Tema VII. Cálculo diferencial en varias variables.

Índice general

Capítulo 1. Cálculo diferencial en varias variables. 5
1. Derivadas direccionales. Derivadas parciales. 5
2. Vector gradiente y matriz de Jacobi. 8
3. Diferenciabilidad de una función de varias variables reales. 10
4. Condiciones para la diferenciabilidad. 13
5. Operaciones con funciones diferenciables. 14
6. Diferenciabilidad de orden superior. Matriz de Hesse. 17
7. Polinomio de Taylor de una función escalar. 19
8. Cálculo de extremos de funciones. 21
9. Operadores diferenciales. 24
10. Ejercicios del tema. 32

Capítulo 1

Cálculo diferencial en varias variables.

Como ya vimos en el caso de una variable, el cálculo diferencial es una potente herramienta que permite abordar diversos problemas. En el presente capítul o introduciremos conceptos y resultados para el caso de varias variables. Comenzaremos con la definición de derivada de una función en un punto. Es bien conocido que en el caso de funciones reales de una variable real se tiene que si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en dicho punto. En el caso de varias variables presentaremos un resultado análogo que requerirá introducir distintos conceptos que no implican la continuidad, hasta llegar al resultado deseado. Definiremos el vector gradiente de una función escalar en un punto y la matriz de Jacobi de una función vectorial en un punto, que permitirán enunciar de un modo simple la regla de la cadena para funciones de varias variables reales. Finalmente, estudiaremos el cálculo de extremos de campos escalares, con y sin restricciones.

De manera análoga a lo hecho en el estudio de la continuidad, enunciaremos los resultados para funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^2$ resultando simple la generalización para funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^n$ o en determinados casos para campos vectoriales, que se estudiarán componente a componente.

1. Derivadas direccionales. Derivadas parciales.

En el caso de funciones reales de variable real es bien conocido que si una función f es derivable en un punto x_0, entonces f también es continua en x_0. Un primer intento (fallido) para obtener una extensión de este resultado al caso de varias variables viene dado por la noción de derivada direccional.

1.1. Derivadas direccionales.

Definición 1.1. ***Derivada direccional.*** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en la bola abierta $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ y sean $\mathbf{a} \in A$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector tal que $\|\mathbf{v}\| = 1$. Llamaremos derivada direccional de f en el punto $\mathbf{a}$ según el vector $\mathbf{v}$, que denotaremos por $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}}$, al siguiente límite cuando exista:*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}. \tag{1}$$

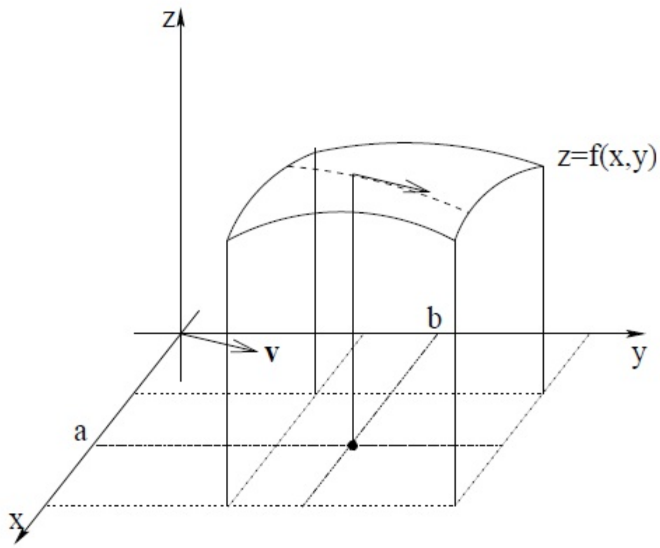
Ejemplo 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante las siguientes expresiones:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y) + y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{2}$$

La derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ con respecto al vector $\mathbf{u} = (a,b)$ es:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 \operatorname{sen}(tb) + b^2 \operatorname{sen}(ta)}{t(a^2+b^2)} \underbrace{=}_{L'Hôpital} \\ &\lim_{t\to 0} \frac{a^2 b \cos(tb) + b^2 a \cos(ta)}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b + b^2 a}{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Observación 1.1. *La derivada direccional de una función escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto* $\mathbf{a}$ *según la dirección* $\mathbf{v}$ *indica la razón de cambio de f en el punto según la dirección de* $\mathbf{v}$*. Por ejemplo, en el caso de una función escalar definida en $\mathbb{R}^2$:*



Observación 1.2. *Una función f puede tener derivadas direccionales en un punto* $\mathbf{a}$ *para cualquier dirección y, sin embargo, no ser continua. Por ejemplo, la función:*

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & si (x, y) = (0, 0), \end{cases} \tag{4}$$

no es continua en el $(0, 0)$ *(visto anteriormente) y, sin embargo, existen las derivadas direccionales en* $(0, 0)$ *para cualquier vector* $\mathbf{v}$ *no nulo de $\mathbb{R}^2$:*

$$D_{\mathbf{v}} f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^4 v_2^4 + t^2 v_1^2} = 0. \tag{5}$$

Observamos entonces que, la existencia e igualdad de las derivadas direccionales en un punto, no implica la continuidad de la aplicación en dicho punto.

1.2. Derivadas parciales. Una clase particular de derivadas direccionales son las llamadas derivadas parciales, las cuales se obtienen al calcular las derivadas de una función según los vectores de la base canónica.

Definición 1.2. ***Derivadas parciales.*** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación definida en la bola abierta $A = B(\mathbf{x}, r)$ y sea* $\mathbf{a}$ *un punto de A. Diremos que f es derivable parcialmente con respecto a la variable k-ésima en el punto* $\mathbf{a}$ *si existe el siguiente límite:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ es el k-ésimo vector de la base canónica. En el caso de que exista el límite anterior, lo denotaremos por:

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \equiv \partial_{x_k} f(\mathbf{a}) = D_k f(\mathbf{a}). \tag{7}$$

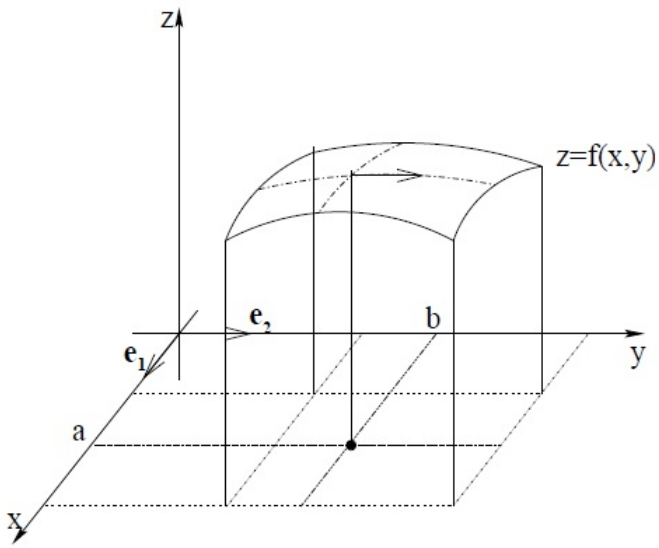
Observación 1.3. *En el caso particular en el que $n = 2$, se tiene que:*

1. *f es derivable parcialmente con respecto a la variable x en un punto (a_1, a_2) si existe el límite:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}. \tag{8}$$

2. *f es derivable parcialmente con respecto a la variable y en el punto (a_1, a_2) si existe el límite:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}. \tag{9}$$



Ejemplo 1.2. *Calculemos las derivadas parciales en el $(0, 0)$ de la aplicación:*

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = x^2. \tag{10}$$

1. *La derivada parcial con respecto a x en $(0, 0)$:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = 0. \tag{11}$$

2. *La derivada parcial con respecto a y en $(0, 0)$:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = 0. \tag{12}$$

Observación 1.4. *Para obtener la derivada parcial (respecto a la i-ésima variable x_i, cualquiera) son aplicables las reglas de la derivación de funciones de una variable; el procedimiento operativo para el cálculo de derivadas parciales es el mismo que el que se sigue para hallar las derivadas en el caso de una variable. Si observamos la definición de derivada parcial, al derivar con respecto a x_i todas las demás variables x_j con $j \neq i$ permanecen fijas en este proceso, son parámetros. De este modo, para calcular las derivadas parciales de la función:*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy, \tag{13}$$

derivamos la expresión con respecto a x suponiendo que la y es un parámetro:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y \tag{14}$$

y para calcular la segunda derivada parcial, derivamos la expresión con respecto a y, suponiendo que la x es un parámetro:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 2x. \tag{15}$$

Ejemplo 1.3. *Calculemos las derivadas parciales de la función:*

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \tag{16}$$

en todo punto $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$*. Por un lado, para cualquier punto* $(x, y) \neq (0, 0)$*, la función viene definida por la expresión* $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$*, por lo tanto, para calcular las derivadas parciales, seguimos la técnica que hemos introducido en la observación anterior y derivamos utilizando las reglas habituales de derivación:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Para el punto $(0, 0)$ *tenemos que emplear la definición:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0. \tag{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0. \tag{19}$$

Observación 1.5. *Pueden existir las derivadas parciales en un punto y, sin embargo, la función no ser continua en dicho punto.*

Observación 1.6. *Una función escalar con dominio contenido en* $\mathbb{R}^n$ *tiene, como mucho, n derivadas parciales.*

2. Vector gradiente y matriz de Jacobi.

Cuando una función escalar o vectorial posee todas sus derivadas parciales en un punto, es posible almacenar toda esa información en una matriz, llamada vector gradiente en el caso de funciones escalares o matriz de Jacobi en el caso de funciones vectoriales.

2.1. Vector gradiente.

Definición 1.3. ***Vector gradiente.*** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Si existen todas las derivadas parciales de* f *en* $\mathbf{a}$*, llamaremos gradiente de* f *en* $\mathbf{a}$*, y lo denotaremos por* $\nabla f(\mathbf{a})$*, al siguiente vector:*

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right). \tag{20}$$

Ejemplo 1.4. *Dada la función escalar* $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(x, y, z) = \cos(xy + z)$*, tenemos que:*

1. $\dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = -y \operatorname{sen}(xy + z)$,
2. $\dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = -x \operatorname{sen}(xy) + z$,
3. $\dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = -\operatorname{sen}(xy + z)$.

Por lo tanto:

$$\nabla f(x, y, z) = (-y \operatorname{sen}(xy + z), -x \operatorname{sen}(xy) + z, -\operatorname{sen}(xy + z)) \tag{21}$$

Observación 1.7. *Dado un campo escalar* f *para el cual podamos calcular su vector gradiente en un punto* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ *y dado un vector* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*, se tiene que que:*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}. \tag{22}$$

Ejemplo 1.5. *Dada la función del ejemplo anterior y el vector* $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$*, podemos calcular la derivada direccional*

$$D_{\mathbf{v}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{v} = -ysen(xy + z) - xsen(xy) + z - sen(xy + z). \tag{23}$$

Observación 1.8. *Dado un campo escalar* f *para el cual podamos calcular su vector gradiente en un punto* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ *de forma que* $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$*, se tiene que* $\nabla f(\mathbf{a})$ *apunta en la dirección en la cual* f *crece más rápidamente.*

Ejemplo 1.6. *Dado el campo escalar* $f(x, y) = x^2 - y^2$*, la dirección en la cual crece más rápidamente desde el punto* $(1, 1)$ *es* $\nabla f(1, 1)$*:*

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) \Rightarrow \nabla f(1, 1) = (2, -2). \tag{24}$$

2.2. Matriz de Jacobi.

Definición 1.4. ***Matriz de Jacobi.*** *Sea* $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función vectorial definida en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Si existen todas las derivadas parciales de las componentes de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a}$*, definidmos la matriz de Jacobi de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a}$ *de la siguiente forma:*

$$J\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_1\mathbf{f}(\mathbf{a}) & D_2\mathbf{f}(\mathbf{a}) & \ldots & D_n\mathbf{f}(\mathbf{a}) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}. \tag{25}$$

Donde $D_k\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$*,* $k = 1, \dots, n$*, es el siguiente vector columna:*

(26) $$D_k\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Observación 1.9. *Puesto que la matriz de Jacobi está compuesta por las derivadas parciales de cada una de las componentes de* $\mathbf{f}$*, el cálculo de las entradas de dicha matriz se realiza empleando las reglas comunes de derivación (ver el siguiente ejercicio).*

Ejemplo 1.7. *Calculemos la matriz de Jacobi en un punto* (x, y) *de la siguiente función vectorial:*

(27) $$\mathbf{f} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{f}(x, y) = \left(\log(1 + x^2 + y^2), e^{x+y^2}, \tan(xy^2)\right)$$

Se tiene que:

(28) $$J\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_3(\mathbf{a})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3(\mathbf{a})}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\,x}{x^2 + y^2 + 1} & \dfrac{2\,y}{x^2 + y^2 + 1} \\ \mathrm{e}^{y^2+x} & 2\,y\,\mathrm{e}^{y^2+x} \\ y^2\,\left(\tan\left(x\,y^2\right)^2 + 1\right) & 2\,x\,y\,\left(\tan\left(x\,y^2\right)^2 + 1\right) \end{pmatrix}$$

3. Diferenciabilidad de una función de varias variables reales.

Una condición más fuerte que la derivada direccional es la noción de diferenciabilidad. Con este concepto si que podemos extender el resultado ya mencionado de que toda función real de una variable real derivable en un punto también es continua en el punto. En el resto del tema denotaremos por $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ un vector columna y por $\mathbf{h}^t$ un vector fila:

(29) $$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

(30) $$\mathbf{h}^t = (h_1, h_2, \dots, h_n).$$

3.1. Diferenciabilidad de una función escalar en un punto.

Definición 1.5. ***Diferenciabilidad de una función escalar en un punto.*** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar definida en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Diremos que* f *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *si existen todas las derivadas parciales de* f *en* $\mathbf{a}$ *y además:*

(31) $$\lim_{\substack{\mathbf{h} \to 0 \\ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a})\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Ejemplo 1.8. *Estudiemos la diferenciabilidad de la siguiente función escalar en el punto* $(0,0)$*:*

$$f\,:\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases} \tag{32}$$

Para estudiar la diferenciabilidad de la función anterior empleando la definición, debemos comprobar:

1. *Que existen las derivadas parciales en el punto* $(0,0)$*:*
   - *Comprobemos si existe la derivada parcial con respecto a la variable x en el punto* $(0,0)$*:*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{f}=0. \tag{33}$$

     Por lo tanto, existe la primera derivada parcial.
   - *Comprobemos si existe la derivada parcial con respecto a la variable y en el punto* $(0,0)$*:*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=0. \tag{34}$$

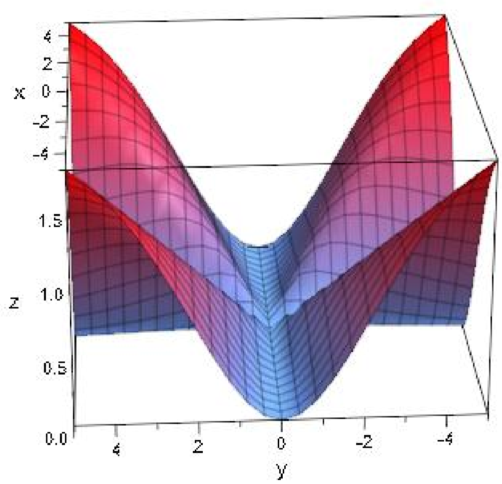
     Por lo tanto, existe la segunda derivada parcial.
2. *Que se cumple (31):*

$$\lim_{\substack{\mathbf{h}\to 0\\ \mathbf{h}\in\mathbb{R}^2}}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}=0. \tag{35}$$

Ahora bien:

$$\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}=\frac{\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\|\mathbf{h}\|}=\frac{h_1^2h_2^2}{\|\mathbf{h}\|^3}, \tag{36}$$

gráficamente la función escalar asociada al cociente anterior se comporta de la siguiente forma:



Veamos que, efectivamente, el límite cuando **h** *tiende a* $(0,0)$ *de la función escalar asociada al cociente (36) es cero. Por un lado:*

$$\frac{h_1^2h_2^2}{\|\mathbf{h}\|^3}\le\frac{(h_1^2+h_2^2)(h_1^2+h_2^2)}{\|\mathbf{h}\|^3}=\frac{\|\mathbf{h}\|^4}{\|\mathbf{h}\|^3}=\|\mathbf{h}\|, \tag{37}$$

por lo tanto, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, si tomamos $\delta = \epsilon$, se tiene que si $\|\mathbf{h} - (0,0)\| = \|\mathbf{h}\| \leq \delta = \epsilon$, entonces:

$$\left| \frac{h_1^2 h_2^2}{\|\mathbf{h}\|^3} - 0 \right| \leq \|\mathbf{h}\| \leq \delta = \epsilon. \tag{38}$$

De donde se deduce que la condición (31) es cierta.

Ejemplo 1.9. *Veamos a continuación un ejemplo de función escalar para la cual existen las derivadas parciales en el $(0,0)$ y, sin embargo, no es diferenciable en el $(0,0)$:*

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{39}$$

Veamos la existencia de las derivadas parciales:

- *Primera parcial:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0. \tag{40}$$

Se tiene entonces que existe la primera derivada parcial.

- *Segunda parcial:*

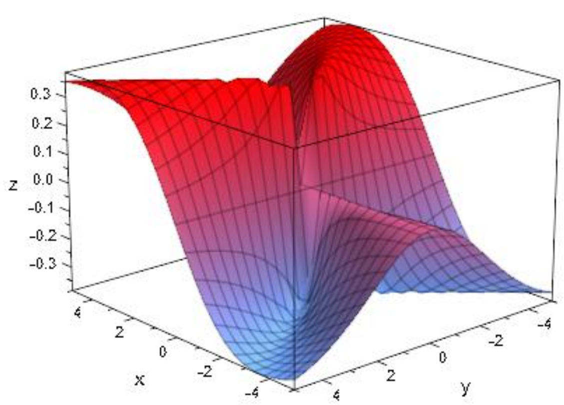
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = 0. \tag{41}$$

Se tiene entonces que existe la segunda derivada parcial.

Veamos que la aplicación no es diferenciable:

$$\lim_{\substack{\mathbf{h} \to 0 \\ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2}} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\substack{\mathbf{h} \to 0 \\ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2}} \frac{h_1 h_2^2}{\|\mathbf{h}\|^3}. \tag{42}$$

Gráficamente, la aplicación $\dfrac{h_1 h_2^2}{\|\mathbf{h}\|^3}$ se comporta de la siguiente manera:



Observamos que, al acercarnos al $(0,0)$ *por el conjunto* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}$*, no existe el límite. En efecto:*

$$\lim_{\substack{\mathbf{h} \to 0 \\ \mathbf{h} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}}} \frac{h_1 h_2^2}{\|\mathbf{h}\|^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\left(2\,x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{43}$$

pero:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{\left(2\,x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \tag{44}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3}{\left(2\,x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{45}$$

Por lo tanto, al no existir el límite cuando nos acercamos al $(0,0)$ *por el conjunto* S*, se tiene que no existe el límite y, entonces, la aplicación no es diferenciable.*

Observación 1.10. *A la vista del ejemplo anterior, recalcamos que la existencia de las derivadas parciales, no es una condición suficiente para que una función sea diferenciable.*

3.2. Diferenciabilidad de una función vectorial en un punto. Veamos a continuación la definición de que una función vectorial sea diferenciable en un punto.

Definición 1.6. ***Diferenciabilidad de una función vectorial en un punto.*** *Sean* $\mathbf{f} \ : \ A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función vectorial definida en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a}$ *un punto de* A*. Diremos que* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *si existen todas las derivadas parciales de las componentes de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a}$ *y además se cumple que:*

$$\lim_{\substack{\mathbf{h} \to 0 \\ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - J\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{46}$$

El siguiente resultado relaciona la diferenciabilidad de un campo vectorial con la diferenciabilidad de sus componentes.

Teorema 1.1. *(Diferenciabilidad de un campo vectorial en función de la diferenciabilidad de sus componentes.) Sea* $\mathbf{f} \ : \ A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial definido en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Entonces,* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *si y solamente si todas sus componentes son diferenciables en* $\mathbf{a}$.

4. Condiciones para la diferenciabilidad.

En la siguiente sección enunciaremos dos condiciones para que una función sea diferenciable en un punto. La primeda de ellas es una condición necesaria y relaciona los conceptos de diferenciabilidad y continuidad, análogo al que aparece en las funciones reales de una variable real. La segunda condición es una condición suficiente y permitirá decidir la diferenciabilidad sin tener que trabajar punto a punto.

Proposición 1.1. *(Condición necesaria de diferenciabilidad.) Sea* $\mathbf{f} \ : \ A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación definida en la bola abierta* $B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Si* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$*, entonces* $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

Corolario 1.1. *(Criterio negativo de diferenciabilidad.) Sea* $\mathbf{f} \ : \ A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación definida en la bola abierta* $B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Si* $\mathbf{f}$ *no es continua en* $\mathbf{a}$*, entonces* $\mathbf{f}$ *no es diferenciable en* $\mathbf{a}$.

Teorema 1.2. *(Condición suficiente de diferenciabilidad.) Sea* $\mathbf{f} \ : \ A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación definida en la bola abierta* $B(\mathbf{x}_0, r)$ *y sea* $\mathbf{a} \in A$*. Si existen las derivadas parciales* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$*,* $\forall i = 1, \ldots, m$*,* $\forall j = 1, \ldots, n$*, en un entorno de* $\mathbf{a}$ *y son continuas, entonces* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$.

Observación 1.11. *El recíproco no es cierto en general, ya que, por ejemplo, la siguiente aplicación es diferenciable (derivable) en el* 0 *y, sin embargo, su derivada no es continua en el* 0*:*

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Observación 1.12. *Resumiendo:*

Derivadas parciales continuas $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ *Diferenciabilidad* $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ *Existencia de derivadas parciales.*

5. Operaciones con funciones diferenciables.

Proposición 1.2. *Sean* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *dos funciones vectoriales definidas en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$*. Si* $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *son diferenciables en* $\mathbf{a} \in A$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces:*

1. $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *es diferenciable en a y además*

$$J(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = J\mathbf{f}(\mathbf{a}) + J\mathbf{g}(\mathbf{a}). \tag{48}$$

2. $\lambda\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y además*

$$J(\lambda\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \lambda J\mathbf{f}(\mathbf{a}). \tag{49}$$

3. *El producto escalar* $< \mathbf{f}, \mathbf{g} >$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y además*

$$J < \mathbf{f}, \mathbf{g} > (\mathbf{a})\mathbf{h} =< J\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) > + < \mathbf{f}(\mathbf{a}), J\mathbf{g}(\mathbf{a})\mathbf{h} > . \tag{50}$$

Ejemplo 1.10. *Comprobemos que se cumple la tercera de las propiedades anteriores considerando las siguientes funciones vectoriales:*

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(x^2, y^2, z^2\right), \tag{51}$$

$$\mathbf{g}(x, y, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}\right) \tag{52}$$

y el vector $\mathbf{h} = (1, 1, 1)^t$*. Por un lado,*

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >= yx + zy + xz, \tag{53}$$

por lo tanto

$$J < \mathbf{f}, \mathbf{g} > (x, y, z)\mathbf{h} \quad = \quad (y + z, z + x, x + y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 2y + 2z. \tag{54}$$

Por otro lado,

$$J\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow J\mathbf{f}(x, y, z)\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \tag{55}$$

$$J\mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \\ 0 & -\dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z} & 0 & -\dfrac{x}{z^2} \end{pmatrix} \Rightarrow J\mathbf{g}(x,y,z)\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{y^2} \\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{z^2} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Por lo tanto:

$$< J\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) > + < \mathbf{f}(\mathbf{a}), J\mathbf{g}(\mathbf{a})\mathbf{h} >= 2y + 2z + 2x + x - y + y - z + z - x = 2x + 2y + 2z. \tag{57}$$

Proposición 1.3. *Sean* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos aplicaciones definidas en la bola abierta* $B(\mathbf{x}_0, r)$*. Si* $\mathbf{f}$ *y* g *son diferenciables en* $\mathbf{a}$ *y* $g(\mathbf{a}) \neq 0$*, entonces* $\frac{\mathbf{f}}{g}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y además:*

$$J\left(\frac{\mathbf{f}}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{g(a)J\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})}, \tag{58}$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ *se está considerando como un vector columna.*

Ejemplo 1.11. *Comprobemos que se cumple la proposición anterior empleando las funciones escalares*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad y \quad g(x,y,z) = x^2 + 1. \tag{59}$$

En este caso, si llamamos h *al cociente de* f *y* g*,*

$$h(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1}, \tag{60}$$

de forma que derivando directamente:

$$\begin{aligned} Jh(x,y,z) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad \frac{2y}{x^2+1}, \quad \frac{2z}{x^2+1} \right) \\ &= \left(-\frac{2x\left(y^2+z^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad \frac{2y}{x^2+1}, \quad \frac{2z}{x^2+1} \right). \end{aligned} \tag{61}$$

Por la regla del cociente:

$$\begin{aligned} &\frac{g(x,y,z)Jf(x,y,z) - f(x,y,z)\nabla g(x,y,z)}{g^2(x,y,z)} \\ &= \frac{(x^2+1)(2x,2y,2z) - (x^2+y^2+z^2)(2x,0,0)}{(x^2+1)^2} \\ &= \left(-\frac{2x\left(y^2+z^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad \frac{2y}{x^2+1}, \quad \frac{2z}{x^2+1} \right). \end{aligned} \tag{62}$$

Teorema 1.3. *(Regla de la cadena.) Sean* $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y* $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *dos funciones vectoriales definidas en las bolas abiertas* U *y* V *de forma que* $\mathbf{f}(U) \subset V$*. Entonces, si* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a} \in U$ *y* $\mathbf{g}$ *es diferenciable en* $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V$*, entonces* $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y además se cumple que:*

$$J(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))J\mathbf{f}(\mathbf{a}). \tag{63}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i(\mathbf{f}(\mathbf{a}))}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(\mathbf{a})}{\partial x_j}. \tag{64}$$

Ejemplo 1.12. *Verifiquemos que se cumple la regla de la cadena para*

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w, \tag{65}$$

donde

$$u(x, y, z) = x^2 y, \quad v(x, y, z) = y^2, \quad w(x, y, z) = \mathrm{e}^{-xz}. \tag{66}$$

Ahora

$$h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) = x^4 y^2 + y^4 - \mathrm{e}^{-xz}. \tag{67}$$

Por lo tanto, derivando directamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= 4\,x^3\,y^2 + \frac{z}{\mathrm{e}^{x\,z}}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 2\,x^4\,y + 4\,y^3, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{x}{\mathrm{e}^{x\,z}}. \end{aligned} \tag{68}$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(-z\mathrm{e}^{-xz}) \\ &= (2x^y y)(2xy) + z\mathrm{e}^{-xz} = 4\,x^3\,y^2 + \frac{z}{\mathrm{e}^{x\,z}}, \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\ &= 2u(x^2) + 2v(2y) + (-1) \cdot 0 \\ &= (2x^2 y)(x^2) + 2y^2(2y) = 2x^4 y + 4y^3, \end{aligned} \tag{70}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= 2u \cdot 0 + 2v \cdot 0 + (-1)(-x\mathrm{e}^{-xz}) \\
&= x\mathrm{e}^{-xz}.
\end{aligned} \tag{71}
$$

Observamos que obtenemos el mismo resultado.

6. Diferenciabilidad de orden superior. Matriz de Hesse.

De manera similar a lo que ya hemos hecho en el caso de funciones reales de una variable real, es posible definir las derivadas de orden superior de una función escalar o vectorial. Ahora bien, en esta nueva situación, es posible calcular las derivadas parciales. Por ejemplo, en el caso:

$$f\,:\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{72}$$

podemos calcular la derivada con respecto a x de la derivada con respecto a y y viceversa, la derivada con respecto a y de la derivada con respecto a x. En esta sección daremos una condición suficiente que garantice que ambas derivadas son iguales.

6.1. Derivadas de orden superior.

Definición 1.7. ***Derivada de orden superior.*** *Sea* $\mathbf{f}\,:\,A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función vectorial definida en la bola abierta* $A = B(\mathbf{x}_0, r)$.

1. *Si existe* $D_i\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\forall i = 1,\dots,n$, $\forall \mathbf{x}\in A$ *y* $D_i\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es continua,* $\forall i = 1,\dots,n$, *diremos que* $\mathbf{f}$ *es una aplicación de clase uno en* A *y lo denotaremos por* $\mathbf{f}\in\mathscr{C}^1(A)$.
2. *Sea, para cada* $i = 1,\dots,n$:

$$D_i\mathbf{f}\,:\,\mathbf{x}\in A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow D_i\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t} \in\mathbb{R}^m \tag{73}$$

Si para todo $i, j = 1,\dots,n$ *existe* $D_j(D_i\mathbf{f})(\mathbf{x})$, *diremos que* $\mathbf{f}$ *tiene derivadas parciales de segundo orden en* $\mathbf{x}$ *y denotaremos por:*

$$D_{i,j}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D_j(D_i\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{D_i\mathbf{f}(\mathbf{f}+t\mathbf{e}_j)-D_i\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}. \tag{74}$$

Si además $D_{i,j}\mathbf{f}$ *existe y es continua* $\forall i, j = 1,\dots,n$, *diremos que* $\mathbf{f}$ *es una aplicación de clase dos en* A *y lo denotaremos por* $\mathbf{f}\in\mathscr{C}^2(A)$.

3. *En general, si existen* $D_{i_1,i_2,\dots,i_p}\mathbf{f}$ *(derivadas parciales de orden* p*) y son continuas* $\forall i_1, i_2,\dots,i_p\in\{1,\dots,n\}$, *diremos que* $\mathbf{f}$ *es una aplicación de clase* p *en* A *y lo denotarmos por* $\mathbf{f}\in\mathscr{C}^p(A)$.
4. *Si* $\mathbf{f}\in\mathscr{C}^p(A)$ $\forall p\in\mathbb{N}$, *diremos entonces que* $\mathbf{f}$ *es una aplicación de clase infinito en* A: $\mathbf{f}\in\mathscr{C}^\infty(A)$.

Ejemplo 1.13. *Obtengamos las derivadas parciales de segundo orden de la aplicación:*

$$f(x,y) = e^{x^2y} \tag{75}$$

1. *Derivadas parciales de primer orden:*

$$D_1f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\,x\,y\,\mathrm{e}^{x^2\,y}. \tag{76}$$

$$D_2f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2\,\mathrm{e}^{x^2\,y}. \tag{77}$$

2. *Derivadas parciales de segundo orden:*

$$D_{1,1}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) = 2\,y\,\mathrm{e}^{x^2\,y} + 4\,x^2\,y^2\,\mathrm{e}^{x^2\,y} \tag{78}$$

$$D_{2,2}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = x^4\,\mathrm{e}^{x^2\,y}. \tag{79}$$

$$D_{2,1}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2\,y} + 2\,x^3\,y\,\mathrm{e}^{x^2\,y}. \tag{80}$$

$$D_{1,2}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2\,y} + 2\,x^3\,y\,\mathrm{e}^{x^2\,y}. \tag{81}$$

Observamos que las derivadas segundas cruzadas $D_{2,1}f(x,y)$ y $D_{1,2}f(x,y)$ son iguales.

Ejemplo 1.14. *La ecuación:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f = 0 \tag{82}$$

se conoce como la ecuación de Laplace. Veamos que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de Laplace:

1. $f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(z-c)^2$.
2. $\log(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$.

Veamos qué ocurre con la primera función (la segunda se deja como ejercicio):

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) &= 2, \\ \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) &= 2, \\ \tfrac{\partial^2}{\partial z^2}f(x,y) &= -4, \end{aligned} \tag{83}$$

por lo tanto, es claro que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}f = 0$ *tal y como queríamos demostrar.*

6.2. Matriz de Hesse. La información relativa a las derivadas de segundo orden puede ser almacenada en una matriz denominada matriz de Hesse. Esta matriz será empleada, por ejemplo, en el cálculo de extremos de campos escalares.

Definición 1.8. ***Matriz de Hesse.*** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en la bola $A = B(\mathbf{x}_0, r)$ y sea $\mathbf{z}_0 \in A$. Si existen las derivadas parciales de segundo orden de f en $\mathbf{z}_0$, definimos la matriz de Hesse de f en $\mathbf{z}_0$ (o matriz hessiana de f en $\mathbf{z}_0$):*

$$Hf(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} D_{1,1}f(\mathbf{z}_0) & D_{1,2}f(\mathbf{z}_0) & \dots & D_{1,n}f(\mathbf{z}_0) \\ D_{2,1}f(\mathbf{z}_0) & D_{2,2}f(\mathbf{z}_0) & \dots & D_{2,n}f(\mathbf{z}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{n,1}f(\mathbf{z}_0) & D_{n,2}f(\mathbf{z}_0) & \dots & D_{n,n}f(\mathbf{z}_0) \end{pmatrix} \tag{84}$$

Ejemplo 1.15. *Calculemos todas las derivadas parciales de segundo orden y la matriz hessiana de la siguiente función escalar en un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:*

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(x,y,z) = xe^{yz} \in \mathbb{R}. \tag{85}$$

Se tiene entonces que:

$$
\begin{aligned}
D_{1,1}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(x,y,z) &= 0, \\
D_{1,2}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,z) &= z\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{1,3}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x,y,z) &= y\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{2,1}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y,z) &= z\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{2,2}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f(x,y,z) &= x\,z^2\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{2,3}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f(x,y,z) &= x\,\mathrm{e}^{y\,z} + x\,y\,z\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{3,1}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z) &= y\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{3,2}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x,y,z) &= x\,\mathrm{e}^{y\,z} + x\,y\,z\,\mathrm{e}^{y\,z}, \\
D_{3,3}f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} f(x,y,z) &= x\,y^2\,\mathrm{e}^{y\,z}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Por lo tanto:

$$
Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z\,\mathrm{e}^{y\,z} & y\,\mathrm{e}^{y\,z} \\ z\,\mathrm{e}^{y\,z} & x\,z^2\,\mathrm{e}^{y\,z} & x\,\mathrm{e}^{y\,z} + x\,y\,z\,\mathrm{e}^{y\,z} \\ y\,\mathrm{e}^{y\,z} & x\,\mathrm{e}^{y\,z} + x\,y\,z\,\mathrm{e}^{y\,z} & x\,y^2\,\mathrm{e}^{y\,z} \end{pmatrix}
\tag{87}
$$

Enunciemos a continuación una condición suficiente que nos garantice que la matriz de Hesse sea simétrica, esto es, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{z}_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\mathbf{z}_0)$:

Teorema 1.4. *(Teorema de Schwartz.) Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial definida en la bola abierta $B(\mathbf{z}_0, r)$ y sea $\mathbf{z}_0 \in A$. Si $\mathbf{f} \in \mathscr{C}^1(A)$ y dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ existe $D_{i,j}\mathbf{f}$ en A y es continua en $\mathbf{z}_0$, entonces existe $D_{j,i}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ y además se cumple que:*

$$
D_{i,j}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = D_{j,i}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0).
\tag{88}
$$

Observación 1.13. *En las condiciones del teorema de Schwartz la matriz de Hesse de una campo escalar es simétrica.*

7. Polinomio de Taylor de una función escalar.

A continuación presentamos como aproximar un campo escalar mediante polinomios en varias variables en dos casos particulares.

Definición 1.9. ***Polinomio de Taylor de una función escalar.*** *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de clase $\mathscr{C}^3(A)$ y $\mathbf{a} \in A$. Se define:*

1. *El polinomio de Taylor de orden uno de f en $\mathbf{a}$:*

$$P_{1,f,\mathbf{a}}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{89}$$

2. *El polinomio de Taylor de orden dos de f en $\mathbf{a}$:*

$$P_{2,f,\mathbf{a}}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_n\right) H f(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{90}$$

Ejemplo 1.16. *Calculemos el polinomio de Taylor de orden uno y orden dos en un punto (x, y) de la siguiente función escalar:*

$$f\,:\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y) = ye^{x+y-5}. \tag{91}$$

Por un lado:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{x+y-5} & \mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5} \end{pmatrix}, \tag{92}$$

$$H f(x,y) = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{x+y-5} & \mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5} \\ \mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5} & 2\,\mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5} \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P_{1,f,(x,y)}(x+h_1, y+h_2) &= f(x,y) + \nabla f(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= y\,\mathrm{e}^{x+y-5} + h_1\, y\,\mathrm{e}^{x+y-5} + h_2\,\left(\mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5}\right) \end{aligned} \tag{94}$$

y

$$\begin{aligned} P_{2,f,(x,y)}(x+h_1, y+h_2) &= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\left(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_n\right) H f(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= h_2\,\left(h_1\,\left(\mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5}\right) + h_2\,\left(2\,\mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y-5}\right)\right) \\ &\quad + h_2\,\left(\mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\mathrm{e}^{x+y\,-5}\right) + h_1\,\left(h_2\,\left(\mathrm{e}^{x+y-5} + y\,\,\mathrm{e}^{x+y-5}\right) + h_1\, y\,\mathrm{e}^{x+y-5}\right) \\ &\quad + y\,\,e^{x+y-5} + h_1\, y\,\mathrm{e}^{x+y-5}. \end{aligned} \tag{95}$$

7.1. Plano tangente. Al igual que ocurría en el caso de funciones reales de una variable real, el polinomio de Taylor de primer grado se puede interpretar geométricamente como el plano tangente a una función esacalar. Esto es, dada una función escalar $f\,:\,\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, el polinomio de Taylor de primer grado centrado en un punto (x_0, y_0)

$$P_{1,f,(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0), \tag{96}$$

es el plano tangente al grafo de la aplicación f en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 1.17. *Calculemos el plano tangente en el punto* $(1,1)$ *de la siguiente función escalar:*

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}. \tag{97}$$

Las derivadas parciales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{4x^3(x^2+y^2)-2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned} \tag{98}$$

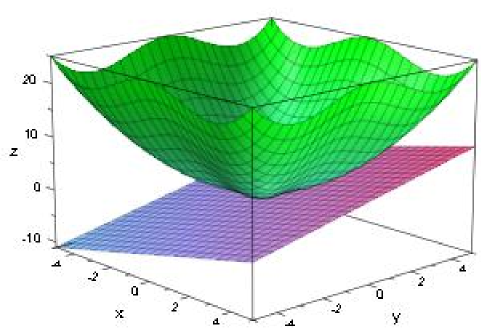
al evaluarlas en el punto $(1,1)$ *nos quedan:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} &= 1. \end{aligned} \tag{99}$$

Por lo tanto, el plano tangente será:

$$t(x,y) = 1 + 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) = x+y-1. \tag{100}$$

Gráficamente:



8. Cálculo de extremos de funciones.

Otra de las posibilidades del cálculo diferencial es el cálculo de extremos de una función. En esta sección veremos como determinar los extremos relativos de una función escalar empleando el cálculo diferencial.

Definición 1.10. ***Extremo relativo.*** *Sea* $f : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *un campo escalar definido en un conjunto* B. *Diremos que* f *tiene en* $\mathbf{x}_0 \in B$ *un máximo relativo (respectivamente un mínimo relativo), si existe* $R > 0$ *tal que* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ *(respectivamente,* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$*),* $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R) \cap B$.

Definición 1.11. ***Extremo relativo estricto.*** *Sea* $f : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *un campo escalar definido en un conjunto* B. *Diremos que* f *tiene en* $\mathbf{x}_0 \in B$ *un máximo relativo estricto (respectivamente un mínimo relativo estricto), si existe* $R > 0$ *tal que* $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ *(respectivamente,* $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$*),* $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R) \cap B$*, con* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.

El primer resultado que se enuncia, proporciona una condición necesaria para la existencia de extremos relativos de funciones escalares diferenciables.

Teorema 1.5. *(Condición necesaria de primer orden para la existencia de extremos relativos.) Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar definida en un conjunto abierto* A. *Si* f *tiene un estremo relativo en* $\mathbf{x}_0$ *y* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$, *entonces* $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.14. *Como ya vimos en el caso escalar, el recíproco del teorema anterior no es cierto: la función* $f(x) = x^3$ *tiene derivada nula en el punto* $\mathbf{x}_0 = 0$, *a pesar de que no presenta un extremo en dicho punto.*

Con la intención de dar una extensión a la conocida propiedad sobre extremos de funciones reales de una variable real dos veces derivables, introducimos los conceptos de matriz (semi-)definida positiva y negativa.

Definición 1.12. *Sea* $A \in M_{n\times n}$ *una matriz simétrica.*

1. *Diremos que* A *es una matriz definida positiva si* $\mathbf{h}^t A\mathbf{h} > 0\ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} \neq 0$.
2. *Diremos que* A *es una matriz semi-definida positiva si* $\mathbf{h}^t A\mathbf{h} \geq 0\ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.
3. *Diremos que* A *es una matriz definida negativa si* $\mathbf{h}^t A\mathbf{h} < 0\ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} \neq 0$.
4. *Diremos que* A *es una matriz semi-definida negativa si* $\mathbf{h}^t A\mathbf{h} \leq 0\ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.

El siguiente resultado nos proporciona una forma práctica de comprobar el carácter de una matriz.

Proposición 1.4. *Sea* $A \in M_{n\times n}$ *una matriz simétrica. Son equivalentes:*

1. *A es una matriz definida positiva (definida negativa).*
2. *Se cumple que:*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0, \ \textit{(respectivamente, } (-1)^k\Delta_k > 0\textit{)},\ \forall k = 1, \dots, n. \tag{101}$$

Estamos en condiciones de enunciar la extensión del resultado conocido para funciones reales de una variable real al caso de funciones escalares de varias variables reales.

Teorema 1.6. *(Condición necesaria de segundo orden par la existencia de extremos). Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar definida en la bola abierta* A. *Dado un punto* $x_0 \in A$, *si* $f \in \mathscr{C}^2(B(\mathbf{x}_0, R))$, *para algún* $R > 0$, *y* f *tiene un mínimo relativo (máximo relativo) en* $\mathbf{x}_0$, *entonces la matriz de Hesse de* f *en* $\mathbf{x}_0$ *es semi-definida positiva (semi-definida negativa).*

Observación 1.15. *La condición anterior es necesaria, pero, en general, no es suficiente. Por ejemplo, la aplicación:*

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = x^2y + y^2 \in \mathbb{R} \tag{102}$$

cumple que:

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + 2y), \quad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}. \tag{103}$$

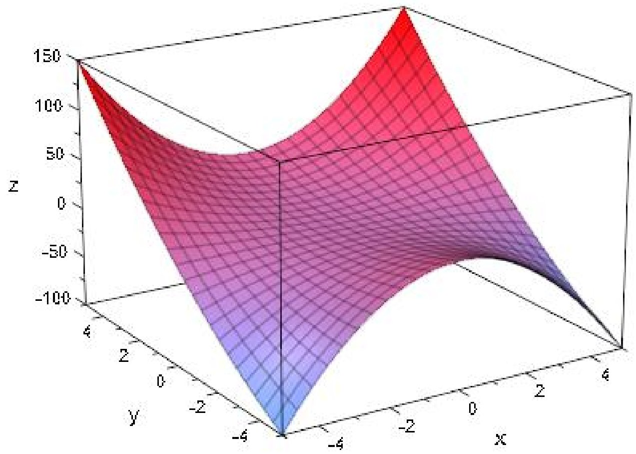
Por lo tanto,

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{104}$$

es una matriz semi-definida positiva

$$(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_2^2 \geq 0. \tag{105}$$

Pero, en el punto $(0, 0)$, f *no tiene ningún extremo relativo:*



Veamos a continuación una condición suficiente para la existencia de extremos relativos.

Teorema 1.7. *(Condición suficiente para la existencia de extremos relativos). Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *un campo escalar definido en la bola abierta* A *tal que* $f \in \mathscr{C}^2(B(\mathbf{x}_0, R))$ *con* $\mathbf{x}_0 \in A$ *y* $R > 0$*. Si* $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ *y* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *es una matriz definida positiva (definida negativa), entonces* f *tiene* $\mathbf{x}_0$ *un mínimo relativo estricto (máximo relativo estricto).*

Observación 1.16. *Resumiendo, si queremos calcular los extremos relativos de un campo escalar* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, procedemos de la siguiente manera:*

1. *Obtenemos los puntos críticos, esto es:*

$$C = \{\mathbf{x} \in A : \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0\}. \tag{106}$$

2. *Para cada punto* $\mathbf{x}_0$ *crítico de* f*, calculamos* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *y:*
   a) *Si* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *no es definida, entonces* f *no presenta extremo relativo en* $\mathbf{x}_0$.
   b) *Si* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *es definida positiva, entonces* f *presenta un mínimo relativo estricto en* $\mathbf{x}_0$.
   c) *Si* $Hf(\mathbf{x}_0)$ *es definida negativa, entonces* f *presenta un máximo relativo estricto en* $\mathbf{x}_0$.

Ejemplo 1.18. *Calculemos los extremos relativos de la siguiente función:*

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3. \tag{107}$$

Primero, observemos que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$*, además:*

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y, 3x + 3y^2), \tag{108}$$

de forma que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ *es equivalente a que:*

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -y = x^2, \\ 3x + 3y^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x = y^2. \end{aligned} \tag{109}$$

Por lo tanto, los únicos puntos críticos son $(0, 0)$ *y* $(-1, -1)$*. Ahora bien:*

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}, \tag{110}$$

por lo tanto:

(111) $$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

- *En el caso de* $Hf(0,0)$, $\Delta_1 = 0$ *y* $\Delta_2 = -9$, *por lo tanto, la matriz no es ni definida positiva ni definida negativa.*
- *En el caso de* $Hf(-1,-1)$, $\Delta_1 = -6$ *y* $\Delta_2 = 27$, *por lo tanto, la matriz de Hesse es definida negativa ya que* $(-1)^1\Delta_1 > 0$ *y* $(-1)^2\Delta_2 > 0$. *Entonces* f *tiene en el* $(-1,-1)$ *un máximo relativo estricto.*

9. Operadores diferenciales.

En esta sección veremos algunos de los operadores diferenciales que se suelen emplear en diversas aplicaciones físicas y mecánicas. Dichos operadores diferenciales serán empleados en cursos sucesivos. Comencemos recordando los sistemas de referencia asociados a las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

- **Coordenadas polares.** Este sistema viene definido por un punto fijo 0, llamado polo, y una semirrecta con origen en 0 llamada semieje polar, que habitualmente coincide con la parte positiva del eje x, eje polar.

  Cada punto P se representa por (r,θ), siendo r la distancia de P al polo 0 y θ el ángulo orientado positivamente entre r y el eje polar. A los números (r,θ) se les llama coordenadas polares de P.

  Para que un punto $P \neq 0$ sea representado por un solo par de números en coordenadas polares tomaremos:

  $$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

  Por tanto, deducimos la siguiente relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares:

  $$\left.\begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array}\right\} \text{Polares a cartesianas.}$$

  $$\left.\begin{array}{rcl} r & = & +\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan(\theta) & = & \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \text{Cartesianas a polares.}$$

- **Coordenadas cilíndricas.** Son una generalización de las coordenadas polares a $\mathbb{R}^3$. Cada uno de los puntos P del espacio se representan mediante una terna:

  $$(\rho,\varphi,z),$$

  donde (r,φ) hacen el papel de las coordenadas polares, respecto a las componentes del plano (x,y) del punto. Además, z es la componente vertical del punto P.

  Por lo tanto, las fórmulas de conversión de cilíndricas a cartesianas, y viceversa, son:

  $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos(\varphi), \\ y & = & \rho\,\mathrm{sen}(\varphi), \\ z & = & z. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & \sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan(\varphi) & = & \dfrac{y}{x}, \\ z & = & z. \end{array}\right.$$

- **Coordenadas esféricas.** Al igual que las coordenadas cilíndricas, se emplean para reprentar puntos en el espacio. Dado un punto P del espacio, quedará determinado por la siguiente terna:

  $$(\rho,\theta,\varphi),$$

donde:

- ρ es la distancia del punto P al origen de coordenadas ($\rho \geq 0$).
- θ es el ángulo de ``colatitud", el que forma el semieje positivo z^+ con el segmento OP. Se toma $0 \leq \theta \leq \pi$.
- φ es el ángulo "longitud``, el que forma el semieje x^+ con el segmento OQ, proyección de OP sobre el plano XY. Coincide con el ángulo de coordenadas polares ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

La relación que existe entre las coordenadas esféricas y las coordenadas cartesianas es la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \rho \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), \\ y &=& \rho \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \\ z &=& \rho\cos(\theta). \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \cos(\theta) &=& \dfrac{z}{\rho}, \\ \tan(\varphi) &=& \dfrac{y}{x}. \end{array}\right.$$

9.1. Operador gradiente. Dado un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, se define su gradiente, $\nabla\phi$, de la siguiente forma:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\mathbf{e}_n, \tag{112}$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, dado el campo escalar $\phi(x, y, z) = xy + z$, su gradiente será:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (y, x, 1) = y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \tag{113}$$

donde:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{e}_1 &=& (1,0,0), \\ \mathbf{e}_2 &=& (0,1,0), \\ \mathbf{e}_3 &=& (0,0,1). \end{array} \tag{114}$$

9.1.1. Operador gradiente en coordenadas polares. Veamos a continuación como podemos obtener el operador gradiente en coordenadas polares empleando la regla de la cadena. Supongamos que tenemos un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideremos el sistema de referencia basado en las coordenadas polares que hemos estudiado en el primer tema. Si realizamos el cambio de variable a coordenadas polares en el campo escalar ϕ:

$$\phi(x, y) = \phi(\rho, \theta), \tag{115}$$

por lo tanto, puesto que las coordenadas ρ y θ dependen de x e y:

(116) $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

(117) $$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Ahora, $\rho^2 = x^2 + y^2$ y $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, por lo tanto:

(118) $$2\rho\frac{\partial \rho}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos(\theta), \quad 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial y} = \mathrm{sen}(\theta),$$

(119) $$\frac{1}{\cos(\theta)^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\rho}, \quad \frac{1}{\cos(\theta)^2}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{\rho}.$$

Se tiene entonces que:

(120) $$\begin{aligned}\nabla\phi &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\cos(\theta) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\rho}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{\rho}\right)\mathbf{e}_2 \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\left(\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \mathrm{sen}(\theta)\mathbf{e}_2\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\left(-\mathrm{sen}(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2\right). \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{e}_\rho$ y $\mathbf{e}_\theta$ son, respectivamente, los vectores normal asociados al sistema de coordenadas polares:

(121) $$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \mathrm{sen}(\theta)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\mathrm{sen}(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19. *Consideremos el siguiente campo escalar:*

(122) $$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

y calculemos la expresión para el gradiente en coordenadas polares. Por un lado, haciendo el cambio de variable a coordenadas polares

(123) $$\phi(\rho, \theta) = \frac{1}{2}\rho^2,$$

por lo tanto:

(124) $$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta = \rho\mathbf{e}_\rho.$$

9.1.2. Operador gradiente en coordenadas cilíndricas. En esta subsección veremos como obtener el operador gradiente en coordenadas cilíndricas empleando la regla de la cadena. Supongamos que tenemos un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideremos el sistema de coordenadas cilíndricas que hemos estudiado en el primer tema. Si realizamos un cambio de variable a coordenadas cilíndricas en el campo escalar ϕ:

$$\phi(x, y, z) = \phi(\rho, \theta, z), \tag{125}$$

por lo tanto, puesto que las variables ρ y θ dependen de x e y, se tiene que, realizando unos cálculos similares a los que ya hemos hecho en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\cos(\theta) - \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\rho}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\cos(\theta)}{\rho}\right)\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_3 \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\left(\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_2\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\left(-\operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2\right) + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_3. \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{126}$$

Ejemplo 1.20. *Consideremos el siguiente campo escalar:*

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right) \tag{127}$$

y calculemos la expresión para el gradiente en coordenadas cilíndricas. Empecemos realizando el cambio de variable en el campo escalar:

$$\phi(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2}\left(2z^2 - \rho^2\right), \tag{128}$$

por lo tanto:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_3 = -\rho\mathbf{e}_\rho + 2z\mathbf{e}_z. \tag{129}$$

9.1.3. Operador gradiente en coordenadas esféricas. Al igual que en la subsección anterior, consideremos un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y realicemos un cambio de variable a coordenadas esféricas:

$$\phi(x, y, z) = \phi(\rho, \theta, \varphi). \tag{130}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{131}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{132}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{133}$$

Ahora, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\cos(\theta) = z/\rho$ y $\tan(\varphi) = y/x$, por lo tanto:

$$2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial x} = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), \tag{134}$$

análogamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \cos(\theta). \tag{135}$$

Por otro lado:

$$-\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{z}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho\cos(\theta)}{\rho^2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\cos(\varphi), \tag{136}$$

análogamente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}(\theta). \tag{137}$$

Por último:

$$\frac{1}{\cos(\varphi)^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{sen}(\theta)}, \tag{138}$$

análogamente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}(\theta)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{139}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{1}{\rho}\cos(\theta)\cos(\varphi) - \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{sen}(\theta)}\right)\mathbf{e}_1 \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{1}{\rho}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}(\theta)}\right)\mathbf{e}_2 \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\cos(\theta) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}(\theta)\right)\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{140}$$

agrupando factores:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\big(\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2 + \cos(\theta)\mathbf{e}_3\big) \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\big(\cos(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2 - \operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_3\big) \\ &= \frac{1}{\rho\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\big(\operatorname{sen}(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi)\mathbf{e}_2\big). \end{aligned} \tag{141}$$

Si tenemos en cuenta los vectores normales $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\varphi$ asociados al sistema de coordenadas esféricas:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2 + \cos(\theta)\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{e}_\theta &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\mathbf{e}_2 - \operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{e}_\varphi &= \operatorname{sen}(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi)\mathbf{e}_2,
\end{aligned}
\tag{142}
$$

obtenemos la siguiente expresión para el operador gradiente en coordenadas esféricas:

$$
\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{143}
$$

Ejemplo 1.21. *Consideremos el siguiente campo escalar:*

$$
\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) \tag{144}
$$

y calculemos su gradiente en coordenadas esféricas. Realizando el cambio de variable:

$$
\phi(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\left(3\rho^2\cos(\theta)^2 - \rho^2\right), \tag{145}
$$

por lo tanto:

$$
\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi = \rho\left(3\cos(\theta)^2 - 1\right)\mathbf{e}_\rho - 3\rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_\theta. \tag{146}
$$

9.2. Operador divergencia. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se define el operador divergencia $\nabla\cdot\mathbf{F}$:

$$
\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}, \tag{147}
$$

donde F_1, F_2, ..., F_n, son las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$.

Por ejemplo, dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,x) = (x^2y, y, zx)$, su divergencia será:

$$
\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2xy + 1 + x. \tag{148}
$$

9.2.1. Operador divergencia en coordenadas polares. Supongamos que tenemos un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y consideremos el cambio de variable a coordenadas polares, se tiene que:

$$
\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}, \tag{149}
$$

ahora,

$$
\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{150}
$$

$$
\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}. \tag{151}
$$

Por lo tanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \tag{152}$$

empleando los resultados que hemos obtenido en la subsección precedente:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial \rho}\cos(\theta) - \frac{\partial F_1}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\rho} + \frac{\partial F_2}{\partial \rho}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial F_2}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{\rho}. \tag{153}$$

Ahora, si tenemos en cuenta las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$ en los vectores normales $\mathbf{e}_\rho$ y $\mathbf{e}_\theta$,

$$\begin{aligned} F_\rho &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\rho = \cos(\theta)F_1 + \operatorname{sen}(\theta)F_2 \\ F_\theta &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\theta = -\operatorname{sen}(\theta)F_1 + \cos(\theta)F_2, \end{aligned} \tag{154}$$

podemos escribir la expresión para la divergencia en función de las componentes polares del campo como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \tag{155}$$

9.2.2. Operador divergencia en coordenadas cilíndricas. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y puesto que las coordenadas cilíndricas son una generalización de las coordenadas polares a $\mathbb{R}^3$ en las cuales la componente z permanece invariante, la expresión para el operador divergencia en coordenadas cilíndricas será:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{156}$$

9.2.3. Operador divergencia en coordenadas esféricas. Se obtiene de forma análoga a los casos anteriores, simplemente daremos su expresión:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial(\operatorname{sen}(\theta)F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}, \tag{157}$$

donde:

$$\begin{aligned} F_\rho &= \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi)F_1 + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)F_2 + \cos(\theta)F_3, \\ F_\theta &= \cos(\theta)\cos(\varphi)F_1 + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)F_2 - \operatorname{sen}(\theta)F_3, \\ F_\varphi &= \operatorname{sen}(\varphi)F_1 + \cos(\varphi)F_2, \end{aligned} \tag{158}$$

siendo F_1, F_2 y F_3 las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$.

9.3. Operador rotacional. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se define su rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3. \tag{159}$$

Por ejemplo, dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy, yz, z^2)$, su rotacional será:

(160) $$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3xy & yz & z^2\end{vmatrix}=-y\mathbf{e}_1-3x\mathbf{e}_3=(-y,0,-3x)$$

9.3.1. Operador rotacional en coordenadas cilíndricas. Dado un campo vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, la expresión para el rotacional en coordenadas cilíndricas es:

(161) $$\nabla\times\mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\,\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho\,F_\theta & F_z\end{vmatrix}.$$

Desarrollando la expresión anterior:

(162) $$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho-\left(\frac{\partial F_z}{\partial\rho}-\frac{\partial F_\rho}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z$$

9.3.2. Operador rotacional en coordenadas esféricas. Dado un campo vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, la expresión para el rotacional en coordenadas esféricas es:

(163) $$\nabla\times\mathbf{F}=\frac{1}{\rho^2 sen\,\theta}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\,\mathbf{e}_\theta & \rho\,sen\,\theta\,\mathbf{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi}\\ F_\rho & \rho F_\theta & \rho sen\,\theta\,F_\varphi\end{vmatrix}.$$

Desarrollando la expresión anterior:

(164) $$\nabla\times\mathbf{F}=\frac{1}{\rho\,\mathrm{sen}(\theta)}\left(\frac{\partial(\mathrm{sen}(\theta)F_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\rho-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial\rho}-\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

9.4. Operador laplaciano de un campo escalar. Dado un campo escalar $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ suficientemente regular, se define el operador laplaciano $\Delta\phi$:

(165) $$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2}.$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos el campo escalar $\phi(x,y)=x\,\mathrm{sen}(x^2+y)$, su laplaciano será:

(166) $$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=6\,x\,\cos\left(x^2+y\right)-4\,x^3\,\mathrm{sen}\left(x^2+y\right)-x\,\,\mathrm{sen}\left(x^2+y\right)$$

9.4.1. Operador laplaciano en coordenadas polares. Dado un campo escalar $\phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ suficientemente regular, podemos calcular la expresión para el laplaciano en coordenadas polares realizando el cambio de variable correspondiente y empleando la regla de la cadena:

(167)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}\\
\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial y},
\end{aligned}
$$

obteniendo:

(168)
$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}.$$

9.4.2. Operador laplaciano en coordenadas cilíndricas. Dado un campo escalar $\phi:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, la obtención del laplaciano en coordenadas cilíndricas es similar al caso de las coordenadas polares:

(169)
$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

9.4.3. Operador laplaciano en coordenadas esféricas. Dado un campo escalar $\phi:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, la expresión del laplaciano en coordenadas esféricas es:

(170)
$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\,sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\rho^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

10. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *Calcula el gradiente de las siguientes funciones escalares:*

1. $f(x,y,z) = x\,\mathrm{e} - x^2 - y^2 - z^2$.
2. $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.
3. $f(x,y,z) = z^2\mathrm{e}^x\cos(y)$.

Ejercicio 1.2. *Calcula la matriz de Jacobi de las siguientes funciones vectoriales:*

1. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\mathrm{e}^x,\mathrm{sen}(xy)\right)$.
2. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x-y, y+z)$.
3. $\mathbf{f}(x,y) = (x+y, x-y, xy)$.
4. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y)$.

Ejercicio 1.3. *Estudia la continuidad, la existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto* $(0,0)$ *de las funciones:*

1. $f(x,y) = \begin{cases} y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejercicio 1.4. *Si la temperatura de un depósito cilíndrico viene dada por la función*

$$T(x,y,z) = 10(xe^{-y^2} + ze^{-x^2})$$

y nos situamos en el punto de coordenadas $(1,1,1)$*, se pide:*

1. *Determina cuál es la razón de cambio de la temperatura al desplazarnos hacia el punto de coordenadas* $(2,3,1)$.
2. *En qué dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible? Y para que aumente?*
3. *Si no quisiésemos apreciar cambio alguno de temperatura, qué dirección deberíamos seguir?*
4. *Si nos movemos siguiendo el camino descrito por la curva parametrizada:*

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}t, 0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}t\right),$$

determina $D_t(T \circ \mathbf{x})$.

Ejercicio 1.5. *La superficie de un lago viene representada por una región* D *en el plano* XY*. Su profundidad en metros en el punto* (x,y) *viene dada por la función* $h(x,y) = 400 - 3x^2y^2$*. Si un buceador sale del punto* $(1,-2)$*, determinar en qué dirección debe moverse para que la profundidad aumente lo más rápido posible.*

Ejercicio 1.6. *Dada la función*

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)},$$

1. *Calcula la derivada direccional de* $f(x,y)$ *en el punto* $(1,1)$*, según la dirección del vector* $(1,0)$.
2. *Determina las direcciones de máximo y mínimo crecimiento de* $f(x,y)$ *en el punto* $(1,1)$*, así como el valor de las derivadas direccionales en dichas direcciones.*

Ejercicio 1.7. *Se pide:*

1. *Verifica la regla de la cadena para* $\dfrac{\partial h}{\partial x}$*, donde* $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ *y*

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, \quad u(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}, \quad v(x,y) = \mathrm{e}^{xy}.$$

2. *Dadas las funciones* $\mathbf{g}(x,y) = (x^2+1, y^2)$ *y* $\mathbf{f}(u,v) = (u+v, u, v^2)$*, calcula la matriz Jacobiana de* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$.

3. *La ecuación de estado de Dieterci para un gas es:*

$$P(V-b)\mathrm{e}^{\frac{a}{RVT}} = RT,$$

donde a*,* b *y* R *son constantes. Considera el volumen* V *como una función de la temperatura* T *y de la presión* P*, y demuestra que:*

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\left(R + \frac{a}{TV}\right)}{\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)}.$$

Ejercicio 1.8. *Determina los extremos relativos de las siguientes funciones:*

1. $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y) = x^2y + 2xy - y^2 - 3y.$
2. $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y + z.$

Ejercicio 1.9. *Dada la función* $f(x, y) = e^{x+y}\cos(x + y)$*, se pide:*

1. *Obten el plano tangente en el punto* $(0, 0)$
2. *Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado centrado en el punto* $(0, 0)$.