Tema VI. Cálculo diferencial en una variable.

Índice general

Capítulo 1

Cálculo diferencial en una variable.

1. Concepto de derivada.

1.1. Definición y propiedades.

Definición 1.1 (Función derivable en un punto). *Sea f una función real definida en un intervalo abierto I y sea a un punto de I. Se dice que f es derivable en a si existe y es un número real el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{1}$$

Cuando f es derivable en a, el valor del límite anterior recibe el nombre de derivada de f en a, y suele denotarse por $f'(a)$; es decir,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2}$$

si tal límite existe y es finito.

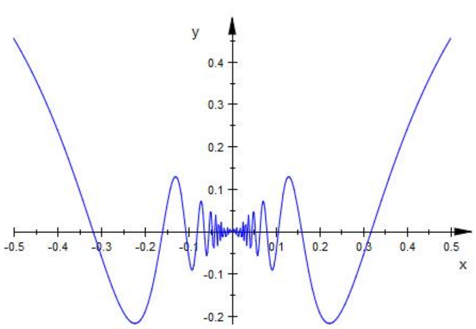
Observación 1.1. *Otra forma equivalente de definir el concepto de derivada (2) es:*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

A lo largo de este capítulo emplearemos la definición que mejor se adapte a nuestros propósitos.

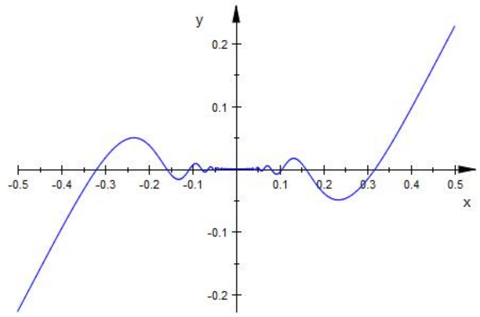
Ejemplo 1.1. *La función* $\phi(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$ *no es derivable en* 0 *ya que no existe*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h}\right). \tag{3}$$



Ejemplo 1.2. *La función* $\phi(x)=\begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$ *es derivable en* 0 *ya que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h}\right)=0. \tag{4}$$



Definición 1.2 (Función derivable). *Diremos que la función f es derivable en $\boldsymbol{I}$ si f es derivable en cada punto de $\boldsymbol{I}$.*

Definición 1.3 (Derivadas laterales). *Se definen la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda de la función f en el punto a (**derivadas laterales**), y se representan por $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ respectivamente, si el anterior límite existe cuando $x \to a^+$ o $x \to a^-$,*

(5)
$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \, ,$$

y, evidentemente, para que la función f sea derivable en a es necesario y suficiente que admita derivadas laterales en dicho punto y que éstas sean iguales.

Ejemplo 1.3. *La función $f(x) = |x|$ no es derivable en el cero ya que sus derivadas laterales son distintas:*

(6)
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

(7)
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

Observación 1.2. *Debemos tener en cuenta las siguientes observaciones:*

1. *En la definición de derivada, el cociente*

(8)
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

que se denomina cociente incremental o cociente de incrementos de la función f en el punto a, es la pendiente de la recta secante a la curva $y = f(x)$ pasando por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$.

2. *Es posible utilizar otras notaciones, tanto para la derivada como para el límite*

(9)
$$\begin{aligned} f'(a) &= f^{(1)}(a) = f^{(1}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(a) \, , \ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} \, , \ \ldots . \end{aligned}$$

3. *A la derivada en un punto también se le denomina razón instantánea de cambio de la función f en el punto dado y sirve para medir el cambio instantáneo de la variable dependiente respecto a la variable independiente.*
4. *Para definir la derivada no es necesario que el dominio de la función f sea un intervalo: la definición anterior tiene sentido para cualquier tipo de dominio $\boldsymbol{D}$ con tal de que el punto a, además de estar en $\boldsymbol{D}$, sea un punto de acumulación de $\boldsymbol{D}$.*

Definición 1.4 (Función derivada). *Sea f una función real definida en un intervalo abierto I y sea C el subconjunto de puntos de I en los que f es derivable (naturalmente, puede ser $C \neq I$). Se define la función derivada de f, y se denota por f' o $f^{(1)}$ u otras notaciones análogas a las de la derivada en un punto, como la función que asigna a cada punto $x \in C$ el valor de la derivada de f en el dicho punto x.*

$$f' : x \in C \to f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{10}$$

Ejemplo 1.4. *Veamos algunos ejemplos de funciones derivadas.*

1. *Dada $f(x) = c$, donde c es una constante real, se tiene que $f'(x) = 0$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

2. *Dada $f(x) = ax + b$, se tiene que $f'(x) = a$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a. \tag{12}$$

3. *Dada $f(x) = x^2$, se tiene que $f'(x) = 2x$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0. \tag{13}$$

4. *$\forall k \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^k$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = kx^{k-1}$:*

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} x^{k-l} h^l - x^k}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{l=1}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} x^{k-l} h^l}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{kx^{k-1} h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{l=2}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} x^{k-l} h^l}{h} \\
&= kx^{k-1}.
\end{aligned} \tag{14}$$

5. *La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es derivable con función derivada $f'(x) = \cos(x)$:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{2}{x - a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \\
&= \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}((x-a)/2)}{(x-a)/2} = \cos a
\end{aligned} \tag{15}$$

6. *La función $f(x) = \mathrm{e}^x$ es derivable y su función derivada es ella misma. En efecto, la derivada en un punto a es:*

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \mathrm{e}^a \, \frac{\mathrm{e}^{x-a} - 1}{x - a}. \tag{16}$$

Escribiendo $\mathrm{e}^{x-a} - 1 = r$, es decir, $(x - a) \ln e = \ln(1 + r)$, el límite anterior se reescribe como:

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{e}^a \frac{r}{\ln(1+r)} = \mathrm{e}^a\,, \tag{17}$$

ya que,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln(1+r)}{r} = \lim_{r\to 0} \ln(1+r)^{1/r} = \ln e = 1\,. \tag{18}$$

La derivabilidad de una función en un punto es una condición más fuerte que la continuidad como se pone de manifiesto en el siguiente teorema.

Teorema 1.1 (Derivabilidad implica continuidad.). *Si una función f, definida en un intervalo I, es derivable en un punto $a \in I$, entonces es continua en dicho punto.*

Observación 1.3 (El recíproco no es cierto). *Si una función es continua no tiene por qué ser derivable.*

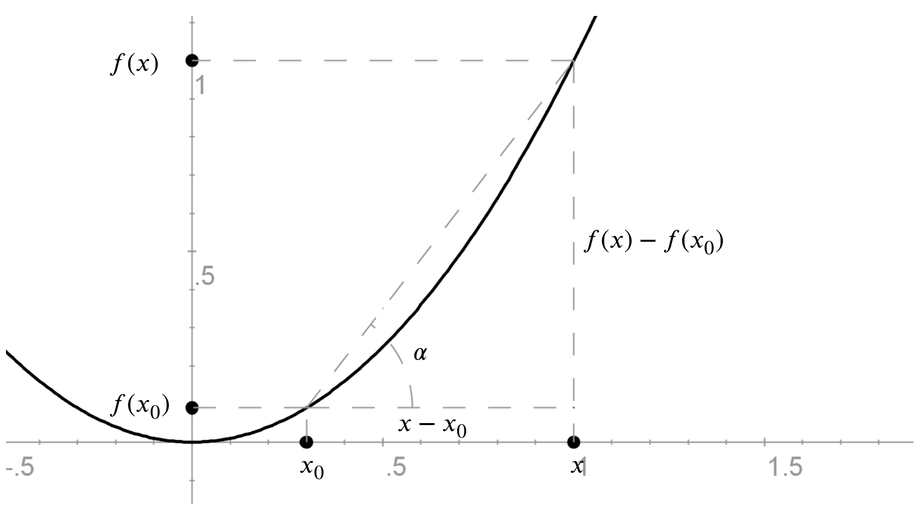
Ejemplo 1.5. *Consideremos los siguientes ejemplos*

- $\phi(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *es continua en $x_0 = 0$ y, sin embargo, no es derivable en $x_0 = 0$.*
- $\phi(x) = |x|$ *es continua en* 0 *y, sin embargo, no es derivable en el* 0.

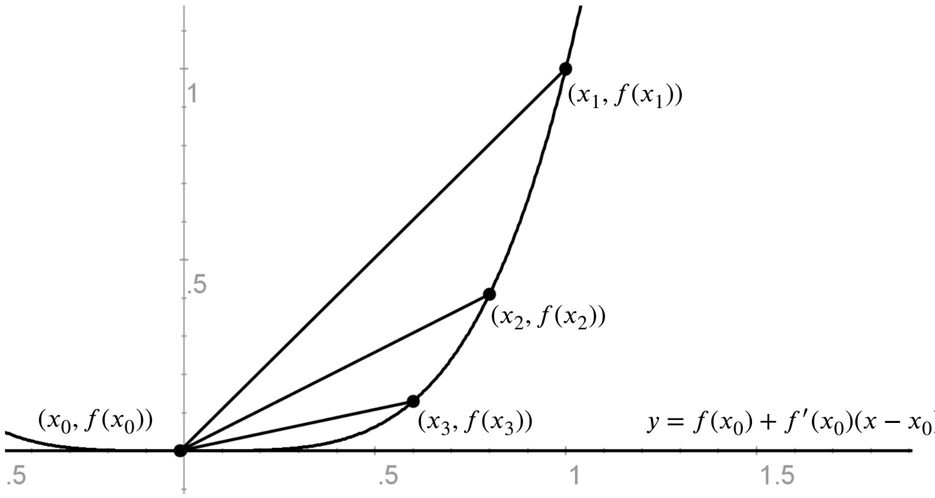
1.2. Interpretación geométrica y física de la derivada. Sea f una función real definida en un intervalo abierto I y sea a un punto de I. Considerando la gráfica de la función f, $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in I\}$, el cociente incremental:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{19}$$

representa geométricamente la pendiente de la recta pasando por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ de la gráfica de la función.



Si la función f es derivable en el punto x_0, dicho cociente tenderá hacia el número real $f'(x_0)$ cuando x tiende a x_0.



La derivada $f'(x_0)$ puede ser interpretada entonces como la pendiente de una recta pasando por el punto $(x_0, f(x_0))$, recta que intuitivamente se podría considerar como la posición límite de las rectas antes consideradas cuando el punto $(x, f(x))$ tiende sobre la gráfica a $(x_0, f(x_0))$.

A la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ se llama recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de esta recta es:

(20) $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

y es, entre todas las rectas que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$, la que ``mejor aproxima"la gráfica de la función f en las proximidades de dicho punto en el sentido de que:

(21) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0\,.$$

En Física, si a cada valor x de una determinada magnitud (la variable independiente) le corresponde el valor $f(x)$ de una segunda magnitud (la variable dependiente), el cociente de incrementos

(22) $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

corresponde a la variación media de la variable dependiente en el intervalo $[x_0, x]$ (o $[x, x_0]$) de variación de la variable independiente, y la derivada $f'(x_0)$ (suponiendo que exista) corresponde a la variación instantánea de la variable dependiente en el punto x_0. Por ejemplo, si la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es el espacio recorrido por un móvil se tendrán los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea; cuando la variable dependiente es la velocidad, se pasará a los conceptos de aceleración media y aceleración instantánea.

1.3. Cálculo de derivadas. El proceso de hallar la derivada de una función recibe el nombre de derivación. Este proceso es por lo general laborioso cuando exige recurrir a la definición de la derivada. A continuación se establecerán unos resultados que relacionan la noción de derivada con las operaciones algebraicas entre funciones, y que ofrecen un proceso mecánico para derivar una amplia clase de funciones, formadas a partir de unas pocas funciones sencillas.

Teorema 1.2. *Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un punto $a \in I$ y λ un número real. Se verifica entonces que:*

(a) *La suma* $f+g$ *es derivable en* a *y además, la derivada de la suma es:*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,. \tag{23}$$

(b) *El producto* $f \cdot g$ *es derivable en* a *y además, la derivada del producto es:*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)\,. \tag{24}$$

(c) *El producto de una constante por una función* $\lambda \cdot f$ *es derivable en* a *y además, su derivada es:*

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)\,. \tag{25}$$

(d) *Si* $g(a) \neq 0$ *entonces el cociente* $\dfrac{f}{g}$ *es derivable en* a *y además, la deriva del cociente es:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}\,. \tag{26}$$

Ejemplo 1.6. *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, la función* $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x^n \in \mathbb{R}$ *tiene como derivada la función* $f'(x) = x^{n-1}$*. Este hecho ya ha sido probado en el ejemplo 1.4. Otro modo de demostrar esta afirmación, es seguir un razonamiento por inducción y utilizar la regla de derivación del producto de funciones:*

- *Para* $n = 1$ *se tiene que* $f(x) = x$*, esta función es trivialmente derivable y su derivada es* $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$.
- *Supongamos que la afirmación es cierta para* $n = k$ *y veamos qué ocurre para* $n = k+1$*. Se tiene entonces que:*

$$f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x, \tag{27}$$

por lo tanto, aplicando la regla de derivación para el producto de funciones derivables y la hipótesis de inducción ($(x^k)' = kx^{k-1}$)*, se tiene que:*

$$f'(x) = kx^{k-1}x + x^k = (k+1)x^k. \tag{28}$$

Se cumple entonces la propiedad para $n = k+1$ *y, por el principio de inducción, tenemos garantizado que se cumple para todo* $n \in \mathbb{N}$

Observación 1.4. ***Generalización del ejemplo anterior.*** *Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *es derivable en* $x \in I$*, entonces,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $f(x)^n$ *es derivable en* x *y, además la derivada de la potencia n-ésima de* f *se calcula mediante:*

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x). \tag{29}$$

Los dos teoremas siguientes completan los instrumentos para el cálculo de derivadas.

Teorema 1.3 (Regla de la cadena). *Sea* f *una función definida en un intervalo* I*, y* g*, otra función definida en un intervalo* J *tal que* $f(I) \subset J$*. Si* f *es derivable en* $a \in I$ *y* g *es derivable en* $b = f(a) \in J$*, entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es derivable en* a *y se verifica que:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)\,. \tag{30}$$

Ejemplo 1.7. *Vamos a continuación una serie de ejemplos:*

(a) *Utilizando la relación* $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ *y la regla de la cadena, la derivada de la función* $f(x) = \cos x$ *es* $f'(x) = \cos(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$.

(b) *Sean* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ *definidas en* $\mathbb{R}$. *Entonces, la función* $h(x) = (g \circ f)(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ *tiene derivada* $h'(x) = (g \circ f)'(x) = 2x\cos(x^2)$, *y la función* $w(x) = (f \circ g)(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ *tiene derivada* $w'(x) = (f \circ g)'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

Teorema 1.4 (Derivación de la función inversa). *Sea* f *una función inyectiva y continua en un intervalo* I *y sea* $J = f(I)$. *Si* f *es derivable en* $a \in I$ *y* $f'(a) \neq 0$ *entonces* f^{-1} *es derivable en* $b = f(a)$ *y*

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,. \tag{31}$$

Ejemplo 1.8. *Veamos a continuación una serie de ejemplos de cálculo de derivadas de funciones inversas.*

(a) *La función* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, *definida en* $I = (-\pi/2, \pi/2)$ *tiene inversa* $f^{-1}(y) = \operatorname{arc\,sen}(y) = x$ *definida en* $J = (-1, 1)$. *Ya que* $f'(x) = \cos x$, *se tiene que*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \tag{32}$$

donde hay que tener en cuenta que $\cos x > 0$, *ya que* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(b) *La función* $f(x) = \mathrm{e}^x = y$ *tiene inversa* $f^{-1}(y) = \ln y = x$. *Ya que* $f'(x) = \mathrm{e}^x$, *se tiene que*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}\,. \tag{33}$$

Observación 1.5. ***Derivada de una función implícita.*** *La ecuación* $F(x, y) = 0$ *define implícitamente a una función* $x \to f(x) = y$, *en* I *si,* $\forall x \in I$, $F(x, f(x)) = 0$. *En este caso, se tiene que:*

- *Si* $f(x)$ *y* $F(x, f(x))$ *son derivables, entonces la derivada* $f'(x)$ *se puede calcular derivando* $F(x, f(x))$ *como una función compuesta e igualando a cero lo que resulte de derivar.*

Ejemplo 1.9. *Consideremos la ecuación* $6x^2y + 5y^3 + 3x^2 = 12 - x^2y^2$ *y calculemos* $\frac{dy}{dx}$:

$$12xy + 6x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 15y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 6x = -2xy^2 - 2x^2y \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{34}$$

por lo tanto, despejando:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12xy + 6x + 2xy^2}{6x^2 + 15y^2 + 2x^2y}. \tag{35}$$

Observación 1.6. *En ocasiones es más sencillo calcular la derivada del logaritmo de una función, llamada* ***derivada logarítmica***, *que la de la propia función. Esto puede utilizarse para hallar la derivada de la función. Así, si* $y = f(x)$ *con* $f(x)$ *positiva,*

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{36}$$

y, por tanto,

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))'. \tag{37}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^x$,

$$\ln f(x) = x\ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1, \tag{38}$$

de donde $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

Se completa está sección con una tabla de las derivadas de las funciones más frecuentes.

TABLA DE DERIVADAS		
Función	**Derivada**	**Condiciones**
α	0	$\alpha \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}\,, a > 0$
$\ln x$	$1/x$	$x > 0$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$x > 0\,, a > 0\,, a \neq 1$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{arcsen} x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$	$x \in \mathbb{R}$

1.4. Funciones crecientes y decrecientes. Extremos relativos. En esta sección veremos algunas de las propiedades más importantes de las derivadas.

Definición 1.5. ***Extremos de una función*** *Sean $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Diremos que f tiene en x_0:*

- *Un mínimo relativo si:*

$$\exists r > 0 :\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap I,\ f(x) \geq f(x_0). \tag{39}$$

- *Un máximo relativo si:*

$$\exists r > 0 :\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap I,\ f(x) \leq f(x_0). \tag{40}$$

- *Un mínimo absoluto si:*

$$f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in I. \tag{41}$$

- *Un máximo absoluto si:*

$$f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in I. \tag{42}$$

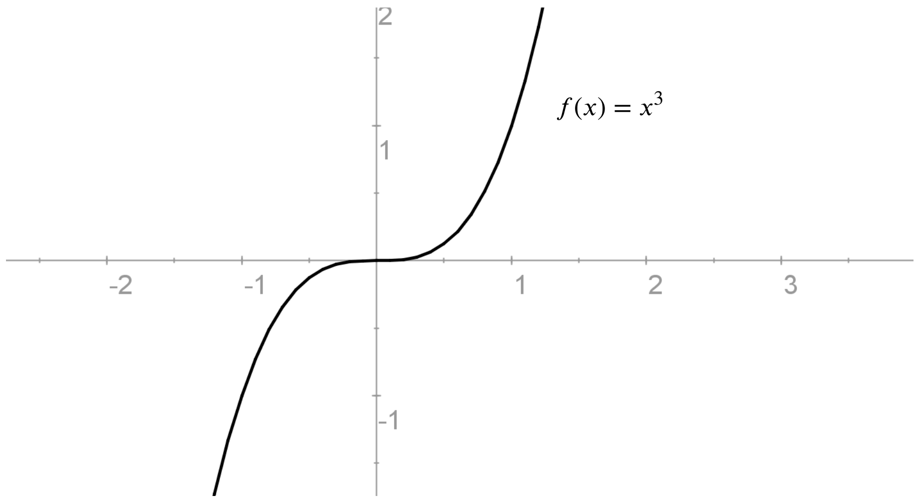
Teorema 1.5. *Sean $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y x_0 un punto del intervalo I. Entonces, si $f(x)$ es derivable en x_0 y además $f'(x_0) > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), \\ f(x) &< f(x_0) \quad x \in (x_0 - \delta, x_0). \end{aligned} \tag{43}$$

O lo que es lo mismo, f es estrictamente creciente en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Observación 1.7. *En el caso en el que $f'(x_0) < 0$ se tendrá que la función es estrictamente decreciente en un entorno de x_0.*

Ejemplo 1.10. *Lo contrario no es cierto, es decir, no es necesario que $f'(x_0) > 0$ para que f sea creciente. Véase por ejemplo la función $f(x) = x^3$; esta función es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ y, sin embargo, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, tal y como se puede apreciar en la figura siguiente:*

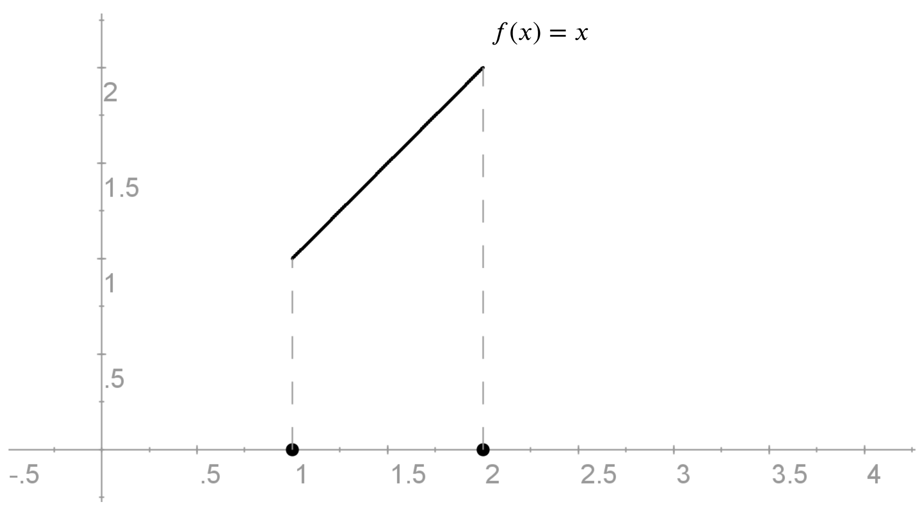


Teorema 1.6. *Sea x_0 un punto interior del intervalo I en el cual $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable. Entonces, si f tiene en x_0 un extremo relativo, se tiene que:*

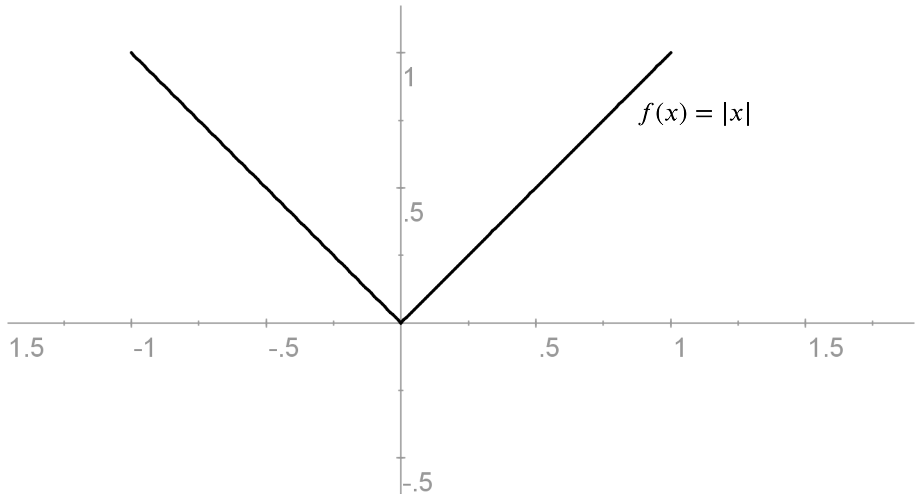
$$f'(x_0) = 0. \tag{44}$$

Observación 1.8. *Algunas consideraciones que es necesario tener en cuenta:*

- *El recíproco del teorema no es cierto, es decir, no es suficiente con que $f'(x_0) = 0$ para que una función tenga un extremo relativo en x_0.*
  De nuevo, la función $f(x) = x^3$, con derivada $f'(x) = 3x^2$, se anula para $x = 0$, y sin embargo, viendo su gráfica, es evidente que no tiene ningún extremo relativo en el 0 (ver gráfica anterior).
- *Tampoco se cumple el teorema si el máximo o mínimo está en el extremo del intervalo: $f : x \in [1, 2] \to x$ tiene un máximo en 2, pero $f'(1) = 1 \neq 0$, como se observa en la gráfica:*



- *Tampoco se cumple si f no es derivable: $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto:*



Ejemplo 1.11. *Empleemos la información que, sobre el crecimiento y extremos relativos, nos proporcionan las derivadas para determinar las dimensiones del cilindro con mayor volumen de entre todos los que tienen la misma superficie k. Por un lado, si R denota el radio de la base del cilindro y h la altura, la superficie total del cilindro viene dada por:*

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h), \tag{45}$$

que tiene que ser constante e igual a k. Por lo tanto, despejando la altura del cilindro en función de su altura y el radio de la base:

$$h = \frac{k - 2\pi R^2}{2\pi R}. \tag{46}$$

Ahora, el volumen de un cilindro puede ser calculado mediante la siguiente fórmula:

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \frac{k - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{Rk - 2\pi R^3}{2}. \tag{47}$$

Debemos calcular los extremos relativos de la función volumen, que es una función, puesto que k es constante, que sólo depende del radio de la base R. Derivando entonces V con respecto a R:

$$V'(R) = \frac{k - 6\pi R^2}{2} \tag{48}$$

ahora, si igualamos a cero y resolvemos la ecuación algebraica resultante:

$$R = \sqrt{\frac{k}{6\pi}}. \tag{49}$$

Por lo tanto, se puede comprobar analizando el crecimiento y decrecimiento de la función $V(R)$ en un entorno de $\sqrt{\frac{k}{6\pi}}$, que $V(R)$ tiene un máximo en $\sqrt{\frac{k}{6\pi}}$. Por lo tanto, las dimensiones del cilindro con volumen máximo serán:

$$R = \sqrt{\frac{k}{6\pi}}, \quad h = 2R. \tag{50}$$

1.5. Representación gráfica de una función. El siguiente esquema, que puede ser modificado, puede ser útil en el momento de la representación gráfica de una función real de variable real. El esquema se realiza en un ejemplo concreto: representar gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}. \tag{51}$$

1. En primer lugar, conviene estudiar el dominio de definición de la función. En el ejemplo:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}. \tag{52}$$

2. A continuación determinaremos los puntos de corte con los ejes. Los puntos de corte con el eje $0Y$, x tiene que ser igual a 0. En el ejemplo:

$$y = \frac{0^2}{0-1} = 0, \tag{53}$$

   por lo tanto, la gráfica pasa por el punto $(0,0)$. Para determinar los valores con el eje $0X$, y tiene que ser 0. En el ejemplo, debemos resolver la ecuación:

$$0 = \frac{x^2}{x-1}. \tag{54}$$

   La única solución de la ecuación anterior es $x = 0$, por lo tanto, el único corte con el eje $0X$ es el punto $(0,0)$.
3. Puede ser interesante estudiar las posibles simetrías de la función, pues en el caso en el que existan, permite reducir el trabajo considerablemente.
   - Si la función es par ($f(x) = f(-x)$), su gráfica es simétrica con respecto al eje $0Y$, por lo tanto, es suficiente con estudiar lo que ocurre para $x \geq 0$ y después hacer la simetría correspondiente.
   - Si la función es impar ($f(x) = -f(-x)$), su gráfica es simétrica con respecto al orgigen, por lo tanto, es suficiente con estudiar el caso $x \geq 0$ y después hacer la simetría correspondiente.

   En el ejemplo,

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad f(-x) = \frac{x^2}{-x-1}, \tag{55}$$

   que no son ni iguales ni opuestos, por lo tanto, la gráfica de la función no es simétrica ni con respecto al eje $0Y$ ni con respecto al origen.
4. Periodicidad. La función es periódica de periodo T si:

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

   Si la función es periódica, es suficiente con representarla en un sólo periodo. En el ejemplo, no existe ningún número real T tal que $f(x)$ sea periódica de periodo T.
5. Discontinuidades. Se trata de determinar los puntos de discontinuidad de la función y el tipo de discontinuidad que aparece. En el ejemplo, la función presenta en el punto $x_0 = 1$ una discontinuidad de salto infinito.
6. Asíntotas. Son rectas que se cortan con la curva en algún punto del infinito (también pueden tener cortes para valores reales de la variable).
   - Horizontales. Son rectas paralelas al aje $0X$. Para calcularlas simplemente hay que determinar los límites de la función cuando x tiende a $\pm\infty$. En el ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty. \tag{57}$$

(58) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

Por lo tanto, la función no tiene asíntotas horizontales (si alguno de los límites fuese un número real k, la función tendría una asíntota de la forma $y = k$).

- Verticales. Son rectas paralelas al eje $0Y$. Para calcularlas, se trata de obtener los valores de los números reales β para los cuales se tenga:

(59) $$\lim_{x\to\beta} f(x) = \infty,$$

o alguno de los límites laterales cuando x tiende a β. En el ejemplo, tenemos que, para $\beta = 1$, se tiene que:

(60) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty,$$

(61) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$.

- Oblicuas. Son rectas de la forma $y = mx + n$. Para el cálculo de las constantes m y n simplemente hay que tener en cuenta que:

(62) $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

En el ejemplo:

(63) $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1,$$

(64) $$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Por lo tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

7. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos. Si la función f es derivable, a partir de la función derivada es posible obtener información sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, asií como de posibles extremos. En el ejemplo:

(65) $$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

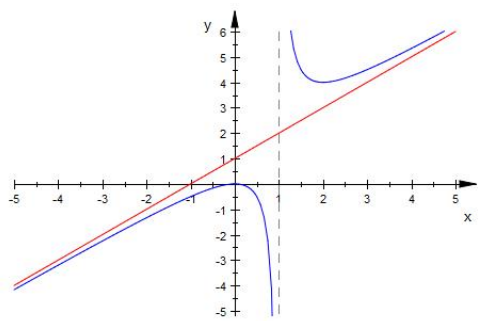
Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para $x = 0$ o $x = 2$. Además, si $x < 0$, $f'(x) > 0$ y, en consecuencia, f es creciente. Por otro lado, si $0 < x < 1$, entonces $f'(x) < 0$, y, en consecuencia, f es decreciente. Además, si $1 < x < 2$, entonces $f'(x) < 0$, y, entonces, f es decreciente. Finalmente, si $x > 2$, tenemos que $f'(x) > 0$ y, por lo tanto, f es creciente.

8. Intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Tal y como veremos en la siguiente sección, la derivada segunda de una función contiene información relativa a la concavidad y convexidad de la función. En el ejemplo,

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \tag{66}$$

por lo tanto, si $x > 1$, entonces $f''(x) > 0$ y, entonces, la función es convexa, si $x < 1$, entonces $f''(x) < 0$ y, entonces, la función es cóncava.

Con la información obtenida durante el estudio anterior, es relativamente simple hacerse una idea de la gráfica de la función f:



2. Derivadas de orden superior

En esta sección veremos el concepto de derivada de orden superior y analizaremos algunas de las aplicaciones más importantes.

2.1. Definición y propiedades. Comencemos estableciendo la defininción de derivada de orden superior, empezando por la derivada segunda de una función.

Definición 1.6. ***Derivada segunda de una función*** *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, y sea el conjunto*

$$\mathrm{e}^1 = \{x \in I \;/\; f \textit{ es derivable en } x\}. \tag{67}$$

Dado $x_0 \in \mathrm{e}^1$, si existe el siguiente límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0), \tag{68}$$

diremos que f tiene en x_0 derivada segunda o derivada de orden 2.

Definición 1.7. ***Derivadas de orden superior.*** *Sea en general*

$$\mathrm{e}^k = \{x \in \mathrm{e}^{k-1} \;/\; f \textit{ tiene derivada de orden } k-1 \textit{ en } x\}. \tag{69}$$

Dado $x_0 \in \mathrm{e}^{n-1}$. Si existe el siguiente límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{n)}(x_0), \tag{70}$$

diremos que f es n veces derivable en x_0 o que f tiene derivada n-ésima.

Ejemplo 1.12. *Dada $f(x) = x^3 + 3x$, se tiene que:*

- $f'(x) = 3x^2 + 3$,
- $f''(x) = 6x$,
- $f^{(3)}(x) = 6$.

Ejemplo 1.13. *Dada $f(x) = sen(x)$, se tiene que:*

- $f'(x) = cos(x)$,
- $f''(x) = -sen(x)$,
- $f^{(3)}(x) = -cos(x)$.

Definición 1.8. ***Función continuamente diferenciable**. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es derivable en todo punto de I y la función derivada de f es continua. Entonces diremos que f es continuamente diferenciable en I o que f es una función de clase 1 ($f \in \mathscr{C}^1(I)$).*

Definición 1.9. ***Función de clase** n Diremos que $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es de clase n en I ($f \in \mathscr{C}^n(I)$), si f tiene derivada n-ésima en todo punto de I y $f^{n)}$ es continua en I.*

Definición 1.10. ***Función infinitamente diferenciable.** Diremos que $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f es de clase infinito en I ($f \in \mathscr{C}^\infty(I)$), si f tiene derivadas de todos los órdenes en I.*

2.2. Aplicación de las derivadas de orden superior al estudio de funciones. En esta sección veremos como aplicar las derivadas de orden superior al estudio del comportamiento de funciones reales de variable real.

Proposición 1.1. *(Derivadas de orden superior y extremos de funciones). Sea $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno U de un punto $a \in \mathbb{R}$.*
Se tendrá:

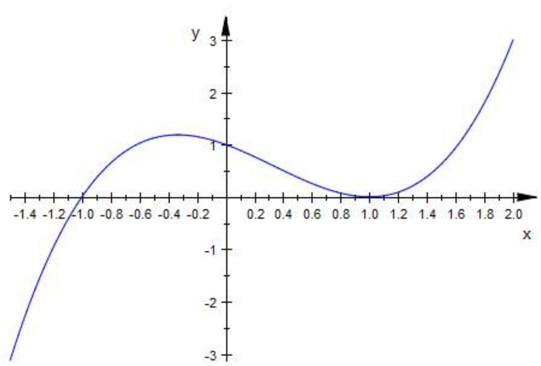
1. *Si f es derivable en a, para que f tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en el punto a es necesario que $f'(a) = 0$. Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en a; si $f'(a) < 0$, entonces f es decreciente en a.*
2. *Si la función es n veces derivable en a y se cumple que:*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0, \tag{71}$$

entonces, según la paridad de n y el signo $f^{(n)}(a)$, se tiene que :

- *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.*
- *Si n es impar y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f crece estrictamente en el punto $x = a$.*
- *Si n es impar y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f decrece estrictamente en el punto $x = a$.*

Ejemplo 1.14. *Consideremos la función $f(x) = (x-1)^2(x+1)$. Gráficamente esta función presenta el siguiente aspecto:*

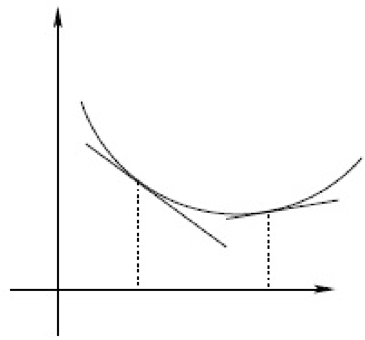


Analicemos los extremos relativos:

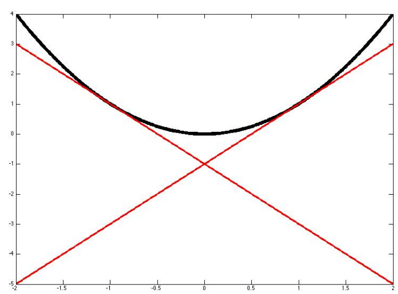
- $f'(x) = (x-1)^2 + (2x-2)(x+1)$, *se anula en* $\{-\frac{1}{3}, 1\}$.
- $f''(x) = 6x - 2$.
  - $f''(-\frac{1}{3}) = -4$. *$n = 2$ es par y $f^{(n)}(-\frac{1}{3}) < 0$, entonces $x_0 = -\frac{1}{3}$ es máximo relativo.*
  - $f''(1) = 4$. *$n = 2$ es par y $f^{(n)}(1) > 0$, entonces $x_0 = 1$ es mínimo relativo.*

A continuación, daremos un resultado que nos permitirá analizar la concavidad, convexidad o la existencia de puntos de inflexión de una determinada función en base a la información de las derivadas de orden superior. Empecemos definiendo los conceptos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Definición 1.11. ***Función convexa.*** *Diremos que una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto x_0 es convexa en el punto x_0 si los valores de la tangente a la curva en el punto x_0 son menores que los valores de la función:*



Ejemplo 1.15. *Consideremos la función $f(x) = x^2$, gráficamente, esta función presenta el siguiente aspecto:*



Observamos que las rectas tangentes a la gráfica siempre se encuentran por debajo de la gráfica de la función. En efecto, la expresión para la recta tangente en un punto x_0 es:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = x_0^2 + 2xx_0 - 2x_0^2 = 2xx_0 - x_0^2. \tag{72}$$

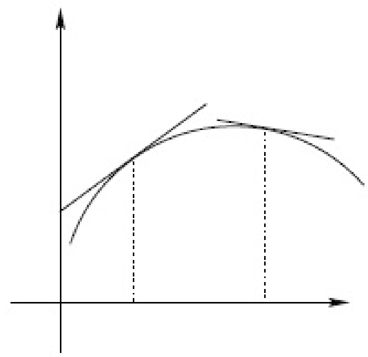
Ahora bien:

$$t(x) = 2xx_0 - x_0^2 \leq x^2 + x_0^2 - x_0^2 = x^2 = f(x), \tag{73}$$

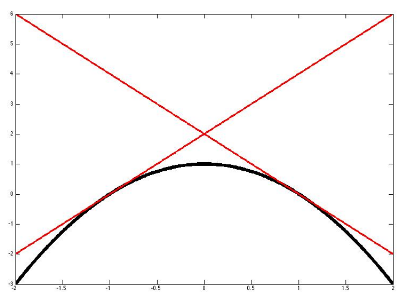
o lo que es lo mismo, el valor de la recta tangente en un punto siempre es menor que el valor de la función en dicho punto, que es precisamente la definición de convexidad.

Observación 1.9. *En el ejemplo anterior se pone de manifiesto que comprobar la convexidad empleando la definición, aunque se trate de una función simple, puede ser una tarea complicada. Sin embargo, tal y como veremos posteriormente, el empleo de las derivadas de orden superior puede facilitar el trabajo.*

Definición 1.12. ***Función cóncava.*** *Diremos que una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto x_0 es cóncava en el punto $x_0 \in (a, b)$ si los valores de la tangente a la curva en el punto x_0 son mayores que los valores de la función:*



Ejemplo 1.16. *Consideremos la función $f(x) = 1 - x^2$, gráficamente, dicha función presenta el siguiente aspecto:*



Observamos que las rectas tangentes a la curva siempre quedan por encima de la gráfica de la función, por lo tanto, estamos ante una función cóncava. En efecto, dado un punto x_0, la recta tangente en ese punto tiene la siguiente expresión:

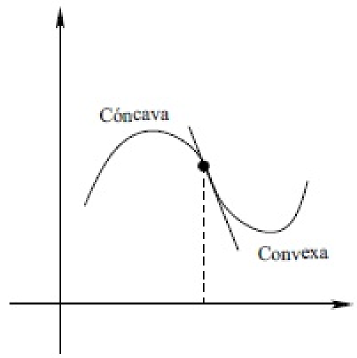
$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 - x_0^2 - 2x_0(x - x_0) = 1 - x_0^2 - 2xx_0 + 2x_0^2 = 1 - (2xx_0 - x_0^2). \tag{74}$$

Ahora bien:

$$t(x) = 1 - (2xx_0 - x_0^2) \geq 1 - (x^2 + x_0^2 - x_0^2) = 1 - x^2 = f(x), \tag{75}$$

o lo que es lo mismo, el valor de la recta tangente a la función en el punto x_0 está por encima del valor de la función, esto es, estamos ante una función cóncava.

Definición 1.13. ***Punto de inflexión.*** *Diremos que una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto de inflexión en el punto $x_0 \in (a, b)$ si la gráfica de la tangente a la función en ese punto atraviesa la gráfica de la curva. En otras palabras, en x_0 aparece un cambio de cóncava a convexa:*



Proposición 1.2 (Concavidad/convexidad/puntos de inflexión de funciones). *Sea $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno U de un punto $a \in \mathbb{R}$. Si la función f es n veces derivable en a y se cumple que:*

(76) $$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

entonces, según la paridad de n y el signo de $f^{(n)}$, se tiene que:

- *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f es convexa en a.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f es cóncava en a.*
- *Si n es impar, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.*

Ejemplo 1.17. *Volvamos a considerar la función $f(x) = x^2$ que hemos empleado en un ejemplo anterior, se tiene que:*

(77) $$f'(x) = 2x, \;\; f''(x) = 2, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si empleamos el resultado anterior, se tiene que f es convexa en todos los puntos de su dominio de definición.

Ejemplo 1.18. *En el caso de la función $f(x) = 1 - x^2$, se tiene justamente lo contrario:*

(78) $$f'(x) = -2x, \;\; f''(x) = -2, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

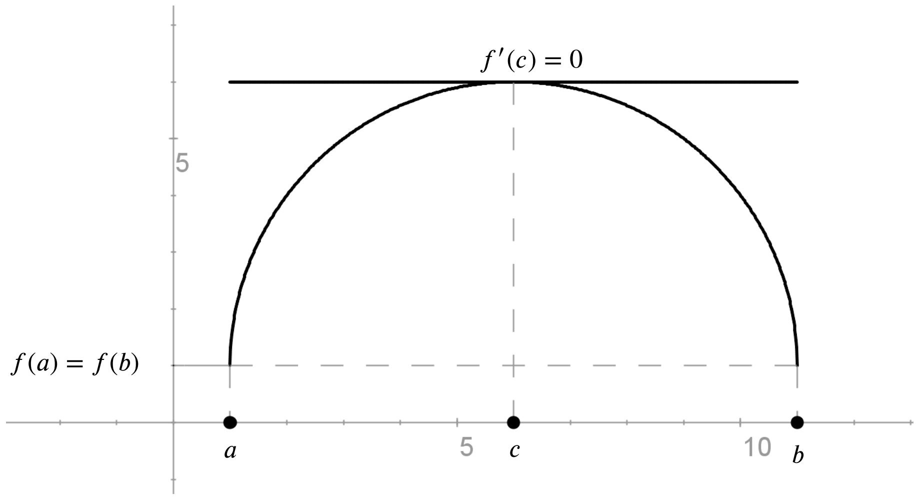
Al ser la derivada segunda negativa, estamos ante una función cóncava.

3. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial.

En esta sección veremos los teoremas más importantes del cálculo diferencial.

3.1. Teorema de Rolle.

Teorema 1.7. ***Teorema de Rolle*** *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*



Observación 1.10. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, puede haber más de un punto en el cual la derivada se anula. Por ejemplo, si consideramos la función* $\operatorname{sen}(x)$ *en el intervalo* $[0, 2\pi]$*, se tiene que:*

$$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0 \tag{79}$$

y su derivada cumple que:

$$cos(\pi/2) = cos(3\pi/2) = 0. \tag{80}$$

Hay dos puntos en los cuales la derivada se anula.

Observación 1.11. *Debemos realizar las siguientes observaciones:*

- *Si falla la continuidad en* (a, b)*, en* a *o en* b*, no tiene por qué cumplirse la tesis del teorema.*
- *Si falla la derivabilidad en un punto, tampoco se tiene por qué cumplir el resultado del teorema. Por ejemplo, la función* $f(x) = |x|$ *cumple que* $f(-1) = f(1)$*, pero no hay ningún punto en el cual la derivada se anula. Falla la hipótesis de la derivabilidad de la función en el intervalo.*

Ejemplo 1.19. *Empleando el teorema de Rolle y el teorema de Bolzano, veamos que la ecuación:*

$$f(x) = x^5 + 5x - 3 = 0, \tag{81}$$

tiene exactamente una raíz real. En efecto, por un lado, si evaluamos el polinomio anterior en los puntos -10 *y* 10 *tenemos que:*

$$\left.\begin{array}{r} (-10)^5 + 5(-10) - 3 < 0, \\ (+10)^5 + 5(+10) - 3 > 0 \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{Bolzano} \exists\ c \in (-10, 10)\ t.q.\ c^5 + 5c - 3 = 0. \tag{82}$$

Ahora bien, si calculamos la derivada del polinomio anterior, tenemos que:

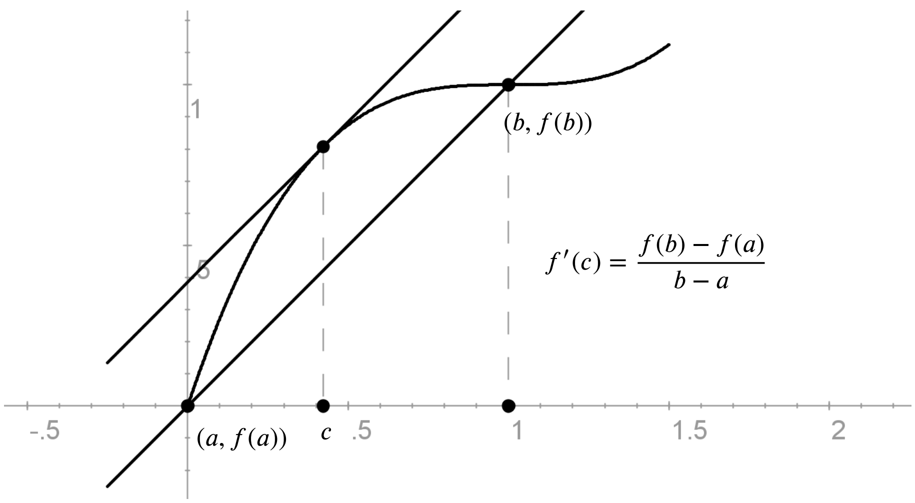
$$f'(x) = 5x^4 + 5 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{83}$$

por lo tanto, en base al teorema de Rolle, no puede existir otra raíz de la ecuación. Esto es, si existiera $\tilde{c} \neq c$ *tal que* $f(\tilde{c}) = 0$*, entonces, por el teorema de Rolle, existiría un punto en el intervalo* $(\text{mín}\{\tilde{c}, c\}, \text{máx}\{\tilde{c}, c\})$ *en el cual la derivada de anularía, pero esto no puede ser ya que* $f'(x) > 0$ *para todos los puntos de la recta real.*

3.2. Teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Teorema 1.8. ***Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*** *Sea* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b). *Entonces existe un punto* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, *o lo que es lo mismo,*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Ejemplo 1.20. *Veamos como podemos emplear el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para demostrar que* $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. *En efecto, sabemos, por el TVMCD que, puesto que la función* $\operatorname{sen}(x)$ *es diferenciable, dados dos puntos* x, y *(supongamos, sin pérdida de generalidad, que* $x < y$*) cualesquiera, existe un punto* $x_0 \in (x, y)$ *tal que:*

$$\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x) = \cos(x_0)(x - y). \tag{84}$$

Tomando el valor absoluto en ambos lados de la igualdad:

$$|\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)| = |\cos(x_0)||x - y| \leq |x - y|. \tag{85}$$

De donde se concluye el resultado.

3.3. Regla de l'Hôpital. Presentamos a continuación un resultado que nos va a permitir resolver, en ciertos casos, indeterminaciones de la forma ∞/∞ y $0/0$ en el cálculo de límites.

Teorema 1.9. ***Regla de l'Hôpital*** *Sean* $f, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables en un entorno del punto* $x_0 \in I$ *con* $g'(x_0) \neq 0$, *entonces se cumple que:*

1. ***Indeterminaciones del tipo*** $\frac{0}{0}$.

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{86}$$

2. ***Indeterminaciones del tipo*** $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,\ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{87}$$

Además, la regla sigue siendo válida si el punto x_0 *en el que se estudia el límite es infinito (*$x_0 = \pm\infty$*), si el límite* ℓ *es infinito o si se substituye la tendencia hacia* x_0 *(*$x \to x_0$*) por una tendencia lateral (*$x \to x_0^{\pm}$*).*

Ejemplo 1.21. *Veamos una serie de ejemplos en los que podemos aplicar la regla de l'Hôpital:*

- $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{\operatorname{sen}(x)} = 2\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \lim_{x\to 0} e^{x^2} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$
- $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\log(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\log(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log(x)} = e^0 = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2x}{x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot 2} = \frac{0}{\infty} = 0.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

4. Teorema de Taylor

Los resultados que desarrollaremos en esta sección son fundamentales en el estudio de la aproximación de funciones. Veremos que toda función derivable un nuero suficiente de veces puede ser aproximada en el entorno de un punto a través de la información recogida en las derivadas de la función en ese punto.

4.1. Polinomio de Taylor.

Definición 1.14. ***Polinomio de Taylor.*** *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable en un punto $x_0 \in I$. Se denomina polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 al siguiente polinomio:*

$$\mathscr{P}_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{88}$$

Ejemplo 1.22. *Calculemos el polinomio de Taylor asociado a la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ centrado en $x_0 = 0$ para $n = 1, 3, 5$. Por un lado, dado cualquier n, la expresión genérica para el polinomio de Taylor de la función $f(x)$ centrado en $x_0 = 0$ será:*

$$\mathscr{P}_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{89}$$

Por lo tanto, si lo particularizamos a los casos $n = 1, 3, 5$ se tendrá que:

- *Caso $n = 1$, en este caso:*

$$\mathscr{P}_{1,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x, \tag{90}$$

ahora bien, puesto que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, se tendrá que $f'(x) = \cos(x)$ y, entonces,

$$\mathscr{P}_{1,0}(x) = \operatorname{sen}(0) + \cos(0)\,x = x. \tag{91}$$

- *Caso $n = 3$, en este caso:*

$$\mathscr{P}_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3, \tag{92}$$

ahora bien, puesto que $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$ y que $f'''(x) = -\cos(x)$, se tendrá que:

$$\mathscr{P}_{3,0}(x) = \operatorname{sen}(0) + \cos(0)\,x + \frac{-\operatorname{sen}(0)}{2!}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}. \tag{93}$$

- *Caso $n = 5$, en este caso:*

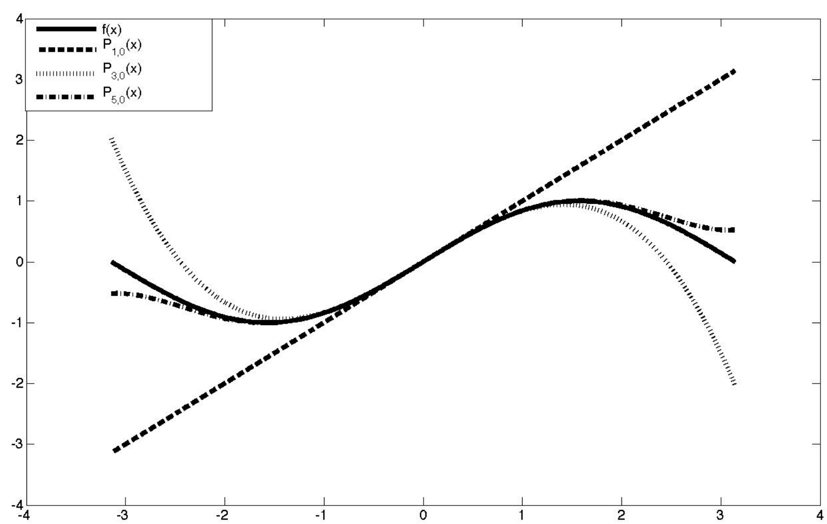
$$\mathscr{P}_{5,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5, \tag{94}$$

ahora bien, puesto que $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $f^{(5)}(x) = \cos(x)$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{5,0}(x) &= \operatorname{sen}(0) + \cos(0)\,x + \frac{-\operatorname{sen}(0)}{2!}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\operatorname{sen}(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 \\ &= \; = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \end{aligned} \tag{95}$$

Debemos observar que, debido a que las derivadas pares de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ son múltiplos de la propia función, los polinomios de Taylor de orden impar $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}$, coinciden con los polinomios de Taylor de orden par $n = 2k$. Es por ello que sólo hemos calculado los polinomios de orden impar $n = 1, 3, 5$, puesto que el polinomio de orden $n = 2$ coincide con el de orden $n = 1$, el de orden $n = 4$ coincide con el de orden $n = 3$ y el de orden $n = 6$ coincide con el de orden $n = 5$.

Una primera idea intuitiva que podemos tener acerca del polinomio de Taylor es que a medida que aumentamos el grado, el polinomio resultante debe estar más próximo a la función, en efecto, veamos que ocurre en este caso particular:



Tal y como mencionábamos anteriormente, el polinomio de mayor orden está más próximo a la función.

Observación 1.12. *A la vista de la definición del polinomio de Taylor y apoyándonos en el ejemplo anterior, observamos, por un lado que el grado del polinomio de Taylor es siempre menor o igual que n. Por otro lado, el polinomio de Taylor $\mathscr{P}_{n,x_0}(x)$ de orden n relativo a la función $f(x)$ centrado en el punto x_0 es tal que coinciden el valor de $f(x)$ en el punto x_0 y el del polinomio $\mathscr{P}_{n,x_0}(x)$ evaluado en el mismo punto ($f(x_0) = \mathscr{P}_{n,x_0}(x_0)$). Además también coinciden los valores de las sucesivas derivadas hasta el orden n:*

$$f^{(k)}(x_0) = \mathscr{P}^{(k)}_{n,x_0}(x_0), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n. \tag{96}$$

Definición 1.15. ***Resto n-ésimo de Taylor.*** *Sea $f(x)$ una función tal que existe $\mathscr{P}_{n,x_0}(x)$. A la expresión $f(x) - \mathscr{P}_{n,x_0}(x)$ se la denomina resto o residuo n-ésimo del polinomio de Taylor, y se denota por $\mathscr{R}_{n,x_0}(x)$.*

Existen diferentes formas de calcular el resto de Taylor de una función $f(x)$ que requieren un análisis más profundo de la función $f(x)$. Una de las opciones es la fórmula de Lagrange para el polinomio de Taylor

$$\mathscr{R}_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{97}$$

donde ξ_x es un número real comprendido entre el punto x_0 en donde hacemos el desarrollo de Taylor y el punto x en el que realizamos la aproximación; si $x > x_0$ tendríamos que $\xi_x \in (x_0, x)$; recíprocamente si $x < x_0$ tendríamos que $\xi_x \in (x, x_0)$. A pesar de que no conozcamos el punto ξ_x es posible obtener una estimación del error cometido sin más que aplicar los conocimientos que hemos desarrollado a lo largo de este tema para el cálculo de extremos de funciones reales de variable real.

Ejemplo 1.23. *Sea la función $f(x) = \mathrm{e}^x$, empecemos calculando el polinomio $\mathscr{P}_{3,0}(x)$:*

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{3,0}(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 \\ &= \mathrm{e}^0 + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}x + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}x^2 + \frac{\mathrm{e}^0}{3!}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned} \tag{98}$$

Por ejemplo, en este caso el número e $= f(1)$ se aproxima por $\mathscr{P}_{3,x_0}(1) = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{16}{6} = 2,\overline{6}$. Establezcamos a continuación una cota para el resto $\mathscr{R}_{3,0}(x)$ en el intervalo $[0,1]$. Por un lado,

$$\mathscr{R}_{3,0}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}x^4, \tag{99}$$

donde $\xi_x \in (0,1)$. Para encontrar una cota del error en el intervalo $[0,1]$, lo que tenemos que hacer es encontrar el valor máximo de la función $f^4(x)$ en el intervalo $[0,1]$, ahora bien:

$$f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^1 \quad \forall x \in [0,1], \tag{100}$$

ya que la función e^x es monótona creciente en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, puesto que $x^4 \leq 1$ para cualquier x del intervalo $[0,1]$, se tendrá que:

$$\mathscr{R}_{3,0}(x) \leq \frac{\mathrm{e}}{4!} \tag{101}$$

Una cuestión interesante podría ser intentar estimar el grado mínimo del polinomio de Taylor para, por ejemplo, alcanzar una precisión de 10^{-5} (el error que cometemos al aproximar la función por el polinomio debe ser menor que 10^{-5}). En general, el resto n-ésimo se puede acotar por $\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$, por lo tanto tenemos que obtener un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathscr{R}_{n,0}(x) \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < 10^{-5}, \tag{102}$$

es decir, $\mathrm{e} \cdot 10^5 < (n+1)!$. Se tiene que $8! = 40320$ y que $9! = 362880$. Así, para $n = 8$, el polinomio de Taylor de grado 8 en $x = 0$, aproxima e con una precisión de 10^{-5}, de hecho:

$$\mathscr{P}_{8,x_0} = 2{,}71827876984\ldots, \textit{ siendo } \mathrm{e} = 2{,}71828182845\ldots. \tag{103}$$

4.2. Serie de Taylor.

Definición 1.16. ***Serie de Taylor.*** *Una serie de Taylor es un desarrollo en serie de una función alrededor de un punto de la siguiente forma:*

$$
\begin{aligned}
&f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \\
&+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,
\end{aligned}
\tag{104}
$$

cuando $x_0 = 0$ la serie de Taylor anterior también se llama serie de Mac Laurin.

El teorema de Taylor establece que cualquier función que satisface unas determinadas condiciones puede ser aproximada en serie de Taylor. Podemos dar estas condiciones en función del resto de Taylor de la siguiente forma:

Supongamos que la función $f(x)$ tiene $n+1$ derivadas continuas en un intervalo abierto que contiene al punto x_0. Entonces, para cualquier punto x del intervalo tenemos:

$$
f(x) = \left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right] + \mathscr{R}_{n,x_0}(x),
\tag{105}
$$

donde el sumando $\mathscr{R}_{n,x_0}(x)$ es el error que puede ser expresado de distintas formas, entre ellas, la más habitual es la fórmula del resto de Lagrange definida anteriormente. Con estas notaciones tenemos que la serie infinita de Taylor converge a la función $f(x)$, es decir:

$$
f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k
\tag{106}
$$

si y solamente si,

$$
\lim_{n\to\infty} \mathscr{R}_{n,x_0}(x) = 0.
\tag{107}
$$

Veamos a continuación un ejemplo en el que aclararemos el concepto anterior.

Ejemplo 1.24. *Consideremos la función $f(x) = \log(x+1)$ y calculemos su serie de Taylor. En primer lugar, podemos demostrar por inducción que las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ son:*

$$
f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k},
\tag{108}
$$

por lo tanto, la serie de Taylor de $f(x)$ centrada en $x_0 = 0$ es:

$$
0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.
\tag{109}
$$

Si calculamos el resto de Taylor empleando la fórmula de Lagrange tenemos que:

$$
\mathscr{R}_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}n!}{(n+1)!\,(1+\xi_x)^{n+1}}x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi_x)^{n+1}},
\tag{110}
$$

que tiende a cero únicamente si $x \in (-1,1)$ para cualquier $\xi_x \in (0,x)$.

Desarrollos importantes en serie de Taylor son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\log(x+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad \forall x \in (-1,1),\\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\\
\frac{a}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} a x^n, \quad \forall x \in (-1,1),\\
\operatorname{sen}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{111}$$

5. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *Calcula las siguientes derivadas*

1. $f(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$.
2. $f(x) = (x - \sqrt{1-x^2})^2$.
3. $f(x) = e^{x^2} \cdot \tan(x)$.
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
6. $f(x) = \log\left((4x^3 + x^2 + 3x + 5)^6\right)$.
7. $f(x) = x^{x^x}$.
8. $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.
9. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x^{\cos(x)^2})$.
10. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
11. $f(x) = 3^{(2x^5+x^4-x^{-2}+2x+3)^8}$.
12. $f(x) = (6x^2 + 2^{3x}) \operatorname{sen}(2x^5 - 3e^x)$.
13. $f(x) = (x^2 + 1) \arctan(x^3 + 5)$.
14. $f(x) = (5x^4 - 8x + 3) \operatorname{arc\,sen}(e^{2x} + 4^{3x} + 2)$.
15. $f(x) = (x + 3) \operatorname{arc\,sen}(x^2 + 2)$.
16. $f(x) = (x^4 + e^x + 1) \arctan(3x^2 + x + 5)$.
17. $f(x) = (3x + 7) \operatorname{arc\,cos}(\log(x))$.

Ejercicio 1.2. *Calcula los siguientes límites empleando la regla de l'Hôpital:*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen}(x)}{\log(\cos(x))}$.
2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^k}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(1+x)}{1-e^x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2\log(2^x - 1)}{x+1}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.

Ejercicio 1.3. *Realiza las siguientes aproximaciones:*

1. *Aproxima mediante el Polinomio de Taylor de grado* 5 *en* $x_0 = 0$*, el valor de la función* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *en el punto* $x = \pi/4$*. Acota el valor del resto del mismo orden para* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. *Aproxima mediante el Polinomio de Taylor de grado* 5 *en* $x_0 = 0$*, el valor de la función* $f(x) = \cos(x)$ *en el punto* $x = \pi/8$*. Acota el valor del resto del mismo orden para* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. *Aproxima mediante el Polinomio de Taylor de grado* 5 *en* $x_0 = 1$*, el valor de la función* $f(x) = \log(x)$ *en el punto* $x = 2$*. Acota el valor del resto del mismo orden para* $x \in [1, 3]$ *y* $x \in (0, 3)$.

Ejercicio 1.4. *Determina en qué puntos presentan extremos locales las siguientes funciones. Halla también los intervalos de monotonía y asíntotas de las mismas:*

1. $f(x) = \dfrac{x + e^x}{x - e^x}$.
2. $f(x) = e^x \sqrt{2x^2 - 4x}$.
3. $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

Ejercicio 1.5. *Determina los intervalos e concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las gráficas de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = e^{-x^2}$.
2. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.
3. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$.
4. $f(x) = x^2 \cdot \log(x)$.
5. $f(x) = (1 + x^2)e^x$.
6. $f(x) = -x + \arctan(x)$.

Ejercicio 1.6. *Resuelve los siguientes problemas:*

1. *Un balón se infla de forma que su volumen crece a razón de* 36π *cm*^{3}*/seg. Halla la variación del radio del balón cuando este tenga un radio de* 3 *cm.*
2. *Un avión se desplaza en vuelo horizontal a* 8 *km de altura. La ruta de vuelo pasa por la vertical de un punto* P *del suelo. La distancia entre el avión y el punto* P *disminuye a razón de* 4 *km/min en el instante en que esta distancia es de* 10 *km. Calcula la velocidad del avión en ese instante.*
3. *Una cámara de televisión pretende grabar la ascensión de un cohete en su despegue. Si dicha cámara está situada a 100 m del punto de lanzamiento y el cohete asciende a una velocidad de* 10 *m/seg. Calcula a qué velocidad ha de variar el ángulo formado por la cámara con la horizontal del suelo cuando el cohete se encuentre a* 300 *metros de altura.*

Ejercicio 1.7. *Resuelve los siguientes problemas:*

1. *Empleando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación:*

$$p(x) = 3x^4 - 24x + 1 = 0, \tag{112}$$

   no tiene más que dos raíces reales distintas.

2. *Determina los valores a, m y b para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x = 0, \\ -x^2 + 3x + a & si \quad 0 < x < 1, \\ mx + b & si \quad 1 \le x \le 2, \end{cases} \tag{113}$$

   satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[0, 2]$.