Capítulo 7

Formas cuadráticas.

Aunque, pueda parecernos que vamos a estudiar un nuevo concepto, un caso particular de las formas cudráticas ya ha sido estudiado, pues el cuadrado de la norma de un vector no es más que una forma cuadrática (como veremos definida positiva). Aquí, las estudiaremos de forma general.

Definición 154.- Sean V un espacio vectorial de dimensión n y B una base V. Si $(x_1,\dots,x_n)=[\boldsymbol{x}]_B^t$ y $a_{ij}\in\mathbb{R}$, con $1\le i,j\le n$, se denomina **forma cuadrática** sobre V a toda *función polinómica* $Q\colon V\longrightarrow\mathbb{R}$ de la forma

$$Q(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=[\boldsymbol{x}]_B^t\,A\,[\boldsymbol{x}]_B$$

Es decir, una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 2 y n variables.

La escritura de Q en la forma $Q(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{x}]_B^t\,A\,[\boldsymbol{x}]_B$ se denomina *expresión matricial* de la forma cuadrática. De hecho, se puede expresar siempre mediante una matriz simétrica ya que

$$[\boldsymbol{x}]_B^t\,A\,[\boldsymbol{x}]_B=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=[\boldsymbol{x}]_B^t\,\tfrac{A+A^t}{2}\,[\boldsymbol{x}]_B$$

y la matriz $S=\frac{A+A^t}{2}$ es simétrica $\left(S^t=(\frac{A+A^t}{2})^t=\frac{A^t+(A^t)^t}{2}=\frac{A^t+A}{2}=S\right)$. En efecto:

Si en la expresión de la forma cuadrática, $Q(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, consideramos los pares de sumandos de la forma $a_{ij}x_ix_j$ y $a_{ji}x_jx_i$, se tiene que

$$a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i=(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_ix_j+\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_jx_i=s_{ij}x_ix_j+s_{ji}x_jx_i$$

Luego hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 155.- Toda forma cuadrática Q sobre V, se puede expresar matricialmente como

$$Q(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{x}]_B^tA[\boldsymbol{x}]_B$$

donde A es una matriz simétrica.

La matriz simétrica A, se denomina *matriz asociada* a la forma cuadrática Q en la base B.

Teorema 156.- Sean B y B' dos bases de V, P la matriz de paso de B' a B y A la matriz simétrica de Q en la base B. Entonces, la matriz de Q en la base B', A', se obtiene de

$$A' = P^t AP$$

Demostración:
Como P es matriz de cambio de base verifica que $[\boldsymbol{x}]_B = P[\boldsymbol{x}]_{B'}$, y , sustituyendo en Q, tenemos que

$$Q(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_B^t A[\boldsymbol{x}]_B = (P[\boldsymbol{x}]_{B'})^t A(P[\boldsymbol{x}]_{B'}) = [\boldsymbol{x}]_{B'}^t (P^t AP)[\boldsymbol{x}]_{B'} \qquad \boldsymbol{x} \in V$$

luego $A' = P^t AP$ y es también simétrica $A'^t = (P^t AP)^t = P^t A^t (P^t)^t = P^t AP = A'$. ■

Definición 157.- Dos matrices simétricas se dice que son **congruentes** cuando son matrices asociadas a la misma forma cuadrática en distintas bases.

Es decir, A y A' simétricas son congruentes, si existe P inversible tal que $A' = P^t AP$.

Nota: Las matrices congruentes **no** son, en general, semejantes (sólo ocurre esto último si la matriz P es ortogonal).

7.1 Diagonalización de una forma cuadrática.

La matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica, y una matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente, luego *siempre* podemos obtener una matriz congruente con la inicial que sea diagonal.

7.1.1 Diagonalización ortogonal

Sea B una base de V y $Q(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_B^t \, A \, [\boldsymbol{x}]_B$ la expresión matricial de una forma cuadrática sobre V. Puesto que A es simétrica, existe una base B_* tal que la matriz P de cambio de base de B_* a B es ortogonal y

$$D = P^{-1}AP = P^t AP, \quad \text{con } D \text{ diagonal}$$

es decir, que D y A son congruentes (además de semejantes). Luego en B_*, se tiene que

$$Q(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_{B_*}^t \, P^t AP \, [\boldsymbol{x}]_{B_*} = [\boldsymbol{x}]_{B_*}^t \, D \, [\boldsymbol{x}]_{B_*} = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

es decir, la forma cuadrática se expresará como una suma de cuadrados, donde $(y_1, \ldots, y_n) = [\boldsymbol{x}]_{B_*}^t$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Ejemplo 158.- Reducir a suma de cuadrados la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = xy + yz$.

$$Q(x) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{1}{\sqrt{2}})(\lambda + \tfrac{1}{\sqrt{2}})\lambda$$

luego $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ y 0 son los valores propios de A. Entonces, A es congruente con $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$, es necesario que también sean semejantes, es posible disponer de otros métodos más sencillos pero igualmente eficaces para obtener una matriz diagonal.

El más interesante para nosotros, se basa de nuevo en hacer operaciones elementales sobre la matriz. La idea del método es la siguiente: haciendo operaciones elementales en las filas de la matriz podemos conseguir una matriz triangular inferior, pero como necesitamos que la matriz obtenida sea simétrica (debe ser congruente con la inicial), después de cada operación que hagamos en las filas repetiremos *la misma operación sobre las columnas.* Tras cada doble paso (operacion sobre las filas y misma operación sobre las columnas) la matriz obtenida será simétrica y congruente con la inicial y, al final obtendremos la matriz diagonal.

La justificación no es dificil si usamos las matrices elementales que representan a cada operación elemental (ver la subsección 2.2.1 sobre matrices elementales en la página 19), pues: si E es una matriz elemental, la matriz EA realiza la operación elemental sobre las filas de A y tomando la traspuesta de A, EA^t realiza la operación sobre las columnas de A. Entonces: la matriz $E(EA)^t$ realiza la operación sobre las columnas de la matriz en la que ya hemos realizado la operación de las filas; pero como $E(EA)^t = EA^tE^t = EAE^t$ (por ser A simétrica), esta matriz es simétrica y congruente con A (pues E es inversible). Luego repitiendo el proceso hasta obtener una matriz diagonal:

$$D = E_kE_{k-1}\cdots E_1\,A\,E_1^t\cdots E_{k-1}^tE_k^t = (E_kE_{k-1}\cdots E_1)\,A\,(E_kE_{k-1}\cdots E_1)^t = P^tA(P^t)^t = P^tAP$$

que será congruente con A pues P es inversible al ser producto de inversibles.

Podemos utilizar el siguiente procedimiento para diagonalizar la matriz A y obtener la matriz del cambio de base simultáneamente.

Diadonalización congruente mediante operaciones elementales 159.- Se sitúa a la derecha de A la matriz I del mismo orden que A, $(A \mid I)$ y efectuamos en A las mismas operaciones elementales en sus filas y en sus columnas y en la matriz identidad sólo en sus columnas, al cabo de un número finito de pasos obtendremos $(D \mid P)$.

(Si en I efectuamos las operaciones en las filas, al final obtendremos $(D \mid P^t)$ en lugar de P.)

Ejemplo 160.- Se considera $Q(\boldsymbol{x}) = 2x^2+2xy+2yz+3z^2$ una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$, reducir Q a suma de cuadrados y hallar la matriz del cambio de base.

<u>*Solución:*</u> Si $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$, se tiene que $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, es la matriz de Q en la base canónica. Para obtener una matriz congruente con A que sea diagonal, hacemos el proceso de $(A|I) \to (D|P)$, detallando la primera vez como deben darse los pasos de efectuar cada operación:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left\{F_2^A-\tfrac{1}{2}F_1^A\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&1&0&1&0&0\\ 0&\frac{-1}{2}&1&0&1&0\\ 0&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left\{C_2^A-\tfrac{1}{2}C_1^A\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&1&0&0\\ 0&\frac{-1}{2}&1&0&1&0\\ 0&1&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left\{C_2^I-\tfrac{1}{2}C_1^I\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&1&\frac{-1}{2}&0\\ 0&\frac{-1}{2}&1&0&1&0\\ 0&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left\{\begin{array}{c} F_3^A+2F_2^A\\ C_3^A+2C_2^A\\ C_3^I+2C_2^I\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&1&\frac{-1}{2}&-1\\ 0&\frac{-1}{2}&0&0&1&2\\ 0&0&5&0&0&1\end{array}\right)=(D|P)$$

7.2 Rango y signatura de una forma cuadrática. Clasificación

Hemos visto distintos métodos de encontrar matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática, por lo que existirán también distintas matrices diagonales. Sin embargo, todas ellas tienen algunas cosas en común: tienen el mismo número de elementos distintos de cero en la diagonal (el mismo rango) y tienen el mismo número de elementos positivos y de elementos negativos en la diagonal (la misma *signatura*).

En este capítulo veremos como estos valores permanecen invariantes para cualquier diagonalización que hagamos, lo que nos permitirá, posteriormente, dar una clasificación de las formas cuadráticas.

Teorema 161.- Dos matrices congruentes tienen el mismo rango.

Demostración:
Sea A una matriz simétrica de rango n y $A' = P^tAP$ con P inversible. Consideremos la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, luego A es la matriz de f en la base canónica, B_c. Como P es inversible, sus columnas forman una base B' de $\mathbb{R}^n$ y P es la matriz de cambio de base de B' a B_c; y como $(P^t)^{-1}$ es inversible, sus columnas forman una base B'' de $\mathbb{R}^n$ y $(P^t)^{-1}$ es la matriz de cambio de base de B'' a B_c, por lo que P^t es la matriz de paso de B_c a B''.

Entonces, la matriz $A' = P^tAP$ es la matriz de la aplicación f asociada a las bases B' y B'', pues

$$A'[\boldsymbol{x}]_{B'} = P^tAP[\boldsymbol{x}]_{B'} = P^tA[\boldsymbol{x}]_{Bc} = P^t[f(\boldsymbol{x})]_{Bc} = [f(\boldsymbol{x})]_{B''}$$

por lo que A' y A son matrices asociadas a la misma aplicación lineal, luego $rg(A) = rg(A')$. ■

Definición 162.- Llamaremos **rango** de una forma cuadrática, al rango de cualquier matriz simétrica asociada a la forma cuadrática en alguna base.

Observación:
Del teorema anterior, se deduce entonces que dos cualesquiera matrices diagonales asociadas a la misma forma cuadrática tienen el mismo número de elementos en la diagonal distintos de cero, –pues este número es el rango de la matriz diagonal–.

Teorema de Sylvester o Ley de inercia 163.- Si una forma cuadrática se reduce a la suma de cuadrados en dos bases diferentes, el número de términos que aparecen con coeficientes positivos, así como el número de términos con coeficientes negativos es el mismo en ambos casos.

Definición 164.- Sea Q una forma cuadrática y D una matriz diagonal asociada a Q. Se define como **signatura** de Q al par $Sig(Q) = (p, q)$ donde p es el número de elementos positivos en la diagonal de D y q es el número de elementos negativos de la misma.

7.2.1 Clasificación de las formas cuadráticas

Definición 165.- Se dice que una forma cuadrática Q es

a) **Nula** si $Q(\boldsymbol{x}) = 0$ para todo $\boldsymbol{x}$.

Para las formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^2$, podemos dar una representación de ellas usando superficies en $\mathbb{R}^3$ asignando a z el valor de la forma cuadrática en (x,y), es decir, haciendo $z = d_1x^2 + d_2y^2$. Con estas premisas, hemos realizado la siguiente figura.

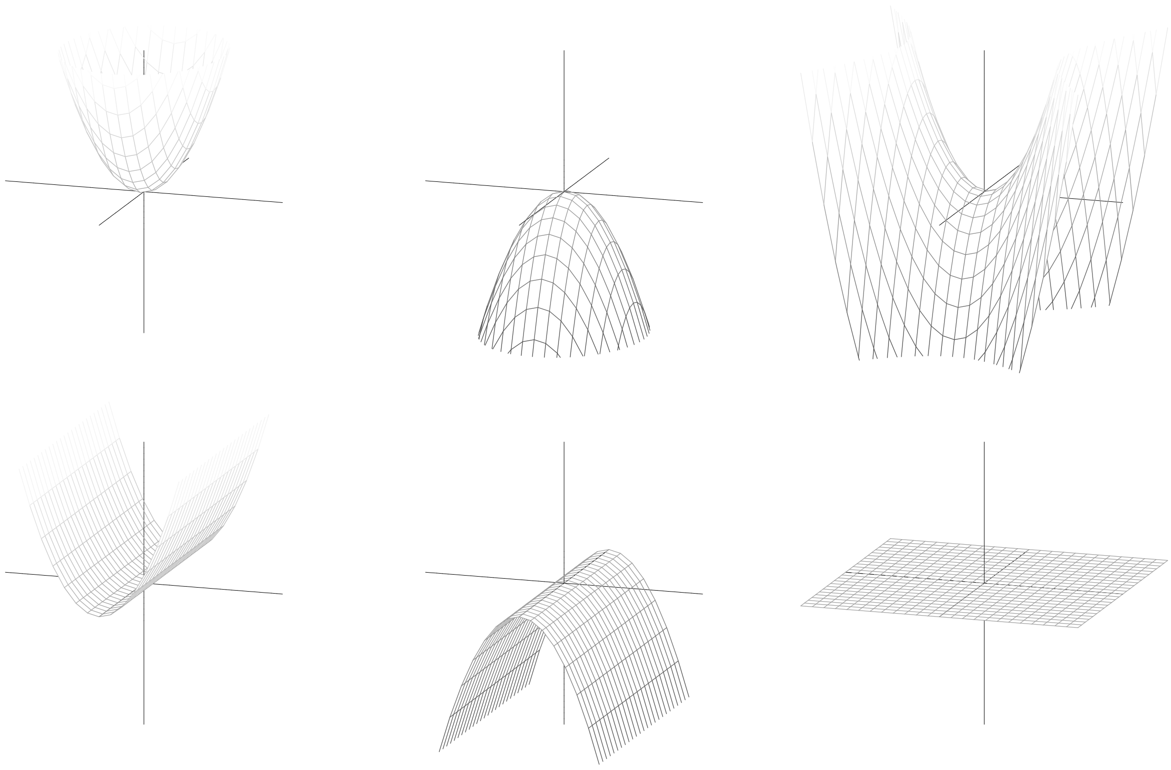

Fig. 7.1. *Gráficas de las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^2$: definida positiva, definida negativa, indefinida, semidefinida positiva, semidefinida negativa y nula*

Teorema de clasificación 166.- Sea Q una forma cuadrática en un espacio vectorial de dimensión n. Se verifica:

a) Q es nula $\Leftrightarrow$ $Sig(Q) = (0,0)$

b) Q es definida positiva $\Leftrightarrow$ $Sig(Q) = (n,0)$.

c) Q es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ $Sig(Q) = (p,0)$ con $0 < p < n$.

d) Q es definida negativa $\Leftrightarrow$ $Sig(Q) = (0,n)$.

e) Q es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $Sig(Q) = (0,q)$ con $0 < q < n$.

f) Q es indefinida $\Leftrightarrow$ $Sig(Q) = (p,q)$ con $0 < p, q$.

Ejemplo.- Las formas cuadráticas de los ejemplos 158 y 160 anteriores son ambas indefinidas, pues en el primer ejemplo $Q(\boldsymbol{x}) =$ [illegible] en una base, luego $Sig(Q) = (1,1)$. En el segundo ejemplo

Proposición 167.- Sea Q una forma cuadrática y A su matriz asociada. Denotemos por Δ_k, el k-ésimo menor principal de A, para cada $1 \le k \le n$:

$$\Delta_1 = |a_{11}| \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad \Delta_n = |A|$$

Entonces:

a) Q es definida positiva si, y sólo si, $\Delta_k > 0$, para $1 \le k \le n$.

b) Q es definida negativa si, y sólo si, $(-1)^k \Delta_k > 0$, para $1 \le k \le n$.

c) Si $\Delta_n = det(A) \neq 0$ y no se está en alguno de los casos anteriores, entonces Q es indefinida.

d) Si existe i tal que $a_{ii} \le 0$ (resp. $a_{ii} \ge 0$), entonces Q no es definida positiva (resp. no es definida negativa).

e) Si existen i y j, con $i \neq j$, tales que $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} \neq 0$, entonces Q es indefinida.

7.3 Ejercicios

7.124 Clasificar cada una de las formas cuadráticas siguientes, y reducir a suma de cuadrados:

a) $Q(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - (xz + xy + yz)$.
b) $Q(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xz + xy + yz)$.
c) $Q(\boldsymbol{x}) = 8x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz$.
d) $Q(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz$.
e) $Q(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4xz + 6yz + 5z^2$.
f) $Q(\boldsymbol{x}) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$.
g) $Q(\boldsymbol{x}) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz - 8zx$.
h) $Q(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)$.

7.125 Sean las formas cuadráticas $Q_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $Q_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A_i \boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, siendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtener, para cada Q_i, la matriz asociada a la base canónica del espacio correspondiente, una matriz diagonal congruente y la base respecto de la que es diagonal.

7.126 Sean B_1 y B_2 bases respectivas de los espacios V y W y sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de una aplicacion lineal $f\colon V \longrightarrow W$ en las bases B_1 y B_2. Tomemos $Q\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

7.128 Se considera la familia de formas cuadráticas $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$, siendo $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a+c & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$. Utilizando dos métodos diferentes, expresar Q como suma de cuadrados.

7.129 Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Para $a = 3$, encontrar P que diagonalice a A.
b) Para $a = 3$, calcular $(5A)^{10}$.
c) Sea $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$, clasificar Q según los valores de a.

7.130 Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \boldsymbol{v_1} = (1,1,1),\ \boldsymbol{v_2} = (1,-1,0),\ \boldsymbol{v_3} = (0,1,-1) \right\}$. Se pide

a) Clasificar la forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_B^t A [\boldsymbol{x}]_B$, según los valores de a y b.
b) Para $a = 0$ y $b = 1$, hallar una base B' tal que $Q(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_{B'}^t D [\boldsymbol{x}]_{B'}$, con D diagonal.

7.131 Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a y de b es $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} > 0$, $\forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$?
b) Si $a = -1$ y $\forall\, b$, reducir Q a suma de cuadrados.
c) Si $a = -1$, ¿para qué valores de b es $Q(\boldsymbol{x}) < 0$, $\forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$?

7.132 Sea $Q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática no nula cuya matriz asociada en la base canónica es A.

a) Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, probar que $Q(\boldsymbol{x})$ y $Q(\lambda \boldsymbol{x})$ tienen el mismo signo.
b) Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ es cierto que $Q(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda\, Q(\boldsymbol{x})$.
c) Deducir de lo anterior, que en general no es cierta la igualdad $Q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = Q(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{y})$.
d) Si la forma cuadrática $Q'\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene a A' como matriz en la base canónica, ¿cuál será la matriz de la forma cuadrática $(Q + Q')(\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x}) + Q'(\boldsymbol{x})$?

7.133 Sea A la matriz de orden n asociada a una forma cuadrática definida positiva y P una matriz de orden n.

a) Si P es inversible, probar que la matriz $P^t A P$ es definida positiva.
b) Si P es no inversible, probar que la matriz $P^t A P$ es semidefinida positiva.