EL ESPACIO EUCLÍDEO

INTRODUCCIÓN.

Trataremos en este tema de llevar a los espacios vectoriales nociones ge ortogonalidad, ángulo, longitud, distancias, áreas...

Veremos que todo ello se puede obtener al introducir un **producto escalar**.

La geometría euclídea se desarrolla en los siglos XIX y XX, tras la aparición espacio vectorial. Recibe su nombre en honor a Euclides, matemático gri quien estudió los conceptos básicos de la Geometría plana, aunque por sup contexto vectorial.

Para generalizar esos conceptos geométricos, observamos el comport vectores del plano. En $\Re^2$ tenemos definido el producto escalar usual

$$(a_1,a_2) \cdot (b_1,b_2) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

Es una operación entre dos vectores, cuyo resultado es un escalar (de "producto escalar").

El producto escalar permite reconocer a los vectores ortogonales ("ángu vectores son ortogonales si su producto escalar es cero (por ejemplo, (1,3) y

Observemos las propiedades de esta operación:

Propiedades del producto escalar usual.

1. Conmutativa. $u \cdot v = v \cdot u$
2. Distributiva. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. Reubicación del escalar. $\alpha\,(u \cdot v) = (\alpha\, u) \cdot v = u \cdot (\alpha\, v)$
4. Definida positiva: $v \cdot v \geq 0$, y se da la igualdad $v \cdot v = 0$ solamente para el

Definición: Producto escalar en cualquier espacio. Espacio eu

Cualquier operación en un espacio vectorial que cumpla las anteriores propie que es un producto escalar (aunque no se trate del producto escalar usual).

Llamaremos espacio euclídeo a un espacio vectorial dotado de un producto e

El producto escalar se denotará por **u · v**. También se puede utilizar la notación **<u,v>**.

Ejemplos de producto escalar.

1. El producto escalar usual en $\Re^n$:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n) \cdot (b_1,b_2,\dots,b_n) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \dots + a_n\, b_n$$

Puede verse como el producto de una matriz fila por una matriz columna:

$$(a_1,a_2,...,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + ... + a_n\, b_n$$

2. En $\Re^3$ podemos "inventar" otra operación que cumpla también la anteriores, y por tanto podremos llamarla un producto escalar. Por ejemplo,

$(a,b,c) \cdot (a',b',c') = aa' + 2bb' + 3\, cc'$

Compruébese que cumple las propiedades.

3. En el espacio $\mathbf{M_2}$ de matrices 2x2 con términos reales, podemos def producto escalar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = aa'+bb'+cc'+dd'$$

Este producto escalar también puede expresarse así, para dos matrices A y B

$A \cdot B =$ traza $(A\,B^t)$ (Nota: la traza de una matriz es la suma de sus elementos

4. En el espacio $\mathbf{M_2}$, el producto ordinario de matrices no es un produc resultado no es un escalar; además no es conmutativo, etc.)

5. En el espacio vectorial ***C***[a,b] de las funciones continuas en el intervalo [a producto escalar:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Compruébese que cumple todas las propiedades de un producto escalar.

6. En el espacio $\mathbf{P_2}$**=\{** $ax^2 + bx + c : a, b, c \in \Re$ **\}** de los polinomios de grad definir el producto escalar

$(ax^2 + bx + c) \cdot (a'\,x^2 + b'\,x + c') = a\,a' + b\,b' + c\,c'$

Otra posibilidad es considerar a los polinomios como funciones continuas er utilizar el producto escalar del ejemplo anterior.

Notar que el producto ordinario de polinomios no es un producto escalar (su un escalar, etc.)

Conceptos geométricos obtenidos del producto escalar.

Por analogía con lo que ocurre en el plano o el espacio con el product
podemos definir los siguientes conceptos, siempre referidos a un cierto produ

Nos situamos en V, un espacio euclídeo.

1. Vectores ortogonales.

Dos vectores **u, v** son ortogonales si su producto escalar es cero: **u · v = 0.** S

Diremos que un conjunto de vectores es un conjunto ortogonal si cada
ortogonal a todos los demás. (Exigimos además que ninguno de los vectores

- Notar que si dos vectores **u, v** son ortogonales entonces también lo son s
y β **v** (α, β escalares).

2. Norma o módulo de un vector.

La norma o módulo de un vector es $|\,v\,| = \sqrt{v \cdot v}$ La noción corresponde, i
la "longitud" del vector. También se puede denotar $\|\,v\,\|$.

- Con cualquier producto escalar, el único vector de módulo cero es el $\vec{0}$.

- Notar también que el módulo de un vector es el mismo que el de su op
módulo de α **v** es **|** α **v | = |** α **| | v |** (es decir, el módulo queda multiplic
absoluto del escalar).

- Además se cumple para cualesquiera **u, v** la desigualdad triangular: **| u +**

3. Distancia entre dos vectores.

La distancia entre **u** y **v** es la norma del vector diferencia entre ambos.

dist (u, v) = | u – v |

4. Ángulo entre dos vectores.

Es sabido que para el producto escalar usual de $\Re^2$ se tiene que **u · v = |**
donde α es el ángulo que forman ambos vectores. Por tanto, para generali
ángulo a cualquier espacio euclídeo, definimos

$$\text{ángulo}(u, v) = \text{arc cos}\ \frac{u \cdot v}{|\,u\,|\,|\,v\,|}$$

Notar que si alguno de los dos vectores es nulo, no podemos dividir por s
tanto el ángulo no está definido. En efecto, geométricamente el vector nulo
ninguno.

Ejemplos.

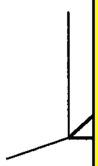
1. En $\Re^3$ con el producto escalar usual:

Sea u=(1,0,0), v=(1,0,1).

- Sus módulos son: $|u| = \sqrt{(1,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$, $|v| = \sqrt{(1,0,1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

- Su distancia es | v – u | = | (0,0,1) | = 1

- El ángulo que forman es $\arccos \dfrac{(1,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 45^{\circ}$.



1. En $\Re^3$ con otro producto escalar:

Consideremos el siguiente producto escalar, ya visto: **(a,b,c) · (a',b',c') = aa' +**

y el vector v=(1,0,1) del ejemplo anterior. Con este producto escalar, su módulo

$$v \cdot v = 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 1 = 4 , \quad \text{luego } |v| = \sqrt{4} = 2 ,$$

Con este producto escalar también se obtienen distancias, ángulos, etc dis usuales (se trata de una "distorsión" geométrica del espacio),

3. En el espacio *C*[0,1] de funciones continuas en el intervalo [0, 1]

Sean los vectores (funciones) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$, respecto al producto escalar

- Sus módulos son: $|f| = \sqrt{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \, dx} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad |g| = \sqrt{\int_0^1 (x+1)\,(x+1)\, dx}$ =

- Su distancia es: $\int_0^1 [\,x^2 - (x+1)\,]^2 \, dx = \dfrac{41}{30}$

- Ángulo que forman: $\arccos \dfrac{f\cdot g}{|f|\,|g|} = \arccos \dfrac{\int_0^1 x^2(x+1)\,dx}{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}} = \arccos \dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\ }}$

Como se ve en los ejemplos, si las anteriores nociones se aplican a $\Re$ producto escalar usual, producen los conceptos geométricos usuales. Si producto escalar o trabajamos en otro espacio vectorial las nociones de longi serán diferentes (quizá ni siquiera se puedan dibujar), aunque son igualmente

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para cualesquiera u, v en un espacio euclídeo, se tiene que su producto e absoluto, es menor o igual que el producto de sus normas.

| u · v | $\leq$ **| u | · | v |**

y además la igualdad **| u · v | = | u | · | v |** sólo se da cuando **u** es múltiplo d

Teorema.

Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.

Demostración (sólo la hacemos para dos vectores)

Sabemos que el conjunto {u, v} es ortogonal, es decir, $u \cdot v = 0$. Debemos ver qu independiente. Para ello, bastará ver que un vector no es múltiplo del otro.

En efecto, si así fuera, tendríamos $u=\alpha v$. Entonces al ser ortogonales,

$u \cdot v = 0 \rightarrow (\alpha v) \cdot v = 0 \rightarrow \alpha (v \cdot v) = 0 \rightarrow$ o bien $\alpha = 0$, o bien $v \cdot v = 0$ (y por tant

Como ni α ni v pueden ser nulos, concluimos que no es posible que sea $u=\alpha v$. Por linealmente independientes.

Definición: Normalización. Conjunto ortonormal.

- **Normalizar** un vector es reducirlo a otro vector (múltiplo suyo) de norma 1

Ello se consigue multiplicando el vector por el número $\frac{1}{|v|}$

Ejemplo: El vector (3,4) tiene norma 5 ("mide" 5 unidades de longitud). Por

$= \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ es el vector normalizado: su norma es 1. Efectivamente $\left(\frac{3}{5}\right.$

- Se llama **conjunto ortonormal** a un conjunto ortogonal cuyos vectores tienen t

Se puede obtener normalizando un conjunto ortogonal. Sus elementos v_1, v_2

$\mathbf{v_i \cdot v_k = 0}$, $\mathbf{v_i \cdot v_i = 1}$ (el producto de vectores distintos es 0, de cada vector por

Ejemplos

1) La base canónica (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) de $\Re^3$ es un conjunto ortonorm base, así que diremos que es una base ortonormal

2) (1,2,0), (4,-2,0) es ortogonal pero no ortonormal. Si normalizamos los vect

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ que ya es un conjunto ortonormal.

Definición (Matriz ortogonal).

Una matriz cuadrada nxn se dice que es una matriz ortogonal si sus column ortonormales de $\Re^n$ (con el producto escalar usual).

(Nota. No nos dejemos confundir por la nomenclatura, pues se llama matriz ortog que sus columnas son ortonormales y no sólo ortogonales.)

Ejemplos. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\Re^3$; $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ en $\Re^2$.

Propiedades de las matrices ortogonales.

1. Las columnas de una matriz ortogonal son n vectores ortonormales en linealmente independientes; así pues, las columnas forman base de $\Re^n$ ortonormal).

En lo sucesivo veremos la utilidad de las bases ortonormales (p.ej. la base canónica

2. Por tanto, toda matriz ortogonal es regular o inversible (su determinante e

3. Una matriz A es ortogonal si y sólo si su inversa coincide con su traspuest

SUBESPACIOS ORTOGONALES.

Definición (vector ortogonal a un subespacio)

Se dice que un vector **v** es ortogonal a un subespacio **S** (y se denota $\mathbf{v} \perp \mathbf{S}$) s a todos los vectores de **S**. (Basta con que **v** sea ortogonal los vectores de una

Ejemplo. En $\Re^3$, el vector (0,0,1) es ortogonal al plano XY.

Definición: Subespacios ortogonales.

Diremos que **un subespacio S es ortogonal a otro subespacio T** (se todo vector de S es ortogonal a todo vector de T, es decir:

$u \cdot v = 0$ para todo $u \in S$, $v \in T$.

Basta con que los vectores de una base de S sean ortogonales a los vector de T.

Propiedad: Si dos subespacios son ortogonales entonces su intersección

En efecto, si tuviéramos un $v \neq \vec{0}$ en la intersección, tendríamos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (
Ello impide que los subespacios sean ortogonales.

Ejemplo: En $\Re^3$, el eje X es ortogonal al plano YZ.
Sin embargo, el plano XY no es ortogonal al plano YZ.

• Por otra parte, recordemos que en un espacio vectorial, dado un subespa definir su suplementario (o complementario) como T tal que $S \oplus T$ sea el espa

Todo subespacio S (salvo el $\{\vec{0}\}$ y el total) tienen infinitos suplementarios, p ortogonal a S.

Definición: Complemento ortogonal.

Dado un subespacio S, su complemento ortogonal (o simplemente su ortog
subespacio (denotado por $S^{\perp}$) que cumple:

- **dim S + dim $S^{\perp}$ = n** (donde n es la dimensión del espacio total),
- **$S^{\perp}$ es ortogonal a S.**

Ejemplo.

En $\Re^3$, el subespacio S=planoXY tiene infinitos suplementarios (toda rec
contenida en S). Pero de ellos sólo uno es su complemento ortogonal, que es

Propiedades:

- $S^{\perp}$ está formado por todos los vectores del espacio que son ortogonales a
- Cualquier subespacio que sea ortogonal a S, estará contenido en $S^{\perp}$.

Construcción del complemento ortogonal.

Se trata de encontrar todos los vectores ortogonales a S. Basta con que sea
su base.

Por tanto planteamos un sistema de ecuaciones como en el ejemplo s
sistema compatible indeterminado, cuyo espacio solución será (en forma para

Observemos que la dimensión de $S^{\perp}$ (número de parámetros) deberá ser n

Ejemplo.

Calculemos el ortogonal del siguente subespacio de $\Re^4$: T= { (a, 0, 2a, b) :

Primero necesitamos una base de T: ésta es (1,0,2,0), (0,0,0,1).

Buscamos los vectores que sean ortogonales a ellos, es decir, los (x,y,z,t) ta

$$(1, 0, 2, 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad (0, 0, 0, 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{es decir, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = ($$

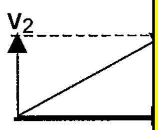
sistema compatible indeterminado cuya solución es { $(2\lambda,\ \mu, -\lambda, 0)$: $\lambda, \mu \in$

Por tanto una base de $T^{\perp}$ será (2, 0, –1, 0), (0, 1, 0, 0).

Notar que efectivamente dim $T^{\perp}$= 2 = 4 – dim T. Comprobar también que
vectores de la base de $T^{\perp}$ es ortogonal a cada uno de los vectores de la bas

PROYECCIONES ORTOGONALES.

1. Proyección ortogonal de un vector sobre otro.



Proyección de un vector **v** sobre otro vector **u**:

v se puede descomponer de manera única como **v** = $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$
con $\mathbf{v_1}$ en la dirección de **u**, y $\mathbf{v_2}$ ortogonal a **u.**

La componente $\mathbf{v_1}$ se llama proyección ortogonal de **v** sobre **u**, y se denota **p**

Notar que **proy** $_{\mathbf{u}}$ **(v)** es un múltiplo de **u**.

Se calcula : $\boxed{\mathbf{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\,\mathbf{u}}$

Una vez hallada la componente $\mathbf{v_1}$, se puede calcular la otra componente $\mathbf{v_2}$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{v} - \mathbf{v_1}$$

Ejemplo:

En $\Re^2$, proyectamos **v**=(1,2) sobre **u**=(3,1).

$$\mathbf{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{(3,1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{(3,1)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}(3,1) = \frac{5}{10}(3,1) = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Así $\mathbf{v_1} = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, y por tanto $\mathbf{v_2} = \mathbf{v} - \mathbf{v_1} = (1,2) - \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)$

y el vector v queda expresado como $(1,2) = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)$, dos component

la primera va en la dirección de **u** y la segunda es ortogonal a **u** (compruébe

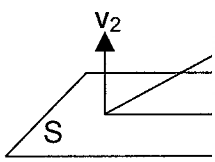
2. Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio.

Dado un vector **v** y un subespacio S, **v** se puede descomponer de manera ún

v = $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$, con $\mathbf{v_1} \in S$, y $\mathbf{v_2}$ ortogonal a S.

La componente $\mathbf{v_1}$ se llama proyección ortogonal de **v** sobre S, y se denota **p**

Se calcula : $\boxed{\mathbf{proy}_{S}(\mathbf{v}) = \mathrm{proy}_{u_1}(\mathbf{v}) + \ldots + \mathrm{proy}_{u_n}(\mathbf{v})}$



es decir: $\boxed{\mathbf{proy}_{S}(\mathbf{v}) = \dfrac{u_1\bullet v}{u_1\bullet u_1}u_1 + \ldots + \dfrac{u_n\bullet v}{u_n\bullet u_n}u_n}$

(Fórmula de la Proyección)

donde $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son una base ortogonal de S.

(Si además la base es ortonormal, los denominadores pueden suprimirse, pu

Igualmente, una vez hallada la componente $\mathbf{v_1}$, se puede calcular $\mathbf{v_2}$ como

$$\mathbf{v_2 = v - v_1}$$

Ejemplo:

En $\Re^3$, proyectamos v=(3,2,2) sobre el subespacio S generado por: u_1= (2,0,

Lo primero, observamos que u_1 , u_2 forman base de S, y además base orto puede utilizarse la fórmula anterior:

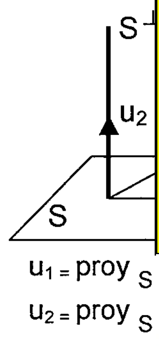
$$\text{proy}_s(v) = \frac{u_1 \bullet v}{u_1 \bullet u_1} u_1 + \frac{u_2 \bullet v}{u_2 \bullet u_2} u_2 = \frac{(2,0,1)\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}}{(2,0,1)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}} u_1 + \frac{(0,3,0)\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}}{(0,3,0)\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}} u_2 = \frac{8}{5} u_1 + \frac{6}{9} u_2 = \frac{8}{5} (2,0,1) + \frac{6}{9} (0,3$$

Así $\mathbf{v_1}$ = $\left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right)$, y por tanto $\mathbf{v_2} = v - v_1 = (3,2,2) - \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$

y el vector **v** queda expresado como (3,2,2) = $\left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right) + \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$, dos com

cuales la primera, $\mathbf{v_1}$, pertenece a S y la segunda, $\mathbf{v_2}$, es ortogonal a S (co $\mathbf{v_2}$ es ortogonal a ambos vectores de la base de S).

Observación.



Dado cualquier subespacio S, se tiene que $S \oplus S^{\perp} = V$, donde V es el espacio total.

Por tanto, todo vector $u \in V$ puede descomponerse como:

$$\mathbf{u = u_1 + u_2}, \qquad \text{con } u_1 \in S,\ u_2 \in S^{\perp}.$$

De hecho, estas dos componentes no son otras que las proyecciones ortogonales de u sobre S y sobre $S^{\perp}$, es decir,

$$\boxed{\mathbf{u = proy_S(u) + proy_{S^{\perp}}(u)}}$$

Así pues, puede calcularse primero la componente $u_1 = \text{proy}_S(u)$ y obte la componente u_2 como $u_2 = u - u_1$.

Otra posibilidad es empezar calculando $u_2 = \text{proy}_{S^{\perp}}(u)$ y luego obtener u_1

Ejemplo.

Anteriormente hemos proyectado v = (3,2,2) sobre el subespacio S genera
(0,3,0), obteniendo

$$v_1 = \text{proy}_S(v) = \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right), \qquad v_2 = v - v_1 = (3,2,2) - \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$$

Otro modo de resolverlo es hallar primero v_2 como proy $_{S^\perp}$ (u).

Para ello hallamos $S^\perp$, que es la recta generada por w = (1,0,–2) (comprueb

$$v_2 = \text{proy}_{S^\perp}(u) = \text{proy}_w(u) = \frac{w \cdot u}{w \cdot w} w = \frac{-1}{5}(1,0,-2) = \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$$

y de ahí $v_1 = v - v_2 = (3,2,2) - \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right)$

Observaciones.

1. Notar que si S es un subespacio de dimensión 1, cuya base es un
entonces proyectar sobre S es lo mismo que proyectar sobre **u**.

2. Si un vector **w** ya está en el subespacio S, al proyectarlo sobre
descomposición $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ sería en realidad $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$.

<u>Ejemplo</u>: Subespacio S anterior, w = (4,3,2). Haciendo el cálculo se tiene pr
Ello ocurre porque w∈S (notar que el determinante que forma w con la base
que significa que es linealmente dependiente de dicha base).

Coordenadas de un vector en una base ortogonal.

La observación **2** anterior nos proporciona una manera de obtener las coo
vector w∈S respecto a una base ortogonal de S.

En efecto, si w∈S, y si tenemos una base ortogonal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de S, enton

$$w = \text{proy}_S(w) = \frac{u_1 \bullet w}{u_1 \bullet u_1} u_1 + \ldots + \frac{u_n \bullet w}{u_n \bullet u_n} u_n$$

lo cual significa (por la definición de coordenadas) que los escalares $\frac{u_1 \bullet w}{u_1 \bullet u_1}$,

las coordenadas de w en la base dada $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

<u>Además si la base es ortonormal</u>, los denominadores pueden suprimirse pue
las coordenadas son simplemente $(\mathbf{u_1 \cdot w}, \ldots, \mathbf{u_n \cdot w})$

Ejemplo.

Consideremos en $\Re^2$ la base (1,1), (1,–1) que es ortogonal. Hallemos las
w=(5,4) en esta base, que son:

$$\left(\frac{(1,1)\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}}{(1,1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \frac{(1,-1)\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}}{(1,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$$ En efecto, comprobamos que $(5,4) = \frac{9}{2}(1,1)$

CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES

Hemos visto que para aplicar la fórmula de la proyección sobre un subespaci
una base ortogonal de S. Veremos cómo obtener una base ortogonal c
tenemos no lo es.

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Supongamos que tenemos una base $\{ u_1, \ldots, u_n \}$ de S.

Vamos a construir otra base de S, $\{ a_1, \ldots, a_n \}$ que será ortogonal.

Como primer vector tomamos el propio u_1.

$$\mathbf{a_1} = \mathbf{u_1}$$

Para construir el segundo vector tomamos u_2 y lo proyectamos sobre e
construido $\mathbf{a_1}$, quedándonos con la componente ortogonal a $\mathbf{a_1}$.

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{u_2} - \text{proy}_{a_1}(u_2)$$

Así $\{ \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \}$ son dos vectores que están en S (pues todas las operacione
entre vectores de S) y además son ortogonales.

Para construir el tercer vector tomamos u_3 y lo proyectamos sobre los
construidos $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ quedándonos con la componente ortogonal a ellos.

$$\mathbf{a_3} = \mathbf{u_3} - \text{proy}_{a_1}(u_3) - \text{proy}_{a_2}(u_3)$$

Etc.

Este proceso conduce a una base ortogonal de S. Si queremos obt
ortonormal, bastará normalizar finalmente los vectores $\mathbf{a_i}$ obtenidos (o bien n
cada paso).

Ejemplo.

Obtener una base ortogonal de $\Re^3$ a partir de la base $\mathbf{u_1}$=(1,1,0), $\mathbf{u_2}$=(0,1,1),

$\mathbf{a_1} = \mathbf{u_1}$= (1,1,0)

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{u_2} - \text{proy}_{a_1}(u_2) = \mathbf{u_2} - \frac{a_1 \cdot u_2}{a_1 \cdot a_1} a_1 = (0,1,1) - \frac{(1,1,0)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}{(1,1,0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} (1,1,0) = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0)$$

$$\mathbf{a_3} = \mathbf{u_3} - \text{proy}_{a_2}(u_3) - \text{proy}_{a_3}(u_3) = \mathbf{u_3} - \frac{a_1 \cdot u_3}{a_1 \cdot a_1} a_1 - \frac{a_2 \cdot u_3}{a_2 \cdot a_2} a_2 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \ldots\right.$$

Por tanto la base ortogonal es (1,1,0), $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. (Compruébese qu

Para hacerla ortonormal dividimos cada vector por su norma, obteniéndose la

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (Compruébese que es ortonorma

LA MATRIZ DE PROYECCIÓN.

Veamos otra manera de hallar la proyección ortogonal de un vector sobre u
sin necesidad de hallar una base ortogonal de éste. El siguiente método sola
para subespacios de $\Re^n$.

Dada una base de S, no necesariamente ortogonal,

1. Formamos la matriz A que contiene la base en sus columnas. Tend
columnas como indique dim S. (No es necesariamente cuadrada).

2. Formamos la matriz cuadrada

$$\boxed{P_S = A\,(A^t A)^{-1} A^t}$$

(la existencia de la inversa de $A^t A$ está garantizada por haber formado A con una ba

La matriz P_S se llama **matriz de proyección sobre el subespacio S.**

Esta matriz sirve para proyectar sobre S cualquier vector v :

$$\boxed{\text{proy}_S(v) = P_S \cdot v}$$

Por tanto, es especialmente útil si tenemos que proyectar varios vectores sob
subespacio.

La matriz de proyección de un subespacio dado es única, y no depende de la
hayamos partido.

Ejemplo.

En $\Re^3$, vamos a proyectar v = (3,2,2) sobre el subespacio S generado p
u_2 = (0,3,0). (Ya lo hicimos por otro método, comprobaremos que el resultado es el

Tomamos la base (2,0,1), (0,3,0), (que es ortogonal pero no sería necesario
formamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ella calculamos $P_S = A\,(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots \\ \frac{2}{5} & 0 & \ldots \end{pmatrix}$

Ahora proyectamos el vector v = (3,2,2) :

$$\text{proy}_S(v) = P_S \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 2 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

que coincide con el resultado ya ob

Propiedades de la matriz de proyección.

Toda matriz P de proyección sobre un subespacio de $\mathfrak{R}^n$ es:

1. **Cuadrada nxn**
2. **Simétrica**
3. **Idempotente (A^2=A)**

Y además, toda matriz Q que cumpla las tres propiedades anteriores, resul
proyección de un cierto subespacio de $\mathfrak{R}^n$. Este subespacio es aquel qu
columnas.

Ejemplo. Comprobemos que la matriz Q=$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cumple las anterior

Por tanto, Q es matriz de proyección de un cierto subespacio S. Éste será
sus columnas $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, (0,0,1), es decir, el generado por (1,1,0), (0,

Observación.

Si tenemos que proyectar un vector sobre un subespacio S, y no disponem
ortogonal de S, tenemos dos opciones:

- Calcular una base ortogonal por Gram-Schmidt para utilizar la fórmula de la

- O hallar la matriz de proyección P_S y utilizarla para proyectar el vector.

OTRAS NOCIONES GEOMÉTRICAS.

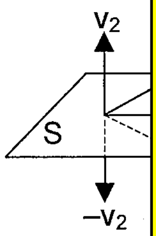
1. Vector simétrico.

En un espacio euclídeo podemos generalizar la noción de vector simétrico plano, recta o subespacio en general, que actuará como un "espejo".

Dado un vector v y un subespacio S, descomponemos:

$$v = v_1 + v_2 = \text{proy}_S(v) + \text{proy}_{S^\perp}(v)$$

Entonces se define el **vector simétrico de v respecto a S** como



$$\mathbf{v'} = v_1 - v_2$$

es decir

$$\boxed{\mathbf{v'} = \text{proy}_S(v) - \text{proy}_{S^\perp}(v)}$$

2. Cálculo de áreas y volúmenes.

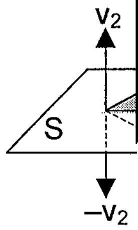
Puesto que en un espacio euclídeo sabemos "medir" distancias y longitudes de módulo de un vector), ello nos permite aplicar las fórmulas geométrica calcular áreas y volúmenes en $\Re^2$ y $\Re^3$.

Ejemplo.

Dado el subespacio S generado por (2,0,1),(0,3,0) hallar el simétrico **v'** del ve

Calcular el área del triángulo formado por **v** y **v'**.

- Como ya hemos calculado, $v = v_1 + v_2 = \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right) + \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$.



Entonces, $v' = v_1 - v_2 = \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right) - \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{17}{5}, 2, \frac{6}{5}\right)$

El área pedida es dos veces el área sombreada, por tanto

$$\text{área} = 2\,\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = 2\,\frac{|v_1|\cdot|v_2|}{2} = |v_1|\cdot|v_2| = \sqrt{\left(\tfrac{16}{5}\right)^2 + 2^2 + \left(\tfrac{8}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\tfrac{-1}{5}\right)^2 + 0 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2} \approx$$

APLICACIONES PRÁCTICAS.

Veremos cómo aplicar las nociones del espacio euclídeo para:

- Aproximar una función continua por medio de un polinomio.
- Encontrar la solución aproximada de un sistema incompatible.
- Ajustar a una gráfica (recta, curva) una nube de puntos.

Para ello introducimos la noción de “mejor aproximación”

Mejor aproximación de un vector en un subespacio.

En un espacio euclídeo, dado un vector **v** y un subespacio **S**, de entre todos los vectores de **S** hay uno que es el más próximo a **v.** Se llama **mejor aproximación de v en S**, y es precisamente la proyección ortogonal **proy$_S$(v).**

Para cualquier otro $w \in S$ la distancia a v es mayor, es decir

$| \text{proy}_S(v) - v | < | w - v |$ para cualquier $w \in S$, $w \neq \text{proy}_S(v)$

Se llama **error cuadrático medio** (o **error cuadrático**, o **desviación** cuadrado de la distancia que separa v de su aproximación:

$$\boxed{\textbf{Error} = |\,\text{proy}_S(v) - v\,|^2}$$

Nota. También es posible usar como error la norma $|\,\text{proy}_S(v) - v\,|$ en lugar de la nor

1. Aproximación de una función continua por un polinom

Para facilitar los cálculos con funciones trigonométricas, logarítmicas, e podemos sustituirlas por un polinomio que se aproxime a ellas en un cierto in

Para ello consideramos el espacio euclídeo

$\mathcal{C}[a,b]$ = { funciones continuas en el intervalo [a,b] }.

con el producto escalar dado por: $f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$

y consideraremos el subespacio P_r = {polinomios de grado $\leq$ r }, calcular mejor aproximación del vector (la función dada) en dicho subespacio.

Podemos elegir el grado **r** dependiendo de la precisión que queramos a mayor sea el grado, menor será el error.

Ejemplo.

Queremos aproximar la función e^x por un polinomio de grado 2, en el intervalo

Para ello consideramos el espacio $\boldsymbol{C}[0,1]$ con el producto escalar $f \cdot g = \int_0^1 f($

el vector (función) $\mathbf{f} = \mathbf{e^x}$, y el subespacio $\mathbf{P_2}$ = {polinomios de grado $\leq$ 2 },

Calculemos la mejor aproximación de **f** en $\mathbf{P_2}$, es decir, proy $_{P_2}$ (f) .

Para ello necesitamos una base ortogonal de $\mathbf{P_2}$. Partiendo de la base est podemos hallar una ortogonal por Gram-Schmidt (utilizando siempre el p dado por la integral), obteniéndose la base $a_1 = 1$, $a_2 = x - \frac{1}{2}$, $a_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$$\text{proy}_{P_2}(f) = \frac{a_1 \cdot f}{a_1 \cdot a_1} a_1 + \frac{a_2 \cdot f}{a_2 \cdot a_2} a_2 + \frac{a_3 \cdot f}{a_3 \cdot a_3} a_3$$

lo que se calcula mediante las integrales correspondientes

(p. ej. $a_1 \cdot f = \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx = e+1$,etc.)

resultando el polinomio

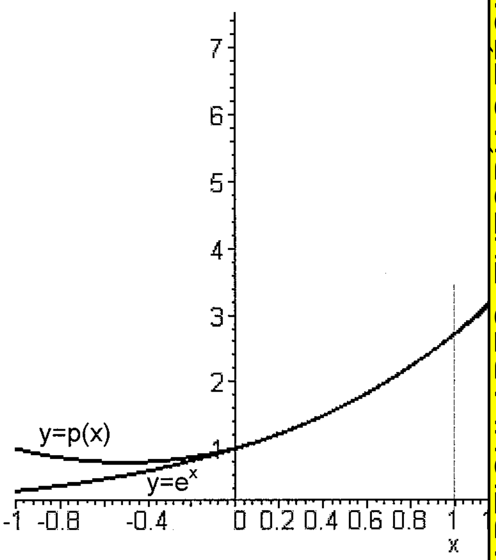
$p(x) \approx 0'84\, x^2 + 0'85\, x + 1'01$

El error cuadrático es

$$|p - f|^2 = \int_0^1 \left[(p(x) - f(x))\right]^2 dx =$$

$= 0'0000386$

El error es muy pequeño, lo que significa que la aproximación es buena. En efecto, en la figura se ve que la gráfica del polinomio p(x) y la de e^x están "bastante próximas" en el intervalo [0,1].



(De hecho, el error representa el área comprendida entre las dos curvas. aproximación hace que dicha área sea mínima).

Si lo aproximáramos por un polinomio de grado 3, 4,... obtendríamos una ap mejor.

Otras posibilidades de aproximación.

• Dada una función f(x), en lugar de aproximarla por un polinomio, tar aproximarla por otro tipo de funciones. Basta hacer la transformación reducirlo al problema de aproximación por polinomios. Por ejemplo,

1) Aproximar f(x) = tg x por una función de la forma $\frac{1}{ax+b}$:

Equivale a aproximar $\frac{1}{\text{tg}\, x}$ por un polinomio $ax + b$.

2) Aproximar f(x) = log x por una función de la forma $\sqrt{ax+b}$:
Equivale a aproximar $(\log x)^2$ por un polinomio $ax + b$.

3) Aproximar f(x) = cos x por una función de la forma e^{ax+b} :
Equivale a aproximar $\log(\cos x)$ por un polinomio $ax + b$.

- En otras ocasiones será necesario un <u>cambio de variable</u>:

4) Aproximar f(x) = cos(x) por una función de la forma $\frac{a}{x} + b$:

Hacemos el cambio $\frac{1}{x} = t$ y así equivale a aproximar $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ por un polino

5) Aproximar f(x) = sen(x) por una función de la forma $a\log(x) + b$:
Hacemos el cambio $\log(x) = t$ y por tanto $x = e^t$, y así equivale a aproxima
polinomio $at + b$.

6) Aproximar f(x) = cos(x) por una función de la forma $a e^x + b$:
Hacemos el cambio $e^x = t$ y por tanto $x = \log(t)$, y así equivale a aproximar co
polinomio $at + b$.

- También es posible <u>tomar logaritmos</u>:

7) Aproximar f(x) = cos(x) por una función de la forma $a e^{bx}$:
Equivale a aproximar $\log(\cos(x))$ por una función de la forma $\log\left(a e^{bx}\right)$, es d
y poniendo $c = \log(a)$, equivale a aproximar $\log(\cos(x))$ por una función $c +$
polinomio.
Una vez hallado c, recuperamos $a = e^c$, pues los coeficientes pedidos eran a y

2. <u>Solución aproximada de sistemas incompatibles.</u>

Observemos que resolver un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ consiste en poner la
términos independientes como combinación lineal de las columnas de la matr

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es encontrar x, y que cumplan $x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + y$

Existirán tales x, y si el vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$,

pertenece al subespacio S generado por ellas. En ese caso el sistema será c

Si es incompatible, se debe a que $\vec{b}$ no pertenece al subespacio S.

En ese caso, podemos sustituir $\vec{b}$ por otro vector $\vec{c}$ que sí esté en S, y
menor error posible, $\vec{c}$ será la mejor aproximación de $\vec{b}$ en S.

Por tanto, en lugar del sistema incompatible $A\vec{x}=\vec{b}$, resolvemos otro sistema:

$A\vec{x}=\vec{c}$, donde $\vec{c}=$ proy$_S(\vec{b})$, S = subespacio generado por las columr

Este nuevo sistema ya es compatible. Su solución, si bien no cumple las sistema original $A\vec{x}=\vec{b}$, las satisface "aproximadamente".

El error cuadrático es $|\vec{c}-\vec{b}|^2$ (trabajando en $\Re^n$ con el producto escalar us otra manera, $|A\vec{x}-\vec{b}|^2$ donde $\vec{x}$ es la solución aproximada que hemos halla

Este método se llama **método de mínimos cuadrados** ya que hace r cuadrático.

Ejemplo 1.

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$ Este sistema es incompatible, lo cual es debido a pertenece al subespacio S generado por $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$ en $\Re^2$. Entonces susti mejor aproximación en S. Para ello, una base de S es el vector (1,2).

$$c = \text{proy}_S(b) = \text{proy}_{(1,2)}(b) = \frac{(1,2)\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}}{(1,2)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}}\,(1,2) = \frac{13}{5}(1,2) = \left(\frac{13}{5},\frac{26}{5}\right)$$

y ahora resolvemos el sistema compatible (indeterminado)

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{5}\\ \frac{26}{5}\end{pmatrix}$ cuya solución es $(\frac{13}{5}-2\lambda,\lambda)$. Obtenemos infinitas satisfacen aproximadamente el sistema original.

El error cuadrático es $|b-c|^2 = \left|(3,5)-\left(\frac{13}{5},\frac{26}{5}\right)\right|^2 = \left|\left(\frac{2}{5},\frac{-1}{5}\right)\right|^2 = \frac{1}{5} = 0'2$.

Ejemplo 2.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Igualmente es incompatible puesto que $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no pertenec

S generado por las columnas $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\Re^3$.

Calculamos por tanto la mejor aproximación de $\vec{b}$ en S. Una base de S es ambas columnas, puesto que son linealmente independientes. Con ella pode matriz de proyección, que será $P_S = A\,(A^t A)^{-1} A^t$.

Así, $\vec{c} = \text{proy}_S(\vec{b}) = P_S \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$

y se resuelve el sistema $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$ compatible determinado, cuya solu

El error cuadrático es $|\,\vec{b} - \vec{c}\,|^2 = \left|(0,1,1) - \left(\frac{5}{14}, \frac{2}{7}, \frac{-1}{14}\right)\right|^2 = \frac{25}{14} \approx 1'79$.

Obtención directa de la solución.

En algunos casos podremos obtener la solución directamente, sin siqu resolver el sistema compatible.

- Dado el sistema incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, comprobar si las columnas de A independientes (ello ocurrirá cuando el rango de A coincida con el nº de colur
- Si es así, la solución aproximada por mínimos cuadrados es única, y es

$$\boxed{\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t\, \vec{b}}$$

Explicación:

En el ejemplo 2 anterior, las columnas de A son linealmente independient permitido utilizar A para para calcular la matriz de proyección $A(A^tA)^{-1}$ A calcular $\vec{c} = A\,(A^t A)^{-1} A^t\, \vec{b}$.

Pero, observemos la expresión $A\underbrace{(A^t A)^{-1} A^t\, \vec{b}} = \vec{c}$

Como el sistema que hay que resolver es $A\,\vec{x} = \vec{c}$, la expresión anterior nos i

$(A^t A)^{-1} A^t\, \vec{b}$ (señalado arriba con la llave), que es un vector columna, es solu $A\,\vec{x} = \vec{c}$.

Así pues, esa es la solución (única, pues el sistema $A\,\vec{x} = \vec{c}$ es compatible d

Caso particular: Ajuste de nubes de puntos.

Dada una nube de puntos, (es decir, un conjunto de puntos en el plano, obte resultados experimentales, estadísticos, etc) buscamos la recta, parábola, et ajuste a dichos puntos.

Si planteamos que la curva pase por todos los puntos, obtendremos un sister que podemos resolver mediante el método anterior.

Ejemplo

Buscamos la recta que mejor se ajuste a los puntos (1,2), (2,3), (3,5).

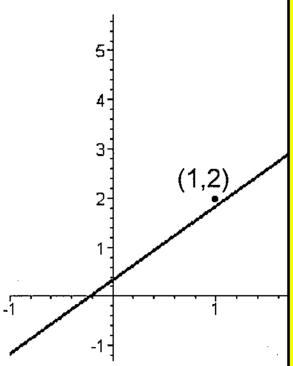
Una recta es de la forma $y = m\,x + b$. Si pasara por los tres puntos, debería c

$$\left.\begin{array}{l} 2 = a\cdot 1 + b \\ 3 = a\cdot 2 + b \\ 5 = a\cdot 3 + b \end{array}\right\}$$ es decir, un sistema en las incógnitas m, b : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}$

Como las columnas A (matriz de coeficientes) son linealmente independiente puede hallar directamente como

$$(A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es decir $m = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{1}{3}$



y así la recta buscada es $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{3}$. Comprobar en la figura que, si bien esta recta no pasa por ninguno de los puntos dados, se aproxima a todos ellos.

El error cuadrático es $|\,A\vec{x} - \vec{b}\,|^2 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{29}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|^2 = \dfrac{1}{6}$

El error es pequeño porque los puntos dados estaban "casi" alineados.

- **Otras posibilidades**: ajustar la nube de puntos mediante una parábola **y** o mediante polinomios de grado mayor; o también mediante una función d como por ejemplo **y = a cos(x) + b log(x),** etc.

En todos los casos se debe "hacer pasar" la función por cada uno introduciendo la abscisa del punto en la **x** y la ordenada en la **y**, para obten por cada punto. Finalmente obtendremos un sistema incompatible en las inc que resolveremos por mínimos cuadrados.

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Espacio

A) Soluciones a las Cuestiones

Sol. C-1) a) El producto escalar debe ser cero. Podemos poner, por ejemplo, (-2,1,0) (1,0,1), etc.

b) Aprovechando que la matriz tiene un cero, podemos poner $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por e

Sol. C-2) Esta operación cumple algunas de las propiedades de un producto escala resultado es un escalar, tiene la propiedad conmutativa... Pero la propiedad *defin* cumple, pues al multiplicar un vector por sí mismo puede obtenerse un número ne

$(1,2) \cdot (1,2) = 1{\cdot}1 - 2{\cdot}2 = -3$

Por tanto, **no es un producto escalar**.

Sol. C-3) No, puesto que los vectores ortogonales son linealmente independientes, y vectores independientes en $\Re^4$.

Sol. C-4) Falso. Por ejemplo el conjunto { (1,0,0), (0,1,0) } es ortonormal y tiene afirmación sería cierta si dijese "base" en lugar de "conjunto").

Sol. C-5) No es posible, ya que la proyección sobre la recta ha de dar como resultad perteneciente a la misma, pero el vector (1,2) no pertenece a la recta y=x.

Sol. C-6) Sí, como indica la siguiente figura, en que los vectores **u** y **v** tienen ambos la misma proyección, **w,** sobre el eje X.

Sol. C-7) Es cuadrada, simétrica y se comprueba que es idempotente ($A^2 = I$)

Por tanto, **sí es matriz de proyección**.

El subespacio es el generado por sus columnas. Podemos multiplicar los vectores generando el mismo subespacio, por tanto éste es el generado por (2,-1,1) , (-1,2,

(Y también se puede quitar uno de ellos pues son linealmente dependientes).

B) Soluciones a los Ejercicios

Sol. E-1) **a)** $|u|^2 = u \cdot u = (4,0,3)\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} = 25$, luego $|u| = \sqrt{25} = \mathbf{5}$.

$|v|^2 = v \cdot v = (1,1,3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = 11$, luego $|v| = \sqrt{\mathbf{11}}$.

b) La distancia es el módulo del vector diferencia (4,0,3) – (1,1,3) = (3,–1,0)
$|(3,-1,0)| = \sqrt{\mathbf{10}}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{u \cdot v}{|u|\cdot|v|} = \dfrac{(4,0,3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}{5\sqrt{11}} = \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{5\sqrt{11}}} \cong 0.784$, $\alpha = \arccos(0.784) = \mathbf{0.669}$

Sol. E-2) **a)** (1,0,0,3,4) · (1,2,3,1,-1) = 1+0+0+3 - 4= 0 **sí son ortogonales.**

b) (3,3,1) · (-1,1,-1) = 3·(-1) + 2·3·1 + 3·1·(-1) = 0 **sí son ortogonales**.

c) $f \cdot g = \int_0^1 x\,(x+1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{5}{6} \neq 0$ **no son ortogonales.**

Sol. E-3) **a)** Hallamos el módulo de v con el producto escalar usual:

$v \cdot v = (2,1,3,-2) \cdot (2,1,3,-2) = 4+1+9+4 = 18$ luego $|v| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Normalizamos v dividiéndolo por su módulo: $\dfrac{v}{|v|} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(2,1,3,-2) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right.$

b) Hallamos el módulo de v con el producto escalar dado:

$v \cdot v = (2,1,3,-2) \cdot (2,1,3,-2) = 4 + 1 + 2\cdot 9 + 2\cdot 4 = 31$ luego $|v| = \sqrt{31}$

Normalizamos v dividiéndolo por su módulo: $\dfrac{v}{|v|} = \dfrac{1}{\sqrt{31}}(2,1,3,-2) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{31}},\ \dfrac{1}{\sqrt{31}}\right.$

Sol. E-4) **a)** Hay que comprobar si sus columnas son vectores ortonormales, es decir
1 y son ortogonales entre sí.

En este caso las columnas son u=(0,0,2) , v=(1,0,0), w=(0,1,0). Son orto
pues u · v = 0, u · w = 0, v · w = 0. Pero no todos tienen módulo 1, pues u tiene

Por tanto, **A no es una matriz ortogonal**.

Otra forma: Una matriz es ortogonal cuando su inversa es igual a su traspu

$A^{-1} = A^{t}$, o dicho de otro modo, $A\,A^{t} = I$. Veamos entonces qué se obtiene m

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ que <u>no</u> es la matriz identidad.

Por tanto, A **no es una matriz ortogonal**.

b) Por cualquiera de los dos métodos del apartado **a),** se tiene que B **sí es una m**

Sol. E-5) Hay que ver si cada vector de la base de S es ortogonal a cada vector de la

(-3,-3,0,1) · (0,1,0,3) = 0

(-3,-3,0,1) · (1,1,-1,6) = 0

(1,0,2,0) · (0,1,0,3) = 0

pero (1,0,2,0) · (1,1,-1,6) = –1 $\neq 0$ por tanto **S y T no son subespacios ortog**

Sol. E-6) a) Se trata de hallar todos los vectores (x,y,z) que son ortogonales a (1,0,2)

Planteamos por tanto la ecuación (1,0,2) · (x,y,z) = 0 , es decir

$$x + 2z = 0$$

Se trata de un sistema de una sola ecuación con tres incógnitas, con matriz amplia

Por el método de Gauss, su solución es $(-2\beta,\ \alpha,\ \beta)$ que ya es, en paramétricas, e
ortogonal de S.

[Una base sería **(-2,0,1), (0,1,0).** Comprobar que estos vectores son ortogonales a
Notar también que la dimensión del ortogonal es 2, ya que la de S es 1, estando en

b) Se trata de hallar todos los vectores (x,y,z) que son ortogonales a (1,0,2

Planteamos por tanto las ecuaciones $\begin{cases}(1,0,2)\cdot(x,y,z)=0 \\ (1,1,1)\cdot(x,y,z)=0\end{cases}$, es decir, $\begin{cases} x+2z \\ x+y+ \end{cases}$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, con matriz ampliada

Por el método de Gauss se obtiene la solución $(-2\lambda,\ \lambda,.\ \lambda)$ que ya es, en paramétri
el complemento ortogonal de T.

[Una base sería **(-2,1,1)** . Comprobar que este vector es ortogonal a (1,0,2) y a (1
Notar también que la dimensión del ortogonal es 1, ya que la de T es 2, estando e

Sol. **E-7)** **a)** $\text{proy}_{(1,2,1)}(0,3,2) = \dfrac{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}(1,2,1) = \dfrac{8}{6}(1,2,1) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

[Comprobar que el resultado pertenece a la recta generada por (1,2,1)]

b) Para aplicar la fórmula de la proyección, primero hay que verificar que forman una base ortogonal del plano P. Efectivamente se ve que su producto esca tanto son ortogonales.

Entonces,

$$\text{proy}_P(0,3,2) = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}(1,2,1) + \frac{\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}(0,-1,2) = \frac{8}{6}(1,2,$$

$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{37}{15}, \frac{26}{15}\right)$$

Sol. **E-8)** La mejor aproximación es simplemente su proyección sobre el plano. Por tan mismo ejercicio **b)** anterior, cuya solución es $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{37}{15}, \dfrac{26}{15}\right)$.

Sol. **E-9)** Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt para hallar primero una base ortogon

$a_1 = u = (0,1,0)$

$$a_2 = v - \text{proy}_{a_1}(v) = (3,2,1) - \frac{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}(0,1,0) = (3,2,1) - 2\,(0,1,0) = (3,0,1$$

Ahora normalizamos $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$ para obtener la base ortonormal $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$:

a_1 ya tiene norma 1 , luego $b_1 = a_1 = (0,1,0)$

a_2 tiene norma $\sqrt{3^2+0^2+1^2} = \sqrt{10}$, luego $b_2 = \dfrac{a_2}{\sqrt{10}} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{1}}\right.$

Por tanto la base ortonormal pedida, es : $\mathbf{(0,1,0)}$, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

AUTOEVALUACIÓN - El Espacio Eucl

Cada **(•)** *es un punto.*

Hay en total 40 puntos, de los cuales 10 son de cuestiones y 30 de ejercicios.

A) Cuestiones (10 puntos)

Nota: el producto escalar será el usual de $\Re^n$ mientras no se indique lo contrario.

C-1) Dar un vector ortogonal a ...

(•) **a)** (1,2,-1) en $\Re^3$

(•) **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ en el espacio de matrices M_{2x2}

(••) **C-2)** Determinar si la siguiente operación entre vectores de $\Re^2$ es o no un produc

(a,b) · (a',b') = a a' – b b' *(Sugerencia: Verificar la propiedad definida positiv*

(•) **C-3)** ¿En $\Re^4$ puede existir un conjunto de 5 vectores ortogonales? Razonar la res

(•) **C-4)** Razonar si es verdadero o falso: "Un conjunto ortonormal en $\Re^3$ siempre tie

(•) **C-5)** En $\Re^2$, proyectamos un cierto vector sobre la recta y=x. ¿Es posib proyección el vector (1,2) ? Razonar la respuesta.

(•) **C-6)** ¿Pueden dos vectores distintos producir la misma proyección sobre un subes

(••) **C-7)** Razonar si la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ puede ser matriz de proyección, y en

qué subespacio corresponde.

B) Ejercicios (30 puntos)

E-1) Sean los vectores u=(4,0,3) , v=(1, 1, 3) en $\Re^3$ con el producto escalar us

(•) **a)** El módulo de **u** y de **v.**

(•) **b)** La distancia entre **u** y **v.**

(•) **c)** El ángulo que forman.

E-2) Comprobar si los siguientes vectores son o no ortogonales:

(•) **a)** (1,0,0,3,4) y (1,2,3,1,-1) en $\Re^5$ con el producto escalar usual.

(•) **b)** (3,3,1) y (-1,1,-1) en $\Re^3$ con el producto escalar (a,b,c)·(a',b',c') = aa

(•) **c)** f(x)=x y g(x)=x+1 en el espacio de funciones continuas **C**[0,1] con el

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

E-3) Normalizar el vector v= (2,1,3,-2) en $\Re^4$

(•) **a)** con el producto escalar usual.

(•) **b)** con el producto escalar dado por: (a,b,c,d)·(a',b',c',d') = aa' + bb' + 2 cc'

E-4) Comprobar en cada caso si se trata o no de una matriz ortogonal:

(•) **a)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(•) **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(•) **E-5)** Comprobar si S y T son subespacios ortogonales en $\Re^4$, siendo:
{ (-3,-3,0,1) , (1,0,2,0) } base de S, { (0,1,0,3) (1,1,-1,6) } base de T.

E-6) Hallar en $\Re^3$ el complemento ortogonal de los siguientes subespacios:

(•) **a)** S generado por (1,0,2)

(•) **b)** T generado por (1,0,2), (1,1,1)

E-7) Dado el vector (0,3,2), hallar su proyección ortogonal sobre los siguientes s

(•) **a)** sobre la recta generada por el vector (1,2,1)

(•) **b)** sobre el plano P generado por (1,2,1) y (0,-1,2)

(•) **E-8)** Hallar la mejor aproximación al vector (0,3,2) en el plano generado por (1,2,1

(••) **E-9)** Hallar una base ortonormal del plano generado por u=(0,1,0) y v=(3,2,1) en $\mathfrak{R}$

E-10) Dado el subespacio S generado por (1,0,-1,1) y (0,2,0,3) en $\mathfrak{R}^4$,

(••) **a)** Hallar su matriz de proyección.

(•) **b)** Proyectar sobre el vector v = (0,0,0,5) sobre S.

E-11) Dado el vector v=(3,4) de $\mathfrak{R}^2$,

(•) **a)** Hallar su simétrico v ' respecto a la recta generada por (2,1).

(•) **b)** Hallar el área del triángulo definido por v y su simétrico.

(••) **E-12)** En el espacio de funciones continuas ***C***[0,1] con el producto escalar $f \cdot g =$

normalizar el vector $f(x) = x^2$.

(••) **E-13)** En el espacio de funciones continuas ***C***[0,2] con el producto escalar $f \cdot g =$

hallar la mejor aproximación de la función **f(x)=2x+1** en el subespacio generado por la función **g(x)=x.**

E-14) Dado el sistema $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

(••) **a)** Comprobar que es incompatible y resolverlo por mínimos cuadrados.

(•) **b)** Hallar el error cuadrático.