dada por la parametrización $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, el **vector derivada** en el punto $\mathbf{x}(t_0)$ es el vector $\mathbf{x}'(t_0)$.

Definición 9. La **recta tangente** a la curva es la recta que pasa por $\mathbf{x}(t_0)$ y tiene a $\mathbf{x}'(t_0)$ como vector director. Su ecuación es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)(t - t_0).$$

Definición 10. Definimos el **vector tangente** a una curva como el vector derivada unitario, es decir, como el vector

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Ejemplo 17. Encontramos el vector derivada y la recta tangente, en $t = 0$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = \sin t,$$

que vimos en el ejemplo anterior. Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (2t \cos t - t^2 \sin t, \cos t), \quad \mathbf{x}'(0) = (0, 1).$$

Además, $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$. Por tanto, la recta tangente en ecuaciones paramétricas es, para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(x, y) = (0, 0) + \lambda(0, 1).$$

El vector tangente es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{(2t \cos t - t^2 \sin t, \cos t)}{\|(2t \cos t - t^2 \sin t, \cos t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2t \cos t - t^2 \sin t)^2 + (\cos t)^2}} (2t \cos t - t^2 \sin t, \cos t). \end{aligned}$$

☺

Ejemplo 18. Vamos a calcular el ángulo que forman los vectores derivada a la curva $\mathbf{x}(t) = (at, bt^2, t^3)$ con el vector $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$, si $2b^2 = 3a$.

Primero determinamos el vector derivada a la curva en un punto $\mathbf{x}(t)$, que es

$$\mathbf{x}'(t) = (a, 2bt, 3t^2).$$

Ahora determinamos el coseno del ángulo θ que forman a partir del producto escalar. Sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t) &= (1, 0, 1) \cdot (a, 2bt, 3t^2) = a + 3t^2, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t) &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{x}'(t)\| \cos \theta = \sqrt{1+1} \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4} \cos \theta. \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones, tenemos:

$$\cos \theta = \frac{a + 3t^2}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4}} = \frac{a + 3t^2}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4}}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

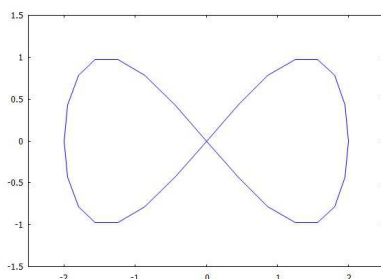
Ejemplo 19. La curva de \mathbb{R}^2 dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(2 \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{sen} \left(2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

para $t \in [0, 2\pi)$ se llama curva de Bernoulli. Con Maxima podemos representarla con la sentencia

```
>> load(draw)$
draw2d(parametric(2*cos(t-%pi/2),
sin( 2*(t-%pi/2)),t , 0, 2*%pi),
nticks=400,xrange = [-3,3],yrange = [-3,3]);
```

Su gráfica es



Observamos que en $(0,0)$ tiene dos posibles vectores derivada. Veamos para qué valores de t es $\mathbf{x}(t) = (0,0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(2 \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{sen} \left(2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = (0,0) \\ \iff \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) &= 0, \operatorname{sen} \left(2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) = 0 \\ \iff t &= k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

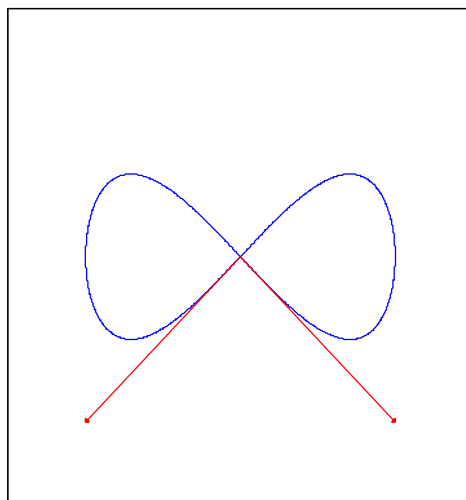
Como debe ser $t \in [0, 2\pi)$, en este caso es

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = (0,0).$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



En este ejemplo, hemos visto que en $(0,0)$ la curva tiene dos vectores derivadas, implicando vectores tangentes con sentidos distintos. ¿Contradice este resultado la definición de curva regular? ☹

La respuesta a la pregunta planteada en el ejemplo es no. Observamos que los vectores derivada (y, por tanto, las rectas tangentes) a la curva en $t = 0, t = \pi$ no coinciden, porque la curva pasa dos veces por el mismo punto. Esto da lugar a una nueva definición.

Definición 11. Decimos que \mathbf{P} es un **punto múltiple** de una curva dada por la función $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ si existen dos valores de t , que llamamos t_0, t_1 con

$$\mathbf{P} = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1).$$

Ejemplo 20. Determinemos si la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (1, t^2 - 2t, 2t^2)$$

tiene puntos múltiples.

Tiene puntos múltiples si y sólo si existen t_0 y t_1 números reales tales que

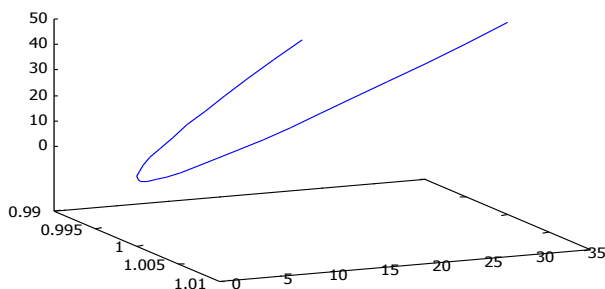
$$(1, t_0^2 - 2t_0, 2t_0^2) = (1, t_1^2 - 2t_1, 2t_1^2).$$

La primera coordenada coincide siempre. La tercera coordenada es igual si

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





Por eso, la curva no tiene puntos múltiples. Su gráfica es



3.1. Longitud de arco

En los apartados anteriores hemos comprendido qué es una curva y hemos visto que con la misma representación gráfica de la curva (es decir, la misma traza) podemos tener expresiones distintas que describan la curva, es decir, de modo que se recorra a distinta velocidad.

A continuación vamos a introducir una nueva “variable”, que llamamos $s(t)$ y que es la longitud del arco de curva entre un punto P de la curva, que corresponde a $t = a$ y otro cualquiera Q , correspondiente a $t = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Intuitivamente podemos pensar que si “estiramos” la curva hasta que sea una recta, es la distancia euclídea entre los transformados de los puntos P y Q . Esto tiene un significado geométrico claro.

Esta longitud es independiente de las ecuaciones con las que describimos la curva, y en general no coincide con la distancia euclídea entre los puntos P y Q situados en la curva.

Ejemplo 21. Si consideramos la circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio 1, la distancia entre los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, que pertenecen a esta curva es, obviamente, 2. Sin embargo si consideramos la longitud de la circunferencia

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



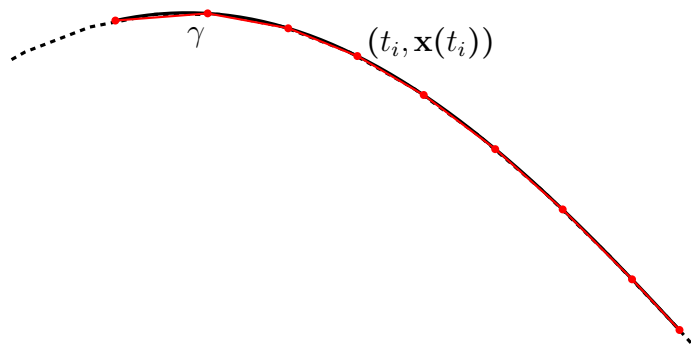
b sea justo $b - a$. Esto va a simplificar mucho algunos cálculos. Y además veremos que reparametrizando la curva con la longitud de arco la velocidad de la parametrización (es decir, $\|\mathbf{x}'(t)\|$) va a ser 1, como mostraremos en este apartado. Si quiere consultar una demostración completa de estos resultados, puede consultar *Notas de Geometría diferencial con aplicaciones* (A. Valdés, 2014).

Definición 12. Sea C una curva definida por $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un **arco de curva** es la parte de la curva dada por $\mathbf{x}(t)$ donde $t \in [a, b]$. Es decir, es $\mathbf{x} : [a, b] \subset I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denotamos con γ a los arcos de curva.

Podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos eligiendo una partición $\sigma = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\}$. Determinamos la línea poligonal que definen los puntos $(t_i, \mathbf{x}(t_i))$ para $i = 0, \dots, m$. Dicha línea poligonal aproxima a C en $[a, b]$ y tiene longitud

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\|.$$

Esta situación se representa en la siguiente figura. Se han representado en trazo negro continuo el arco de curva γ , y en rojo la poligonal. Se ha indicado un punto aleatorio $(t_i, \mathbf{x}(t_i))$. Para esta partición particular, $n = 8$.



Denotamos al conjunto de las particiones de γ como $P[a, b]$. Intuitivamente observamos que si hacemos que el diámetro de la partición sea muy

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



está acotado. Cuando este conjunto está acotado, se dice que la curva es rectificable. En ese caso, la longitud del arco es

$$L(\mathbf{x}) = \sup \{L(\sigma) : \sigma \in P[a, b]\}.$$

Teorema 13. *Dado un arco de una curva \mathbf{x} diferenciable regular, delimitado por los puntos $t = a$ y $t = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que su longitud es*

$$L(\mathbf{x}) = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt.$$

No vamos a demostrar este resultado, pero si lo desea, puede consultar su demostración en el documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés (2014).

Ejemplo 22. Vamos a calcular la longitud de una semicircunferencia de radio r y centrada en $(0, 0)$, de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

para $t \in [0, \pi]$. Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-r \sin t, r \cos t),$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

Entonces

$$L = \int_0^\pi \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^\pi r dt = rt \Big|_0^\pi = r\pi.$$

Este resultado coincide con el conocido sobre que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$. ☺

Definición 14. *La longitud del arco de una curva es la función $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida, para $t_0 \in I$, por*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(u)\| du.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Definición 15. Decimos que una curva dada por $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ está **parametrizada por la longitud de arco** si $1 = \|\mathbf{x}'(s)\|$, lo que quiere decir que está recorrida con velocidad 1 o que

$$s(t) = t - t_0.$$

A veces también se llama parametrización natural a la parametrización con la longitud de arco. Trabajar con curvas parametrizadas por la longitud de arco simplifica mucho el cálculo de elementos de la curva, como veremos en el capítulo siguiente, al estar libres de cambios con origen en un cambio de velocidad. Además, todas las curvas regulares se pueden reparametrizar por la longitud de arco. Si tenemos dos curvas $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ son reparametrizaciones una de la otra si existe una función $f : I \rightarrow J$ que es continua y derivable y tiene inversa continua y derivable, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ f.$$

Además, se cumple

$$\mathbf{y}'(t) = (\mathbf{x} \circ f)'(t) = \mathbf{x}'(f(t)) f'(t).$$

Así, si una curva es regular, su parametrización también lo es y además, a partir de esta ecuación, observamos que la nueva curva se recorre a una velocidad que es la de la primera, pero escalada por $f'(t)$.

Ejemplo 23. Sea C la curva dada por $\mathbf{x}(t) = (\operatorname{tg} t, \cos t)$ para $t \in (0, \pi)$. Vamos a encontrar las nuevas ecuaciones si se efectúa el cambio de parámetro $s = \operatorname{tg} t$.

Como $s = \operatorname{tg} t$, entonces $t = \operatorname{arctg} s$ y su derivada es $t' = \frac{1}{1+s^2} \neq 0$ para todo s . Por eso, es un cambio admisible de parámetro. En $(0, \pi)$ resulta

$$\cos t = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

Por eso, haciendo el cambio de parámetro, resulta

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

con inversa continua y derivable, a partir de su inversa, definimos una nueva parametrización $\mathbf{y} : J = s^{-1}(I) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, con

$$J = s^{-1}(I), \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{y}(t(s)),$$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{s} & J \\ & \xleftarrow{s^{-1}} & \\ \mathbf{x} \searrow & & \downarrow \mathbf{y} \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

En este caso, aplicando la regla de la cadena, la expresión de la derivada de la función inversa y la definición de longitud de arco y de su derivada, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= (\mathbf{x} \circ s^{-1})'(t) = \mathbf{x}'(s^{-1}(t)) (s^{-1})'(t) \\ &= \mathbf{x}'(s^{-1}(t)) \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} \\ &= \frac{\mathbf{x}'(s^{-1}(t))}{\|\mathbf{x}'(s^{-1}(t))\|}. \end{aligned}$$

Por eso,

$$\|\mathbf{y}'(t)\| = 1$$

y ahora la curva está parametrizada por la longitud de arco.

Ejemplo 24. Sea C la hélice dada, para las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Vamos a parametrizarla por la longitud de arco.

La longitud de arco es

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t,$$

porque

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b), \\ \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



No es sencillo parametrizar una curva por la longitud de arco y en muchos casos es prácticamente imposible. Pero sabemos que esta parametrización existe siempre y esto nos va a ayudar a simplificar cálculos. En general, para simplificar notación, cuando el parámetro de una curva sea s , implícitamente estaremos admitiendo que la curva está parametrizada por la longitud de arco. En otro caso, el parámetro será t .

Para curvas parametrizadas por la longitud de arco, dadas por $\mathbf{x}(s)$, el vector tangente es directamente el vector derivada, es decir:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s).$$

Ejemplo 25. Calculemos la longitud de un paso de hélice circular de ecuaciones $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$.

Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, 3).$$

Un paso de hélice es la porción de curva comprendida entre los valores t_1 y $t_1 + 2\pi$. Por eso, en este caso, tenemos:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} dt = 2\sqrt{10}\pi.$$



Ejemplo 26. Las ecuaciones paramétricas, para $r > 0$,

$$\mathbf{x}(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t).$$

corresponden a una cicloide, para $t \in \mathbb{R}$. Vamos a determinar la longitud de arco de la cicloide para un ciclo completo (para $t \in [0, 2\pi]$) y a parametrizar la cicloide por la longitud de arco, para $t \in [0, \pi]$.

Comenzamos determinando la longitud de arco. Sabemos que es una curva regular si $t \neq 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (r - r \cos t, r \sin t) = (r(1 - \cos t), r \sin t), \\ \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = r\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Su longitud de arco, para $t \in [0, 2\pi]$ está dada por

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2-2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} 2r \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{\pi} 2r \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 8r \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 8r \left(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \right) = 8r (0 + 1) = 8r. \end{aligned}$$

Para parametrizar por la longitud de arco, hacemos

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t r\sqrt{2-2\cos t} dt = r \int_0^t 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4r \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^t \\ &= 4r \left(-\cos \frac{t}{2} - (-\cos 0) \right) = 4r \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$t = 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right)$$

y la curva está parametrizada por el arco si hacemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(2r \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) - r \sin \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right), r - r \cos \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) \right) \\ &= \left(2r \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) - r \sin \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right), r \left(1 - \cos \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Observamos que por las razones del ángulo doble, es:

$$\begin{aligned} \sin \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) &= 2 \sin \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) \cos \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \sin \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right), \\ \cos \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) &= \cos^2 \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) - \sin^2 \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) \\ &= \left(1 - \frac{s}{4r} \right)^2 - \sin^2 \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, observamos que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ porque

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(2 \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right) &= 2\left(1-\frac{s}{4r}\right) \operatorname{sen}\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right) \\ &= 2\left(1-\frac{s}{4r}\right) \sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4r}\right)^2}, \\ \cos\left(2 \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right) &= \cos^2\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right) - \operatorname{sen}^2\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right) \\ &= \left(1-\frac{s}{4r}\right)^2 - 1 + \left(1-\frac{s}{4r}\right)^2 = 2\left(1-\frac{s}{4r}\right)^2 - 1.\end{aligned}$$

Y podemos concluir:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \left(2r \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - r \operatorname{sen}\left(2 \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right), r\left(1 - \cos\left(2 \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right)\right)\right) \\ &= \left(2r \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - 2r\left(1-\frac{s}{4r}\right) \sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4r}\right)^2}, r\left(1 - \left(2\left(1-\frac{s}{4r}\right)^2 - 1\right)\right)\right) \\ &= \left(2r \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - 2r\left(1-\frac{s}{4r}\right) \sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4r}\right)^2}, 2r\left(1 - \left(1-\frac{s}{4r}\right)^2\right)\right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{4}s - r\right) \sqrt{8rs - s^2} \arccos\left(-\frac{1}{4r}(s - 4r)\right), -\frac{1}{8r}(s^2 - 8rs)\right).\end{aligned}$$

Cuando trabajemos con una curva parametrizada por la longitud de arco escribiremos

$$\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

donde s es el parámetro longitud de arco, esto mismo con dos componentes para curvas planas. Recordamos que, en general, si la variable es s nos vamos a referir a curvas parametrizadas por la longitud de arco, aunque no lo indiquemos entonces. Y si la variable es t a curvas no parametrizadas por la longitud de arco.

El vector tangente para una curva parametrizada por el arco, que llamaremos $\mathbf{t}(s)$, verifica:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)).$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Bibliografía

- [1] Costa, A. F. ; Gamboa, J. M. ; 1997. Notas de Geometría diferencial de curvas y superficies. Ed. Sanz y Torres.
- [2] Do Carmo, M.P., 1995. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, Alianza Editorial, Madrid.
- [3] Farin, G., 2002. Curves and Surfaces for CAGD. 5a ed. Academic Press, San Diego.
- [4] Rodríguez Marín, L. 2008. Ampliación de Cálculo, primera parte. 3^o Edición. Ed. UNED.
- [5] Struik, D. J. ; 1973. Geometría diferencial clásica, Aguilar, Madrid.
- [6] Valdés, A.; 2014. Notas de Geometría diferencial con aplicaciones. Consultado el 29 de junio de 2014 en <http://www.mat.ucm.es/aval-des/GDA.pdf>, difundido bajo una licencia Creative Commons.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow effect at the bottom.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**