CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL EN AERONAVEGACIÓN

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

«ANÁLISIS VECTORIAL»

CURSO ACADÉMICO 15/16

Índice

1. Escalares y vectores

Las magnitudes del electromagnetismo se dividen en escalares (carga, corriente) y vectores (campo eléctrico $\vec{E}$).

- Un **escalar** es una cantidad que se representa por un número (y sus unidades). Ejemplo: corriente eléctrica de 3 A.
- Un **vector** es una cantidad que se representa por un módulo, una dirección y un sentido (y sus unidades). Ejemplo: velocidad de un móvil es $7\vec{u}_x$ m/s.

No obstante, las magnitudes electromagnéticas no son puntuales (con excepciones), sino que se distribuyen en el espacio. Se habla entonces de campos escalares y campos vectoriales.

- Un **campo** (escalar o vectorial) es una función que especifica la distribución espacial de una cantidad, que puede ser o no función del tiempo. Ejemplos: campo de temperaturas en una habitación, intensidad sonora en un teatro, campo eléctrico creado por una carga puntual.

1.1. Nociones básicas de análisis vectorial

Un vector $\vec{a}$ contiene información tanto de una dirección (y sentido) como de una magnitud. La magnitud de $\vec{a}$, también conocida como *módulo* de $\vec{a}$, es un escalar y se representa como $|\vec{a}|$ o simplemente a. La dirección (y sentido) de $\vec{a}$ puede describirse por medio del *vector unitario* (de magnitud unidad) a lo largo de $\vec{a}$, por medio de:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

de forma que $\vec{a}$ puede escribirse como:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{u}_a = a\vec{u}_a.$$

Un vector $\vec{a}$ en coordenadas cartesianas puede escribirse como

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z,$$

donde a_x, a_y, a_z representan las *componentes* del vector $\vec{a}$ en las direcciones x, y, z respectivamente; y $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_z$ constituyen los vectores unitarios en las direcciones x, y, z respectivamente. El módulo de $\vec{a}$ viene dado por :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

y el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$:

$$\vec{u}_a = \frac{a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

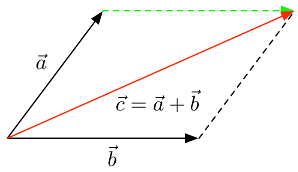
Para expresar la posición de un punto en un sistema de coordenadas de referencia se utiliza el *vector de posición*. En coordenadas cartesianas, un punto P genérico situado en las coordenadas (x, y, z) puede representarse mediante el vector de posición $\vec{r}$ definido desde el origen de coordenadas O al punto P como:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

1.1.1. Operaciones con vectores

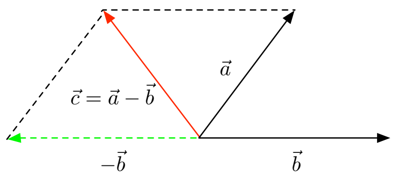
Dados los vectores $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ y $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$ definidos en el sistema de coordenadas cartesianas, se definen las siguientes operaciones:

→ **Suma y resta de vectores**. La suma de vectores $\vec{a}+\vec{b}$ da como resultado otro vector $\vec{c}$ tal que:



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{u}_x + (a_y + b_y)\vec{u}_y + (a_z + b_z)\vec{u}_z.$$

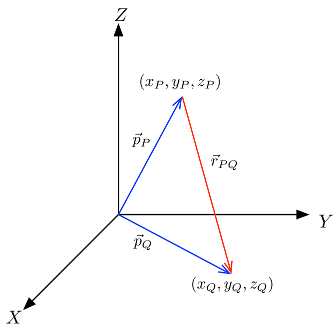
De la misma forma, la resta se lleva a cabo como:



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{u}_x + (a_y - b_y)\vec{u}_y + (a_z - b_z)\vec{u}_z.$$

Así, sean los puntos P y Q genéricos dados por (x_P, y_P, z_P) y (x_Q, y_Q, z_Q) respectivamente. Se define el vector distancia o el vector separación desde P a Q como:

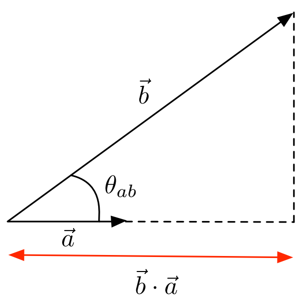
$$\vec{r}_{PQ} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q = (x_P - x_Q)\vec{u}_x + (y_P - y_Q)\vec{u}_y + (z_P - z_Q)\vec{u}_z.$$



→ **Producto escalar** entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, expresado como $\vec{a}\cdot\vec{b}$, se define como el producto de la magnitud de $\vec{a}$, la magnitud de $\vec{b}$ y el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_{ab} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

El producto escalar **da como resultado un número** y representa la proyección de un vector sobre el otro, esto es, la componente de un vector en una dirección dada. Ejemplo: $\vec{b}\cdot\vec{u}_x = b_x$.



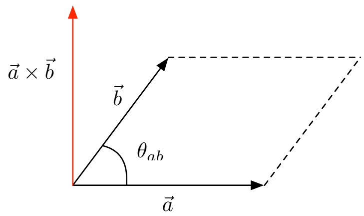
De esta forma, si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, entonces se cumple que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Propiedades del producto escalar:

- Conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- Distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

$\rightarrow$ **Producto vectorial** entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se expresa como $\vec{a} \times \vec{b}$ y **da como resultado otro vector** cuya magnitud es el área del paralelepípedo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, su dirección es perpendicular al plano que contiene $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el sentido coincide con el avance de un sacacorchos girado desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$, esto es:



$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta_{ab} \vec{u}_n,$$

donde $\vec{u}_n$ es un vector unitario perpendicular al plano que contiene $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

El producto vectorial puede calcularse en función de las componentes de cada vector a partir del determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{u}_x - (a_x b_z - b_x a_z)\vec{u}_y + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{u}_z$$

Propiedades del producto vetorial:

- Anticonmutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- Distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

1.2. Campos escalares y vectoriales

Se define **campo escalar** ψ como una función escalar que asocia cada punto (x, y, z) del espacio un escalar:

$$\boxed{\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}}$$

Ejemplos:

- $T(x, y, z) = xyz + k$, temperatura en el aula.
- $A(x, y)$: altitud geográfica.
- $\phi(x, y, z)$: potencial eléctrico.

Los campos escalares se representan por medio de superficies equiescalares tales que $\psi(x, y, z) = cte$. Ejemplos de tal representación son las isobaras (curvas de presión constante) o las curvas de nivel.

Se define **campo vectorial** $\vec{A}$ como una función vectorial que asocia cada punto (x, y, z) del espacio un vector:

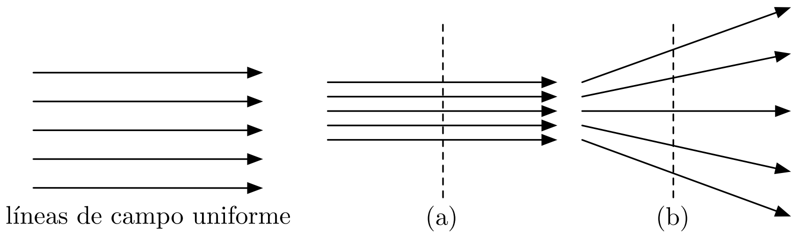
$$\boxed{\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3}$$

Ejemplos:

- $\vec{A}(x, y, z) = xy\vec{u}_x - y^2\vec{u}_y + xz\vec{u}_z$.
- Campo gravitatorio terrestre.
- Campos eléctrico y magnético.

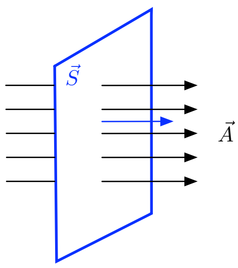
1.2.1. Líneas de campo

Los campos vectoriales se representan por medio de las *líneas de campo*, que son tangentes al campo vectorial en cada punto. Indican dirección, sentido e intensidad de un campo vectorial para lo cual se dibujan de forma que hay mayor densidad de líneas en las zonas en las que la intensidad de campo es mayor. La siguiente figura muestra dos ejemplos de líneas de campo. Las líneas de campo equiespaciadas, en la figura de la izquierda, representa un campo de intensidad uniforme en todos los puntos del espacio. Por el contrario, en la figura de la derecha se tiene un campo no uniforme. La densidad de líneas de campo indica que el campo en la sección (a) es de mayor intensidad que en la sección (b).



1.2.2. Flujo de un campo vectorial

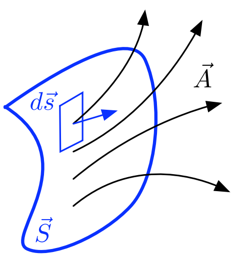
La ″fuerza´´ de un campo vectorial puede medirse mediante el flujo. El **flujo** ϕ de un campo vectorial $\vec{A}$ a través de una superficie[1] $\vec{S}$ se define como el número de líneas de campo que atraviesan S.



$$\phi = \vec{A} \cdot \vec{S}.$$

De la ecuación anterior (producto escalar) se desprende que el flujo es directamente proporcional a la magnitud de la superficie y campo considerados. Además, depende del la dirección de la superficie que corta las líneas de campo de tal forma que si ésta es perpendicular al campo el flujo es nulo (ninguna línea de campo corta a la superficie).

De forma general, si el campo $\vec{A}$ no es uniforme y S no es plana, la superficie se divide en elementos diferenciales ds en los que se asume que el campo es uniforme. En cada ds, se tiene una contribución de flujo dada por $d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{s}$. El flujo total no será más que la suma (integral) sobre todos los elementos diferenciales, resultando:



$$\boxed{\phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}$$

[1]Nótese que una superficie se representa vectorialmente de forma que $\vec{S} = S\vec{u}_n$, donde S es la magnitud de la superficie considerada y $\vec{u}_n$ es un vector perpendicular a la misma.

1.3. Ejemplos para practicar

1 Dados los vectores $\vec{A} = \vec{u}_x + 3\vec{u}_y$ y $\vec{B} = 5\vec{u}_x + 2\vec{u}_y - 6\vec{u}_z$, determine:

- **a** $|\vec{A} - \vec{B}|$. Sol.: $\sqrt{53} = 7.28$.
- **b** $5\vec{A} - \vec{B}$. Sol.: $(0, 13, 6)$.
- **c** La componente de $\vec{A}$ en la dirección $\vec{u}_y$. Sol.: 3.
- **d** Un vector unitario en la dirección $3\vec{A} + \vec{B}$. Sol.: $(0.54, 0.74, -0.40)$

2 Los puntos P y Q están localizados en las coordenadas $(0, 2, 4)$ y $(-3, 1, 5)$. Calcule:

- **a** El vector de posición de P. Sol.: $2\vec{u}_y + 4\vec{u}_z$
- **b** La distancia entre P y Q. Sol.: 3.317

3 Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + \vec{u}_z$ y $\vec{B} = 2\vec{u}_y - 5\vec{u}_z$, determine:

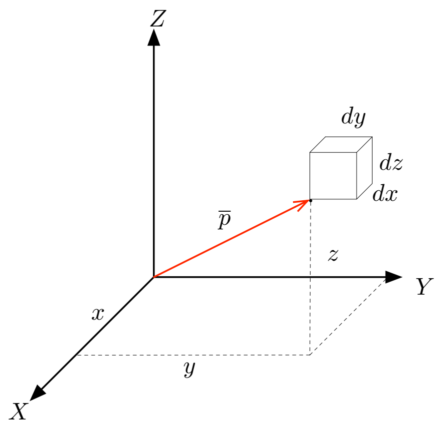
- **a** θ_{AB}. Sol.: 83.73°
- **b** $\vec{A} \times \vec{B}$. Sol.: $(-22, 15, 6)$

2. Sistemas de coordenadas

Dependiendo de la geometría del problema se utilizará uno de los siguientes sistemas de coordenadas:

- Coordenadas cartesianas: (x, y, z).
- Coordenadas cilíndricas: (ρ, ϕ, z).
- Coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ).

2.1. Coordenadas cartesianas



Un punto P genérico en coordenadas cartesianas se representa por la tripla (x, y, z), donde

$$-\infty < x, y, z < \infty.$$

Un vector $\vec{a}$ en coordenadas cartesianas puede escribirse como $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$.

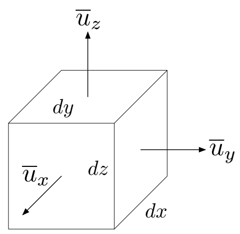
Los elementos diferenciales de línea, área y volumen son importantes en el cálculo vectorial. A partir de la figura anterior, se pueden obtener los siguientes resultados:

→ Diferencial de línea: evalúa movimientos diferenciales en cada una de las direcciones del espacio.

$$d\vec{l} = dx \cdot \overline{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z,$$

→ Diferencial de superficie: fruto de los desplazamientos infinitesimales, se generan distintas superficies diferenciales, que pueden caracterizarse como:

- $z =$ cte.: $d\vec{s} = dxdy \cdot \vec{u}_z$,
- $y =$ cte.: $d\vec{s} = dxdz \cdot \vec{u}_y$,
- $x =$ cte.: $d\vec{s} = dydz \cdot \vec{u}_x$.



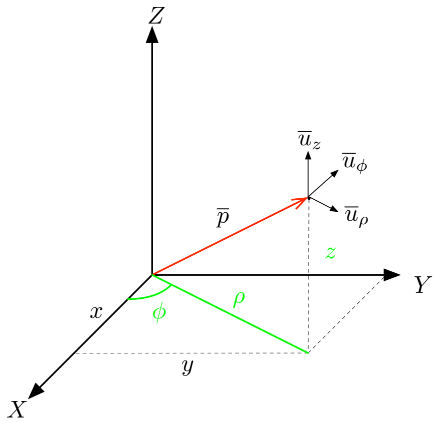
→ Diferencial de volumen: los movimientos infinitesimales definen un volumen infinitesimal

$$dv = dxdydz.$$

Nótese que un dv es un escalar, no tiene dirección y sentido asociado.

2.2. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas constituyen una versión en tres dimensiones de las coordenadas polares de la geometría plana.

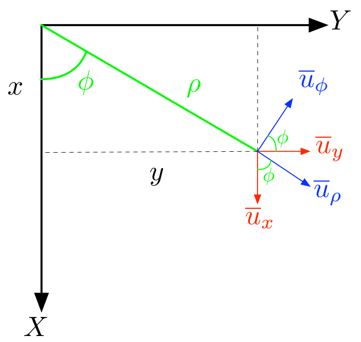


Un punto P genérico en coordenadas cilíndricas se representa por la tripla (ρ, ϕ, z), donde

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \quad & \rho \quad \leqslant \infty, \\ 0 \leqslant \quad & \phi \quad \leqslant 2\pi, \\ -\infty \leqslant \quad & z \quad \leqslant \infty. \end{aligned}$$

Un vector $\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas puede escribirse como $\vec{a} = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\phi \vec{u}_\phi + a_z \vec{u}_z$.

La relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas de un punto P puede obtenerse en el plano XY.



De la figura de la izquierda puede extraerse fácilmente que:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\phi, \\ y &= \rho \cdot \operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $z = z$ se llega a:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = \rho \cdot \cos\phi, \\ &y = \rho \cdot \operatorname{sen}\phi, \\ &z = z. \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\rho = x^2 + y^2, \\ &\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ &z = z. \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Diferencial de línea:

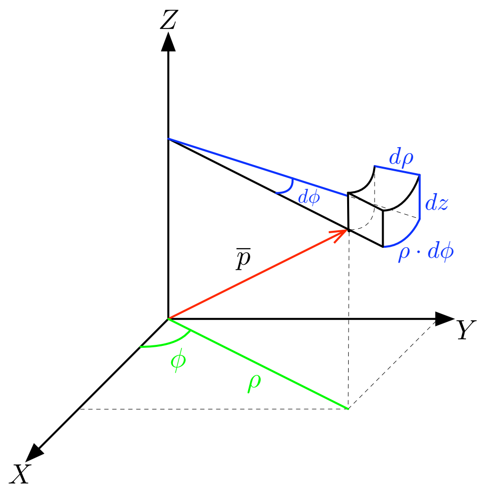
$$d\bar{l} = d\rho \cdot \overline{u}_\rho + \rho d\phi \cdot \overline{u}_\phi + dz \cdot \overline{u}_z.$$

$\rightarrow$ Diferencial de superficie:

- $\rho =$ cte.: $\quad d\bar{s} = \rho d\phi dz \cdot \overline{u}_\rho,$
- $\phi =$ cte.: $\quad d\bar{s} = d\rho dz \cdot \overline{u}_\phi,$
- $z =$ cte.: $\quad d\bar{s} = \rho d\rho d\phi \cdot \overline{u}_z.$

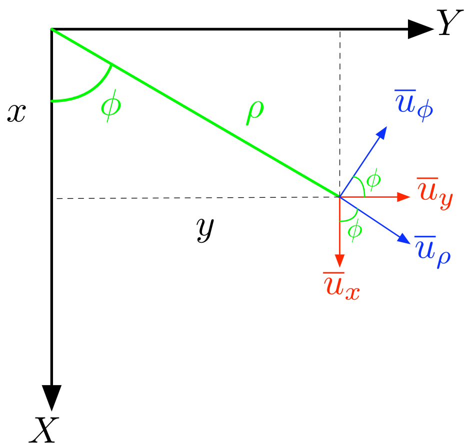
$\rightarrow$ Diferencial de volumen:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz.$$



2.2.1. Cambio de coordenadas cilíndricas-cartesianas

Para cambiar de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas, y viceversa, es necesario relacionar los vectores directores de cada sistema de coordenadas. A partir de la siguiente figura



se pueden obtener las siguientes relaciones:

CILÍNDRICAS-CARTESIANAS

$$\begin{aligned}
\overline{u}_\rho &= \cos\phi\cdot\overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_y\\
\overline{u}_\phi &= -\operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_x + \cos\phi\cdot\overline{u}_y\\
\overline{u}_z &= \overline{u}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= a_\rho\cdot\overline{u}_\rho + a_\phi\cdot\overline{u}_\phi + a_z\cdot\overline{u}_z\\
&= a_\rho\left(\cos\phi\cdot\overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_y\right) +\\
&\quad + a_\phi\left(-\operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_x + \cos\phi\cdot\overline{u}_y\right)\\
&\quad + a_z\cdot\overline{u}_z =\\
&= \underbrace{\left(a_\rho\cdot\cos\phi - a_\phi\cdot\operatorname{sen}\phi\right)}_{a_x}\cdot\overline{u}_x +\\
&\quad + \underbrace{\left(a_\rho\cdot\operatorname{sen}\phi + a_\phi\cdot\cos\phi\right)}_{a_y}\cdot\overline{u}_y +\\
&\quad + \underbrace{a_z}_{a_z}\cdot\overline{u}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0\\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_\rho\\ a_\phi\\ a_z\end{bmatrix}$$

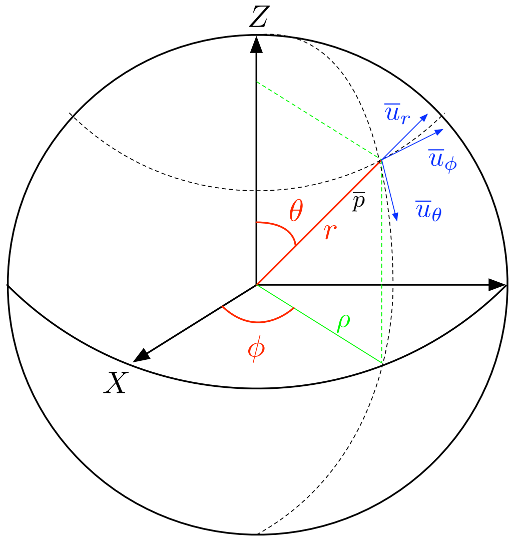
CARTESIANAS-CILÍNDRICAS

$$\begin{aligned}
\overline{u}_x &= \cos\phi\cdot\overline{u}_\rho - \operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_\phi\\
\overline{u}_y &= \operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_\rho + \cos\phi\cdot\overline{u}_\phi\\
\overline{u}_z &= \overline{u}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= a_x\cdot\overline{u}_x + a_y\cdot\overline{u}_y + a_z\cdot\overline{u}_z\\
&= a_x\left(\cos\phi\cdot\overline{u}_\rho - \operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_\phi\right) +\\
&\quad + a_y\left(\operatorname{sen}\phi\cdot\overline{u}_\rho + \cos\phi\cdot\overline{u}_\phi\right)\\
&\quad + a_z\cdot\overline{u}_z =\\
&= \underbrace{\left(a_x\cdot\cos\phi + a_y\cdot\operatorname{sen}\phi\right)}_{a_\rho}\cdot\overline{u}_\rho +\\
&\quad + \underbrace{\left(-a_x\cdot\operatorname{sen}\phi + a_y\cdot\cos\phi\right)}_{a_\phi}\cdot\overline{u}_\phi +\\
&\quad + \underbrace{a_z}_{a_z}\cdot\overline{u}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_\rho\\ a_\phi\\ a_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0\\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}$$

2.3. Coordenadas esféricas

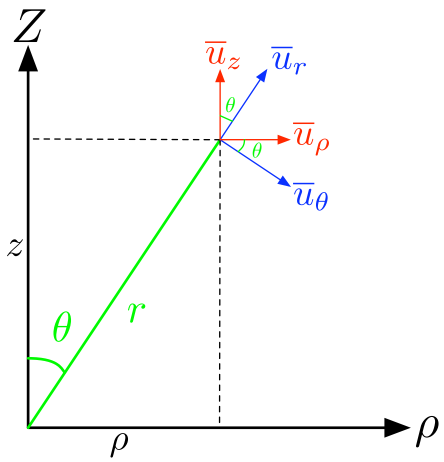


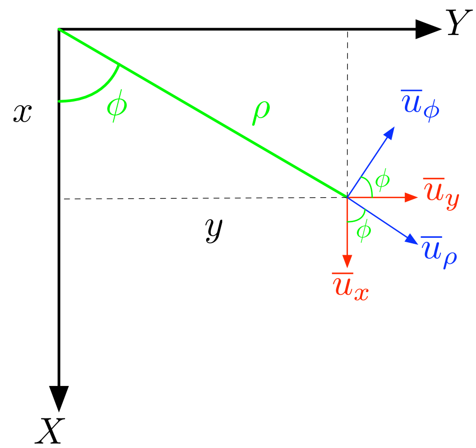
Un punto P genérico en coordenadas esféricas se representa por la tripla (r, θ, ϕ), donde

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & \quad r & \leqslant \infty, \\ 0 \leqslant & \quad \theta & \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant & \quad \phi & \leqslant 2\pi. \end{aligned}$$

Un vector $\vec{a}$ en coordenadas esféricas puede escribirse como $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_\phi \vec{u}_\phi$.

La relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas de un punto $\overline{p}$ se obtiene en los planos $Z\rho$ y XY:





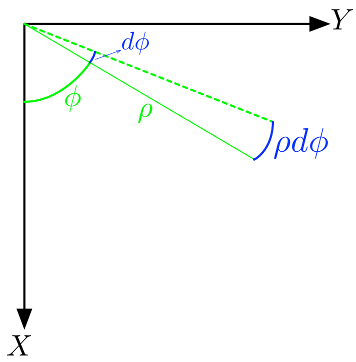
$$z = r\cos\theta, \qquad \rho = r \operatorname{sen}\theta.$$

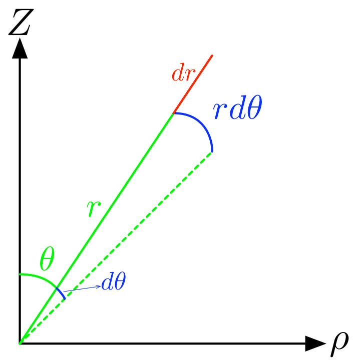
$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi.$$

Relacionando ambos resultados se llega a:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}}$$

Sean las figuras:





que representan una variación lineal infinitesinal en cada una de las direcciones del sistema de coordenadas esférico. Teniendo en cuenta que $\rho d\phi = r \operatorname{sen}\theta d\phi$ se cumplen las siguientes relaciones.

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = dr \cdot \overline{u}_r + rd\theta \cdot \overline{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \cdot \overline{u}_\phi.$$

→ Diferencial de superficie:

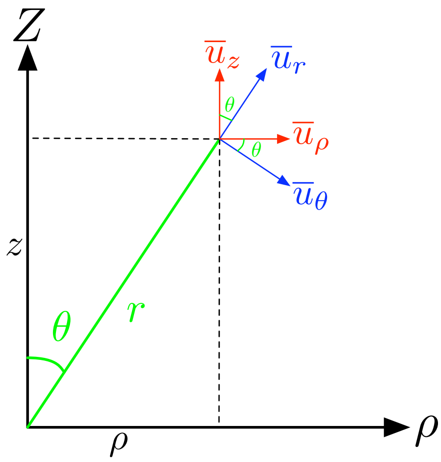
$$\begin{aligned} r = \text{cte.:} \quad & d\overline{s} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \cdot \overline{u}_r, \\ \theta = \text{cte.:} \quad & d\overline{s} = r \operatorname{sen}\theta dr d\phi \cdot \overline{u}_\theta, \\ \phi = \text{cte.:} \quad & d\overline{s} = r dr d\theta \cdot \overline{u}_\phi. \end{aligned}$$

→ Diferencial de volumen:

$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi.$$

2.3.1. Cambio de coordenadas esféricas-cilíndricas

La relación entre los vectores directores de los sistemas de coordenadas esférico y cilíndrico se puede obtener a partir de la siguiente figura



Esféricas a cilíndricas

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \cos\theta\cdot\overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_\rho\\
\overline{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_z + \cos\theta\cdot\overline{u}_\rho\\
\overline{u}_\phi &= \overline{u}_\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &= a_r\cdot\overline{u}_r + a_\theta\cdot\overline{u}_\theta + a_\phi\cdot\overline{u}_\phi =\\
&= a_r\left(\cos\theta\cdot\overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_\rho\right) +\\
&\quad + a_\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_z + \cos\theta\cdot\overline{u}_\rho\right)\\
&\quad + a_\phi\cdot\overline{u}_\phi =\\
&= \underbrace{\left(a_r\cdot\operatorname{sen}\theta + a_\theta\cdot\cos\theta\right)}_{a_\rho}\cdot\overline{u}_\rho +\\
&\quad + \underbrace{a_\phi}_{a_\phi}\cdot\overline{u}_\phi +\\
&\quad + \underbrace{\left(a_r\cdot\cos\theta - a_\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\right)}_{a_z}\cdot\overline{u}_z.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix}
$$

Cilíndricas a esféricas

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_\rho &= \cos\theta\cdot\overline{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_r\\
\overline{u}_z &= -\operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_\theta + \cos\theta\cdot\overline{u}_r\\
\overline{u}_\phi &= \overline{u}_\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &= a_\rho\cdot\overline{u}_\rho + a_\phi\cdot\overline{u}_\phi + a_z\cdot\overline{u}_z =\\
&= a_\rho\left(\cos\theta\cdot\overline{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_r\right) +\\
&\quad + a_\phi\cdot\overline{u}_\phi\\
&\quad + a_z\left(-\operatorname{sen}\theta\cdot\overline{u}_\theta + \cos\theta\cdot\overline{u}_r\right) =\\
&= \underbrace{\left(a_\rho\cdot\operatorname{sen}\theta + a_z\cdot\cos\theta\right)}_{a_r}\cdot\overline{u}_r +\\
&\quad + \underbrace{\left(a_\rho\cdot\cos\theta - a_z\cdot\operatorname{sen}\theta\right)}_{a_\theta}\cdot\overline{u}_\theta +\\
&\quad + \underbrace{a_\phi}_{a_\phi}\cdot\overline{u}_\phi
\end{aligned}
$$

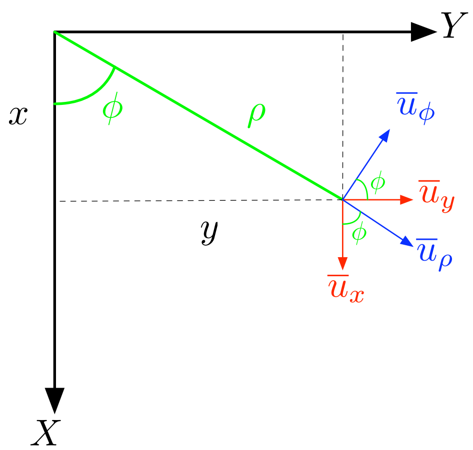
$$
\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix}
$$

2.3.2. Cambio de coordenadas esféricas-cartesianas

Para relacionar los vectores directores de los sistemas de coordenadas esférico y cartesiano se hace necesario el paso intermedio que relaciona los sistemas de coordenadas esférico y cilíndrico.

ESFÉRICAS A CARTESIANAS

Obteniéndose de la siguiente figura



que:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_\rho &= \cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y \\
\overline{u}_\phi &= -\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y \\
\overline{u}_z &= \overline{u}_z
\end{aligned}$$

y sabiendo que:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \cos\theta \cdot \overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_\rho \\
\overline{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z + \cos\theta \cdot \overline{u}_\rho \\
\overline{u}_\phi &= \overline{u}_\phi
\end{aligned}$$

tal y como se demostró en la sección 2.3.1, entonces, sustituyendo el primer sistema de ecuaciones en el segundo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \cos\theta \cdot \overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta \cdot (\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y) \\
\overline{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z + \cos\theta \cdot (\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y) \\
\overline{u}_\phi &= (-\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y)
\end{aligned}$$

y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \operatorname{sen}\theta\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y + \cos\theta \cdot \overline{u}_z \\
\overline{u}_\theta &= \cos\theta\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y - \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z \\
\overline{u}_\phi &= -\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y
\end{aligned}$$

Definiendo $\overline{a} = a_r \cdot \overline{u}_r + a_\theta \cdot \overline{u}_\theta + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\overline{a} = {} & a_r \cdot \overline{u}_r + a_\theta \cdot \overline{u}_\theta + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi = \\
& = a_r \left(\operatorname{sen}\theta \cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y + \cos\theta \cdot \overline{u}_z \right) + \\
& \quad + a_\theta \left(\cos\theta \cos\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y - \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z \right) + \\
& \quad + a_\phi \left(-\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y \right) = \\
& = \underbrace{\left(a_r \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\phi + a_\theta \cdot \cos\theta \cos\phi - a_\phi \cdot \operatorname{sen}\phi \right)}_{a_x} \cdot \overline{u}_x + \\
& \quad + \underbrace{\left(a_r \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + a_\theta \cdot \cos\theta \operatorname{sen}\phi + a_\phi \cdot \cos\phi \right)}_{a_y} \cdot \overline{u}_y + \\
& \quad + \underbrace{\left(a_r \cdot \cos\theta - a_\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \right)}_{a_z} \cdot \overline{u}_z +
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \cos\phi & \cos\theta \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix}}
$$

CARTESIANAS-ESFÉRICAS

Siguiendo un procedimiento análogo al presentado anteriormente y partiendo de

$$
\overline{a} = a_x \cdot \overline{u}_x + a_y \cdot \overline{u}_y + a_z \cdot \overline{u}_z,
$$

se llega a:

$$
\boxed{\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \cos\phi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}}
$$

2.4. Ejemplos para practicar

1 Dado el punto $P(-2, 6, 3)$ y el vector $\vec{A} = y\vec{u}_x + (x + z)\vec{u}_y$:

- **a** Exprese el punto P en coordenadas cilíndricas y esféricas. Sol.: $P(-2, 6, 3) = P(6.32, 108.43°, 3) = P(7, 64.62°, 108.43°)$
- **b** Evalúe $\vec{A}$ en P en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Sol.: $\vec{A} = 6\vec{u}_x + \vec{u}_y = -0.9487\vec{u}_\rho, -6.008\vec{u}_\phi = -0.8571\vec{u}_r - 0.4066\vec{u}_\phi - 6.008\vec{u}_\theta$.

3. Cálculo integral

La teoría electromagnética requiere el uso de cálculo integral sobre campos escalares y vectoriales. En esta sección se presentan resumidamente los tipos de integrales más utilizadas en temas posteriores de la asignatura.

3.1. Integral de línea

Se entiende por *línea* un camino a lo lardo de una curva en el espacio. Se utilizarán indistintamente los términos línea, curva y contorno para referirnos a esta situación. Sea un campo vectorial $\vec{A}$ y una curva L. Se define la integral de línea como la integral de la componente tangencial de $\vec{A}$ a lo largo de L:

$$\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_L A \cos \alpha dl,$$

donde α es el ángulo que forma $\vec{A}$ con el elemento $d\vec{l}$.

Cuando el camino de integración es cerrado la integral de línea se denomina **circulación** y se denota por

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

Nótese que en los cálculos anteriores, el término $d\vec{l}$ siempre se toma positivo de forma que el sentido de integración se introduce en los límites de la integral.

3.2. Integral de superficie

Sea un campo vectorial $\vec{A}$ y una superficie S. Se define la integral de superficie o flujo de $\vec{A}$ a través de S como

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{u}_n dS = \int_S A \cos \alpha dS,$$

donde $\vec{u}_n$ es el vector normal a S y α es el ángulo que forma $\vec{A}$ con $d\vec{S}$. Nótese que una superficie S está definida por un contorno cerrado L. Por convenio, dicha superficie se puede representar por un vector $\vec{S}$ de magnitud igual al área de la superficie, de dirección perpendicular al plano que la contiene y de sentido el dado por la regla del sacacorchos (regla de la mano derecha), cuando se recorre el contorno de acuerdo a la orientación elegida.

Cuando la superficie es cerrada (define un volumen), la ecuación anterior se expresa

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

y se corresponde con el *flujo neto* de $\vec{A}$ a través de S.

3.3. Integral de volumen

Sea un campo escalar ψ y un volumen V. Se define la integral de volumen ψ sobre el volumen V como

$$\int_V \psi dv.$$

4. Operadores espaciales

Las operaciones espaciales se describen utilizando el operador diferencial nabla (∇). En coordenadas cartesianas se expresa como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overline{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\overline{u}_z,$$

Este operador no es un vector en sí mismo, pero cuando se aplica sobre campos escalares se obtiene como resultado un vector. El operador nabla se utiliza para definir las siguientes operaciones:

- **Gradiente** de un campo escalar ψ, expresado como $\nabla\psi$, se obtiene como resultado un vector.

$$\boxed{\nabla\psi \rightarrow \text{VECTOR}}$$

- **Divergencia** de un campo vectorial $\vec{A}$, expresado como $\nabla \cdot \vec{A}$, se obtiene como resultado un escalar.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} \rightarrow \text{ESCALAR}}$$

- **Rotacional** de un campo vectorial $\vec{A}$, expresado como $\nabla \times \vec{A}$, se obtiene como resultado un vector.

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} \rightarrow \text{VECTOR}}$$

- **Laplaciano** de un campo escalar ψ, expresado como $\nabla^2\psi = \nabla \cdot \nabla\psi$, se obtiene como resultado un escalar.

En coordenadas cilíndricas, el operador nabla se define como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\overline{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\overline{u}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\overline{u}_z$$

y en coordenadas esféricas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\overline{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overline{u}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\overline{u}_\phi$$

4.1. Gradiente

El gradiente de un campo escalar ψ, expresado como $\nabla\psi$ es un vector tal que:

- El módulo representa la máxima tasa de variación de ψ por unidad de distancia: $\frac{d\psi}{dn}$.
- La dirección se corresponde con la de máxima tasa de cambio de ψ y es perpendicular a las superficies escalares constantes: $\vec{u}_n$.

A partir del gradiente, se puede obtener la tasa de variación de ψ en una dirección cualquiera $d\vec{l}$, como

$$\boxed{d\psi = \nabla\psi \cdot d\vec{l}}$$

El gradiente de ψ en coordenadas cartesianas se expresa

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{u}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\overline{u}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\overline{u}_z,$$

en coordenadas cilíndricas

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial \rho}\overline{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial \phi}\overline{u}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\overline{u}_z,$$

y en coordenadas esféricas

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\overline{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial \theta}\overline{u}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial \phi}\overline{u}_\phi.$$

4.2. Divergencia

La divergencia de un campo vectorial $\vec{A}$ en un punto P se define como el flujo neto de salida de $\vec{A}$ por unidad de volumen, es decir, a medida que el volumen se hace infinitesimal alrededor de P:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v},$$

donde Δv es el volumen que encierra la superficie S en la que P está localizado.

Físicamente, la divergencia es una medida de la ganancia o pérdida de un campo al atravesar un volumen:

- Si la divergencia de un campo es positiva en un punto P, se dice que dicho punto es una **fuente** del que emanan las líneas del campo (flujo neto positivo).
- Si la divergencia de un campo es negativa en un punto P, se dice que dicho punto es un **sumidero** en el que convergen las líneas del campo (flujo neto negativo).

Se define la divergencia de $\vec{A}$ en coordenadas cartesianas como

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

en coordenadas cilíndricas como

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho \cdot A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

y en coordenadas esféricas como

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.$$

4.2.1. Teorema de la divergencia

El Teorema de la divergencia establece que el flujo total de salida de un campo vectorial $\vec{A}$ a través de una superficie cerrada S es el mismo que la integral de volumen de la divergencia de dicho campo, esto es

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_v (\nabla \cdot \vec{A})\, dv.$$

4.3. Rotacional

El rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$ se define como el vector cuya magnitud se corresponde con la máxima circulación de $\vec{A}$ por unidad de área y cuya dirección es perpendicular a la superficie considerada con el sentido dado por la regla del sacacorchos. Matemáticamente:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \right) \vec{u}_n,$$

donde el area ΔS está limitada por la curva L y $\vec{u}_n$ es el vector unitario perpendicular a ΔS con el sentido dado por la regla del sacacorchos.

Físicamente, el rotacional muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotaciones alrededor de un punto (cómo circula alrededor de P). Propiedades del rotacional:

- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.
- $\nabla \times \nabla \psi = 0$.

Se define el rotacional de $\vec{A}$ en coordenadas cartesianas como:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

en coordenadas cilíndricas como:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho\overline{u}_\phi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix},$$

y en coordenadas esféricas:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r \operatorname{sen}\theta \overline{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \operatorname{sen}\theta A_\phi \end{vmatrix},$$

4.3.1. Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes establece que la circulación de un campo vectorial $\vec{A}$ alrededor de un camino cerrado L es igual a la integral de superficie del rotacional de $\vec{A}$ sobre la superficie (abierta) limitada por el camino L. Matemáticamente

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}.$$

Nótese que las direcciones $d\vec{l}$ y $d\vec{S}$ han de cumplir la regla del sacacorchos.

4.4. Laplaciano

Por razones prácticas conviene introducir el operador laplaciano que se constituye al aplicar los operadores gradiente y divergencia conjuntamente.

- El Laplaciano campo escalar ψ, representado como $\nabla^2\psi$, se obtiene como la divergencia del gradiente de ψ:
$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \nabla\psi.$$
- El Laplaciano campo vectorial $\vec{A}$, representado como $\nabla^2\vec{A}$, se define matemáticamente como:
$$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}.$$

4.5. Clasificación de los campos vectoriales

Un campo vectorial está caracterizado de forma única por su divergencia y rotacional. A partir de éstos se puede establecer la siguiente clasificación:

- Un campo vectorial $\vec{A}$ se dice **solenoidal** si $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.
- Un campo vectorial $\vec{A}$ se dice **irrotacional** si $\nabla \times \vec{A} = 0$.