Tema III. Series de números reales.

Índice general

Capítulo 1

Tema III. Series de números reales.

Este tema está dedicado al estudio de las series. La idea de fondo es analizar si es posible sumar una cantidad infinita de números. Definiremos las nociones de serie convergente, divergente y oscilante, estableciendo en primer lugar las condiciones para la convergencia de una serie de números reales. De las distintas operaciones que es posible efectuar con series de números reales, estudiaremos la suma y el producto por un escalar. Prestaremos especial atención a una clase particular de series de números reales, la series de términos positivos, para las cuales enunciaremos algunos criterios de convergencia, exclusivos de este tipo de series de números reales. Con el objetivo de estudiar las series que no sean de términos positivos, introduciremos dos nuevas clases de series, las series absolutamente convergentes y las series alternadas. Hasta este momento el problema considerado será determinar el carácter de la serie (convergente, divergente, etc.). Un problema distinto es, en el caso de que la serie sea convergente, determinar el valor de la suma de la serie, que sólo trataremos en casos muy particulares.

1. Definición de serie.

Comenzaremos la sección introduciendo el concepto de serie de números reales, para lo cual, será necesario que establezcamos una serie de conceptos previos tales como la sucesión de sumas parciales asociada a una sucesión.

1.1. Suma parcial de una sucesión.

Definición 1.1. ***Suma parcial***. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, definimos la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de la siguiente forma:*

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1}$$

Ejemplo 1.1. *Consideremos una progresión geométrica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde:*

$$a_{n+1} = a_n r \quad (r \neq 1). \tag{2}$$

La sucesión de sumas parciales asociada $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{3}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^n, \\ rS_n &= a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

y si restamos las expresiones anteriores:

$$(1 - r)S_n = a_1 - a_1 r^{n+1}. \tag{5}$$

Por lo tanto, $S_n = \dfrac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r}$, *si* $r \neq 1$.

Observación 1.1. *Acabamos de obtener la expresión para la sucesión de sumas parciales de una progresión geométrica. En general esto no será siempre posible. Por ejemplo, no es fácil encontrar una expresión para la sucesión de sumas parciales asociada a la sucesión* $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sin embargo, dada una sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, siempre es posible encontrar la sucesión asociada* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, ya que:*

$$x_n = S_n - S_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Ejemplo 1.2. *Supongamos que la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *asociada a una cierta sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene como término general:*

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^n} \tag{7}$$

Se tiene entonces que

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2 - \frac{1}{2^n} - 2 + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \tag{8}$$

esto es, la sucesión de sumas parciales asociada a la sucesión de término general $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ *es* $S_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

1.2. El concepto de serie de números reales.

Definición 1.2. ***Serie de números reales***. *Dada una sucesión de números reales* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, definimos la serie asociada, que denotaremos por* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$*, como el límite de la sucesión de sumas parciales:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{9}$$

En el caso de que exista el límite anterior, lo llamaremos ***suma de la serie.***

Ejemplo 1.3. *La serie asociada a una progresión geométrica* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, con* $a_n = a_1 r^n$ $(r \neq 1)$*, es:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r} & |r| < 1, \\ +\infty & r \geq 1, \\ \nexists, & r \leq -1. \end{cases} \tag{10}$$

Observación 1.2. *Hemos obtenido la expresión para la suma de una serie geométrica. No siempre será posible obtener una expresión para la suma de una serie. De cara al análisis de la convergencia de una serie, debemos tener recursos que no requieran la obtención de la sucesión de sumas parciales.*

1.3. Álgebra de series.

Definición 1.3. ***Operaciones con series de números reales.*** *Supongamos que tenemos dos series de números reales* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k$*. Definimos:*

- *Suma:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + y_k$,
- *Resta:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - y_k$,

- *Multiplicación por un escalar:* $\lambda \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k$.

2. Tipos especiales de series.

En esta subsección describiremos los tipos de series más importantes que nos podemos encontrar en los ejercicios.

2.1. Series de términos positivos. Las series de términos positivos, como su propio nombre indica, son de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \tag{11}$$

con $x_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Las series de términos positivos tienen una característica muy especial, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Ejemplo 1.4. *Son ejemplos de esta clase de series los siguientes:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$.
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^n}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(3-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$.

Observación 1.3. *La convergencia de esta clase de series se estudiará mediante una serie de criterios que nos ayudarán a estudiar la acotación superior de la sucesión de sumas parciales.*

2.2. Series alternadas. Son series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos (por eso se llaman alternadas). Tienen la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k, \tag{13}$$

donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos ($a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Ejemplo 1.5. *Son ejemplos de series alternadas las siguientes:*

- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$,
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$,
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^3+1}$.

Observación 1.4. *Existe un criterio para estudiar la convergencia de esta clase de series en función de la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3. Series armónicas. Son series de números reales que tienen la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \tag{14}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.6. *Son ejemplos de series armónicas las siguientes:*

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *($\alpha = 1$).*
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *($\alpha = 2$).*
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-2}}$ *($\alpha = -2$).*

Observación 1.5. *La convergencia de esta clase de series depende del parámetro α.*

2.4. Series geométricas. Son series en las cuales cada uno de los términos se obtiene multiplicando el anterior por una constante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k, \tag{15}$$

donde $r \in \mathbb{R}$ se le llama razón de la serie geométrica. Son un tipo muy especial de series para las cuales es posible obtener una expresión para el término general de la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{a_1(1 - r^{n+1})}{1 - r}, \quad r \neq 1. \tag{16}$$

Ejemplo 1.7. *Son ejemplos de esta clase de series los siguientes:*

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$*, es una serie geométrica en la cual el primer término es $a_1 = 1$ y la razón es $r = \frac{1}{2}$.*
- $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$*, es una serie geométrica en la cual el primer término es $a_1 = 1$ y la razón es $r = 2$.*
- $\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{1}{4^k}$*, es una serie geométrica en la cual el primer término es $a_1 = \frac{1}{2}$ y la razón es $r = \frac{1}{4}$.*

Observación 1.6. *La convergencia de esta clase de series quedará determinada en función de la razón r.*

3. Convergencia de series.

En esta subsección definiremos el concepto de convergencia para una serie de números reales.

3.1. Series convergentes, divergentes y oscilantes. Supongamos que tenemos una serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, hemos visto que, por definición, una serie no es más que el límite de la sucesión de sumas parciales:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n, \tag{17}$$

por lo tanto, tienen sentido las siguientes definiciones.

Definición 1.4. ***Serie convergente.*** *Diremos que una serie es convergente, cuando la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sea convergente.*

Definición 1.5. ***Serie divergente.*** *Diremos que una serie es divergente, cuando la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sea divergente.*

Definición 1.6. ***Serie oscilante.*** *Diremos que una serie es oscilante, cuando la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sea oscilante.*

Observación 1.7. *El estudio de la convergencia de una serie no es inmediato y, en ocasiones, es necesario emplear criterios sofisticados.*

Ejemplo 1.8. *Una serie cuya convergencia se puede estudiar de una forma relativamente simple, es la serie geométrica:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k, \tag{18}$$

ya que podemos obtener una expresión para el término general de la sucesión de sumas parciales:

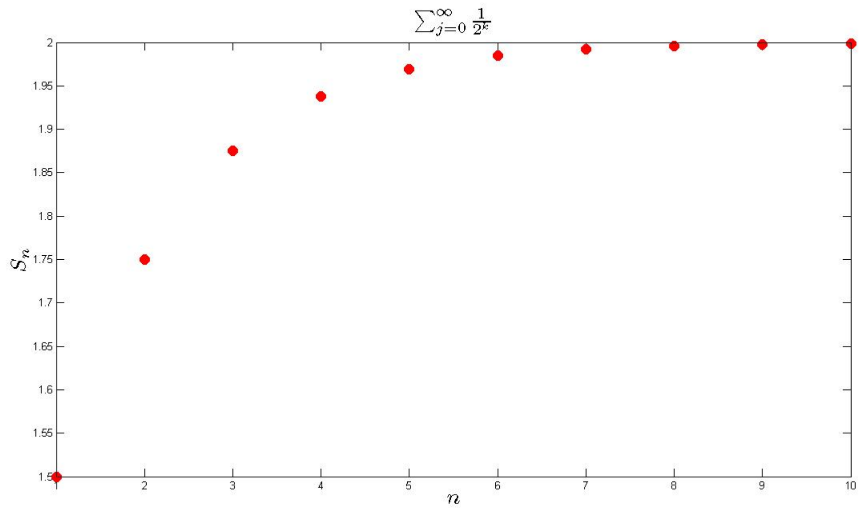
$$S_n = a_1\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = a_1\frac{1}{1-r} - a_1\frac{r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1. \tag{19}$$

En función de la razón r, sabemos que:

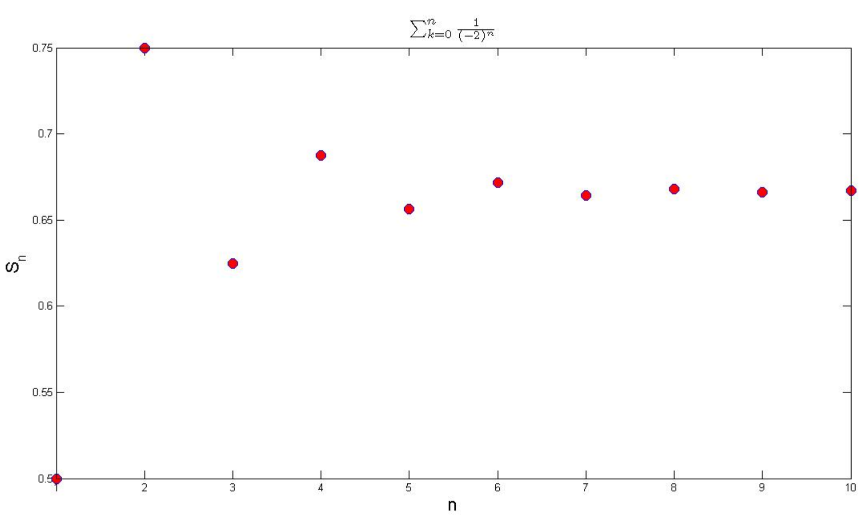
- $|r| < 1$*, la serie es convergente.*
- $r > 1$*, la serie es divergente.*
- $r \leq -1$*, la serie es oscilante.*

Ejemplo 1.9. *Consideremos los siguientes ejemplos de series geométricas:*

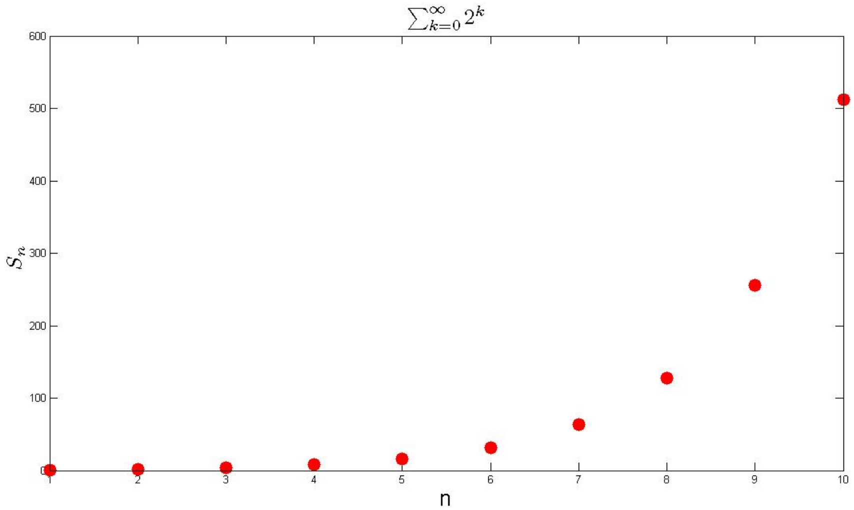
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ *es convergente, la evolución de la sucesión de sumas parciales es la siguiente:*



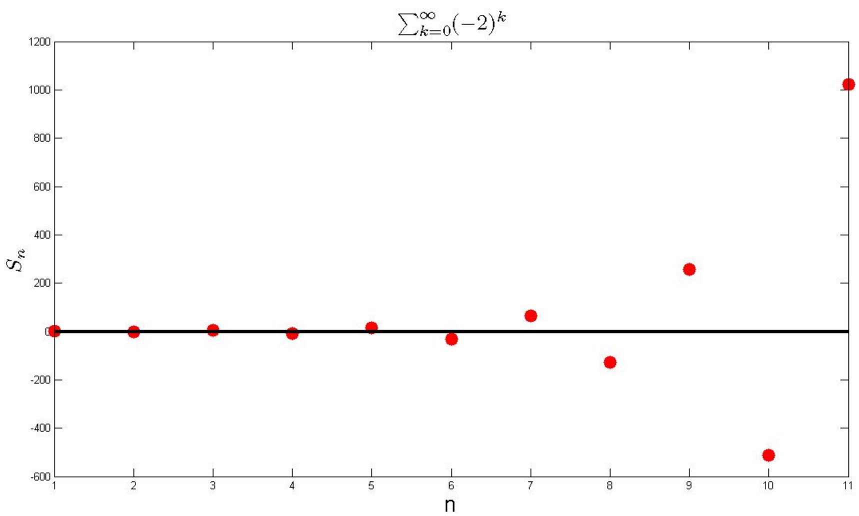
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ *es convergente, la evolución de la sucesión de sumas parciales es la siguiente:*



- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ *es divergente, la evolución de la sucesión de sumas parciales es la siguiente:*



- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k$ *es oscilante, la evolución de la sucesión de sumas parciales es la siguiente:*



3.2. Series absoluta y condicionalmente convergentes.

Definición 1.7. ***Serie absolutamente convergente.*** *Una serie de números reales* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es absolutamente convergente cuando la serie formada por los valores absolutos sea convergente:*

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ es absolutamente convergente}\right] \Leftrightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \text{ es convergente}\right]. \tag{20}$$

Definición 1.8. ***Serie condicionalmente convergente.*** *Una serie de números reales* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es condicionalmente convergente cuando es convergente pero no absolutamente convergente.*

Ejemplo 1.10. *Consideremos los siguientes ejemplos:*

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ *es absolutamente convergente.*
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *es condicionalmente convergente (lo veremos más adelante).*

3.3. Propiedades de las series convergentes. Una de las propiedades más importantes de las series convergentes que nos ayudará a determinar si una serie es convergente es la siguiente:

Proposición 1.1. *(**Condición necesaria para la convergencia de una serie.**) Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to 0$.*

Ejemplo 1.11. *La serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5k^2+300k}, \tag{21}$$

es divergente, ya que $\frac{k^2}{5k^2+300k} \to \frac{1}{5} \neq 0$.

Otra propiedad importante que nos ayudará a determinar si una serie de términos no positivos es convergente es la siguiente:

Proposición 1.2. *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

Ejemplo 1.12. *La serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \tag{22}$$

es convergente, ya que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2^k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tag{23}$$

es convergente por tratarse de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2} < 1$.

3.4. Álgebra de series convergentes.

Proposición 1.3.

- *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, *dos series convergentes. Entonces, dados dos números reales* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *la serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k + \beta y_k, \tag{24}$$

es convergente.

- *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *dos series tales que* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es convergente y* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *es divergente. Entonces la serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k + y_k, \tag{25}$$

es divergente.

Ejemplo 1.13. *La serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+1}{2^k} \tag{26}$$

es divergente, ya que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+1}{2^k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k}_{divergente} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}}_{convergente}, \tag{27}$$

además, el término general de la serie no tiende a cero

4. Criterios de convergencia para series.

En esta subsección veremos como analizar la convergencia de los tipos más importantes de series que hemos descrito en una subsección anterior.

4.1. Criterios de convergencia para series alternadas.

Proposición 1.4. ***Criterio de Leibniz para series alternadas***. *Si los términos de una serie alternada* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *verifican las condiciones:*

- $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(monótona decreciente),*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *es convergente.*

Ejemplo 1.14.

- *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ *es convergente, ya que:*
  - $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{2k^2-1}$ *es convergente, ya que:*
  - $\frac{n+1}{2(n+1)^2-1} \leq \frac{n}{2n^2-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2-1} = 0$.

4.2. Criterios de convergencia para series armónicas.

Proposición 1.5. *Consideremos la serie armónica:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}. \tag{28}$$

Entonces:

- *Si* $\alpha \leq 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ *es divergente.*
- *Si* $\alpha > 1$*, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ *es convergente.*

Ejemplo 1.15. *Veamos a continuación algunos ejemplos:*

- *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *es divergente, ya que es armónica de parámetro* $\alpha = 1$.
- *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *es convergente, ya que es armónica de parámetro* $\alpha = 2 > 1$.

4.3. Criterio de convergencia para series geométricas. Recordemos que una serie geométrica es aquella para la cual cada uno de los términos se puede obtener a partir del anterior multiplicando por la razón:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k. \tag{29}$$

Para esta clase de series, ya hemos obtenido una expresión para el término general de la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = a_1 \frac{1}{1 - r} - a_1 \frac{r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1. \tag{30}$$

En función de la razón r, sabemos que:

- $|r| < 1$, la serie es convergente.
- $r \geq 1$, la serie es divergente.
- $r \leq -1$, la serie es oscilante.

Ejemplo 1.16. *Veamos algunos ejemplos:*

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *es convergente (*$r = \frac{1}{2} < 1$*),*
- $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ *es divergente (*$r = 2 > 1$*).*
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k$ *es oscilante (*$r = -2 \leq -1$*).*

4.4. Criterios de convergencia para series de términos positivos. Por sí mismas, las series con términos positivos se encuentran con frecuencia en aplicaciones. Además, su estudio preliminar facilita el estudio de las series con términos de cualquier signo (una serie absolutamente convergente, es convergente).

Proposición 1.6. ***Criterio de comparación para series de términos positivos.*** *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *dos series con términos positivos. Se tiene que:*

- *Si* $p_k \leq p'_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *entonces, la convergencia de* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *implica la de* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.
- *Si* $p_k \leq p'_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *entonces, la divergencia de* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *implica la de* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.
- *Si existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L < \infty$, *entonces, la convergencia de* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *implica la de* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.
- *Si existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L < \infty$, *entonces, la divergencia de* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *implica la de* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.
- *Si* $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *entonces, la convergencia de* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *implica la de* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.
- *Si* $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *entonces, la divergencia de* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *implica la de* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Ejemplo 1.17.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - \text{sen}(n))^{-1}$. *Puesto que* $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, *es evidente que:*

(31)
$$3^n - 1 \leq 3^n - \text{sen}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto:

(32)
$$0 < \frac{1}{3^n - \text{sen}(n)} < \frac{1}{3^n - 1}.$$

Ahora bien, se puede comprobar empleando inducción que $3^n - 1 > 3^{n-1}$. *Con lo cual:*

(33)
$$\frac{1}{3^n - 1} < \frac{1}{3^{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{3^n - \text{sen}(n)} < \frac{1}{3^{n-1}}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ *es una serie geométrica de razón* $\frac{1}{3}$, *por lo tanto es convergente. Empleando los criterios de comparación, se sigue el resultado.*

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos(n)}{n}$. *Puesto que* $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, *resulta:*

(34)
$$\frac{2 + \cos(n)}{n} > \frac{2 - 1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Ahora bien, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente y, entonces, empleando los criterios de comparación se sigue que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos(n)}{n}$ *es divergente.*

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. *Para cualquier número natural $n > 2$ se tiene que $n^n > n^2$, por lo tanto $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$, de donde se deduce, comparando con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la convergencia de la serie.*

Proposición 1.7. ***Criterio del cociente o de D'Alembert.*** *Sea $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie de términos positivos. Si existe el siguiente límite*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda, \tag{35}$$

entonces:

- *Si $\lambda < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente.*
- *Si $\lambda > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es divergente.*
- *Si $\lambda = 1$, el criterio no permite llegar a ninguna conclusión.*

Ejemplo 1.18.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$. *Apliquemos el criterio del cociente:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\frac{[n!]^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^2} = 0 < 1. \tag{36}$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{4^n}$. *Apliquemos el criterio del cociente:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{4^{n+1}} \frac{4^n}{(n+1)! - n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,[(n+2)-1]}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n!\,[n+1-1]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n} = \infty > 1. \end{aligned} \tag{37}$$

Por lo tanto, la serie es divergente.

Proposición 1.8. ***Criterio de la raíz o de Cauchy.*** *Sea $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie de términos positivos. Si existe el siguiente límite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = \lambda, \tag{38}$$

entonces:

- *Si $\lambda < 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es convergente.*
- *Si $\lambda > 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es divergente.*

- *Si* $\lambda = 1$, *el criterio no permite llegar a ninguna conclusión.*

Ejemplo 1.19.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^n}$. *Empleemos el criterio de la raíz:*

(39)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0 < 1.$$

Observamos que el límite es menor que 1, *por lo tanto, la serie es convergente.*

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$. *Apliquemos el criterio de la raíz:*

(40)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

En vista del resultado, la serie es convergente.

Proposición 1.9. ***Criterio de Raabe.*** *Sea* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *una serie de términos positivos. Si existe el siguiente límite*

(41)
$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{x_{k+1}}{x_k}\right) = \lambda,$$

entonces:

- *Si* $\lambda > 1$, *la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es convergente.*
- *Si* $\lambda < 1$, *la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es divergente.*
- *Si* $\lambda = 1$, *el criterio no permite llegar a ninguna conclusión.*

Observación 1.8. *A este criterio se recurre, principalmente cuando no decide el criterio del cociente.*

Ejemplo 1.20.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$. *Apliquemos el criterio de Raabe:*

(42)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n^2-n}{(n+1)^2-(n+1)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n^2-n}{n^2+n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n}{n^2+n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2 > 1.\end{aligned}$$

En consecuencia, la serie es convergente.

Ejemplo 1.21. *Estudiemos, la convergencia de la siguiente serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{43}$$

Si analizamos la convergencia empleando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1, \tag{44}$$

el criterio no decide. Aplicamos el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = 2 > 1. \tag{45}$$

Se tiene entonces que la serie es convergente.

Ejercicio 1.1. *Estudia la naturaleza de las siguientes series alternadas.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^3+n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\log(n!)}$.

Ejercicio 1.2. *Estudia la naturaleza de las siguientes series armónicas.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^{-3}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^{-7}}$.

Ejercicio 1.3. *Estudia la naturaleza de las siguientes series geométricas.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{3}\right)^{-n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Ejercicio 1.4. *(Convergencia de series empleando los criterios de comparación) Estudia la naturaleza de las siguientes series aplicando el criterio de comparación:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \log(n) + 5^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^3 + 2n + 2)^{-\frac{1}{2}}$.

Ejercicio 1.5. *(Convergencia de series empleando el criterio del cociente) Estudia la naturaleza de las siguientes series aplicando el criterio del cociente:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{4^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n) + 1}{\sqrt{n} + \log(n) + 2} x^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$, $(x > 0)$.

Ejercicio 1.6. *(Convergencia de series empleando el criterio de la raíz) Estudia la naturaleza de las siguientes series aplicando el criterio de la raíz:*

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} + \frac{2n}{n-1} \right]^{-n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{2n}$ $(x > 0)$.

Ejercicio 1.7. *(Convergencia de series empleando el criterio de Raabe) Estudia la naturaleza de las siguientes series aplicando el criterio de Raabe:*

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-H_n}$, *donde* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$, $(x > 0)$.

Ejercicio 1.8. *(Convergencia absoluta) Estudia la convergencia y convergencia absoluta de las siguientes series alternadas:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2n-1}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!}$.

Ejercicio 1.9. *Estudia, según los valores del parámero real x el carácter de las siguientes series de números reales:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n+2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} x^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$, $x \neq -1/2$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n(1+4x^2)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x-2)^n}$, $x \neq 2$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^3-4}{4}\right)^n \frac{2}{n(n+1)}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n(n+1)}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+1}(x+1)^n$.

Ejercicio 1.10. *Estudia el carácter de la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n+1}{3^n}\right) x^n$$

según los valores del parámero real positivo x. Calcula la suma de la serie para $x = 1/4$.