Tema V. Límites y continuidad de funciones de varias variables.

Índice general

Capítulo 1

Límites y continuidad de funciones de varias variables reales.

En este capítulo veremos los conceptos más importantes relacionados con la continuidad de funciones de varias variables reales.

1. Concepto de una función de varias variables reales.

Durante el presente tema, consideraremos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con sus correspondientes métricas euclídeas d que ya hemos introducido en el primer tema de la asignatura:

$$\begin{aligned} d : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 &\longrightarrow d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \\ d : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Veamos entonces como podemos definir el concepto de función real de varias variables reales, para ello, distinguieremos dos casos, las funciones escalares y las funciones vectoriales.

Definición 1.1. ***Función escalar.*** *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, una función escalar es una aplicación:*

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{2}$$

O lo que es lo mismo, una función escalar, es una aplicación de varias variables cuya imagen está contenida en la recta real.

Ejemplo 1.1. *Un ejemplo de función escalar es la norma en $\mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \|\mathbf{x}\|, \end{aligned} \tag{3}$$

donde:

- *Para $n = 2$:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}. \tag{4}$$

- *Para $n = 3$:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \tag{5}$$

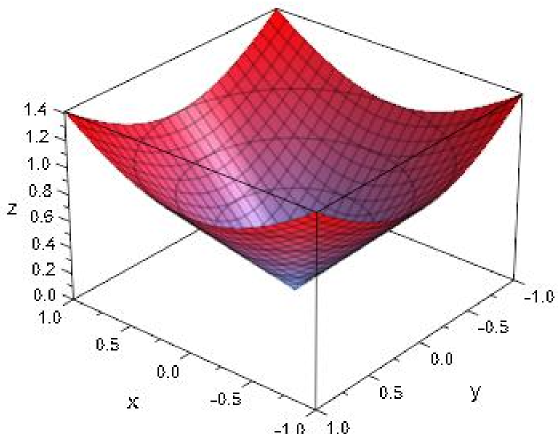
- *Para n en general:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{6}$$

Observación 1.1. *Dada una función escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, su grafo (o gráfica):*

$$Grafo(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) :\ \mathbf{x} \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{7}$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Por lo tanto, las únicas funciones escalares cuyo grafo podremos dibujar, serán aquellas *cuyo conjunto de definición, A, esté contenido en $\mathbb{R}^n$, con $n \leq 2$. Esto es, sólo podremos representar gráficamente las funciones escalares definidas en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^2$. En el caso particular de la función escalar $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^2$, su grafo es el siguiente:*



A la vista de la figura anterior, observamos que las líneas de contorno:

$$f(\mathbf{x}) = c, \tag{8}$$

con c una constante cualquiera, son circunferencias centradas en el origen. Esto es, los elementos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = c$, son circunferencias de radio c centradas en el origen.

Definición 1.2. ***Función vectorial.*** *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, una función vectorial es una aplicación:*

$$\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m. \tag{9}$$

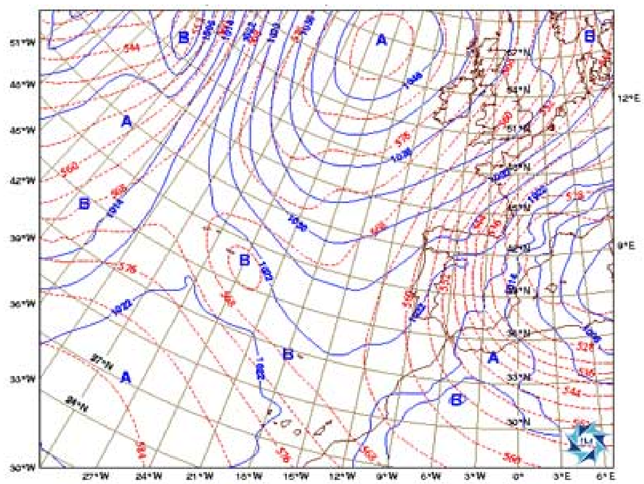
O lo que es lo mismo, una función vectorial, es una aplicación de varias variables reales cuya imagen está contenida en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$ (para $m = 1$, recuperamos la definición de función escalar).

Observación 1.2. *Dada una función vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, su grafo:*

$$\mathit{Grafo}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) : \ \mathbf{x} \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+m}, \tag{10}$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$. Por lo tanto, las únicas funciones vectoriales que podremos representar gráficamente, serán aquellas que cumplan que $n + m \leq 3$. Están en esta situación las funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^n$ con $n \leq 2$ y las funciones vectoriales definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$ con $n \leq 2$.

Observación 1.3. *Otra forma de visualizar una función de dos variables consiste en utilizar un campo escalar en el que se asigna al punto (x, y) el escalar $z = f(x, y)$. Un campo escalar queda caracterizado por sus curvas de nivel (o líneas de contorno) a lo largo de las cuales el valor $f(x, y)$ es constante. El mapa del tiempo de la siguiente figura*



muestra las curvas isobaras, de nivel de presión constante. Las curvas que representan temperatura constante en los mapas del tiempo, se denominan isotermas. Las curvas de nivel en las representaciones de los campos de potencial eléctrico se llaman líneas equipotenciales.

Los mapas de contorno suelen utilizarse para representar regiones de la superficie terrestre, con las curvas de nivel correspondiendo a las líneas de altura constante sobre el nivel del mar. Los mapas de este tipo se llaman mapas topográficos.

Un mapa de contorno traduce la variación de z respecto de x e y gracias al espaciado entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel significa que z está variando lentamente, mientras que curvas de nivel muy juntas quiere decir que z cambia muy deprisa. Además, con el propósito de proporcionar una ilusión tridimensional en un mapa de contorno, es importante elegir valores de c espaciados de manera uniforme.

Observación 1.4. *Una función vectorial tiene distintas componentes que a su vez son funciones escalares. Por ejemplo, dada la función vectorial:*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})\right), \end{aligned} \tag{11}$$

se tiene que sus componentes f_k, con $k = 1, 2, 3$, con funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.2. *La función vectorial:*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} = (x, y, z) &\longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x + y + z - 1, x^2 + z^3) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{12}$$

tiene dos componentes que son funciones escalares:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\longrightarrow f_1(\mathbf{x}) = x + y + z - 1 \in \mathbb{R}, \\ f_2 : \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\longrightarrow f_2(\mathbf{x}) = x^2 + z^3 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ejemplo 1.3. *La función que asigna a cada punto del espacio $\mathbb{R}^3$ su temperatura en cada instante t, es una función escalar definida en $\mathbb{R}^4$:*

$$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{14}$$
$$(x, y, z, t) \longrightarrow T(x, y, z, t).$$

Ejemplo 1.4. *La función que asigna a cada punto del espacio $\mathbb{R}^3$ su velocidad en cada instante t, es una función vectorial definida en $\mathbb{R}^4$ que toma valores en $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{15}$$
$$(x, y, z, t) \longrightarrow \mathbf{v}(x, y, z, t) = \left(v_1(x, y, z, t), v_2(x, t, z, t), v_3(x, y, z, t)\right).$$

Definición 1.3. ***Dominio de definición.*** *Dada una función escalar o vectorial, llamaremos dominio de definición, al conjunto en el cual la función está definida.*

Observación 1.5. *Al contrario de lo que ocurre en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, no es posible establecer una definición de acotación en función de una relación de orden, es por ello, que, en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, definimos el concepto de acotación a través de la norma (ver la definición siguiente).*

Definición 1.4. ***Función acotada.*** *Dada una función escalar o vectorial:*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \tag{16}$$

diremos que es acotada cuando exista un número $K > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq K, \quad \forall \mathbf{x} \in A. \tag{17}$$

Ejemplo 1.5. *La función escalar $f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ es acotada ya que:*

$$\|f(x, y)\| = \left\|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = 1. \tag{18}$$

Ejemplo 1.6. *La función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, no es acotada ya que su norma (valor absoluto), no se puede acotar por una constante en todo $\mathbb{R}^3$.*

Observación 1.6. *En el caso $n = m = 1$, la definición de acotación anterior coincide con la definición de acotación para funciones reales de una variable real.*

2. Límite de una función escalar.

Veamos como podemos extender el concepto de límite a funciones escalares de varias variables reales

Definición 1.5. ***Límite de una función escalar de varias variables reales.*** *Consideremos una función escalar de varias variables reales:*

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{19}$$

y sea $\mathbf{x}_0 \in A'$. Diremos que el límite de f cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ es $\ell \in \mathbb{R}$ cuando:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ t.q.\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \ell\| < \epsilon. \tag{20}$$

En el caso en el que se cumpla la condición anterior, denotaremos por:

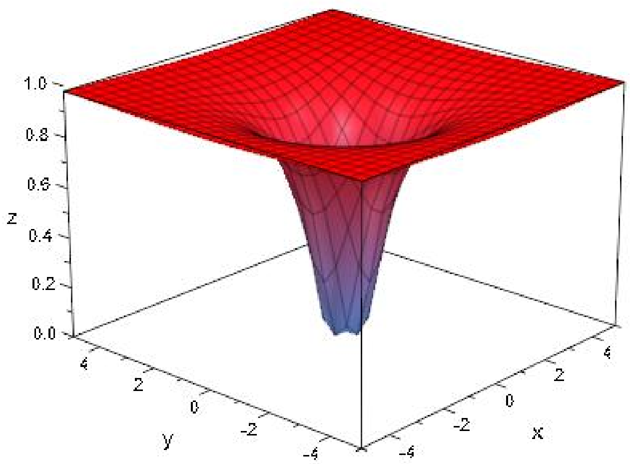
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell. \tag{21}$$

Observación 1.7. *Debemos observar que, al igual que en la definición de límite de una función real de una variable real, no es necesario que $\mathbf{x}_0$ sea un elemento de A para calcular el límite (es suficiente con que $\mathbf{x}_0 \in A'$). Ni siquiera tiene porqué existir $f(\mathbf{x}_0)$. Por ejemplo, la función:*

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, \tag{22}$$

no está definida en el punto $(0,0)$ y, sin embargo, existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0. \tag{23}$$



El límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ *existe, ya que si*

$$\|(x, y)\| < \delta, \tag{24}$$

entonces:

$$|f(x, y) - 0| = \left|e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right| \leq e^{-\frac{1}{\delta^2}} < \epsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \delta > 0, & si \quad \epsilon > 1, \\ \delta \geq \sqrt{\dfrac{-1}{\log(\epsilon)}}, & si \quad \epsilon < 1. \end{cases} \tag{25}$$

A continuación enunciamos un resultado básico sobre álgebra de límites para funciones escalares de varias variables reales.

Teorema 1.1. *(Álgebra de límites.) Sean $x_0 \in A'$ y $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones escalares de varias variables tales que:*

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell_1 \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \ell_2 \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Entonces:

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda\ell_1$ *para cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = \ell_1 + \ell_2$.
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \ell_1\ell_2$.
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, *siempre y cuando* $l_2 \neq 0$.

Los resultados anteriores son válidos en los casos en los que $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, salvo en los casos de indeterminación.

A continuación veamos una serie resultados que pueden resultar de utilidad en el cálculo de límites.

Teorema 1.2. *Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y h_1, h_2, ..., h_n, n funciones reales de una variable real para las cuales es posible calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x_k \to x_{k,0}} h_k(x) = \ell_k < \infty, \quad \forall k = 1, \dots, n. \tag{27}$$

Entonces, existe el siguiente límite:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell, \tag{28}$$

donde $f(\mathbf{x}) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$ y $\ell = \ell_1 \cdots \ell_n$.

Ejemplo 1.7. *Se tiene que:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} = 1, \tag{29}$$

ya que:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{h_1(x)} \underbrace{\cos(y)}_{h_2(y)} \tag{30}$$

y

$$\lim_{x\to 0} h_1(x) = 1, \quad \lim_{y\to 0} h_2(y) = 1. \tag{31}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} = \lim_{x\to 0} h_1(x) \cdot \lim_{y\to 0} h_2(y) = 1. \tag{32}$$

Teorema 1.3. *Sean $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones para las cuales existen los siguientes límites:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \ell_1 < \infty, \tag{33}$$

y

$$\lim_{x\to \ell_1} h(x) = \ell_2 < \infty. \tag{34}$$

Entonces, existe

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (h \circ g)(\mathbf{x}) = \ell_2.$$

Ejemplo 1.8. *Se tiene que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(xy) = 0, \tag{35}$$

ya que $\lim_{(x,y\to(0,0))} xy = 0$ *y* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$.

3. Límites según subconjuntos de una función escalar.

El primer criterio para el cálculo de límites es un criterio negativo, esto es, permite decidir la no existencia de un límite. Su base está en la definición de límite según subconjuntos que daremos a continuación. El concepto de límite según subconjuntos es una extensión de la noción de límite lateral.

Definición 1.6. ***Límite según un subconjunto.*** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función escalar y* $\mathbf{x}_0 \in A'$. *Dado un subconjunto* $S \subset A$ *tal que* $\mathbf{x}_0 \in S'$, *diremos que* ℓ *es el límite cuando* $\mathbf{x}$ *tiende a* $\mathbf{x}_0$ *según el subconjunto* S *cuando:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ t.q. \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \in S, \\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \ell\| \leq \epsilon. \tag{36}$$

En el caso de que se cumpla la condición anterior, denotaremos por:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x} \in S.}} f(\mathbf{x}) = \ell. \tag{37}$$

Ejemplo 1.9. *Consideremos la siguientes función escalar de varias variables reales:*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow f(x,y) = \frac{3\operatorname{sen}^2(x) y}{2x^2 \operatorname{sen}(y)}. \tag{38}$$

Calculemos su límite en el $(0,0)$ *según los siguientes subconjuntos:*

- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. *Sea entonces un elemento* (x,y) *del conjunto anterior, se tiene que:*

$$f(x,y) = \frac{3\operatorname{sen}^2(x) x}{2x^2 \operatorname{sen}(x)} = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}. \tag{39}$$

  Hacer tender (x,y) *a* $(0,0)$ *por el subconjunto* S, *es equivalente a calcular el límite cuando* x *tiende a* 0 *de* $f(x,x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{3}{2}. \tag{40}$$

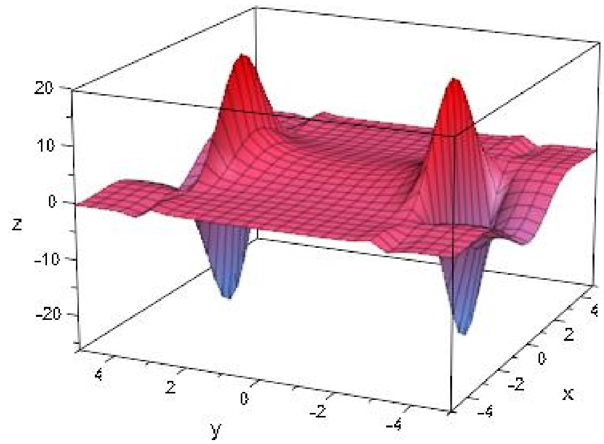
- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}$. *Sea entonces un elemento* (x,y) *del conjunto anterior, se tiene que:*

$$f(x,y) = \frac{3\operatorname{sen}^2(x)}{2\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}. \tag{41}$$

  Hacer tender (x,y) *a* $(0,0)$ *por el subconjunto* S, *es equivalente a calcular el límite cuando* x *tiende a* 0 *de* $f(x,x^2)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x^2)2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\cos(x^2)} = \frac{3}{2}\cdot 1 \cdot 1. \tag{42}$$

Gráficamente, la función se comporta de la siguiente forma:



Un caso particular de límites según subconjuntos en $\mathbb{R}^2$, son los límites direccionales, en los cuales nos acercamos al punto a través de una determinada recta que pase por el punto.

Definición 1.7. ***Límites direccionales en*** $\mathbb{R}^2$***.*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar e* $y = mx + n$ *una recta que pasa por el punto* (a, b)*, definimos el límite direccional de* f *en la dirección marcada por la recta* $y = mx + y$ *como el límite según el subconjunto de puntos de la recta:*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=mx+n}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x, mx+n). \tag{43}$$

Ejemplo 1.10. *Consideremos la función real definida, en el conjunto* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \neq x^2\}$*:*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 - y}. \tag{44}$$

Esta función tiene, en $(0, 0)$*, límites según todas las direcciones y estos límites valen* 0*, ya que:*

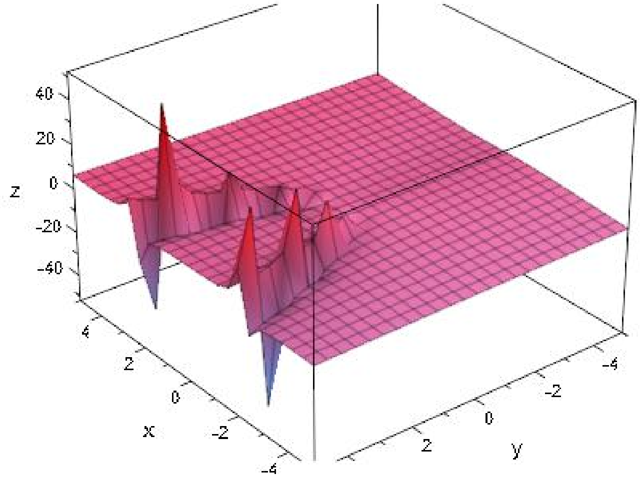
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y^2} = 0, \tag{45}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - mx} = 0, \tag{46}$$

para cualquier valor de la pendiente m de la recta por la cual nos acercamos al $(0, 0)$*. Sin embargo, según la curva* $y = x^2 - x^3$ *(que pasa por el origen):*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x^3}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2 - x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - x^2 + x^3} = 1 \neq 0. \tag{47}$$

Gráficamente, el comportamiento de la función es el siguiente:



La siguiente proposición nos garantiza que si existe el límite de una función escalar de varias variables reales en un punto, entonces también existen los límites según cualquier subconjunto y tienen el mismo valor.

Proposición 1.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de varias variables reales y sea $\mathbf{x}_0 \in A'$. Si existe:*

(48) $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell,$$

entonces, existen:

(49) $$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in S}} f(\mathbf{x}) = \ell, \quad \forall S \subset A \ t.q.\ \mathbf{x}_0 \in S'.$$

Observación 1.8. *Puesto que es imposible estudiar el límite de todos los posibles caminos por los cuales nos podamos acercar a $\mathbf{x}_0$, el concepto de límite según un subconjunto sólo nos proporciona un criterio negativo para el cálculo de límites.*

Corolario 1.1. *(Criterio negativo para el cálculo de límites.) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de varias variables reales y sea $\mathbf{x}_0 \in A'$. Supongamos que existen dos subconjuntos $S_1, S_2 \subset A$, con $x_0 \in S_1', S_2'$, tales que:*

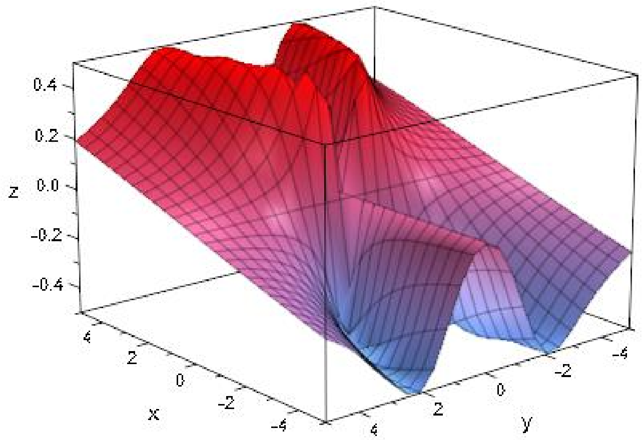
(50) $$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in S_1}} f(\mathbf{x}) \neq \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in S_2}} f(\mathbf{x}).$$

Entonces, no existe el límite cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ de la función f.

Ejemplo 1.11. *Veamos cómo podemos aplicar el corolario anterior para demostrar que no existe el límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ de la siguiente función escalar definida en $\mathbb{R} - \{(0, 0)\}$:*

(51) $$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Gráficamente, la función anterior se comporta de la siguiente manera:



Se observa un comportamiento diferente de la función cuando nos acercamos al punto $(0,0)$ *por las curvas* $x = y^2$ *y* $x = -y^2$*:*

- *Límite cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y^2\}$*. Se tiene, dado un elemento* $(x,y) \in S_1$ *que:*

$$f(x,y) = \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}. \tag{52}$$

Por lo tanto, el límite cuando (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* S_1*:*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = \frac{1}{2}. \tag{53}$$

- *Límite cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -y^2\}$*. Se tiene, dado un elemento* $(x,y) \in S_2$ *que:*

$$f(x,y) = \frac{-y^2 y^2}{y^4 + y^4} = -\frac{1}{2}. \tag{54}$$

Por lo tanto, el límite cuando (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* S_2*:*

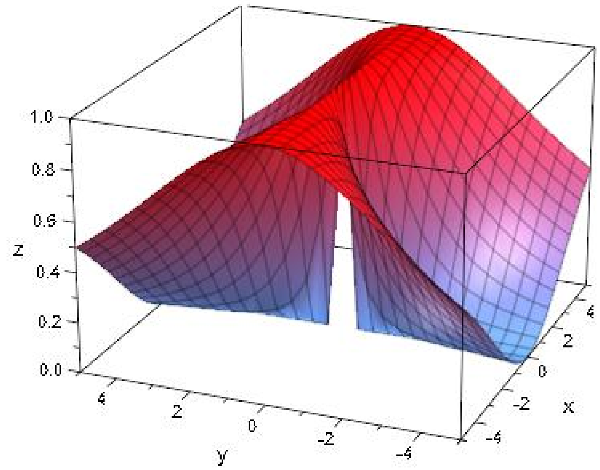
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = -\frac{1}{2}. \tag{55}$$

Hemos encontrado dos conjuntos tales que el límite cuando (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por ellos nos da valores diferentes, por lo tanto, en base al corolario anterior, tenemos que no existe el límite cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *de la función.*

Ejemplo 1.12. *Veamos que no existe el límite cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *de la siguiente función escalar de varias variables reales definida en* $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$*:*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \tag{56}$$

Gráficamente, la función anterior presenta el siguiente comportamiento:



A la vista de la gráfica anterior, observamos que la función presenta un comportamiento claramente diferenciado cuando nos acercamos a $(0,0)$ *por los puntos* $x=0$ *o por los puntos* $y=0$*. En efecto:*

- *Límite de* f *cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0\}$*. Dado un punto* $(x,y) \in S_1$*, se tiene que:*

$$f(x,y) = 0. \tag{57}$$

Por lo tanto, el límite de f *cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* S_1*:*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = 0. \tag{58}$$

- *Límite de* f *cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$*. Dado un punto* $(x,y) \in S_2$*, se tiene que:*

$$f(x,y) = 1. \tag{59}$$

Por lo tanto, el límite de f *cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *por el conjunto* S_2*:*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = 1. \tag{60}$$

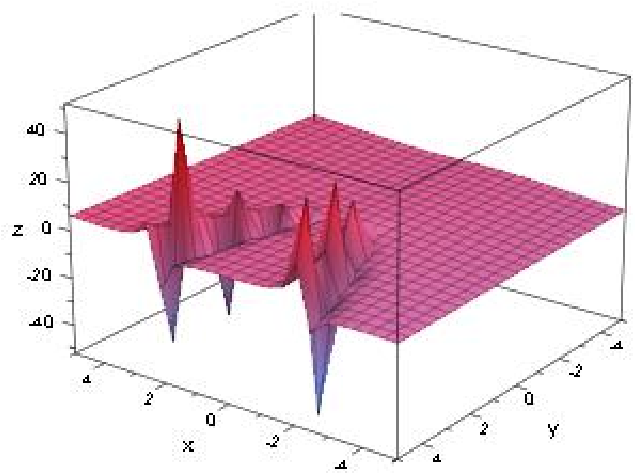
En vista que hemos encontrado dos conjuntos para los cuales el límite de la función cuando (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *es diferente, concluímos, en base al corolario anterior, que no existe el límite de la función* f *cuando* (x,y) *tiende a* $(0,0)$*.*

Observación 1.9. *Es evidente que si una función escalar* f *tiene límite* ℓ *en un punto, entonces la función tiene límite según toda recta que pase por el punto. Sin embargo, no es suficiente, con que* f *tenga límite según todas las direcciones, para poder garantizar que* f *tenga límite en el punto, como veremos en el siguiente ejemplo. En tal supuesto, lo que sólo se puede asegurar, con carácter general, es que si* f *tuviera límite en el punto, dicho límite sería igual al valor de los límites según todas las direcciones.*

Ejemplo 1.13. *Consideremos la función real definida, en el conjunto* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq x^2\}$*, mediante la expresión:*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 - y}. \tag{61}$$

Gráficamente, la función anterior presenta el siguiente comportamiento:



Esta función tiene, en $(0,0)$*, límites según todas las direcciones y estos límites valen* 0*, ya que:*

(62) $$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y^2} = 0,$$

y

(63) $$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - mx} = 0,$$

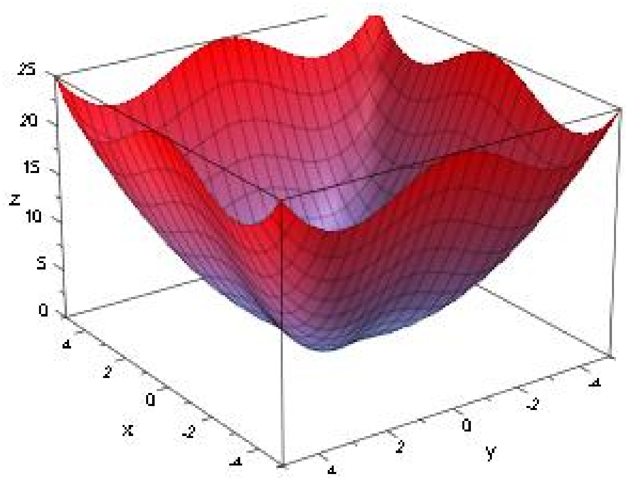
para cualquier valor de la pendiente m de la recta por la cual nos acercamos al $(0,0)$*. Sin embargo,* f *no tiene límite en el* $(0,0)$*, ya que según la curva* $y = x^2 - x^3$ *(que pasa por el origen) tiene límite distinto de* 0 *(si existiese el límite de* f *en* $(0,0)$*, éste tendría que ser* 0*, que es el valor que toman los límites direccionales), ya que:*

(64) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y = x^2 - x^3}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2 - x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - x^2 + x^3} = 1 \neq 0.$$

Ejemplo 1.14. *Consideremos la función real definida, en el conjunto* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \neq (0,0)\}$*, mediante la siguiente expresión:*

(65) $$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Gráficamente, la función anterior presenta el siguiente comportamiento:



Veamos que dicha función tiene límite en el $(0, 0)$*. Para comprobarlo, seguiremos los siguientes pasos:*

1. *Comprobamos la existencia de los límites direccionales. Si existen los límites direccionales independientemente del valor de la pendiente y son iguales, sabremos que, en el caso de existir el límite, éste será igual al de los límites direccionales. Si estamos en este supuesto, pasaremos al punto 2, en caso contrario, habremos demostrado la no existencia de límite. Veamos qué ocurre en nuestro ejemplo:*

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{y^2} = 0, \tag{66}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + m^4 x^4}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{1 + m^4}{1 + m^2} = 0. \tag{67}$$

El valor del límite direccional obtenido es cero en cualquier dirección, por lo que, si f *tiene límite en* $(0, 0)$*, dicho límite ha de ser cero.*

2. *Comprobemos que, en efecto, el límite de la función en el punto* $(0, 0)$ *es cero, para ello, debemos aplicar la definición de límite y encontrar, para cualquier* $\epsilon > 0$*, un* $\delta > 0$ *tal que si* $\|(x, y)\| < \delta$*, entonces* $|f(x, y)| < \epsilon$*. Por un lado:*

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2. \tag{68}$$

Por lo tanto, tomando $\delta < \sqrt{\epsilon}$*, se tendrá que, si* $\|(x, y)\| < \delta$*, entonces:*

$$|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|^2 = \delta^2 < \epsilon, \tag{69}$$

tal y como queríamos demostrar.

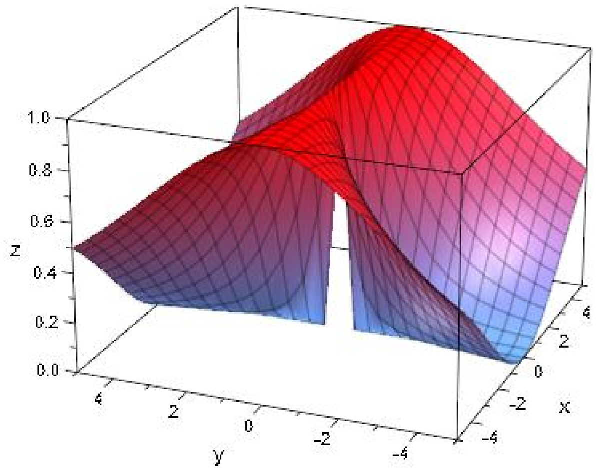
Ejemplo 1.15. *Consideremos* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

1 *Límites direccionales:*

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0 \tag{70}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1}{1 + m^2}. \tag{71}$$

Los límites direccionales existen, pero son distintos en función de la dirección con la que nos acerquemos al origen. No tiene sentido pasar al paso 2.



4. Cambio de coordenadas.

Veamos a continuación como el uso de coordenadas polares ($\mathbb{R}^2$) o esféricas ($\mathbb{R}^3$) puede simplificar el cálculo de límites de una función escalar.

La ubicación de un punto dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ está unívocamente determinado por la distancia ρ del punto al origen y el ángulo θ entre el semieje x positivo y la semirrecta que parte del origen y pasa por el punto. Las cantidades ρ y θ son las coordenadas polares del punto (x, y).

Las coordenadas cartesianas (x, y) pueden recuperarse a partir de las polares mediante las siguientes relaciones

(72) $$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Entonces es posible expresar los valores de una cierta función $f(x, y)$ en función de las coordenadas polares $f(\rho, \theta)$ de la siguiente forma:

(73) $$f(\rho, \theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$$

Puesto que ρ es la distancia del punto al origen, podemos aproximarnos al $(0, 0)$ tomando límite cuando ρ tiende a cero. Así, a primera vista, parece que el estudio de:

(74) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

se reduce al estudio de:

(75) $$\lim_{\rho\to 0} f(\rho, \theta)$$

para todos los posibles valores de θ. Sin embargo, es importante notar que, para un valor fijo del ángulo θ, hacer el límite de $f(\rho, \theta)$ cuando ρ tiende a cero es equivalente a hacer el límite direccional de $f(x, y)$ sobre la semirecta determinada por el ángulo θ que es parte de la recta de ecuación $y = \tan(\theta)x$ y, en consecuencia, el estudio del límite

(76) $$\lim_{\rho\to 0} f(\rho, \theta)$$

no es otra cosa que el estudio de los límites direccionales. Como ya sabemos, puede no existir el límite a pesar de que todos los límites direccionales coincidan.

Ejemplo 1.16. *Como ejemplo del uso de las coordenadas polares para calcular límites direccionales, consideremos, para cada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*, la función:*

$$f(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \tag{77}$$

Cambiando a coordenadas polares como hemos explicado, obtenemos

$$f(\rho, \theta) = \arccos\left(\frac{\rho\cos(\theta)}{\rho}\right) = \rho \tag{78}$$

y es trivial calcular, para cada θ *fijo, el límite direccional*

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho, \theta) = \theta. \tag{79}$$

Como el límite depende de θ*, el límite de* $f(x, y)$ *cuando* (x, y) *tiende a* $(0, 0)$ *no existe.*

Tras el ejemplo anterior, cabe preguntarse si vale la pena malgastar nuestro tiempo en el estudio de límites usando coordenadas polares, habida cuenta de que el estudio de los límites direccionales empleando coordenadas cartesianas no es, en general, difícil. Aparte de la razón de que en algunos casos, como en el ejemplo anterior, los límites direccionales son más fáciles de calcular usando coordenadas polares, existe la posibilidad de que las coordenadas polares simplifiquen el problema.

Se tienen los siguientes resultados relacionados con el estudio de la existencia de límite en coordenadas polares:

Teorema 1.4. *Dada una función escalar* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y un número real* $\ell \in \mathbb{R}$*, se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = l.$
2. *Existe* $\rho_0 > 0$ *y una función* $H : (0, \rho_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{\rho\to 0} H(\rho) = 0$ *y*

$$|f(\rho, \theta) - \ell| \leq H(\rho) \quad \forall \rho \in (0, \rho_0). \tag{80}$$

Observación 1.10. *Esto es, si somos capaces de acotar* $|f(\rho, \theta) - \ell|$ *por una función que sólo dependa de* ρ *y cuyo límite sea cero al tomar* ρ *tendiendo a* 0*. Tendremos garantizado la existencia del límite.*

Ejemplo 1.17. *Veamos cómo podemos determinar la existencia del siguiente límite empleando polares:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0. \tag{81}$$

Si escribimos la función escalar anterior en polares:

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4\cos^4(\theta) + \rho^4\sin^4(\theta)}{\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta)} = \rho^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)), \tag{82}$$

observamos que converge a cero independientemente del valor de θ*. Por lo tanto, si somos capaces de acotar*

$$|f(\rho, \theta) - 0| = \rho^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \tag{83}$$

por una función $H(\rho)$ que tienda a cero cuando $\rho \to 0$, habremos terminado. Ahora bien:

$$\rho^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \leq \underbrace{2\rho^2}_{H(\rho)}, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi), \tag{84}$$

además,

$$\lim_{\rho\to 0} H(\rho) = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^2 = 0. \tag{85}$$

Por lo tanto, existe el límite de la función cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Ejemplo 1.18. *Veamos que no existe el siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \tag{86}$$

Escribamos la función escalar en coordenadas polares:

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^2 \cos^2(\theta)}{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)} = \cos^2(\theta). \tag{87}$$

Observamos que al hacer tender ρ hacia 0, el límite depende de θ:

$$\lim_{\rho\to 0} \cos^2(\theta) = \cos^2(\theta), \tag{88}$$

por lo tanto, no existe el límite. Depende de la dirección por la que nos acercamos al origen.

Como corolario del teorema anterior tenemos:

Corolario 1.2. *En las hipótesis del Teorema anterior, supongamos además que $f(\rho, \theta) = g(\rho)$. Entonces son equivalentes:*

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \ell$.
2. $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = \ell$.

Ejemplo 1.19. *Consideremos la función*

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)} \tag{89}$$

definida en aquellos puntos (x, y) para los cuales $\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \neq 0$. En este caso

$$f(\rho, \theta) = g(\rho) = \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\operatorname{sen}(\rho)}, \tag{90}$$

de modo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0. \tag{91}$$

5. Límite de una función vectorial.

En esta sección veremos la relación existente entre el límite de una función vectorial y el límite de sus componentes. Dicha relación nos permitirá estudiar el límite de una función vectorial en base a los límites de sus componentes.

Comencemos definiendo el concepto de límite para una función vectorial.

Definición 1.8. ***Límite de una función vectorial en un punto.*** *Sea* $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función vectorial y sea* $\mathbf{x}_0 \in A'$. *Diremos que el límite de* $\mathbf{f}$ *cuando* $\mathbf{x}$ *tiende a* $\mathbf{x}_0$ *es* $\ell \in \mathbb{R}^m$*, cuando:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ t.q. \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon. \tag{92}$$

En el caso de que se cumpla la condición anterior, lo denotaremos por:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell. \tag{93}$$

Teorema 1.5. *(Relación entre el límite de una función vectorial y el límite de sus componentes). Sea* $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función vectorial y sea* $\mathbf{x}_0 \in A'$. *Se tiene que existe*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \tag{94}$$

si y solamente si existen los límites de todas las componentes f_i *de* $\mathbf{f}$ *cuando* $\mathbf{x}$ *tiende a* $\mathbf{x}_0$ *y son iguales a* ℓ_i*:*

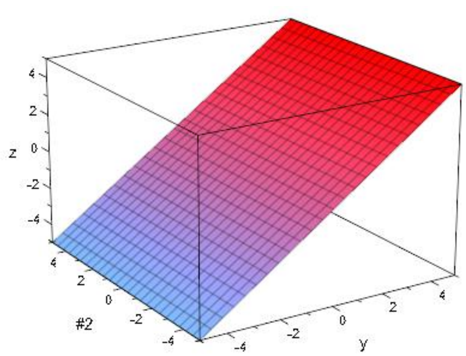
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m. \tag{95}$$

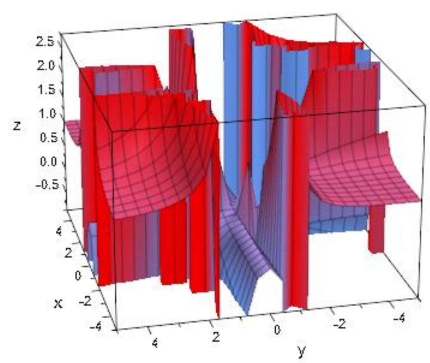
Ejemplo 1.20. *Veamos que no existe el límite cuando* (x, y) *tiende a* $(0, 0)$ *de la siguiente función vectorial definida en* $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$*:*

$$\mathbf{f}(x, y) = \Bigg(\underbrace{y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{\frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}}_{f_2(x,y)} \Bigg). \tag{96}$$

Veamos cómo se comportan gráficamente cada una de las componentes de la función vectorial anterior:

$f_1(x, y)$ $\qquad\qquad$ $f_2(x, y)$





A la vista de los resultados anteriores, observamos que el comportamiento de la segunda componente hace pensar que no existe el límite cuando (x, y) *tiende a* $(0, 0)$*. En efecto:*

- *Límite de f_2 cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por el conjunto $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Dado un punto $(x, y) \in S_1$, se tiene que:*

$$f_2(x, y) = 1. \tag{97}$$

Por lo tanto, el límite de f_2 cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por el conjunto S_1:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f_2(x, y) = 1. \tag{98}$$

- *Límite de f_2 cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por el conjunto $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Dado un punto $(x, y) \in S_2$, se tiene que:*

$$f_2(x, y) = 0. \tag{99}$$

Por lo tanto, el límite de f_2 cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por el conjunto S_2:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f_2(x, y) = 0. \tag{100}$$

Por lo tanto, no existe el límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ de la componente f_2 y, entonces, no existe el límite de la función vectorial $\mathbf{f}$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

6. Continuidad de una función escalar.

En esta sección trabajaremos con la continuidad de funciones escalares, para lo cual, será necesario comenzar por definir el concepto de función escalar continua.

Definición 1.9. ***Función escalar continua en un punto.*** *Consideremos una función escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que la función f es continua en un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ cuando se cumpla:*

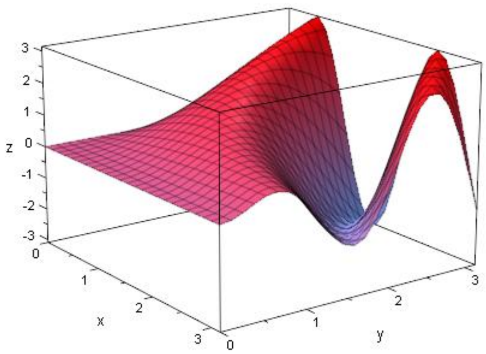
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ t.q.\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon. \tag{101}$$

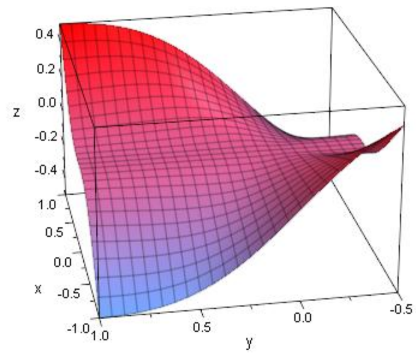
Observación 1.11. *Al igual que ocurría en el caso de las funciones reales de variable real, una función es continua en un punto $\mathbf{x}_0 \in A'$ si y solamente si existe el límite de la función cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ y es igual al valor de la función en el punto.*

Ejemplo 1.21. *Las siguientes, son funciones continuas:*

$$\begin{aligned} f \,:\, [0,\pi]\times[0,\pi] &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to y\,\mathrm{sen}(xy). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \,:\, [-1,1]\times[-\tfrac{1}{2},1] &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

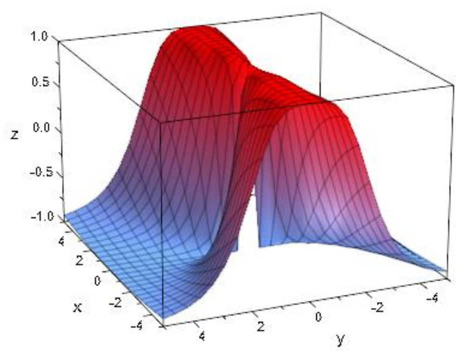




Ejemplo 1.22. *La siguiente aplicación escalar definida en* $\mathbb{R}^2$ *no es continua en* $(0,0)$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{102}$$

Veamos primeramente cómo se comporta gráficamente dicha función en un entorno del $(0,0)$*:*



Observamos que el límite cuando (x,y) *tiende a* $(0,0)$ *no existe ya que:*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\; x=0\}}} f(x,y) = -1, \tag{103}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\; y=0\}}} f(x,y) = 1. \tag{104}$$

Al no existir el límite cuando (x,y) *tiende a* $(0,0)$*, la función no es continua en el* $(0,0)$*.*

Definición 1.10. ***Función escalar continua.*** *Dada una función escalar* $f \,:\, A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, diremos que es continua, si y solamente si, es continua en todos los puntos de su dominio de definición.*

Ejemplo 1.23. *La función escalar:*

$$f(x,y) = ysen(xy) \tag{105}$$

definida en el conjunto $A = [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$ es continua en todos los puntos de su dominio de definición, por lo tanto, es continua.

7. Continuidad de una función vectorial.

Veamos la relación existente entre la continuidad de una función vectorial y la continuidad de cada una de sus componentes. Para ello, comenzaremos definiendo el concepto de función vectorial continua en un punto y función vectorial continua.

Definición 1.11. ***Función vectorial continua en un punto.*** *Consideremos una función vectorial $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que la función f es continua en un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ cuando se cumpla:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ t.q. \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon. \tag{106}$$

Definición 1.12. ***Función vectorial continua.*** *Dada una función vectorial $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que es continua, si y solamente si, es continua en todos los puntos de su dominio de definición.*

El siguiente teorema nos relaciona la continuidad de una función vectorial con la continuidad de cada una de sus componentes.

Teorema 1.6. *(Relación entre la continuidad de una función en un punto y la continuidad de cada una de sus componentes.) Sea $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial y sea $\mathbf{x}_0 \in A$. La función $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si sus componentes f_i son continuas en $\mathbf{x}_0$.*

Ejemplo 1.24. *La función vectorial definida en $\mathbb{R}^2$:*

$$\mathbf{f}(x, y) = \Big(\underbrace{x^2 + y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{x^3 + 4x}_{f_2(x,y)} \Big) \tag{107}$$

es continua en $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| &= \|(x^2 + y - x_0^2 - y_0, x^3 + 4x - x_0^3 - 4x_0)\| \\ &\leq \|(x^2 - x_0^2, x^3 - x_0^3)\| + \|(y - y_0, 4x - 4x_0)\| \\ &\leq \underbrace{\|(x^2 - x_0^2, x^3 - x_0^3)\|}_{\textit{Difícil de acotar en función de } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + 4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \end{aligned} \tag{108}$$

Observamos que demostrar la continuidad de una función empleando la definición puede resultar complicado, es por ello que serán de utilidad los resultados expuestos en la siguiente sección.

8. Propiedades de las funciones continuas.

En primer lugar, estudiaremos la composición de funciones continuas.

Teorema 1.7. *(Composición de funciones continuas.) Sea $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ y sea $\mathbf{g} : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continua en el punto $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tal que $\mathbf{f}(A) \subset B$. Se tiene entonces que la composición $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en el punto $\mathbf{x}_0$.*

Ejemplo 1.25. *$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ es continua, ya que $f(x, y) = (h_2 \circ h_1)(x, y)$, donde:*

$$\begin{aligned} h_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\longrightarrow h_1(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \quad \textit{continua,} \\ h_2 : x \in (0, \infty) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow h_2(x) = \log(x) \qquad \textit{continua.} \end{aligned} \tag{109}$$

Debemos observar que la composición de las aplicaciones h_1 y h_2 está bien definida ya que $h_1(x,y) = x^2+y^2+1 > 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A continuación pasamos a enunciar un resultado relativo al álgebra de las funciones continuas.

Teorema 1.8. *(Álgebra de las funciones continuas.) Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dos aplicaciones continuas en un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:*

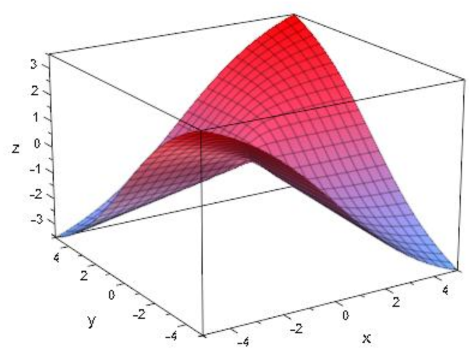
1. *$\lambda \mathbf{f}$ es continua en el punto $\mathbf{x}_0$.*
2. *$\mathbf{f} + \mathbf{g}$ es continua en el punto $\mathbf{x}_0$.*
3. *$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >$ es continua en el punto $\mathbf{x}_0$.*
4. *Si $m = 1$ y $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ es continua en $\mathbf{x}_0$.*

Ejemplo 1.26. *$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x,y) = x^3+4x$ es continua, es la suma de $f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f_1(x,y) = x^3$ y $f_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f_2(x,y) = 4x$ (continuas).*

Ejemplo 1.27. *Estudiemos la continuidad de la siguiente función escalar:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{110}$$

Se tiene que para $(x,y) \neq 0$, la función escalar $f(x,y)$ se puede obtener a partir de operaciones elementales y composición de funciones continuas, por lo tanto, es claro que $f(x,y)$ es continua en cualquier punto $(x,y) \neq 0$. El problema reside en el punto $(0,0)$. Gráficamente, el comportamiento de la función es el siguiente:



Veamos entonces que, efectivamente, la función es continua en el punto $(0,0)$. Por un lado:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\|(x,y)\|} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} \leq \|(x,y)\|. \tag{111}$$

Por lo tanto, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, tomando $\delta = \epsilon$, se tiene que si $\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| < \delta$, entonces:

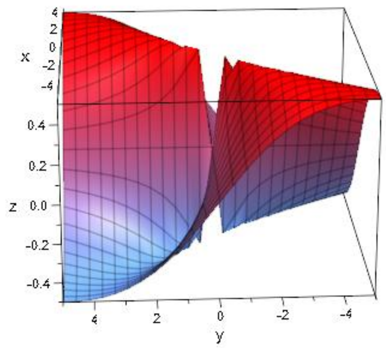
$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \|(x,y)\| < \delta = \epsilon. \tag{112}$$

Concluímos entonces que f es continua en el $(0,0)$.

Ejemplo 1.28. *Estudiemos la continuidad de la siguiente aplicación:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{113}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene que la función se puede expresar en *función de operaciones básicas y composición de funciones elementales continuas. Veamos lo que ocurre en el punto* $(0,0)$*. Gráficamente, el comportamiento de la función es:*



Observamos que el punto $(0,0)$ *es un punto problemático, de hecho, para este punto, no existe el límite ya que:*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x=y\}}} f(x,y)=\frac{1}{2}, \tag{114}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x=-y\}}} f(x,y)=-\frac{1}{2}. \tag{115}$$

Esto es, existen dos conjuntos para los cuales el límite a través de ellos es distinto.

9. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *Calcula los siguientes límites:*

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+3x^2y-3y^2x+5}{1+x^2+y^2}$.
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2y}$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y\,\mathrm{sen}(x)}{x}$.
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{sen}(xy)}{xy}$.
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^3}$.
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x+y^2, \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\right)$.
11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \mathrm{sen}(xy)\right)$.

Ejercicio 1.2. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones de varias variables:*

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$, *en el punto* $(0,0)$.
3. $f(x,y)=\begin{cases}y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

5. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.