Tema IV. Límites y continuidad de funciones de una variable.

Índice general

Capítulo 1

Límites y continuidad de funciones reales de una variable real.

En el presente capítulo repasaremos los conceptos relacionados con el cálculo de límites y continuidad de funciones de una variable real. Puesto que en otros temas se tratará la extensión de dichos conceptos al caso de varias variables reales en algunos casos las definiciones pueden ser ligeramente distintas a las estudiadas en cursos anteriores.

1. Aplicaciones.

Empecemos recordando el concepto de aplicación y sus propiedades básicas.

1.1. Definición y conceptos básicos.

Definición 1.1. ***Aplicación.*** *Se llama aplicación de un conjunto X a un conjunto Y a una regla f que asigna a cada uno de los elementos del conjunto X un elemento del conjunto Y:*

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longrightarrow & y = f(x), \end{array} \tag{1}$$

que cumpla las siguientes propiedades:

- *Para cualquier elemento $x \in X$, existe un elemento $y \in Y$ tal que $y = f(x)$ (correspondencia).*
- *Para cualquier par de elementos $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 = x_2$ se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ (unívoca).*

Ejemplo 1.1. *Dados los conjuntos $X = \mathbb{N}$ e $Y = \mathbb{R}$, podemos definir la aplicación f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número natural n, el número real $\frac{1}{n}$:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longrightarrow & f(n) = \frac{1}{n}. \end{array} \tag{2}$$

Definición 1.2. ***Dominio de definición de una aplicación.*** *Dada una aplicación $f : X \to Y$, se define el dominio de definición, y lo denotaramos por $Dom(f)$, como el conjunto X en el cual la aplicación está definida.*

Ejemplo 1.2. *En el ejemplo anterior, el dominio de definición de la aplicación, son los números naturales.*

Ejemplo 1.3. *La aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} f : [0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \sqrt{x}, \end{array} \tag{3}$$

sólo está definida para los números reales positivos, y por lo tanto, su dominio de definición es $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Definición 1.3. ***Imagen de una aplicación.*** *Dada una aplicación $f : X \to Y$, se define la imagen de la aplicación, y lo denotaremos por $Im(f)$, como el siguiente subconjunto de Y:*

$$Im(f) = \{y \in Y : \exists x \in X \ t.q. \ y = f(x)\}. \tag{4}$$

En otras palabras, la imagen de una aplicación será el conjunto formado por las imágenes de todos los elementos del dominio de definición:

$$Im(f) = \{f(x) : x \in X\}. \tag{5}$$

Ejemplo 1.4. *En el primer ejemplo que presentábamos en esta sección,* $f : n \in \mathbb{N} \to f(n) = \dfrac{1}{n}$, *se tiene que:*

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ t.q.\ y = f(n)\} \\ &= \{f(n) : \ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Esto es, la imagen de la aplicación es la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 1.5. *Para la aplicación* $f : x \in [0,\infty) \to f(x) = \sqrt{x}$, *se tiene que:*

$$\begin{aligned} Im(f) &= \left\{y \in \mathbb{R} : \ \exists\, x \in [0,\infty)\ t.q.\ \sqrt{x} = y\right\} \\ &= \left\{\sqrt{x} : \ x \in [0,\infty)\right\} \\ &= [0,\infty) \end{aligned} \tag{7}$$

Definición 1.4. ***Imagen directa de un subconjunto.*** *Dado un subconjunto* $A \subset X$ *se define la imagen directa de* A *mediante la aplicación* $f : X \to Y$, *y lo denotaremos por* $f(A)$, *como el siguiente subconjunto de* Y:

$$f(A) = \{y \in Y : \ \exists\, x \in A\ t.q.\ y = f(x)\}. \tag{8}$$

Ejemplo 1.6. *Consideremos la aplicación:*

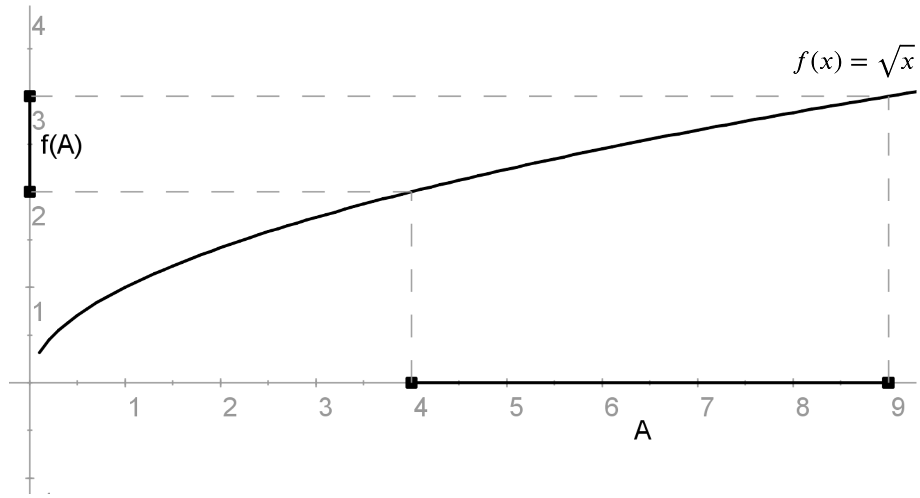
$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{x} \end{aligned} \tag{9}$$

y calculemos la imagen directa del subconjunto:

$$A = [4,9] \subset [0,\infty). \tag{10}$$

Se tiene que:

$$f(A) = \{f(x) : \ x \in [4,9]\} = \{\sqrt{x} : \ x \in [4,9]\} = [2,3]. \tag{11}$$



Definición 1.5. ***Imagen inversa de un subconjunto.*** *Dado un subconjunto $B \subset \mathbb{Y}$ se define la imagen inversa de B mediante la aplicación $f : X \to Y$, y lo denotaremos por $f^{-1}(B)$, como el siguiente subconjunto de X:*

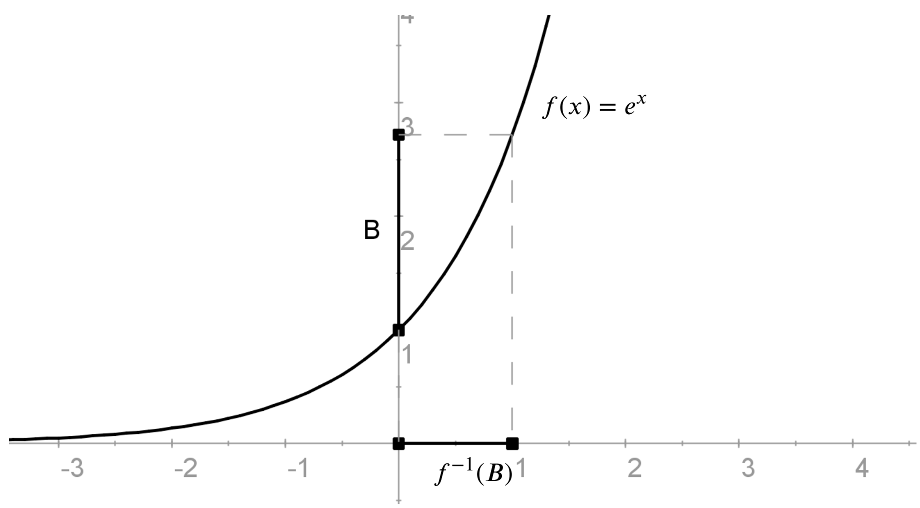
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}. \tag{12}$$

Ejemplo 1.7. *Consideremos la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = e^x \end{array} \tag{13}$$

y calculemos la imagen inversa del conjunto $B = [1, e]$:

$$f^{-1}([1, e]) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in [1, e]\} = \{x \in \mathbb{R} : \ e^x \in [1, e]\} = [0, 1]. \tag{14}$$



Definición 1.6. ***Composición de aplicaciones.*** *Dadas dos aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : X' \to Y'$ con $Y \subset X'$, se define la composición de la aplicación g con la aplicación f, y lo denotaremos por $g \circ f : X \to Y'$, como la única aplicación que verifica que:*

$$g \circ f(x) = g(f(x)). \tag{15}$$

Ejemplo 1.8. *Consideremos las aplicaciones:*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & (0,\infty) \\ x & \longrightarrow & f(x)=e^x \end{array} \tag{16}$$

y

$$\begin{array}{rcl} g:[0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x)=\sqrt{x}. \end{array} \tag{17}$$

La composición de la función f con la función g que denotaremos por $(g\circ f)$ es la aplicación:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (0,\infty)\subset[0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x)=e^x & \longrightarrow & g(f(x))=\sqrt{e^x}. \end{array} \tag{18}$$

Además, la composición de la función g con la función f, que denotaremos por $(f\circ g)$ es la aplicación

$$\begin{array}{ccccc} [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x)=\sqrt{x} & \longrightarrow & f(g(x))=e^{\sqrt{x}}. \end{array} \tag{19}$$

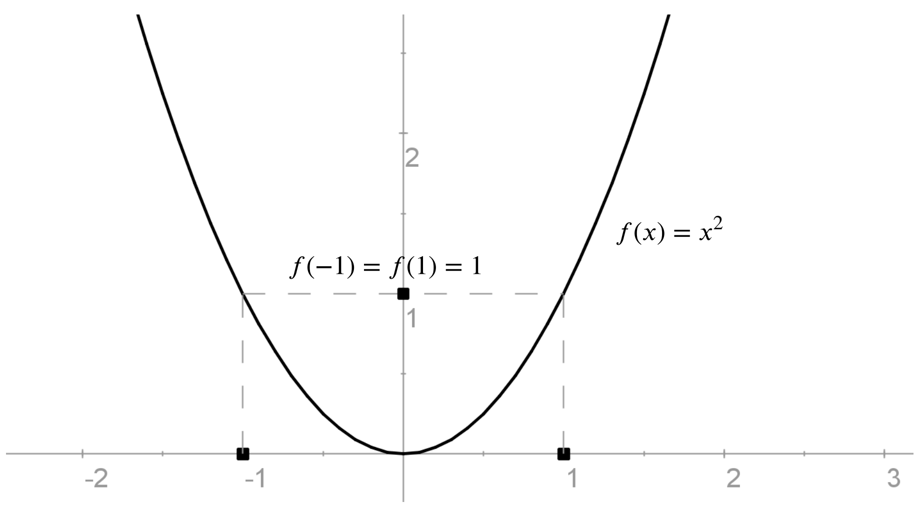
1.2. Tipos especiales de aplicaciones.

Definición 1.7. ***Aplicación inyectiva.*** *Dada una aplicación $f:X\to Y$, diremos que es inyectiva si dados dos elementos x y x' en X tales que $f(x)=f(x')$ se tiene que $x=x'$. O lo que es lo mismo, dos elementos diferentes del conjunto X no pueden tener la misma imagen directa.*

Ejemplo 1.9. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x)=x^2 \end{array} \tag{20}$$

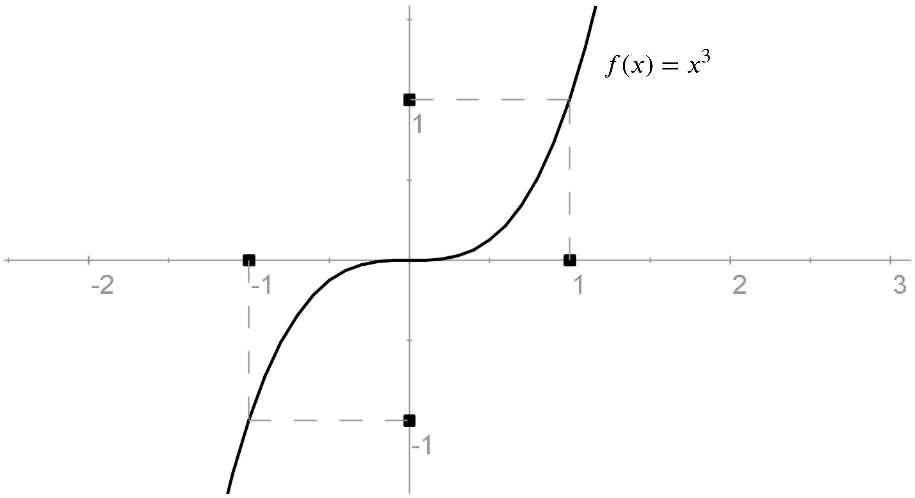
no es inyectiva ya que los puntos $x=-1$ y $x=1$ tienen la misma imagen $f(-1)=f(1)=1$.



Ejemplo 1.10. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x)=x^3 \end{array} \tag{21}$$

es inyectiva ya que dos puntos distintos nunca tendrán la misma imagen



Definición 1.8. ***Aplicación sobreyectiva.*** *Dada una aplicación $f : X \to Y$, diremos que es sobreyectiva cuando $Im(f) = Y$. O lo que es lo mismo, todos los elementos del conjunto Y tienen imagen inversa no vacía.*

Ejemplo 1.11. *La aplicación definida en el ejemplo 1.9 no es sobreyectiva ya que no existe ningún número real tal que $f(x) = -1$. Sin embargo, la aplicación definida en el ejemplo 1.10 sí es sobreyectiva, ya que dado cualquier número real y, siempre podemos encontrar un número x tal que $x^3 = y$ ($x = \sqrt[3]{y}$).*

Definición 1.9. ***Aplicación biyectiva.*** *Dada una aplicación $f : X \to Y$, diremos que es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva.*

A continuación pasamos a enunciar y demostrar una serie de resultados de utilidad.

Proposición 1.1. *Dada una aplicación $f : X \to Y$ con $X \neq \emptyset$, se tiene que la aplicación es inyectiva si y solamente si existe una aplicación $g : Im(f) \to X$ tal que $g \circ f$ es la aplicación identidad en X:*

$$\begin{array}{rcl} I_X : X & \longrightarrow & X \\ x & \longrightarrow & I_X(x) = x. \end{array} \tag{22}$$

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Dada una aplicación $f : X \to Y$ con $X \neq \emptyset$, se tiene que la aplicación es biyectiva si y solamente si existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ es la aplicación identidad en X:*

$$\begin{array}{rcl} I_X : X & \longrightarrow & X \\ x & \longrightarrow & I_X(x) = x. \end{array} \tag{23}$$

Definición 1.10. ***Inversa de una aplicación.*** *Dada una aplicación biyectiva $f : X \to Y$, se define la inversa de la aplicación f, y lo denotaremos por f^{-1}, como la única aplicación g que cumple que su composición con la aplicación f es la identidad de X.*

Ejemplo 1.12. *La inversa de la función $f(x) = \log(x)$ ($x > 0$) es la función $g(y) = e^y$, ya que:*

$$g(f(x)) = e^{\log(x)} = x; \quad f(g(y)) = \log(e^y) = y. \tag{24}$$

Ejemplo 1.13. *La inversa de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es la función $g(y) = \operatorname{arc\,sen}(y)$, ya que:*

$$g(f(x)) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(x)) = x; \quad f(g(y)) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(y)) = y. \tag{25}$$

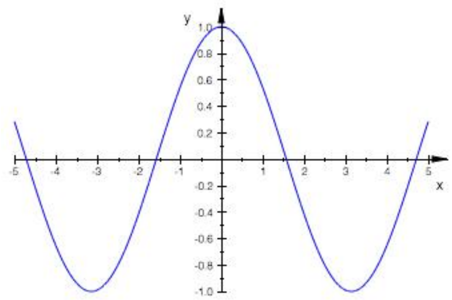
2. Funciones reales de una variable real.

Definición 1.11. ***Función real de una variable real.*** *Llamaremos función real de una variable real a una aplicación:*

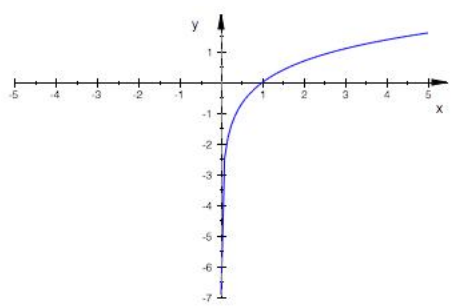
$$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (26)$$
$$x \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R},$$

donde $A \subset \mathbb{R}$ es el dominio de definición de la función f, también denotado por **Dom**(f).

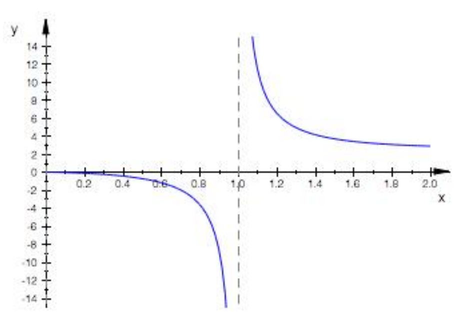
Ejemplo 1.14. *La función $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \cos(x)$ es una función real de variable real que tiene por dominio de definición $\mathbb{R}$.*



Ejemplo 1.15. *La función $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \log(x)$ es una función real de variable real que tiene por dominio de definición $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$.*



Ejemplo 1.16. *La función $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x/\log(x)$ es una función real de variable real que tiene por dominio de definición $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in (0,1) \cup (1, \infty)\}$.*



Definición 1.12. ***Operaciones elementales con funciones.*** *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, dos funciones $f, g : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos las siguientes operaciones elementales:*

- $(f+g) : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $(\lambda \cdot f) : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
- $(f \cdot g) : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- *Si $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$, definimos $(\frac{f}{g}) : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Sobre el conjunto de las funciones reales de variable real, podemos definir la siguiente relación de orden:

Definición 1.13. ***Relación de orden en el conjunto de las funciones de variable real***. *Dado $A \subset \mathbb{R}$, podemos definir la siguiente relación de orden sobre el conjunto de las funciones de variable real que tienen por dominio de definición A:*

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A. \tag{27}$$

Ejemplo 1.17. *Las funciones $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow g(x) = 1$ son tales que $f \leq g$, ya que,* $\mathrm{sen}(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A continuación pasaremos a definir el concepto de función acotada.

Definición 1.14. ***Acotación de funciones.*** *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, diremos que una función real de variable real f definida en A es:*

- *Acotada superiormente, si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$. Al número M se le llama cota superior de f.*
- *Acotada inferiormente, si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$, $\forall x \in A$. Al número m se le llama cota inferior de f.*
- *Acotada, si es acotada inferior y superiormente, esto es, si existen números $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in A$.*

Observación 1.1. *Resulta evidente que la acotación de una función es equivalente a la acotación de la imagen de la misma, esto es, dada una función f definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, f será acotada si y solamente si $f(A) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado. Análogamente, diremos que un número S es máximo (respectivamente mínimo) de la función f, cuando S sea máximo (respectivamente mínimo) del conjunto $f(A)$, esto es, S debe cumplir las siguientes propiedades:*

- *S es supremo de $f(A)$.*
- *$S \in f(A) \Leftrightarrow \exists \overline{x} \in A$ tal que $f(\overline{x}) = S$.*

Ejemplo 1.18. *Consideremos la siguiente función definida sobre todo $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \mathrm{sen}(x). \end{array} \tag{28}$$

Claramente, el rango de la aplicación seno es el conjunto cerrado $[-1, 1]$, ($\mathrm{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$)*, que es un conjunto acotado. Además, la función seno tiene máximo ya que, sup*$([-1, 1]) = 1$ *y* $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ *(análogo para el mínimo).*

3. Límites de una función.

En esta sección analizaremos el concepto de límite de una función y sus aplicaciones.

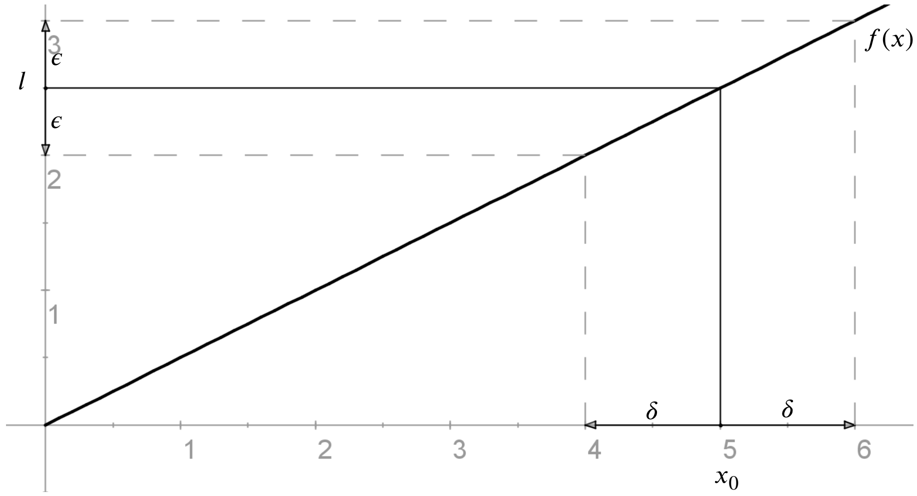
Definición 1.15. ***Límite de una función en un punto.*** *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, una función $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in A'$, diremos que f tiene por límite ℓ cuando x tiende a x_0, y lo denotaremos por:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \tag{29}$$

si:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| \leq \delta, \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{30}$$

Esto es, la función f tiende hacia el límite ℓ cerca de x_0, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de l haciendo que x esté lo suficientemente cerca de x_0. En la siguiente figura se puede ver una interpretación gráfica del concepto de límite de una función.



Ejemplo 1.19. *El límite de la función $f(x) = x^2 + 1$ cuando x tiende a 0 es 1 ya que los valores de $f(x)$ son tan próximos a 1 como queramos sin más que considerar valores de x próximos a 0:*

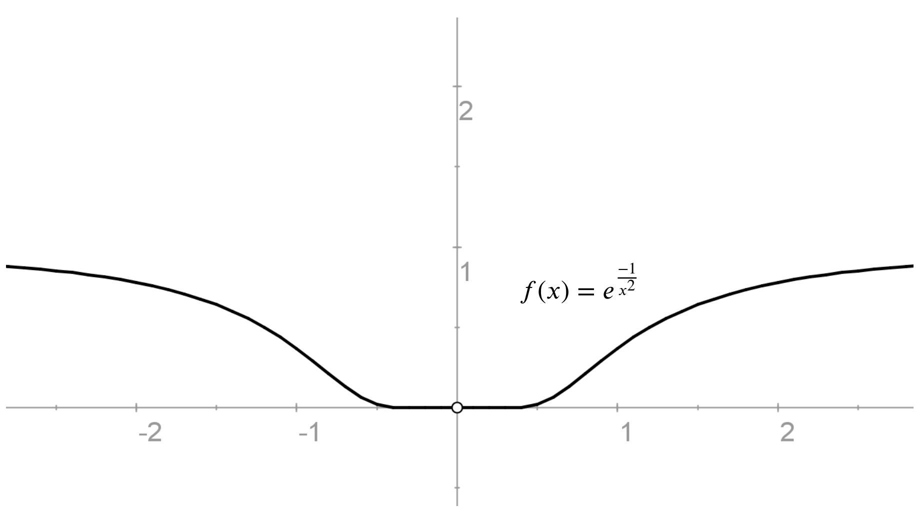
$$\lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 1. \tag{31}$$

Ejemplo 1.20. *Debemos observar que x_0 no tiene por qué ser un elemento de A para calcular el límite, de hecho no tiene por qué existir $f(x_0)$. Podemos calcular el límite de f cuando x tiende a x_0 cuando podamos aproximarnos a x_0 por puntos del dominio de f (es por ello que requerimos que $x_0 \in A'$ para calcular el límite). Por ejemplo, la función:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \end{array} \tag{32}$$

no está definida en el 0, sin embargo existe

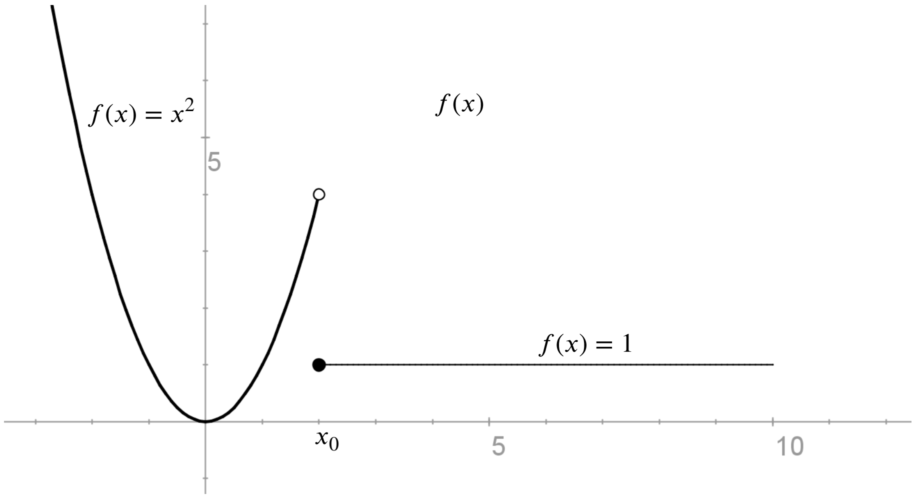
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0. \tag{33}$$



Ejemplo 1.21. *Consideremos la siguiente función:*

(34)
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2 & si\ x<2 \\ 1 & si\ x\geq 2 \end{array}\right. \end{array}$$

Esta función no tiene límite en $x_0 = 2$ (ver siguiente figura):



Veamos como podemos aplicar la definición de límite para obtener el límite de una determinada función en un punto:

Ejemplo 1.22. *(Cálculo de un límite por definición). Consideremos la función real de variable real $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ y sea x_0 un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$. Veamos cómo podemos aplicar la definición de límite para demostrar que:*

(35)
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2.$$

Consideremos un número real positivo $\epsilon > 0$, veamos si podemos encontrar un número real positivo $\delta > 0$, tal que si $|x - x_0| \leq \delta$ con $x \neq x_0$, entonces $|x^2 - x_0^2| \leq \epsilon$. Por un lado:

(36)
$$|x^2 - x_0^2| = |(x + x_0)(x - x_0)| = |x + x_0||x - x_0|.$$

Si tomamos $\delta < 1$, necesariamente se tiene que:

(37)
$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow |x - x_0| < 1 \Rightarrow |x| \leq 1 + |x_0|$$

y por lo tanto,

(38)
$$|x^2 - x_0^2| \leq (|x| + |x_0|)|x - x_0| \leq (1 + 2|x_0|)|x - x_0|.$$

Finalmente podemos asegurar que tomando $\delta < \frac{\epsilon}{1+2|x_0|}$ se verifica que:

(39)
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq (1 + 2|x_0|)|x - x_0| \leq (1 + 2|x_0|)\frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|} = \epsilon.$$

Hasta ahora, hemos estudiado el límite de una función cuando x tiende a un número real x_0. A continuación veremos qué significado tiene calcular el límite cuando x tiende a infinito.

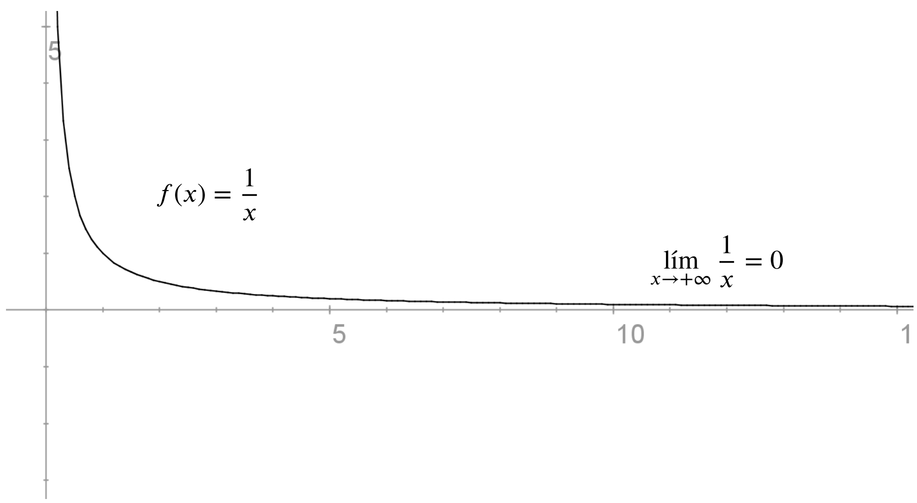
Definición 1.16. ***Límite de una función en el infinito***. *Dada una función real de variable real $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de la función f cuando x tiende a $+\infty$ es L, cuando:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : \; x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon. \tag{40}$$

Con otras palabras, los valores de la función f están tan próximos a L como queramos sin más que escoger valores de x suficientemente grandes. De forma análoga, podemos definir el límite de una función cuando x tiende a $-\infty$. En los dos casos, es necesario que la función f esté definida para valores de x tendiendo al respectivo infinito.

Ejemplo 1.23. *El límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a $+\infty$ es 0 ya que los valores de $f(x)$ son tan próximos a 0 como queramos sin más que escoger valores de x suficientemente grandes:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{41}$$



A continuación veremos la definición de que una función tienda a infinito cuando x tiende a x_0.

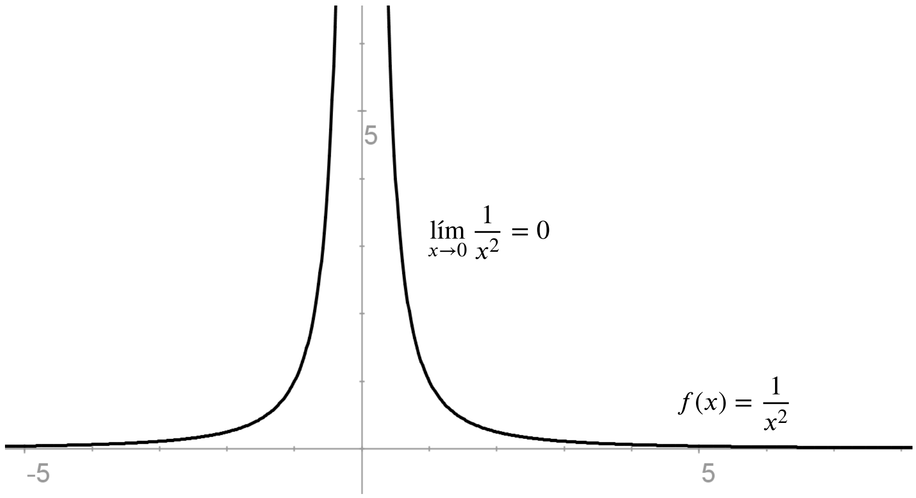
Definición 1.17. ***Límite infinito de una función***. *Dada una función real de variable real $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de la función f cuando x tiende a x_0 es $+\infty$ si:*

$$\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M. \tag{42}$$

Con otras palabras, los valores de la función f son tan grandes como nosotros queramos sin más que escoger valores de x suficientemente próximos a x_0. De manera análoga podemos definir el valor $-\infty$ como límite de una función cuando x tiende a x_0.

Ejemplo 1.24. *El límite de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando x tiende a 0 es $+\infty$ ya que los valores de $f(x)$ son tan grandes como nosotros queramos sin mas que escoger valores de x próximos a 0:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty. \tag{43}$$



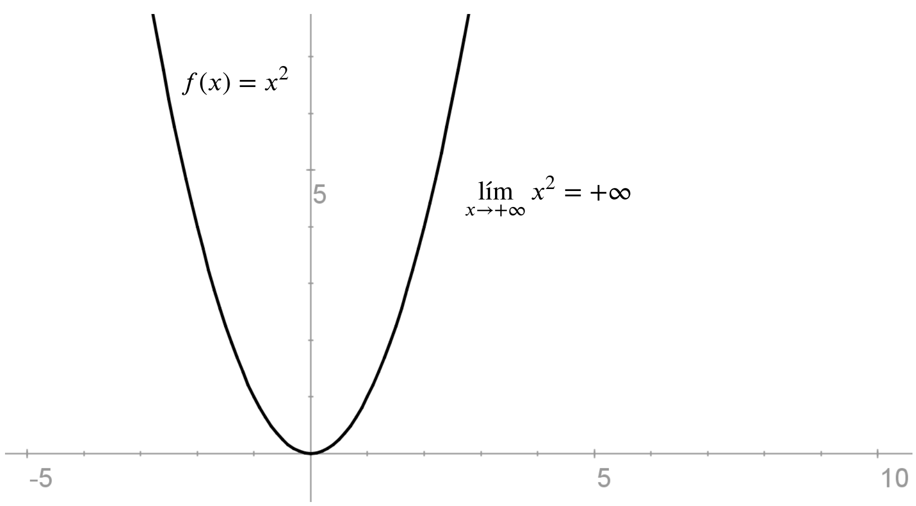
Definición 1.18. ***Límite infinito de una función en el infinito.*** *Dada una función real de variable real* $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$. *Diremos que el límite de la función* f *cuando x tiende a* $+\infty$ *es* $+\infty$ *si:*

(44) $$\forall M > 0 \, \exists K > 0 : \; x > K \Rightarrow f(x) > M.$$

Con otras palabras, los valores de la función f *son tan grandes como nosotros queramos sin más que escoger valores de x suficientemente grandes. De manera análoga es posible definir los valores* $\pm\infty$ *como límite de una función cuando x tiende a* $\pm\infty$.

Ejemplo 1.25. *El límite de la función* $f(x) = x^2$ *cuando x tiende a* $+\infty$ *es* $+\infty$ *ya que los valores de* f *son tan grandes como queramos sin más que coger valores de x suficientemente grandes:*

(45) $$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$



Teorema 1.1. ***Teorema de caracterización secuencial del límite de una función.*** *Sean* $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in A'$. *Se tiene que:*

(46) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left[\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \; \textit{con } x_n \neq x_0 \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \textit{se cumple que } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell\right].$$

Observación 1.2. *El Teorema anterior nos permite demostrar que un cierto límite no existe si encontramos dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$, pero que las sucesiones de las imágenes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiendan a números diferentes. Por ejemplo, consideremos la función:*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x)=\cos(x). \end{array} \tag{47}$$

Podemos argumentar la no existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiene a infinito en base al teorema anterior, encontrando dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$, pero que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiendan a límites diferentes. Tomemos, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & 2n\pi \\ y_n & = & (2n+1)\pi, \end{array} \tag{48}$$

se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} f(x_n) & = & 1, \\ f(y_n) & = & -1. \end{array} \tag{49}$$

Puesto que la sucesión de las imágenes converge a límites diferentes, se concluye que no existe el límite cuando x tiende a ∞ de la función.

Corolario 1.2. *Sean $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Si existe $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, éste es único.*

Proposición 1.2. *(Operaciones con límites de funciones.) Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real y sea x_0 un punto de acumulación de A. Supongamos que existen $\ell_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\ell_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$. *O lo que es lo mismo, el límite de la suma es la suma de los límites, salvo en el caso en el que sea $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$, que resultan indeterminados.*
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$. *O lo que es lo mismo, el límite del producto es igual al producto de los límites, salvo en los casos $\pm\infty \cdot 0$, que resulta indeterminados.*
3. *Si $C = \{x \in A : \ g(x) = 0\}$, la función $h : A - C \longrightarrow h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ verifica que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$. O lo que es lo mismo, el límite del cociente es igual al cociente de los límites, salvo en los casos $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, que son indeterminaciones.*
4. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \ell_1$.*
5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2}$. *O lo que es lo mismo, el límite de una base elevada a un exponente es igual al límite de la base elevado al límite del exponente, salvo en los casos 1^∞, 0^∞, ∞^0 y 0^0, que resultan indeterminados. Debemos tener en cuenta que ∞^∞ no es indeterminado, ya que:*
   - $+\infty^{+\infty} = +\infty$.
   - $+\infty^{-\infty} = \dfrac{1}{+\infty^{+\infty}} = 0$.
   - $(-\infty)^{+\infty}$ *oscila entre $+\infty$ y $-\infty$ por lo que no tiene límite.*
   - $(-\infty)^{-\infty} = \dfrac{1}{(-\infty)^{+\infty}} = 0$.

Una propiedad muy útil en el cálculo de límites de funciones es la que se enuncia a continuación:

Proposición 1.3. *Sean $f, g : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real y sea $x_0 \in A'$. Si $f(x)$ es una función acotada cuando x tiende x_0 y $g(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a x_0, entonces:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0. \tag{50}$$

Proposición 1.4. *(Paso al límite en desigualdades.) Sean* $f, g, h : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tres funciones reales de variable real tales que:*

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A \tag{51}$$

y sea $x_0 \in A'$*. Supongamos además que existen los límites*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell, \tag{52}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \tag{53}$$

y que son iguales. Entonces, existe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell. \tag{54}$$

Ejemplo 1.26. *Consideremos las siguientes funciones:*

$$\begin{aligned} h(x) &= 0. \\ f(x) &= \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right). \\ g(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{55}$$

Claramente, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$*, además,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} h(x) &= 0. \\ \lim_{x \to \infty} g(x) &= 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0. \tag{57}$$

4. Resolución de algunas indeterminaciones.

Veamos a continuación cómo podemos resolver algunas indeterminaciones.

Ejemplo 1.27. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ *(indeterminación* $\frac{\infty}{\infty}$*). En este caso, se resuelve dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de x:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = 0. \tag{58}$$

Ejemplo 1.28. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{x^3}$ *(indeterminación* $+\infty - \infty$*). En este caso, se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{x^3})(\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3})}{\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3}} = 0. \tag{59}$$

Ejemplo 1.29. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+x}\right)^{x+1}$ *(indeterminación 1^∞). En este caso, se realizan las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x^2+2}{x^2+x}-1\right)^{x+1} &= \left(1+\frac{x^2+2-x^2-x}{x^2+x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)^{x+1}\\ &= \left[\left(1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)^{\frac{x^2+x}{2-x}}\right]^{\frac{(x+1)(2-x)}{x^2+x}}=\left[\left(1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)^{\frac{x^2+x}{2-x}}\right]^{\frac{2-x}{x}}.\end{aligned} \tag{60}$$

Por lo tanto, empleando el límite para el número e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+x}\right)^{x+1}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}}=\frac{1}{e}. \tag{61}$$

Ejemplo 1.30. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ *(Indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$). Lo veremos más adelante.*

Ejemplo 1.31. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$ *(Indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$). Lo veremos más adelante.*

Ejemplo 1.32. $\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$. *Función acotada por otra que tiende a cero.*

5. Límites laterales de una función.

En esta sección trabajaremos con el concepto de límite lateral de una función real de variable real.

Definición 1.19. ***Límites laterales de una función.*** *Consideremos un función real de variable real $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea $x_0\in A'$. Diremos que:*

1. *ℓ es el límite por la derecha de f cuando x tiende a x_0 si:*

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:\ 0<x-x_0\le\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\le\epsilon, \tag{62}$$

que denotaremos por:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell. \tag{63}$$

2. *ℓ es el límite por la izquierda de f cuando x tiende a x_0 si:*

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:\ 0<x_0-x\le\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\le\epsilon, \tag{64}$$

que denotaremos por:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell. \tag{65}$$

Observación 1.3. *Al igual que con el concepto de límite de una función, en el caso de los límites laterales, existe una caracterización secuencial del mismo que no detallaremos por resultar obvia.*

El siguiente resultado resulta muy útil en la práctica a la hora de decidir si una función tiene límite en un punto o no a partir de los límites laterales:

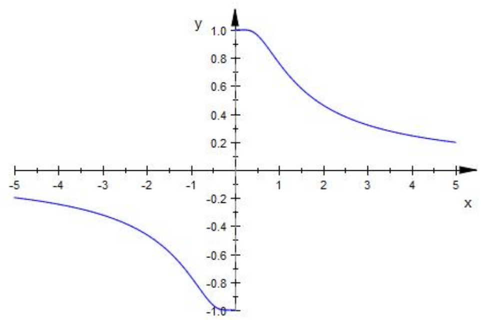
Teorema 1.2. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Entonces, existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y vale ℓ:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \tag{66}$$

si y solamente si existen los dos límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y los dos tienen el valor ℓ,

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \ y \ \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell. \tag{67}$$

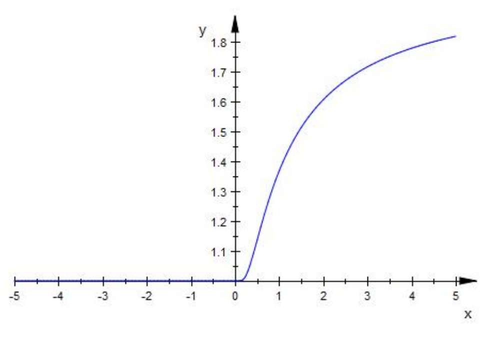
Ejemplo 1.33. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$.*



$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{2}{x}}}{1 + e^{-\frac{2}{x}}} = 1, \\
\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = -1.
\end{aligned} \tag{68}$$

Puesto que los límites laterales no coinciden, entonces no existe el límite.

Ejemplo 1.34. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0, \\ 1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$*



$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} 1 + e^{-\frac{1}{x}} = 1, \\
\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} 1 = 1.
\end{aligned} \tag{69}$$

Puesto que los límites laterales coinciden, entonces existe el límite de la función f cuando x tiende a 0 y su valor es 1.

6. Continuidad de una función.

En esta sección trabajaremos con el concepto de continuidad para funciones reales de variable real. Comencemos definiendo el concepto de función continua en un punto.

Definición 1.20. ***Función continua en un punto.*** *Sea $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $x_0 \in A$. Diremos que $f(x)$ es continua en x_0 cuando se cumpla lo siguiente:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon. \tag{70}$$

Observación 1.4. *Como consecuencia de la definición anterior se cumple que:*

1. *Si x_0 es un punto aislado de A, entonces f es continua en x_0, puesto que existe $\delta^* > 0 : \ (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \cap A = \{x_0\}$. Por lo tanto, dado cualquier $\epsilon > 0$, si tomamos el δ^* anterior, se cumple trivialmente la definición de continuidad.*
2. *Si $x_0 \in A'$, se verifica que f es continua en x_0 si y solamente si:*
   - *Existe el* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
   - *Existe $f(x_0)$.*
   - *Se cumple que $f(x_0) = \ell$.*

   Es decir, el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 coincide con el valor de la función en el punto x_0. En efecto, por una lado, si la función es continua en el punto x_0, sabemos, empleando la defición de continuidad que:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon. \tag{71}$$

   De donde, comparándola con la definición de límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0, deducimos que existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y es igual a $f(x_0)$. Por otro lado, si existe el límite cuando x tiende a x_0 de la función $f(x)$, sabemos que:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{72}$$

   Pero, como estamos suponiendo que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual al valor de la función en el punto, se obtiene precisamente la definición de continuidad.

Definición 1.21. ***Función continua.*** *Dada una función $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que es continua en A cuando sea continua en todos los puntos de A. Denotaremos por $\mathscr{C}(A)$ el conjunto de todas las funciones continuas en A:*

$$\mathscr{C}(A) = \{f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es continua en } A\}. \tag{73}$$

Ejemplo 1.35. *Son ejemplos de funciones continuas las funciones polinómicas, las funciones trigonométricas* $\operatorname{sen}(x)$ *y* $\cos(x)$, *la función exponencial e^x, la inversa de la función exponencial* $\log(x)$ *en su dominio de definición* $x > 0$, ...

Proposición 1.5. *(Operaciones con funciones continuas.) Sean $f, g : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real y sea $x_0 \in A$. Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en a. Entonces:*

1. *$f(x) + g(x)$ también será continua en x_0.*
2. *$f(x) \cdot g(x)$ también será continua en x_0.*
3. *$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una función continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.*

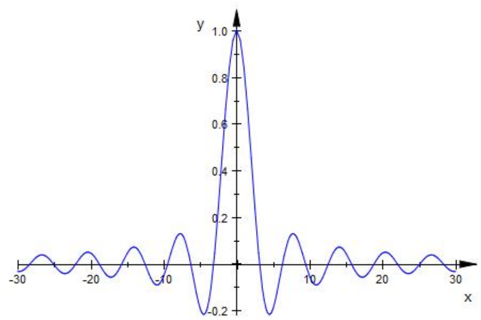
Ejemplo 1.36. *Puesto que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = e^x$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$:*

- *La suma $s(x) = f(x) + g(x) = \operatorname{sen}(x) + e^x$ es una función continua en $\mathbb{R}$.*
- *El producto $p(x) = f(x) \cdot g(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot e^x$ también es una función continua en todo $\mathbb{R}$.*
- *Por otro lado, ya que $e^x \neq 0$, tenemos que el cociente $c(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{e^x}$ es una función continua en $\mathbb{R}$.*

- *Ahora bien, si realizamos el cociente* $c(x) = \frac{e^x}{\text{sen}(x)}$, *deja de ser continua en los puntos* $x = 2k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *ya que ni si quiera está definida.*

Ejemplo 1.37. *Consideremos la función real de variable real* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *donde:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases} \tag{74}$$



La función $f(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}$ *ya que:*

- *Para* $x \neq 0$, $f(x)$ *es continua (operaciones con funciones continuas).*
- *El único punto conflictivo es* $x = 0$, *que analizaremos utilizando el criterio del Sandwich. Por un lado, sabemos (LARSON, Pag. 65.) que:*

$$\frac{\tan(\theta)}{2} \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{\text{sen}(\theta)}{2}. \tag{75}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $\dfrac{2}{\text{sen}(\theta)}$:

$$\frac{1}{\cos(\theta)} \geq \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} \geq 1, \quad \forall \theta \in (0, \pi/2), \tag{76}$$

pero, como $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ *y* $\dfrac{\theta}{\text{sen}(\theta)} = \dfrac{-\theta}{\text{sen}(-\theta)}$, *deducimos que la expresión anterior es válida en el intervalo* $(-\pi/2, \pi/2) - \{0\}$. *Por último si invertimos la desigualdad (76):*

$$\cos(\theta) \leq \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} \leq 1 \tag{77}$$

y tomamos límites cuando $\theta \to 0$, *obtenemos que:*

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1. \tag{78}$$

Al igual que en el caso del límite de una función en un punto, es posible dar una caracterización secuencial de la continuidad en un punto.

Proposición 1.6. *(Caracterización secuencial de la continuidad en un punto). Sea* $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real y sea* $x_0 \in A$. *Se tendrá que la función* $f(x)$ *es continua en* x_0 *si y solamente si se cumple:*

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ se cumple que } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{79}$$

Por último, definimos un tipo de continuidad más fuerte que la continuidad, la continuidad uniforme.

Definición 1.22. *Dada una función $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que es uniformemente continua en A cuando se cumpla la siguiente condición:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \epsilon. \tag{80}$$

Ejemplo 1.38. *Como ejemplo de funciones uniformemente continuas, destacamos las siguientes:*

- *Las funciones constantes: $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = k \in \mathbb{R}$.*
- *$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x \in \mathbb{R}$, pues basta tomar $\delta = \epsilon$.*
- *$f : x \in [0, 3] \subset \mathbb{R} \to f(x) = x^2$. En efecto,*

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq |x - x_0||x + x_0| \leq 6|x - x_0|. \tag{81}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{6}$, ya que, entonces:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \epsilon. \tag{82}$$

Observación 1.5. *En general, cualquier función continua definida en un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es uniformemente continua.*

7. Continuidad lateral de una función.

En esta sección trabajaremos con el concepto de continuidad lateral de una función en un punto.

Definición 1.23. ***Continuidad lateral en un punto.*** *Sea $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $x_0 \in A$.*

- *Se dice que f es continua por la derecha en x_0 cuando se verifica que:*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x). \tag{83}$$

- *Se dice que f es continua por la izquierda en x_0 cuando se verifica que:*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x). \tag{84}$$

Al igual que en el caso de los límites, es posible caracterizar la continuidad de una aplicación en un punto en base a la continuidad lateral de la misma.

Proposición 1.7. *Sean $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y $x_0 \in A$. Entonces, $f(x)$ es continua en x_0 si y solamente si $f(x)$ es continua por la derecha y por la izquierda en x_0.*

Ejemplo 1.39. *Determinemos los valores de los parámetros b y c para que la función:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad |x - 2| < 1, \\ x^2 + bx + c & si \quad |x - 2| \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{85}$$

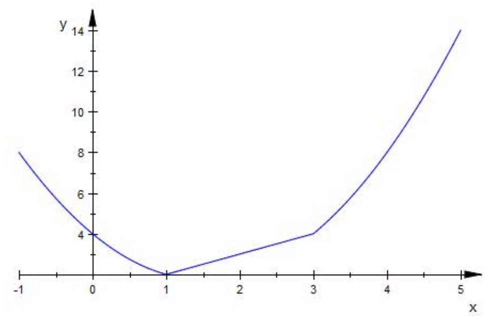
Debemos estudiar dos puntos clave, el 1 y el 3:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2, & \lim_{x \to 1^-} x^2 + bx + c = 1 + b + c, & f(1) = 1 + b + c, \\ \lim_{x \to 3^+} x^2 + bx + c = 9 + 3b + c, & \lim_{x \to 3^-} x + 1 = 4, & f(3) = 9 + 3b + c. \end{array} \tag{86}$$

Para que la función sea continua se tiene que cumplir:

(87)
$$\begin{array}{rcccl} 2 & = & 1+b+c & = & 1+b+c, \\ 9+3b+c & = & 4 & = & 9+3b+c. \end{array}$$

Por lo tanto, $c=4$ *y* $b=-3$.



8. Composición de funciones continuas.

En esta sección veremos cómo se comporta la composición de funciones con respecto a la continuidad.

Proposición 1.8. *Sean* $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : x \in B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones reales de variable real tales que la imagen de* $f(x)$ *(*$f(A)$*) es tal que* $f(A) \subset B$*. Se tiene entonces que si* $f(x)$ *es continua en a y* $g(x)$ *es continua en* $b = f(a) \in B$*, entonces la composición* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *es continua en a.*

Ejemplo 1.40. *La función* e^{x^2} *es continua en todo* $\mathbb{R}$ *por ser composición de las funciones continuas en* $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = e^x$.

Ejemplo 1.41. *La función:*

(88)
$$f(x) = \frac{cos(x^2) + 10^x}{e^x + x^2 + 2},$$

es continua en $\mathbb{R}$ *por ser composición y cociente de funciones continuas con el denominador nunca nulo.*

9. Discontinuidades.

En esta sección analizaremos los tipos de discontinuidades que se pueden presentar a la hora de estudiar la continuidad de una función real de variable real.

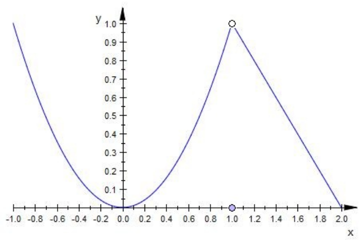
Definición 1.24. ***Tipos de discontinuidades.*** *Sean* $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in A'$*. Diremos que la función* $f(x)$ *es discontinua en* x_0 *cuando no sea continua en* x_0*. La discontinuidad en* x_0 *puede darse por las siguientes razones:*

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ *pero* $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$*. A este tipo de discontinuidad, si el límite es finito, se le denomina discontinuidad evitable.*
2. *Si* $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ *y además* $f(x_0^+)$ *y* $f(x_0^-)$ *son finitos o infinitos, se dice que tenemos una discontinuidad de primera especie (también llamada discontinuidad de salto).*
3. *Si no existe alguno de los límites laterales diremos que tenemos una discontinuidad de segunda especie.*

Ejemplo 1.42. *Veamos una serie de ejemplos en donde se observan los tres tipos de discontinuidades anteriores:*

1. *La función:*

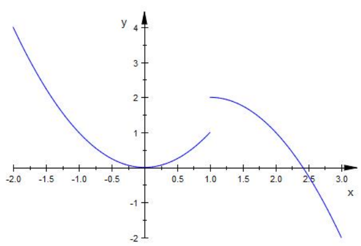
(89)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1, \\ 0 & si \quad x = 1, \\ 2 - x & si \quad x > 1, \end{cases}$$



presenta una discontinuidad evitable. La función sería continua si redefiniésemos la función de forma que $f(x_0) = f(1) = 1$.

2. *La función*

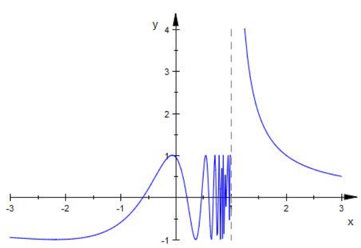
(90)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1, \\ 0 & si \quad x = 1, \\ 2 - (x-1)^2 & si \quad x > 1, \end{cases}$$



tiene, en el punto $x_0 = 1$*, una discontinuidad de primera especie.*

3. *La función*

(91)
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\dfrac{5}{x-1}) & si \quad x < 1, \\ 0 & si \quad x = 1, \\ \dfrac{0{,}1}{x-1} & si \quad x > 1, \end{cases}$$

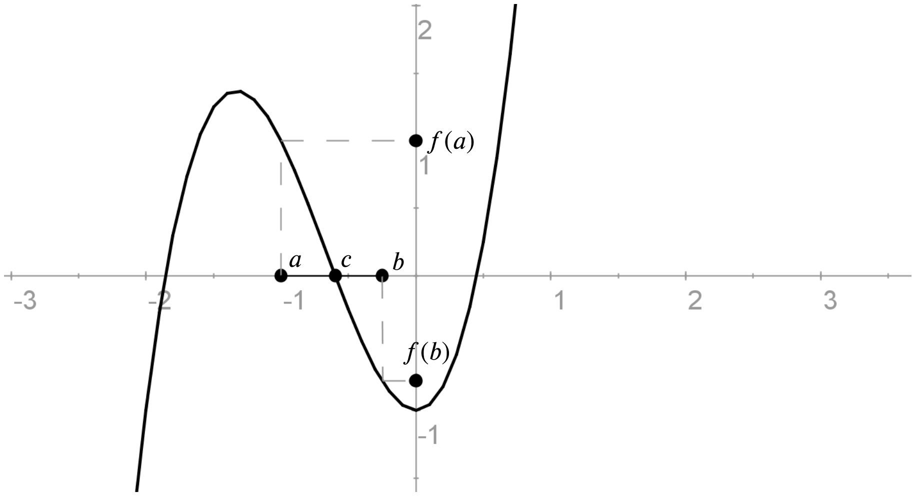


tiene, en $x_0 = 1$*, una discontinuidad de segunda especie.*

10. Propiedades de las funciones continuas.

En esta sección analizaremos las propiedades y resultados más importantes relacionados con las funciones continuas.

Teorema 1.3. ***Teorema de Bolzano.*** *Sea* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real continua en* $[a, b]$*, tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$*. Entonces existe al menos un punto* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*. En la siguiente figura* *se puede ver una interpretación geométrica del enunciado:*



Ejemplo 1.43. *Consideremos la siguiente función, cuya gráfica se corresponde con la figura anterior:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = -1 + 2x^3 + 4x^2. \end{array} \tag{92}$$

Se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} f(-1) & = & 1, \\ f\left(\frac{1}{4}\right) & = & -\frac{23}{32}, \end{array} \tag{93}$$

toman signos opuestos, por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existirá un elemento $c \in (-1, 1/4)$ tal que $f(c) = 0$.

Ejemplo 1.44. *Supongamos que tenemos una función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que toma los mismos valores en los extremos del intervalo:*

$$f(-1) = f(1). \tag{94}$$

Podremos encontrar un punto $c \in [0, 1]$ tal que:

$$f(c) = f(c-1). \tag{95}$$

En efecto, definamos la siguiente función real de variable real:

$$\begin{array}{rcl} g : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) = f(x) - f(x-1). \end{array} \tag{96}$$

Se tiene que la función anterior es continua en el intervalo $[0, 1]$, además, supuesto que no estamos ante el caso trivial en el $g(0) = 0$ en el cual el problema ya estaría resuelto, se tendrá que:

$$\begin{array}{l} g(0) = f(0) - f(-1) = f(0) - f(1), \\ g(1) = f(1) - f(0) \end{array} \tag{97}$$

por lo tanto, $g(0) \cdot g(1) < 0$ *y, entonces, por el teorema de Bolzano, sabemos que existirá un punto* $c \in (0, 1)$ *tal que* $g(0) = 0$ *o, lo que es lo mismo,* $f(c) = f(c - 1)$.

Observación 1.6. *Una aplicación muy importante del Teorema de Bolzano es el métono numérico de dicotomía o bisección que se emplea para encontrar ceros de funciones.*

El método de bisección o dicotomía es un método numérico que se emplea para encontrar raíces de ecuaciones. Supongamos que tenemos una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *real de variable real y que nuestro objetivo es encontrar un punto* $x_0 \in A$ *que sea solución de la ecuación* $f(x_0) = 0$ *(a dichos puntos se les denomina raíces o soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$*).*

Dicho método, está basado en el teorema de Bolzano, el cual, dada una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, nos garantiza que existe un elemento* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$ *(*c *es una raíz de la ecuación* $f(x) = 0$*).*

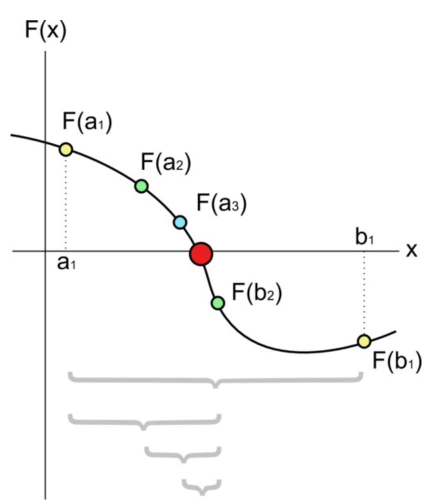
Sea entonces una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, el método de dicotomía construye una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contenida el intervalo* $[a, b]$*, de forma que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a una raíz de la ecuación* $f(x) = 0$*. Para ello, se emplea el siguiente algoritmo:*

$$\left[\begin{array}{l}
x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}, \quad \textit{donde} \quad a_1 = a \quad \textit{y} \quad b_1 = b. \\[2ex]
\textit{Para } n \geq 2,\ x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \textit{ donde:} \\[2ex]
\qquad a_n \ = \ \left\{\begin{array}{lll} a_{n-1} & \textit{si} & f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0, \\ x_{n-1} & \textit{si} & f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0, \end{array}\right. \\[3ex]
\qquad b_n \ = \ \left\{\begin{array}{lll} x_{n-1} & \textit{si} & f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0, \\ b_{n-1} & \textit{si} & f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

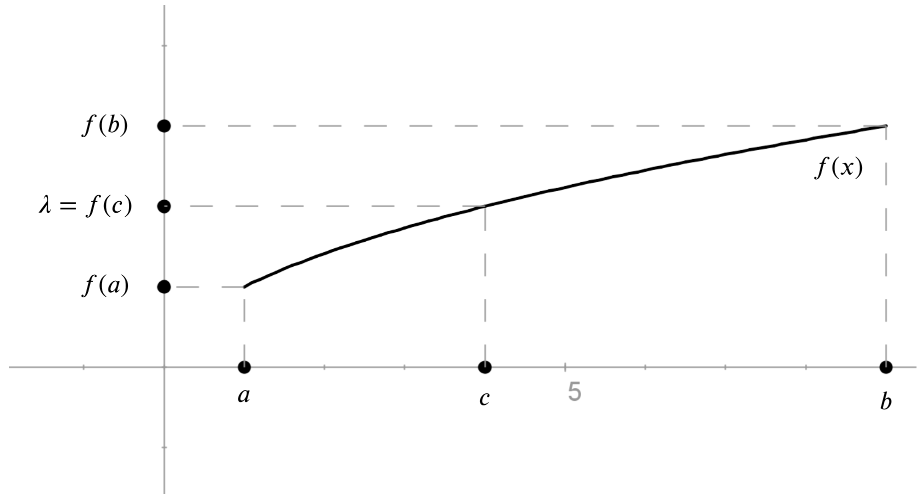
Dependiendo de la precisión, $\epsilon > 0$*, que determinemos para la convergencia del algoritmo, detendremos la construcción de los elementos de la sucesión* $\{x_n\}$ *cuando lleguemos a un elemento* x_M *tal que:*

$$|f(x_M)| \leq \epsilon.$$

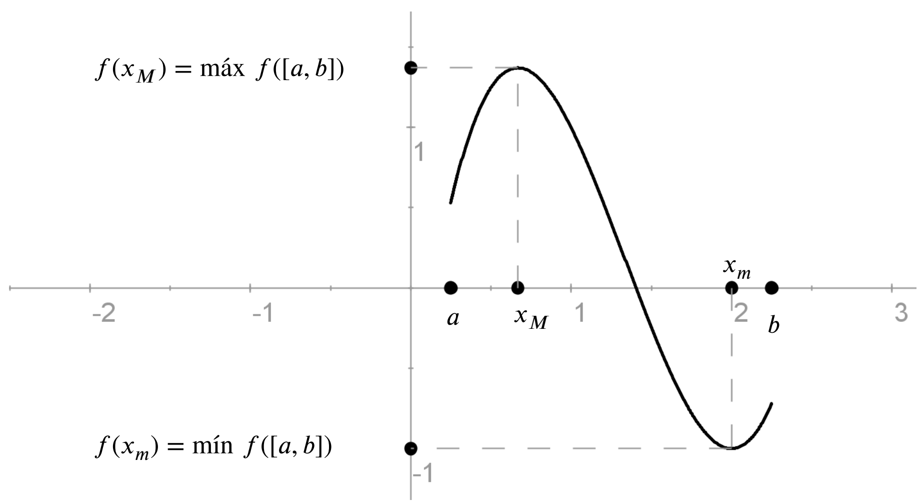
En la siguiente figura se puede ver cómo se generan unas cuantas iteraciones del método de dicotomía.



Corolario 1.3. ***Teorema de los Valores Intermedios*** *Sea* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y supongamos que* $f(a) < f(b)$. *Entonces para cada valor* λ *tal que* $f(a) < \lambda < f(b)$, *existe al menos un punto* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = \lambda$.



Teorema 1.4. ***Teorema de Weierstrass.*** *Sea* $f : x \in [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en el intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$. *Se tendrá entonces que existen valores* $x_m \in [a, b]$ *y* $x_M \in [a, b]$ *tales que* $f(x_m) = \text{mín}(f(A))$ *y* $f(x_M) = \text{máx}(f(A))$. *O lo que es lo mismo, la función* f *alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo* $[a, b]$.



Observación 1.7. *En el siguiente ejercicio se pone de manifiesto que, bajo ciertas condiciones, el resultado anterior se puede extender a dominios no acotados.*

Ejemplo 1.45. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real, tal que:*

- $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
- f *es continua en* $\mathbb{R}$.

Veamos que, entonces, podemos encontrar un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y que* $Im(f) = f(\mathbb{R}) \subset (0, f(x_0)]$. *En efecto, sea* $\alpha = f(0) > 0$. *Como* f *tiene límite* 0 *para* $x \to +\infty$ *y* $x \to -\infty$, *existen valores positivos* k_1 *y* k_2 *tales que:*

(98)
$$x < -k_1 \Rightarrow 0 < f(x) < \alpha/2,$$
$$x > k_2 \Rightarrow 0 < f(x) < \alpha/2,$$

de donde deducimos que:

(99)
$$f((-\infty, -k_1]) \subset (0, \alpha/2),$$
$$f([k_2, +\infty)) \subset (0, \alpha/2),$$

o lo que es lo mismo, f está acotada en las colas. Veamos ahora lo que ocurre en el intervalo $[-k_1, k_2]$. Como f es continua, sabemos, por el teorema de Weierstrass, que f alcanza su máximo m en el intervalo $[-k_1, k_2]$:

(100)
$$m = f(x_0) = \text{máx}\{f([-k_1, k_2])\}, \quad \textit{con } x_0 \in [-k_1, k_2].$$

Ahora bien, $0 \in [-k_1, k_2]$ y $f(0) = \alpha$, ha de ser $m \geq \alpha$. Si se tiene en cuenta que para $x < -k_1$ y $x > k_2$ es $f(x) < \alpha/2$, se concluye que $m = f(x_0) = \text{máx}\, f(\mathbb{R})$ y, entonces, $f(\mathbb{R}) \subset (0, f(x_0)]$.

11. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *Estudia si las siguientes reglas son aplicaciones y, en caso afirmativo, determina su dominio de definición A:*

1. $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = e^x$.
2. $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \text{sen}(x)$.
3. $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$.
4. $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
5. $f : x \in A \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \pm\sqrt{x}$.

Ejercicio 1.2 (Límites laterales.). *Estudiar la existencia de los límites laterales de:*

1. $\tan(x)$, *cuando x tiende a* $\dfrac{\pi}{2}$.
2. $\dfrac{1 - e^{-\frac{2}{x}}}{1 + e^{-\frac{2}{x}}}$, *cuando x tiende a* 0.
3. $\dfrac{x^4}{x^2 - 1}$, *cuando x tiende a* 1.
4. $\dfrac{1}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$, *cuando x tiende a* 0.
5. $\dfrac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$, *cuando x tiende a* 0.

Ejercicio 1.3 (Indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$.). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$.

Ejercicio 1.4 (Indeterminaciones $\infty - \infty$.). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - x$.
2. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5x} - (x+3)$.
3. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}$.
4. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$.
5. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3+2} - \sqrt{x^3}$.

Ejercicio 1.5 (Indeterminaciones 1^{∞}.). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x}{x^2+4}\right)^{x^2}$.
2. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{2x^2+2x}\right)^{3x}$.
3. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.
4. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$.
5. $\lim_{x\to 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}}$.

Ejercicio 1.6 (Continuidad de funciones reales de una variable real.). *Se pide:*

1. *Halla una relación entre los parámetros a y b de modo que exista el límite de la función $f(x)$ en $x = 1$, siendo f la función siguiente:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & si\ x \geq 1 \\ bx^2+a & si\ x < 1 \end{cases} \tag{101}$$

2. *Calcula el valor de a y b para que la siguiente función sea continua:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & si\ x < 0 \\ ax+b & si\ 0 \leq x < 1 \\ 2 & si\ x \geq 1 \end{cases} \tag{102}$$

3. *Estudia si existe algún valor de k tal que que la siguiente función sea continua:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+k)(x-2)}{x^2-5x+6} & si\ x < 2 \\ 6 & si\ x \geq 2 \end{cases} \tag{103}$$

en el punto $x = 2$.

4. *Estudia si existe algún valor de k para el cual la siguiente función sea continua:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^4-3x^3}{7x^5+3x^3} & si\ x < 0 \\ -1 & si\ x \geq 0 \end{cases} \tag{104}$$

en el punto $x = 0$.

5. *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2\ \cos(x) & x \leq c, \\ (ax+b)^2 & x > c, \end{cases} \tag{105}$$

siendo a, b, c, constantes. Si b y c son fijos, hallar los valores de a (si existe alguno) para los cuales la función es continua en $x = c$.

Ejercicio 1.7 (Discontinuidades de funciones reales de variable real.). *Estudiar si las siguientes funciones presentan discontinuidades.*

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}.$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$
3. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$
4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}.$
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}.$

Ejercicio 1.8 (Propiedades de las funciones continuas.). *Se pide:*

1. *Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, para todo $x, y \in [a, b]$. Demostrar que si $f(a) = f(b) = 0$, se tiene que $f(z) = 0$ para todo $z \in [a, b]$.*
2. *Determina el conjunto de valores para el número k para los que la función polinómica $p(x) = x^3 - 3x + k$ se anule en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.*
3. *Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ tales que*

$$f_1(a) < f_2(a) \quad y \quad f_1(b) > f_2(b). \tag{106}$$

   Demuestra que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f_1(c) = f_2(c)$.
4. *Sea f una función continua en el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo ($f([0, 1]) \subset [0, 1]$). Demostrar que existe un punto c en este intervalo tal que $f(c) = c$.*